Ортогональные разложения

Любой сигнал может быть разложен в ряд Фурье

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(\omega t n) + b_n \sin(\omega t n) \quad (1)$$

Совокупность функций, которые формируют этот ряд, называется базисом

$$1, \cos(\omega t), \sin(\omega t), \cos(\omega t 2), \sin(\omega t 2) ..... \cos(\omega t n), \sin(\omega t n), \ n \in N$$

В самом общем случае функции базиса обозначают

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ... \varphi_n, \ n \in N$$

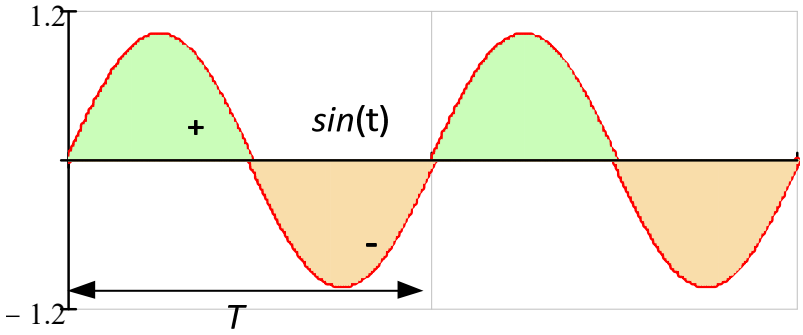
Коэффициенты разложения определяются в виде:

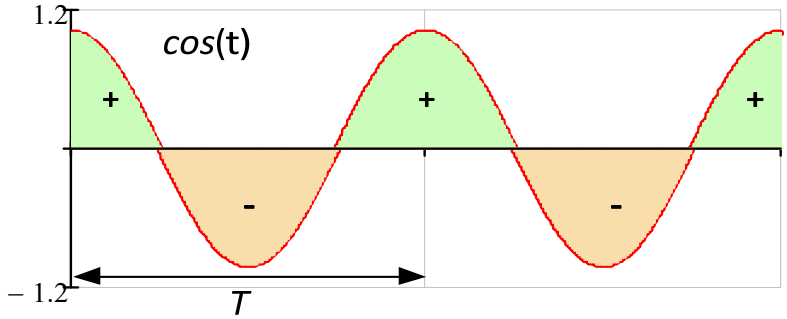
$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt \ (*), \quad a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(\omega t n)dt, \ b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(\omega t n)dt \ \ (**).$$

Для того что бы получить коэффициенты разложения, необходимо обе стороны разложения (1) умножить на 1, $\cos(\omega t n)$ или $\sin(\omega t n)$, затем проинтегрировать на интервале 0 to T. Смысл интегрирования представлен ниже на рисунке.

Для коэффициента a_0 (*)

$$\int_0^T f(t)dt = \frac{a_0}{2} \cdot \int_0^T 1dt + \cancel{\int_0^T \left(\sum_{n=1}^{N} a_n \cos(\omega t n) + b_n \sin(\omega t n) \right) dt}$$





$$a_0\int_0^T dt = a_0 T = \int_0^T f(t)dt \;\rightarrow\; a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$

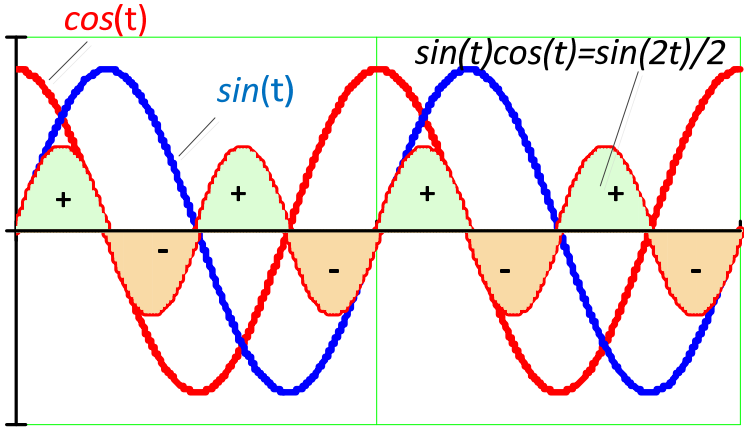
$$0 = \int_0^T \sin(\omega tn)dt,\;\; 0 = \int_0^T \cos(\omega tn)dt$$

Для коэффициентов a_1, b_1 (*)

$$\int_0^T f(t)\cos(\omega t)dt = \cancel{\frac{a_0}{2}\cdot\int_0^T \cos(\omega tn)dt} + \int_0^T\left(\sum_{n=1}^N a_n\cos(\omega tn) + b_n\sin(\omega tn)\right)\cos(\omega t)dt$$

$$\int_0^T\left(a_1\cos(\omega t) + b_2\sin(\omega t) + \sum_{n=2}^N a_n\cos(\omega tn) + b_n\sin(\omega tn)\right)\cos(\omega t)dt =$$

$$\int_0^T a_1\cos^2(\omega t)dt + \cancel{\int_0^T\left(b_2\sin(\omega t) + \sum_{n=2}^N a_n\cos(\omega tn) + b_n\sin(\omega tn)\right)\cos(\omega t)dt}$$



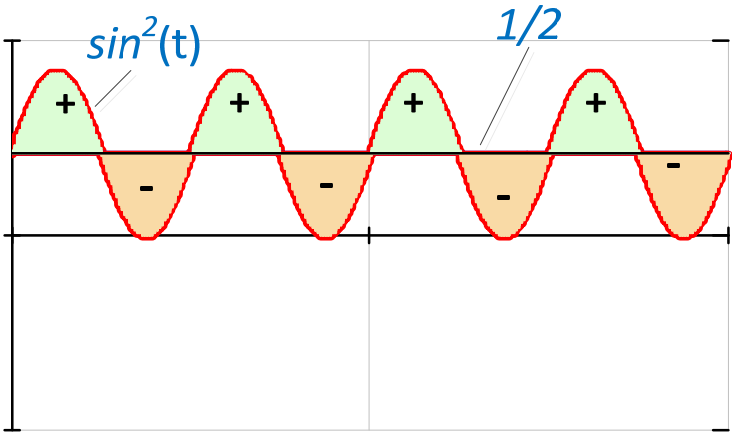
$$\int_0^T \cos(\omega t)\sin(\omega t)dt = \int_0^T \frac{\sin(2\omega t)}{2}dt = 0$$

Это справедливо для кратных частот:

$$\int_0^T \cos(\omega tn)\sin(\omega tn)dt = \int_0^T \frac{\sin(2\omega tn)}{2}dt = 0,$$

Оно выполняется и для целых $n \neq m$

$$\int_0^T \cos(\omega tn)\sin(\omega tm)dt = 0$$



$$\int_0^T \cos^2(\omega t)dt = \int_0^T \frac{1+\cos(2\omega t)}{2}dt = \int_0^T \frac{1}{2}dt + \cancel{\int_0^T \frac{\cos(2\omega t)}{2}dt} = \frac{T}{2}$$

Это соотношение выполняется для выражений вида:

$$\int_0^T \cos^2(\omega tn)dt,\ \int_0^T \sin^2(\omega tn)dt.... = \frac{T}{2}$$

Таким образом, можно заметить, что:

$$\boxed{\begin{aligned} &\int_0^T \cos(\omega tn)\cos(\omega tm)dt = 0\ ,\int_0^T \sin(\omega tn)\sin(\omega tm)dt = 0 \quad при \quad m \neq n \\ &\int_0^T \sin(\omega tn)\cos(\omega tm)dt = 0 \end{aligned}}$$

$$\int_0^T \cos(\omega tn)\cos(\omega tn)dt = \int_0^T \cos^2(\omega tn)dt = \frac{T}{2} \quad при \quad m = n$$

$$\int_0^T \sin(\omega tn)\sin(\omega tn)dt = \int_0^T \sin^2(\omega tn)dt = \frac{T}{2} \quad при \quad m = n$$

Если использовать обозначения для базисных функций в виде $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ... \varphi_n,\ n \in N$, то можно записать так

$$\int_0^T \varphi_m \varphi_n dt = \left\{ \begin{matrix} 0, & если\ m \neq n \\ \frac{T}{2}, & если\ m = n \end{matrix} \right\},\ n \in N$$

Иногда пишут проще

$$\int_0^T \varphi_m \varphi_n dt = \langle \varphi_n, \varphi_m \rangle$$

Обычно используют символ Кронекера, имеющего свойство

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 0, & если\ m \neq n \\ 1, & если\ m = n \end{cases}$$

Тогда свойство ортогональных функций можно записать:

$$(\varphi_n, \varphi_m) = \frac{T}{2}\delta_{n,m}$$

Можно функции нормировать, т.е. сделать так, что бы их скалярное произведение равнялось 0 или 1.

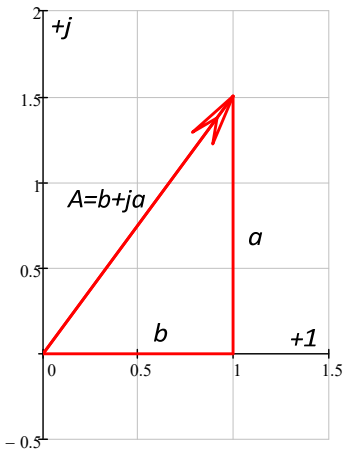
Для этого нужно каждую функцию из базиса разделить на $\sqrt{\frac{2}{T}}$.

Скалярное произведение примет вид

$$(\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{n,m}$$

Это напоминает скалярное произведение векторов. Если вектора ортогональны, то их скалярное произведение равно нулю, в противном случае не равно нулю.

Более удобное представление ряда Фурье для инженерных целей, это его представление через функции синуса. Такое представление предпочтительно. Потому-что на практике используются синусоидальные источники питания



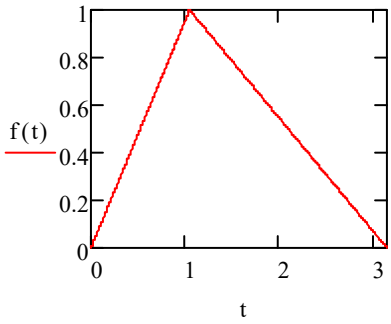
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{N} a_n \cos(\omega t n) + b_n \sin(\omega t n) =$$

$$= \frac{|A_0|}{2} + \sum_{n=0}^{N} |A_n| \sin(\omega t n + \varphi_n) \quad (2)$$

$$A_n = b_n + j a_n, \quad \varphi_n = \arg(A_n), \quad |A_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

Рассмотрим пример разложения на функции

$$f(t) := \begin{cases} t\cdot\frac{3}{T} & \text{if } 0 \le t \le \frac{T}{3} \\ \frac{3}{2}\cdot\left(1-\frac{t}{T}\right) & \text{if } \frac{T}{3} < t \le T \end{cases}$$



Приведем пример в программе ***Mathcad***

$n := 0..10 \quad \omega := 2$

$T := \frac{2\cdot\pi}{\omega} = 3.142 \qquad \varphi_s(t,n) := \sin(\omega\cdot t\cdot n) \quad \varphi_c(t,n) := \cos(\omega\cdot t\cdot n)$

$$\frac{2}{T}\cdot\int_0^T \varphi_c(t,2)\cdot\varphi_c(t,2)\,dt = 1 \qquad (\varphi_n,\varphi_m) = \delta_{m,n} = \begin{cases} 1 & \text{if } n = m \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$N := 7 \qquad n := 0..N$

$$f(t) := \begin{cases} t\cdot\frac{3}{T} & \text{if } 0 \le t \le \frac{T}{3} \\ \frac{3}{2}\cdot\left(1-\frac{t}{T}\right) & \text{if } \frac{T}{3} < t \le T \end{cases} \qquad b_n := \frac{2}{T}\cdot\int_0^T \varphi_s(n,t)\cdot f(t)\,dt$$

$t := 0, 0.001\cdot T .. 2\cdot T \qquad a_n := \frac{2}{T}\cdot\int_0^T \varphi_c(n,t)\cdot f(t)\,dt$

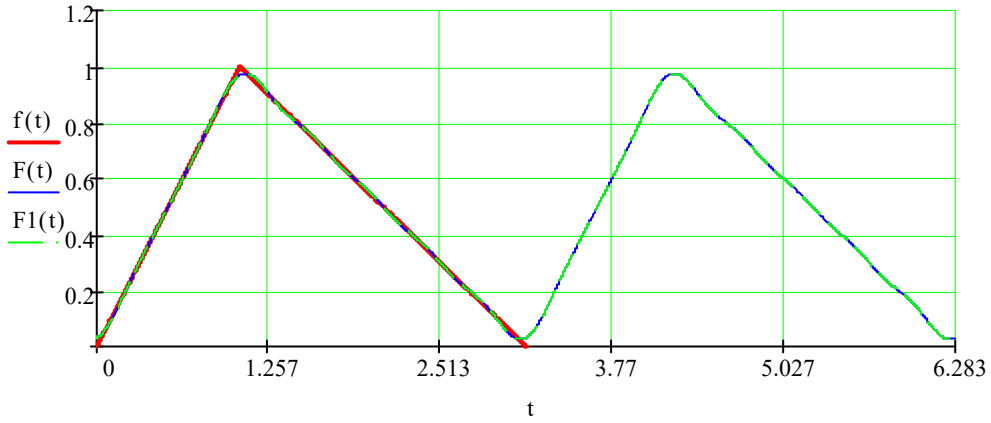
$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.342 \\ -0.085 \\ 0 \\ -0.021 \\ -0.014 \\ -0 \\ -0.007 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.197 \\ -0.049 \\ -0 \\ 0.012 \\ -0.008 \\ 0 \\ 0.004 \end{pmatrix} \qquad F(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}\left(a_n\cdot\varphi_c(t,n) + b_n\cdot\varphi_s(t,n)\right)$$

$$\frac{2}{T}\cdot\left(\int_0^T f(t)^2\,dt\right) = 0.667$$

$A_n := b_n + i\cdot a_n \qquad \theta_n := \text{if}\left(n = 0, 0, \arg\left(A_n\right)\right) \qquad A_0 := a_0$

$$F1(t) := \frac{|A_0|}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(|A_n| \cdot \sin(\omega \cdot t \cdot n + \theta_n)\right)$$

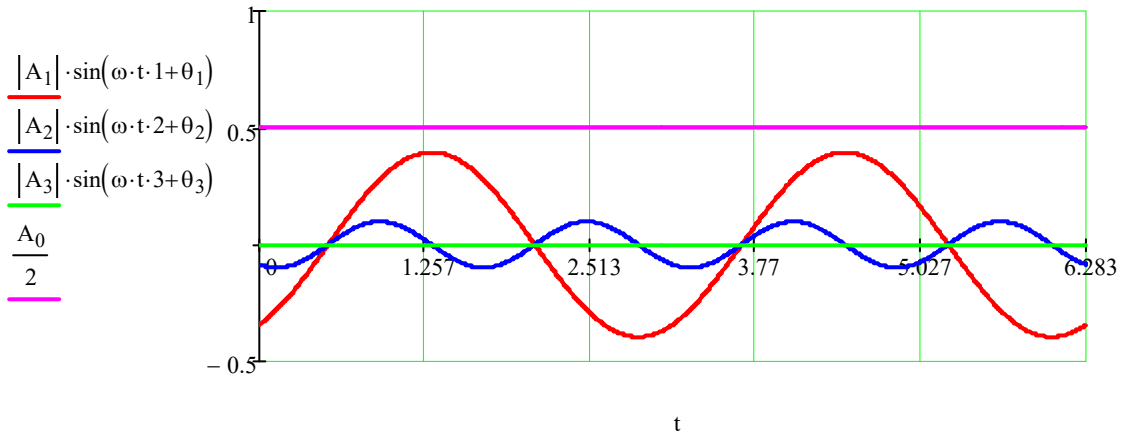
$$\sum_{n=1}^{N} \left[(a_n)^2 + (b_n)^2\right] + \frac{(a_0)^2}{2} = 0.667 \qquad \sum_{n=1}^{N} \left(|A_n|\right)^2 + \frac{\left(|A_0|\right)^2}{2} = 0.667$$

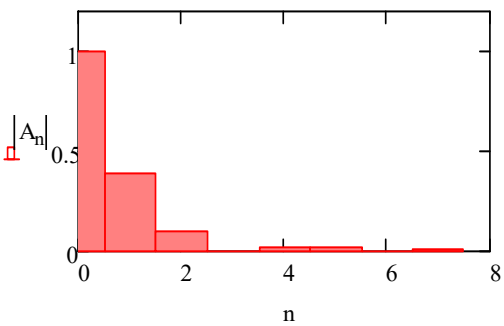


Критерий позволяющий судить о точно представления функции, это мощность сигнала:

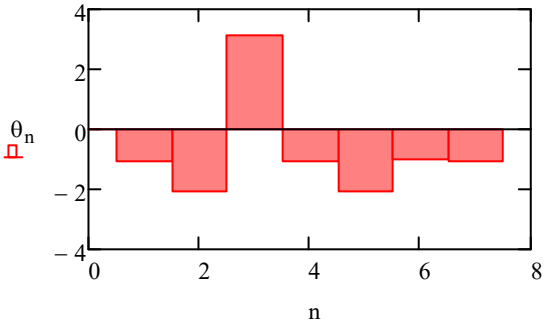
$$\sum_{n=0}^{N}\left(a_n^2 + b_n^2\right) + \frac{a_0^2}{2} = \frac{|A_0|}{2} + \sum_{n=0}^{N}|A_n|^2 = \int_0^T f^2(\mathrm{t})\,\mathrm{dt}$$

Для ясного понимания разложения сигнала, полезно рисовать спектр сигнала. Спектр показывает относительный вклад каждой гармоники в разложения сигнала.



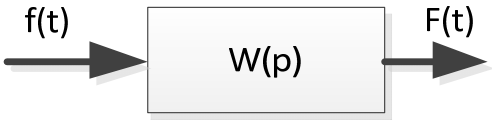


Амплитудный спектр



Фазовый спектр

Фурье представление входного сигнала позволяет найти Фурье представления выходного сигнала, если известна передаточная функция W(p) анализируемого устройства.

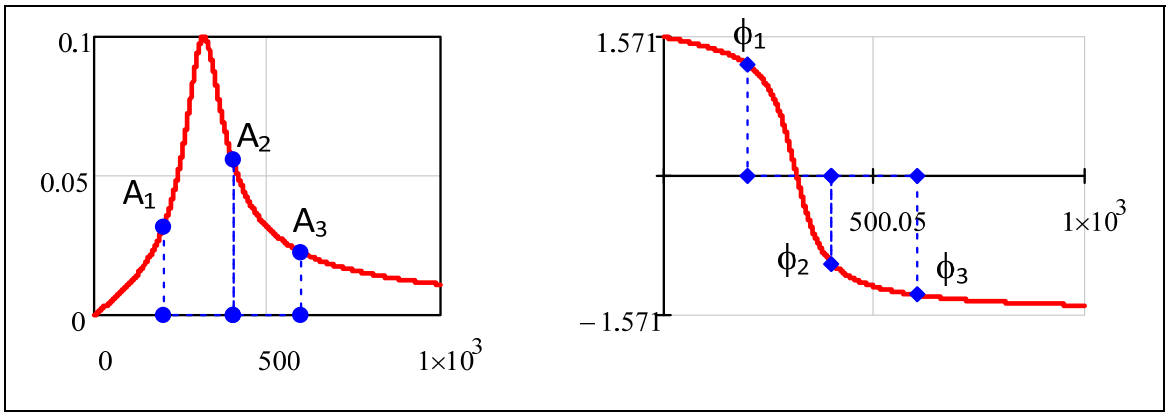


Пример.

Пусть задан сигнал и его спектр (амплитудный, в красных прямоугольниках, фазный, в синих прямоугольниках, круговая частота ω равна 200рад/с):

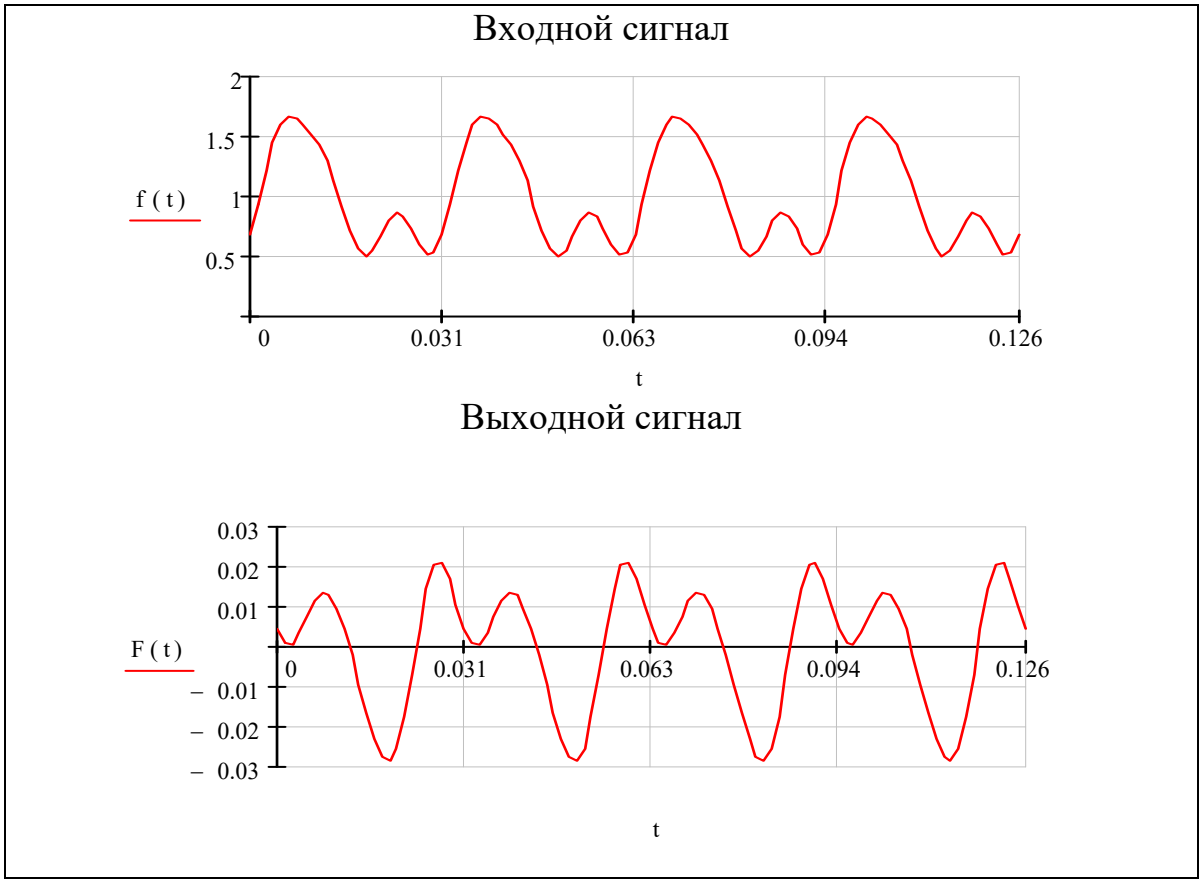
$$f(\mathrm{t}) = \boxed{1} + \boxed{\frac{1}{2}}\sin(\omega \mathrm{t}) + \boxed{\frac{1}{4}}\sin(\omega \mathrm{t}2 - \boxed{\pi/2}) + \boxed{\frac{1}{8}}\sin(\omega \mathrm{t}3 - \boxed{\pi/6}),$$

и задана передаточная функция устройства. Что бы получить частотную характеристику, необходимо в передаточную функцию в место p поставить $j\omega$. $A(\omega)=W(j\omega)$.



При такой частотной характеристике прибора установившейся процесс выходного сигнал будет иметь вид:

$$F(t) = 1 \cdot 0 + A_1 \frac{1}{2} \sin(\omega t + \phi_1) + A_2 \frac{1}{4} \sin(\omega t 2 - \pi / 2 + \phi_2) + A_3 \frac{1}{8} \sin(\omega t 3 - \pi / 6 + \phi_3)$$



Mathcad file

$R := 10 \quad C := 100 \cdot 10^{-6} \quad L := 0.1$

$E := 1 \quad \omega o := 200$

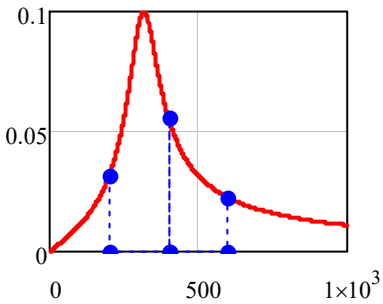
$$A := \begin{pmatrix} \frac{-R}{L} & \frac{-1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} \frac{E}{L} \\ 0 \end{pmatrix} \quad I := \text{identity}(2)$$

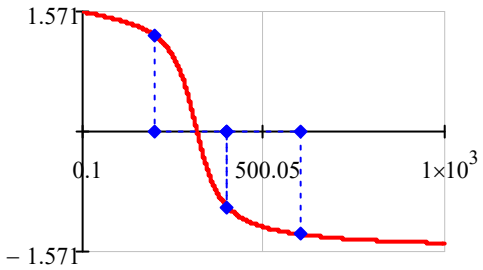
$$w(p) := (I \cdot p - A)^{-1} \cdot B \quad A(\omega) := \left| w(\omega \cdot i)_0 \right| \quad \varphi(\omega) := \arg\left(w(\omega \cdot i)_0\right)$$

$$z := (\omega o + i \cdot A(\omega o) \quad \omega o \quad \omega o \cdot 2 \quad \omega o \cdot 2 + i \cdot A(\omega o \cdot 2) \quad \omega o \cdot 2 \quad \omega o \cdot 3 \quad A(\omega o \cdot 3)\, i + \omega o \cdot 3)^T$$

$$\omega := 0, .1 .. 10^3$$

$$z1 := (\omega o + i \cdot \varphi(\omega o) \quad \omega o \quad \omega o \cdot 2 \quad \omega o \cdot 2 + i \cdot \varphi(\omega o \cdot 2) \quad \omega o \cdot 2 \quad \omega o \cdot 3 \quad \varphi(\omega o \cdot 3)\, i + \omega o \cdot 3)^T$$





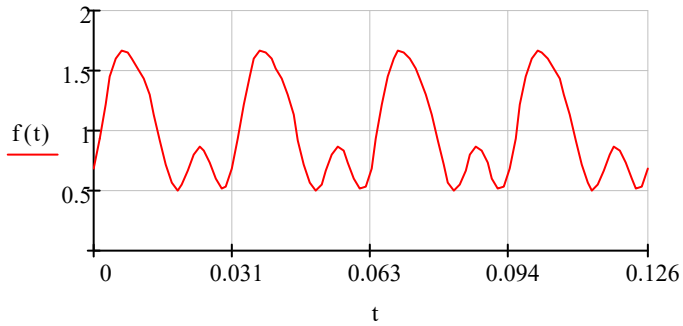
$\omega := 200$

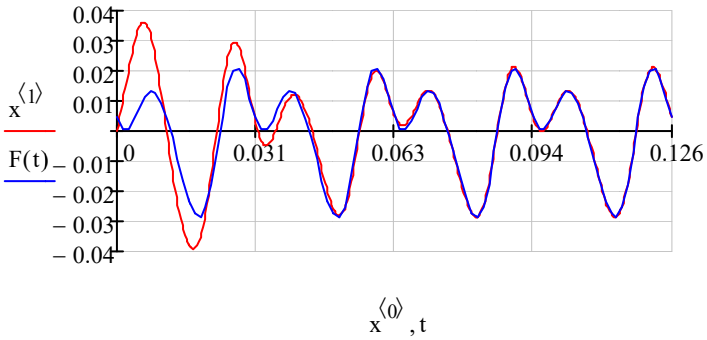
$$f(t) := 1 + \frac{1}{2} \cdot \sin(\omega \cdot t) + \frac{1}{4} \cdot \sin\left(\omega \cdot t \cdot 2 - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{8} \cdot \sin\left(\omega \cdot t \cdot 3 - \frac{\pi}{6}\right)$$

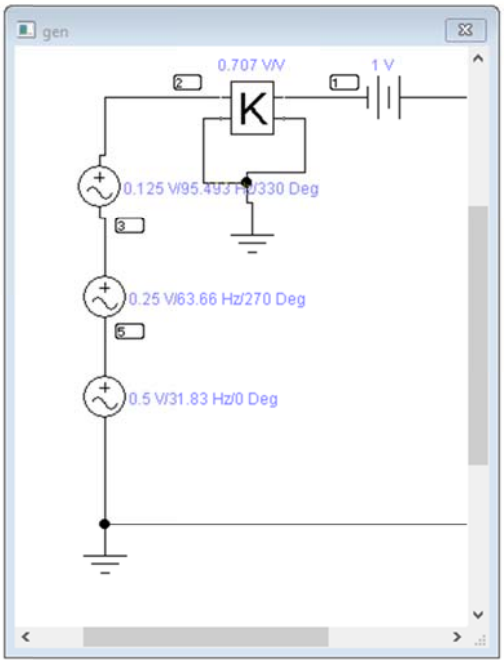
$$F(t) := \frac{1}{2} \cdot A(\omega o) \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi(\omega o)) + \frac{1}{4} \cdot A(\omega o \cdot 2) \cdot \sin\left(\omega \cdot t \cdot 2 - \frac{\pi}{2} + \varphi(\omega o \cdot 2)\right) + \frac{1}{8} \cdot A(\omega o \cdot 3) \cdot \sin\left(\omega \cdot t \cdot 3 - \frac{\pi}{6} + \varphi(\omega o \cdot 3)\right)$$

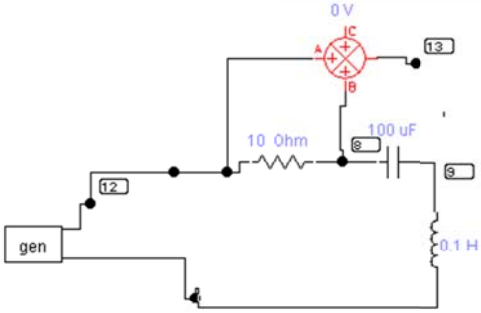
$$A := \begin{pmatrix} \frac{-R}{L} & \frac{-1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{pmatrix} \quad B(t) := \begin{pmatrix} \frac{f(t)}{L} \\ 0 \end{pmatrix} \quad D(t, x) := A \cdot x + B(t) \quad N := 10^2 \cdot 4 \quad T := \frac{2 \cdot \pi}{\omega} \cdot 4 = 0.126$$

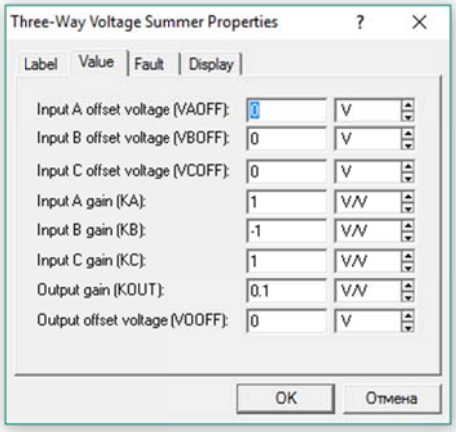
$$x := \text{rkfixed}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 0, T, N, D\right] \quad t := 0, .01 \cdot T .. T$$

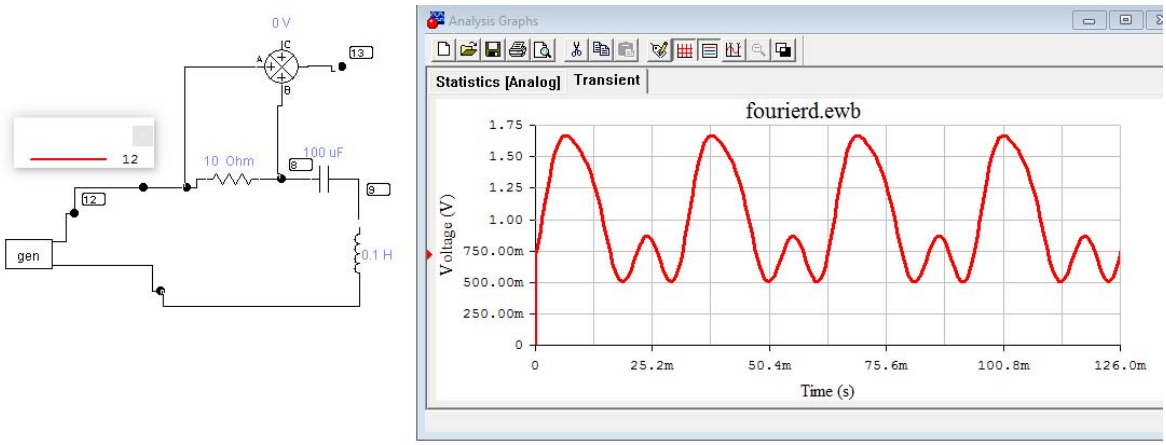


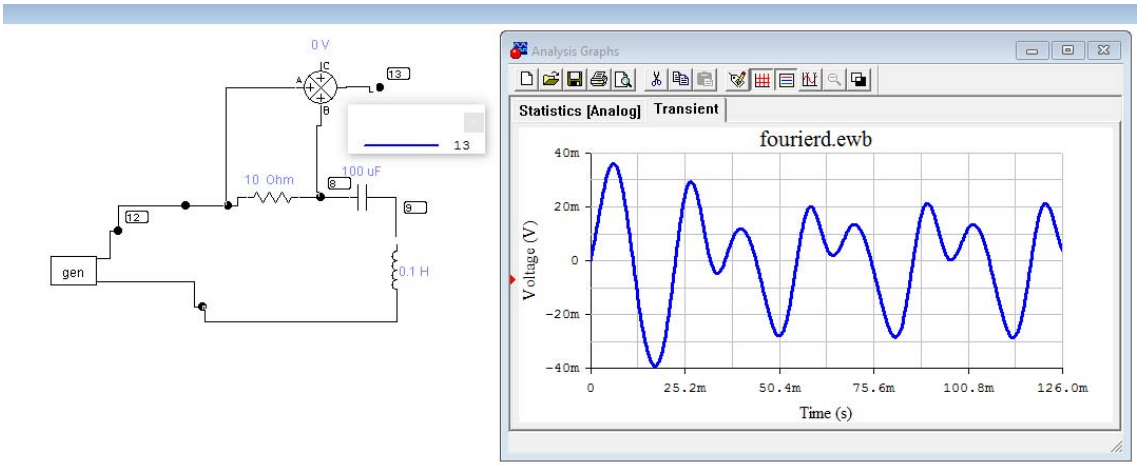

0.04
0.03
0.02
0.01
x⟨1⟩
F(t)
– 0.01
– 0.02
– 0.03
– 0.04
0
0.031
0.063
0.094
0.126
x⟨0⟩, t


gen
0.707 V/V
1 V
K
0.125 V/95.493 Hz/330 Deg
0.25 V/63.66 Hz/270 Deg
0.5 V/31.83 Hz/0 Deg


0 V
C
A
B
13
10 Ohm
100 uF
12
gen
0.1 H


Three-Way Voltage Summer Properties
Label
Value
Fault
Display
Input A offset voltage (VAOFF): 0 V
Input B offset voltage (VBOFF): 0 V
Input C offset voltage (VCOFF): 0 V
Input A gain (KA): 1 V/V
Input B gain (KB): -1 V/V
Input C gain (KC): 1 V/V
Output gain (KOUT): 0.1 V/V
Output offset voltage (VOOFF): 0 V
OK
Отмена


0 V
13
12
10 Ohm
100 uF
8
9
gen
0.1 H
Analysis Graphs
Statistics [Analog]
Transient
fourierd.ewb
Voltage (V)
Time (s)
1.75
1.50
1.25
1.00
750.00m
500.00m
250.00m
0
25.2m
50.4m
75.6m
100.8m
126.0m


0 V
13
12
10 Ohm
100 uF
8
9
gen
0.1 H
Analysis Graphs
Statistics [Analog]
Transient
fourierd.ewb
Voltage (V)
Time (s)
40m
20m
0
-20m
-40m
25.2m
50.4m
75.6m
100.8m
126.0m