Лекция 5

Метод корневого годографа.

Метод корневого годографа используется для исследования систем с обратной связью. Например, если передаточная функция не замкнутой системы представлена в виде

$$\mathrm{W}(p) = \lambda \frac{Q(p)}{P(p)}$$

Тогда передаточная функция замкнутой системы будет определяться выражением

$$\frac{W(p)}{1+\mathrm{W}(p)} = \frac{\lambda Q(p)}{P(p)+\lambda \mathrm{Q}(p)}$$

Совокупность траекторий корней характеристического полинома при изменении одного из параметров системы автоматического управления от 0 до ∞ называется корневым годографом.

Для нашего случая характеристический полином имеет вид:

$$D(p) = P(p) + \lambda Q(p) = 0$$

Где $P(p)$ знаменатель и $Q(p)$ числитель передаточной функции $\mathrm{W}(p)$.

$P(p)$ и $Q(p)$ это полиномы степени n и m соответственно, λ исследуемый параметр.

Представим полином $D(p)$ в виде суммы двух полиномов $P(p)$ и $Q(p)$, каждый из которых представляется в факторизованном виде:

$$D(p) = \underbrace{\prod_{i=1}^{n}(p - z_i)}_{P(p)} + \lambda \underbrace{\prod_{i=1}^{m}(p - q_i)}_{Q(p)} = 0 \qquad (1)$$

При варьировании настроечного параметра λ от нуля до бесконечности. При этом могут быть два предельных случая. Нужно помнить, что $m < n$.

При $\lambda = 0$ полином $D(p)$ имеет только n корней z_i $(i = 0..n)$. n - это число корней знаменателя. При $\lambda = \infty$ выражение (1) имеет только m

корней $q_i\ (i=0..m)$. m - это число корней числителя. При изменении параметра λ от нулю до бесконечности расположение корней в годографе будет меняться. Корневой годограф будет иметь n ветвей, которые начинаются с n корней $z_i\ (i=0..n)$ и заканчиваются в $q_i\ (i=0..m)$ корнях q_i. Остальные *n-m* заканчиваются в бесконечности.

Характеристический полином замкнутой системы определяется соотношением

$$1+\mathrm{W}(p)=0 \ \rightarrow\ \mathrm{W}(p)=-1 \quad \lambda\frac{Q(p)}{P(p)}=-1$$

$$\frac{\lambda\prod_{i=1}^{m}\left(p-q_i\right)}{\prod_{i=1}^{n}\left(p-z_i\right)}=-1$$

Для аргументов это выражение можно записать в виде:

$$\sum_{i}^{m}\tilde{\theta}_i-\sum_{i}^{n}\theta_i=\pm\left(2k+1\right)\cdot180^o=\pm\left(2k+1\right)\cdot\pi \qquad k=0,1,2...... \tag{2}$$

Здесь $\tilde{\theta}_i$ - углы (аргументы) корней числителя, θ_i- углы (аргументы) корней знаменателя. Это - основное уравнение для построения корневого годографа.

Из основного уравнения получается, что сумма углов корней числителя за вычетом суммы углов корней знаменателя должна равняться кратному значению числа π, причем число кратности должно быть нечетным:

$$\left(2k+1\right)\cdot180^o\doteq\left(2k+1\right)\cdot\pi \ \text{ или } \ -\left(2k+1\right)\cdot180^o\doteq-\left(2k+1\right)\cdot\pi \ \text{ радиан.}$$

Асимптоты для ветвей уходящих в бесконечность выходят из одной точки - центра асимптот. Без доказательства приведем формулу для определения центра асимптот

$$x_0=\frac{\sum_{i=1}^{n}z_i-\sum_{i=1}^{m}q_i}{n-m} \tag{3}$$

Углы между лучами образующейся звезды определяются по формуле которая вытекает из формулы (2), при λ стремящейся к бесконечности, при этом все комплексные вектора имеют один и тоже угол ф:

$$\phi_k = (2k+1)\pi / (n-m),\ k = 0, 1, 2 \,..\, n-m-1$$

А ближайший угол к положительной действительной оси равен ϕ_0.

Точки отделения ветвей годографа от действительной оси найдутся как точки экстремума функции

$$\frac{P(p)}{Q(p)} = f(p) = -\lambda \qquad (4)$$

Критические значение искомого параметра λ, при котором система оказывается на границе устойчивости, определяется в точках пересечения ветвей годографа с мнимой осью. На границе устойчивости корни становятся чисто мнимыми и поэтому равны $p = j\omega$. Значение критического параметра можно получить, решая уравнение:

$$D(j\omega) = P(j\omega) + \lambda Q(j\omega) = X(\omega,\lambda) + jY(\omega,\lambda) = 0 \qquad (5)$$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} X(\omega,\lambda) = 0 \\ Y(\omega,\lambda) = 0 \end{cases}, \qquad (6)$$

получаем $\omega_{кр}$, $\lambda_{кр}$.

Пример: Задана передаточная функция разомкнутой системы: $W(p,k) = \dfrac{k}{p(p+2)(p+3)(p+4)}$. Определить при каких значениях настроечного параметра k замкнутая система будет устойчивой.

Для решения задачи будем использовать **MathCAD**

Построение корневого годографа

$W(p,k) := \dfrac{k}{p\cdot(p+2)\cdot(p+3)\cdot(p+4)}$ $\qquad W_{\tilde{n}}(p,k) := \dfrac{W(p,k)}{1 + W(p,k)}$

$\dfrac{W(p,k)}{1 + W(p,k)}$ simplify $\rightarrow \dfrac{k}{p^4 + 9\cdot p^3 + 26\cdot p^2 + 24\cdot p + k}$

Характеристический полином замкнутой системы

$D(p,k) := p^4 + 9 \cdot p^3 + 26 \cdot p^2 + 24 \cdot p + k$

$P(p) := p^4 + 9 \cdot p^3 + 26 \cdot p^2 + 24 \cdot p \qquad Q(p,k) := k$

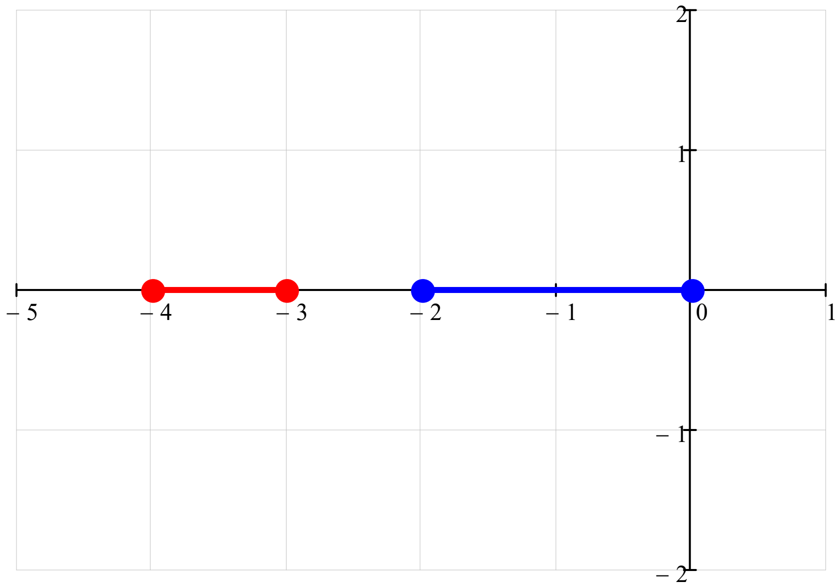
Вычисление корней при фиксированном значении искомого параметра k системы

$L(k) := \text{polyroots}\left[(k \ \ 24 \ \ 26 \ \ 9 \ \ 1)^T \right]$

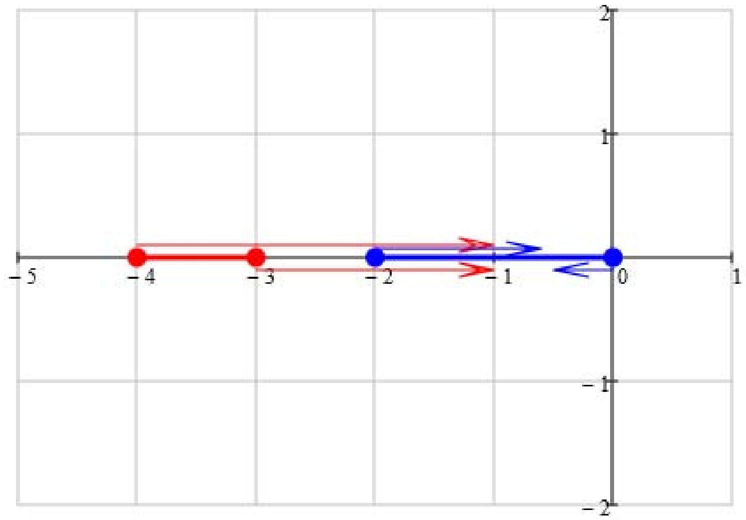
Точки начала ветвей коневого годографа это корни знаменателя передаточной функции разомкнутой системы.

$$p := P(p) \ \Big| \begin{matrix} \text{solve}, p \\ \text{float}, 5 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -2.0 \\ -3.0 \\ -4.0 \end{pmatrix}$$

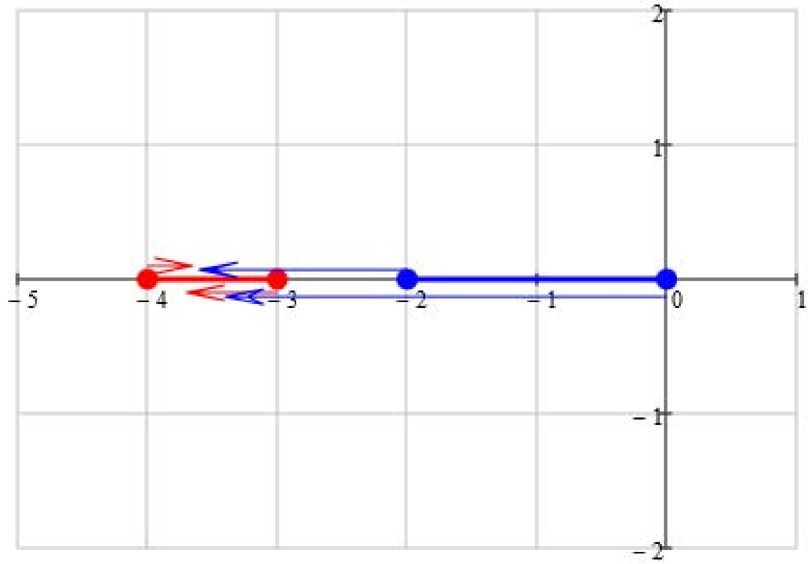
Начальное положение корней не замкнутой системы. Или это расположение корней характеристического полинома замкнутой системы при k=0.



Области выделенные красной и синей линиями, удовлетворяют основному уравнению (2), $\sum_i^m \tilde{\theta}_i - \sum_i^n \theta_i = \pm(2k+1) \cdot \pi \quad k = 0,1,2.......$ Это значит, что если соединить комплексными векторами корни с областью выделенной красной и синей линиями, то будет выполняться основное уравнение. Например, для первой области выделенной синей линией, сумма углов равна $-(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) = -(180 + 0 + 0 + 0) = -180^o$



Для второй области выделенной красной линией, сумма углов равна $-(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4)=-(180+0+180+180)=-3\cdot 180^o$



Следовательно, в первой и во второй областях корни могут двигаться на встречу друг другу.

Вычисления траекторий корней в годографе с помощь ***MathCAD***

$N := 500 \quad i := 0..N \quad x_i := \frac{100}{N}\cdot i + 0.1 \quad Lc_i := L(x_i)$

Вычисления центра асимптот используя формулу (3) $x_0 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} z_i - \sum_{i=1}^{m} q_i}{n-m}$

$$x_0 := \frac{\sum_{k=0}^{3} (p_k)}{4} \qquad x_0 = -2.25$$

Точки ответвления ветвей годографа   от действительной оси

$$\frac{d}{dp}D(p,k) \;\Big|\; \begin{matrix} \text{solve}, p \\ \text{float}, 5 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -0.67365 \\ -3.6073 \\ -2.4691 \end{pmatrix},$$

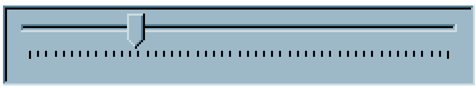
выбираются те корни, которые попадают в области определяемые уравнением (2).

Вспомогательный вектор построения асимптот на графике

$$Z := \left(x_0 \quad x_0 + 10 \cdot e^{\frac{-\pi}{4} \cdot j} \quad 10 \cdot e^{\frac{\pi}{4} \cdot j} + x_0 \quad x_0 \quad 10 \cdot e^{\frac{\pi \cdot 3}{4} \cdot j} + x_0 \quad 10 \cdot e^{\frac{\pi \cdot 5}{4} \cdot j} + x_0 \quad x_0 \right)^T$$

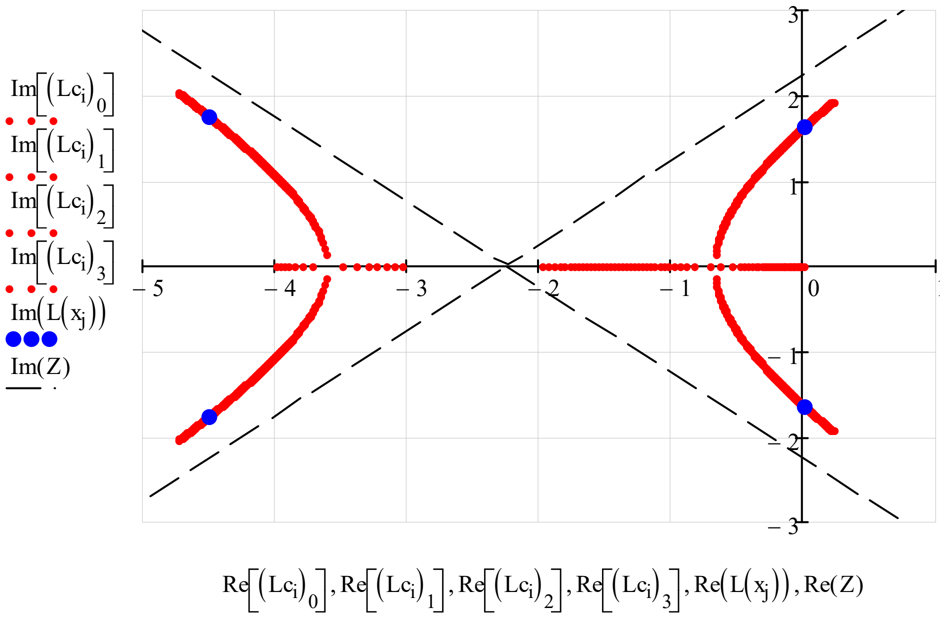
Приближенное критическое значение искомого параметра $k{=}x_j$

$j :=$



$$L(x_j) = \begin{pmatrix} -4.144 + 1.284i \\ -4.144 - 1.284i \\ -0.356 + 1.074i \\ -0.356 - 1.074i \end{pmatrix}$$

$j = 120 \qquad x_j = 24.1$



Находим критические параметры

$D(j \cdot \omega, k)$ rectangular $\rightarrow \omega^4 - 26 \cdot \omega^2 + k + (24 \cdot \omega - 9 \cdot \omega^3) \cdot i$

$X(\omega, k) := \omega^4 - 26 \cdot \omega^2 + k \quad Y(\omega, k) := 24 \cdot \omega - 9 \cdot \omega^3$

$$\begin{pmatrix} X(\omega,k) \\ Y(\omega,k) \end{pmatrix} \left| \begin{matrix} \text{solve}, \begin{pmatrix} \omega \\ k \end{pmatrix} \\ \text{float}, 5 \end{matrix} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1.633 & 62.222 \\ -1.633 & 62.222 \end{pmatrix}$$

То есть, значения частоты равны 1,633 и -1,633, а значения коэффициента при этом равно k=62,222

Метод Рауса-Гурвица

Что бы дальше продвинутся, рассмотрим метод Рауса-Гурвица позволяющий судить об устойчивости системы без решения уравнения.

Необходимым условием устойчивости является положительность всех коэффициентов характеристического уравнения.

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots . a_{n-1} p + a_n = 0, \ a_i > 0, \ i = 0 \ldots n$$

Раус предложил заполнять следующую таблицу

Значение r	Ном строки	Номер столбца			
		1	2	3	4
-	1	a_0	a_2	a_4	…..
-	2	a_1	a_3	a_5	…..
$r_0 = a_0 / a_1$	3	$c_{13} = a_2 - r_0 a_3$	$c_{23} = a_4 - r_0 a_5$	$c_{33} = a_6 - r_0 a_7$	….
$r_1 = a_1 / c_{13}$	4	$c_{14} = a_3 - r_1 c_{23}$	$c_{24} = a_5 - r_1 c_{33}$	$c_{34} = a_7 - r_1 c_{43}$	….
$r_2 = c_{13} / c_{14}$	5	$c_{15} = c_{23} - r_2 c_{24}$	$c_{25} = c_{33} - r_2 c_{34}$	$c_{35} = c_{43} - r_2 c_{44}$	….
$r_3 = c_{14} / c_{15}$	6	$c_{16} = c_{24} - r_3 c_{25}$	$c_{26} = c_{34} - r_3 c_{35}$	$c_{36} = c_{43} - r_3 c_{45}$	….
….	….	….	….	….	….

Начиная с 5-той строки $c_{k5} = c_{k+1,3} - r_2 c_{k+1,4} = \begin{vmatrix} c_{k+1,3} & r_2 \\ c_{k+1,4} & 1 \end{vmatrix}$, $k = 1, 2, 3, \ldots .$ номер столбца.

Процесс заполнения таблицы продолжается до тех пор, пока при заданном порядке характеристического уравнения не получится строка, содержащая один элемент.

Раус доказал, что для выполнения условия устойчивости и, следовательно, для расположения корней характеристического уравнения в левой полуплоскости необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты первого столбца таблицы были положительными, т.е. нужно, чтобы выполнялось неравенство

$$a_0 > 0, a_1 > 0, c_{13} > 0, c_{15} > 0, c_{16} > 0, \quad .....$$

Рассмотрим уравнение первого порядка

$$a_0 p + a_1 = 0$$

$$a_0 > 0, a_1 > 0 \text{ условия устойчивости}$$

Уравнение второго порядка

$$a_0 p^2 + a_1 p + a_2 = 0$$

Значение r	Ном строки	Номер столбца	
		1	2
-	1	a_0	a_2
-	2	a_1	0
$r_0 = a_0 / a_1$	3	$c_{13} = a_2 - r_0 0$	-

$$a_0 > 0, a_1 > 0, c_{13} > 0 \quad \text{условия устойчивости}$$

Уравнение третьего порядка

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0$$

Значение r	Ном строки	Номер столбца	
		1	2
-	1	a_0	a_2
-	2	a_1	a_3
$r_0 = a_0 / a_1$	3	$c_{13} = a_2 - r_0 a_3$	

$$a_0 > 0, a_1 > 0, c_{13} = a_2 - \frac{a_0}{a_1} a_3 \quad \text{условия устойчивости}$$

Пример. Имеется характеристический полином,

$$a_0 p^6 + a_1 p^5 + a_2 p^4 + a_3 p^3 + a_4 p^2 + a_5 p + a_6 = 0$$

$$a_0 = 0{,}1 \quad a_1 = 5 \quad a_2 = 10 \quad a_3 = 30 \quad a_4 = 15 \quad a_5 = 6 \quad a_6 = 1$$

Найти коэффициенты Рауса.

Значение r	Ном Стр.	Номер столбца			
		1	2	3	4
-	1	$a_0 = 0,1$	$a_2 = 10$	$a_4 = 15$	$a_6 = 1$
-	2	$a_1 = 5$	$a_3 = 30$	$a_5 = 6$	0
$r_0 = 0,02$	3	$c_{13} = 10 - 0.02 \cdot 30$ $= 9,4$	$c_{23} = 15 - 0,02 \cdot 6$ $= 14,88$	$c_{33} = a_6 = 1$	0
$r_1 = 0.532$	4	$c_{14} = 30 - 0,532 \cdot 14,88$ $= 22,09$	$c_{24} = 6 - 0,532 \cdot 1$ $= 5,468$	$c_{34} = 0$	0
$r_2 = 0,462$	5	$c_{15} = 14,88 - 0,462 \cdot 5,468$ $= 12.553$	$c_{25} = 1 - 0 = 1$	0	0
$r_3 = 1,759$	6	$c_{16} = 5,468 - 1,758 \cdot 1$ $= 3,7$	$c_{26} = 0 - 0 = 0$	0	0
$r_4 = c_{15} / c_{16}$	7	$c_{17} = 1 - 0 = 1$	0	0	0

$$a := (0.1\ \ 5\ \ 10\ \ 30\ \ 15\ \ 6\ \ 1)^T$$

$$r_0 := \frac{a_0}{a_1} = 0.02$$

$$c_{13} := a_2 - r_0 \cdot a_3 = 9.4 \qquad c_{23} := a_4 - r_0 \cdot a_5 = 14.88 \qquad c_{33} := a_6 = 1$$

$$r_1 := \frac{a_1}{c_{13}} = 0.532$$

$$c_{14} := a_3 - r_1 \cdot c_{23} = 22.085 \qquad c_{24} := a_5 - r_1 \cdot c_{33} = 5.468 \qquad c_{34} := 0$$

$$r_2 := \frac{c_{13}}{c_{14}} = 0.426$$

$$c_{15} := c_{23} - r_2 \cdot c_{24} = 12.553 \qquad c_{25} := c_{33} - r_2 \cdot c_{34} = 1$$

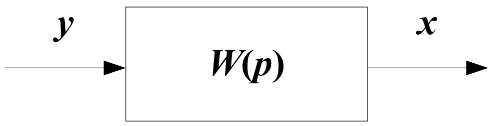
$$r_3 := \frac{c_{14}}{c_{15}} = 1.759$$

$$c_{16} := c_{24} - r_3 \cdot c_{25} = 3.709$$

$$r_4 := \frac{c_{15}}{c_{16}} = 3.385$$

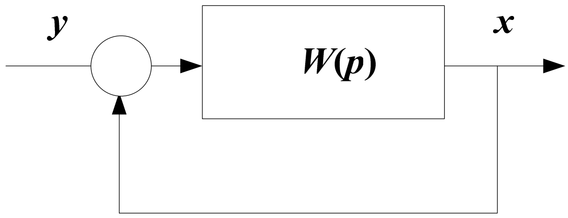
Все коэффициенты положительны. Следовательно, система устойчива.

Метод корневого годографа (продолжение)



$$\mathrm{W}(p) = \lambda \frac{Q(p)}{P(p)}$$

Система замкнута



$$\frac{W(p)}{1+\mathrm{W}(p)} = \frac{\lambda Q(p)}{P(p)+\lambda \mathrm{Q}(p)}$$

Система разомкнута

Рассмотрим, как строится годограф при наличии нулей и комплексных полюсов и при изменении настроечного параметра $\lambda = [0,\ \infty)$

Для построения годографа мы имеем несколько основных формул

1. $\sum\limits_{i}^{m} \tilde{\theta}_i - \sum\limits_{i}^{n} \theta_i = \pm(2k+1)\cdot 180^o = \pm(2k+1)\cdot\pi \qquad k = 0,1,2......$ – соотношения для углов (аргументов) полюсов и нулей передаточной функции на годографе
2. $x_0 = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} z_i - \sum\limits_{i=1}^{m} q_i}{n-m}$ точка центра асимптот
3. Углы асимптот $\phi_k = (2k+1)\pi / (n-m),\ k = 0, 1, 2 \,..\, n-m-1$, здесь n, m – число полюсов и нулей передаточной функции соответственно.
4. Определение критических значений регулируемого параметра $\lambda = \lambda_{кр}$ (используя таблицу Рауса) и частот $\omega = \mp\omega_{кр}$, когда система находится на границе устойчивости

$$D(j\omega) = P(j\omega) + \lambda Q(j\omega) = X(\omega,\lambda) + jY(\omega,\lambda) = 0 \ \rightarrow \ \begin{cases} X(\omega,\lambda) = 0 \\ Y(\omega,\lambda) = 0 \end{cases}$$

Пример 2. Построить годограф для замкнутой системы при изменении настроечного параметра $\lambda = [0,\ \infty)$, если задана передаточная функция разомкнутой системы

$$\mathrm{W}(p) = \frac{\lambda}{p\left(p^2 + 4p + 8\right)}$$

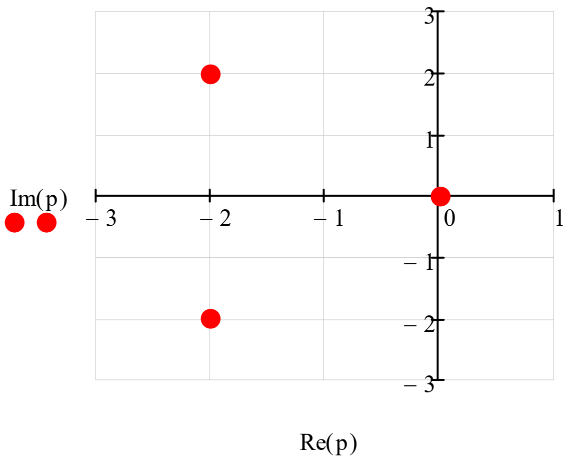
Решение:

$$W_з(p)=\frac{\lambda}{p\left(p^2+4p+8\right)+\lambda}=\frac{\lambda Q(p)}{P(p)+\lambda Q(p)}$$

Находим корни передаточной функции при $\lambda=0$

$$p := p\cdot\left(p^2+4\cdot p+8\right)\ \Big|\begin{matrix}\text{solve}\\ \text{float},4\end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix}0\\ -2.0+2.0i\\ -2.0-2.0i\end{pmatrix}$$

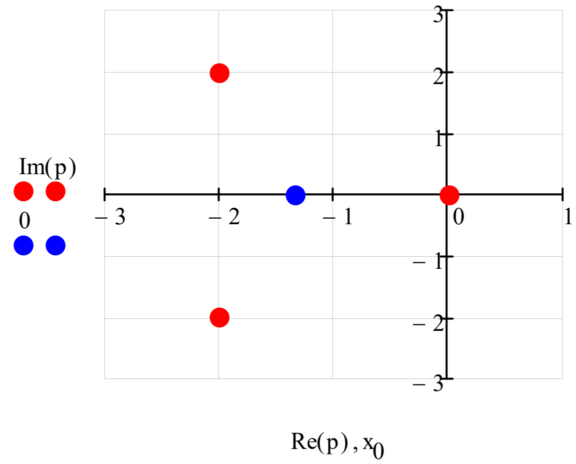
Число полюсов равно 3. Нулей передаточная функция не имеет. Наносим на комплексную плоскость полюса



Находим центр полюсов

$$x_0=\frac{\sum_{i=1}^{n} z_i-\sum_{i=1}^{m} q_i}{n-m}=\frac{\sum_{i=1}^{3} z_i-0}{3-0}=\frac{0+(-2+2j)+(-2-2j)}{3}=-\frac{4}{3}=-1{,}333$$

$$x_0 := \frac{\sum_{k=0}^{\text{length}(p)-1} p_k}{3} = -1.333$$ наносим на карту полюсов центр асимптот

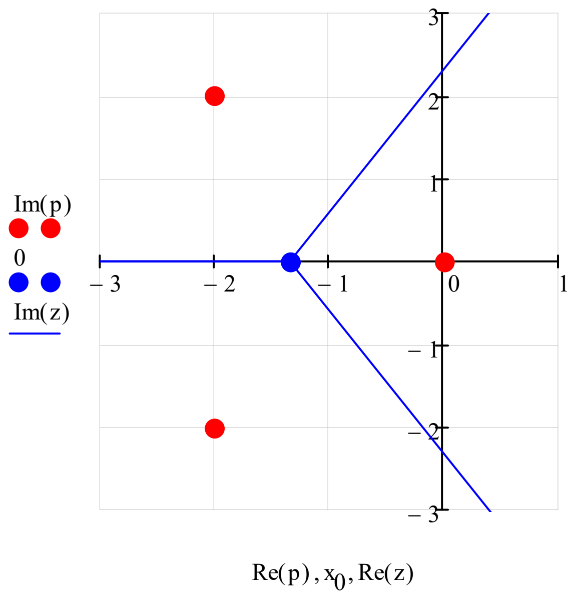


Находим углы наклона асимптот $\phi_k = (2k+1)\pi/(n-m),\ k = 0, 1, 2\,..\,n-m-1$

$$\phi_k = (2k+1)\pi/(3-0) =,\ k = 0, 1, 2$$

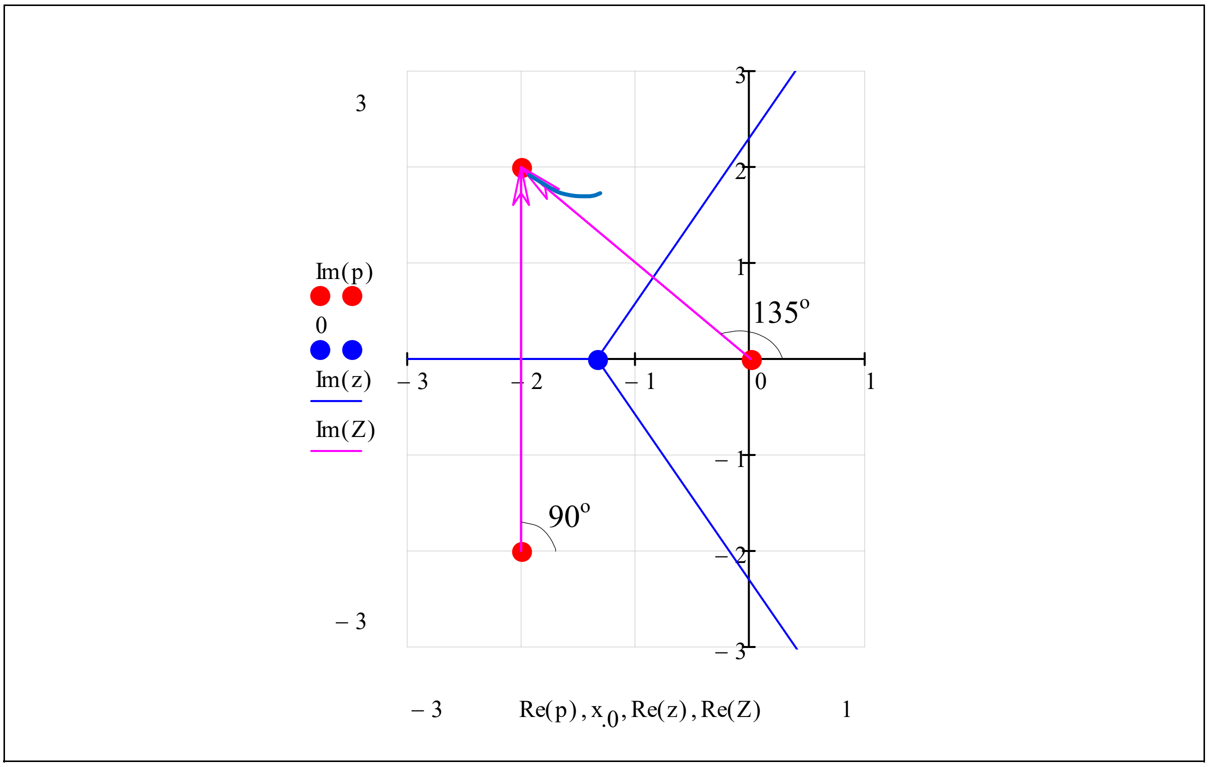
$$k := 0..2 \quad \varphi_k := \frac{\pi\cdot(2k+1)}{3} \quad \varphi = \begin{pmatrix}1.047\\3.142\\5.236\end{pmatrix} \quad \frac{\varphi}{deg} = \begin{pmatrix}60\\180\\300\end{pmatrix}$$

$$z := \begin{pmatrix} x_0 + 10e^{i\cdot\varphi_0} & x_0 & x_0 + 10e^{i\cdot\varphi_1} & x_0 & x_0 + 10e^{i\cdot\varphi_2} \end{pmatrix}^T$$



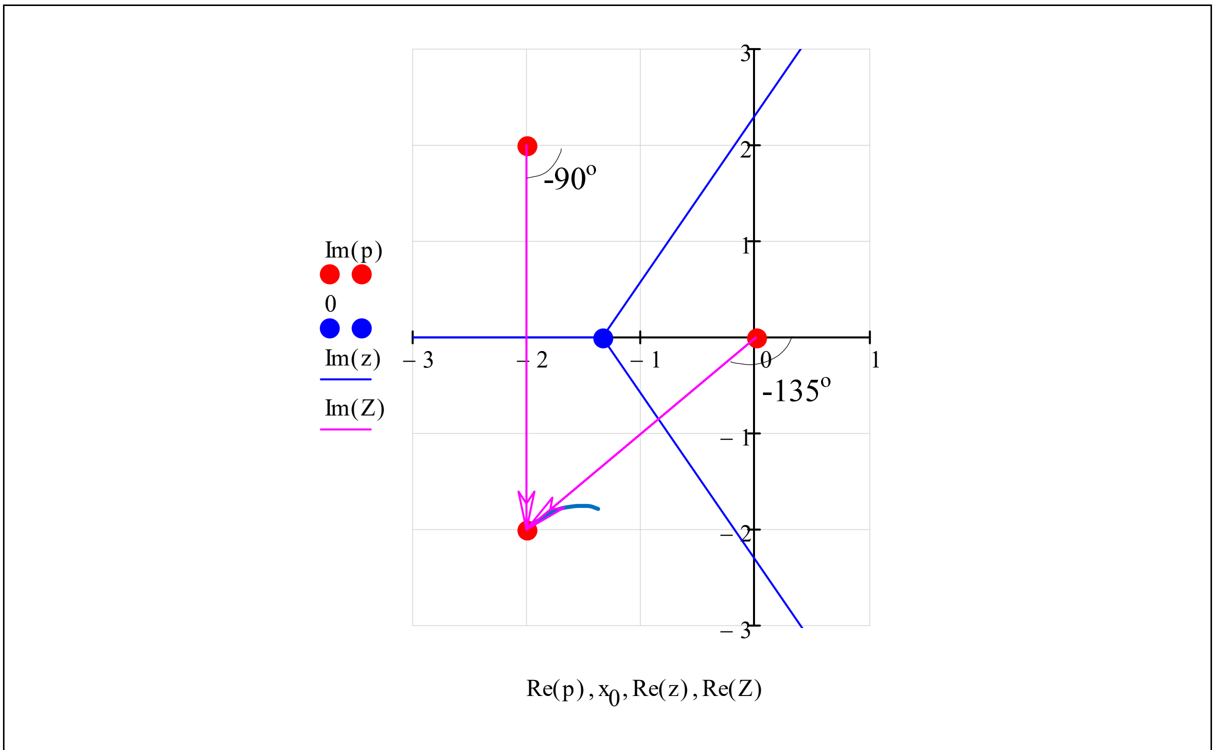
С помощью формулы учитывающей соотношение между углами полюсов на годографе находим углы наклона касательных к годографу

$$\theta_x = 180^\circ - (90^\circ + 135^\circ) = -45^\circ$$



Для нижнего годографа

$$\theta_x = 180^\circ - (-90^\circ - 135^\circ) = 405^\circ = 405^\circ - 360^\circ = 45^\circ$$



Запишем характеристическое уравнение для замкнутой системы

$$W_з(p)=\frac{\lambda}{p\left(p^2+4p+8\right)+\lambda}=\frac{\lambda Q(p)}{P(p)+\lambda Q(p)}$$

$$D(p)=p\left(p^2+4p+8\right)+\lambda=p^3+4p^2+8p+\lambda$$

Составляем таблицу Рауса, для того чтобы определит критические значения настроечного параметра

$$a_0p^3+a_1p^2+a_2p+a_3=0$$

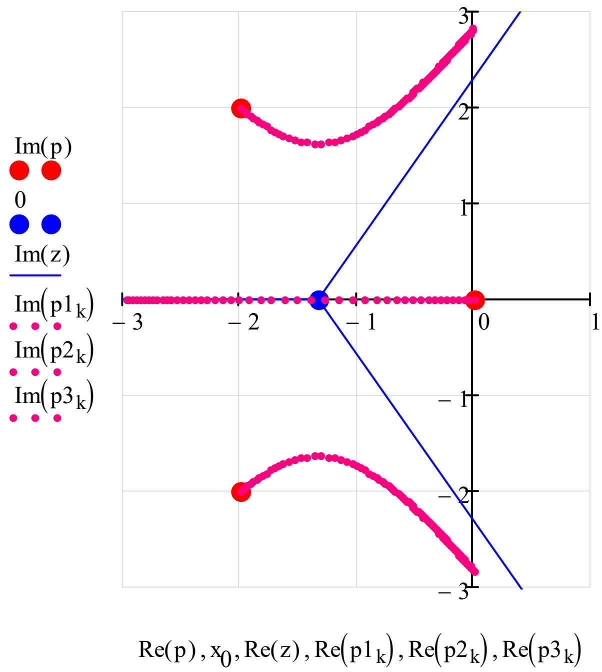
Значение r	Ном строки	Номер столбца	
		1	2
-	1	$a_0=1$	$a_2=8$
-	2	$a_1=4$	$a_3=\lambda$
$r_0=a_0/a_1=1/4$	3	$c_{13}=a_2-r_0a_3$ $=8-\lambda/4$	0
$r_1=a_1/c_{13}$	4	$c_{14}=a_3-r_1 0$ $=\lambda$	

На границе устойчивости должно выполнятся

$$c_{13}=8-\lambda/4=0\rightarrow\quad\lambda=8\cdot4=32$$

$$D(j\omega)=(j\omega)^3+4(j\omega)^2+8j\omega+\lambda=\lambda-4\omega^2+j\left(8\omega-\omega^3\right)$$

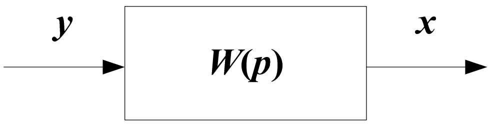
$$\omega^2=a_3/a_1\rightarrow\quad\lambda/4=32/4=8\quad\rightarrow\omega=\pm\sqrt{8}=\pm2{,}83$$



Пример 2.

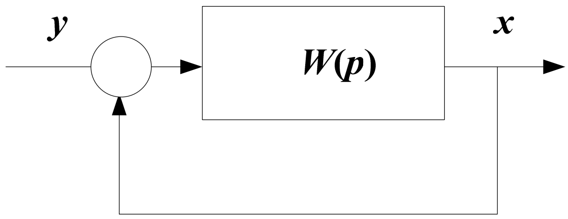
Задана передаточная функция разомкнутой системы

$$\mathrm{W}(p)=\frac{\lambda(p+3)}{p\left(p^2+2p+2\right)}$$



$$\mathrm{W}(p)=\lambda\frac{Q(p)}{P(p)}$$

Система замкнута



$$\frac{W(p)}{1+\mathrm{W}(p)}=\frac{\lambda Q(p)}{P(p)+\lambda \mathrm{Q}(p)}$$

Система разомкнута

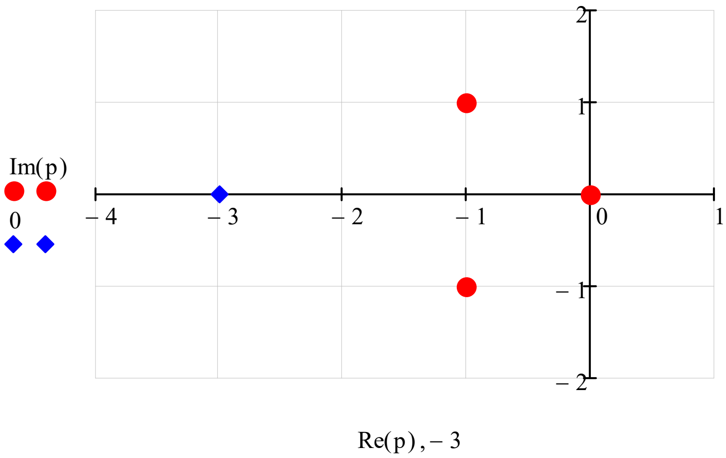
Требуется построить корневой годограф при изменении настроечного параметра $\lambda=[0,\ \infty)$ для замкнутой системы.

Решение:

Строим карту полюсов и нулей

Передаточная функция имеет три полюса и один ноль.

$$\mathrm{p} := \mathrm{p}\cdot\left(\mathrm{p}^2+2\cdot\mathrm{p}+2\right)\ \Bigg|\begin{matrix}\text{solve}\\ \text{float}, 4\end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix}0\\ -1.0+1.0i\\ -1.0-1.0i\end{pmatrix}$$



Подсчитаем асимптоты. *n-m=3-1=2.* Две асимптоты идут в бесконечность.

Находим их центр и углы наклона.

Центр

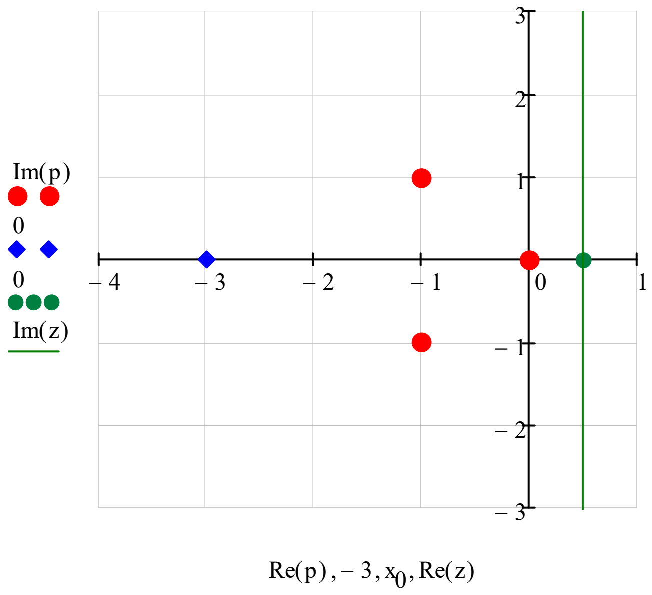
$$x_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i - \sum_{i=1}^{m} q_i}{n-m} = \frac{\sum_{i=1}^{3} z_i - q_1}{3-1} = \frac{0+(-1+1j)+(-1-1j)+3}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Углы наклона

$$\phi_k = (2k+1)\pi/(3-1) = \pi/2\cdot(2k+1),\ k = 0,1$$

$$x_0 := \frac{\sum_{k=0}^{\mathrm{length}(p)-1} p_k + 3}{3-1} = 0.5 \qquad k := 0..1 \qquad \varphi_k := \frac{\pi\cdot(2k+1)}{2}$$

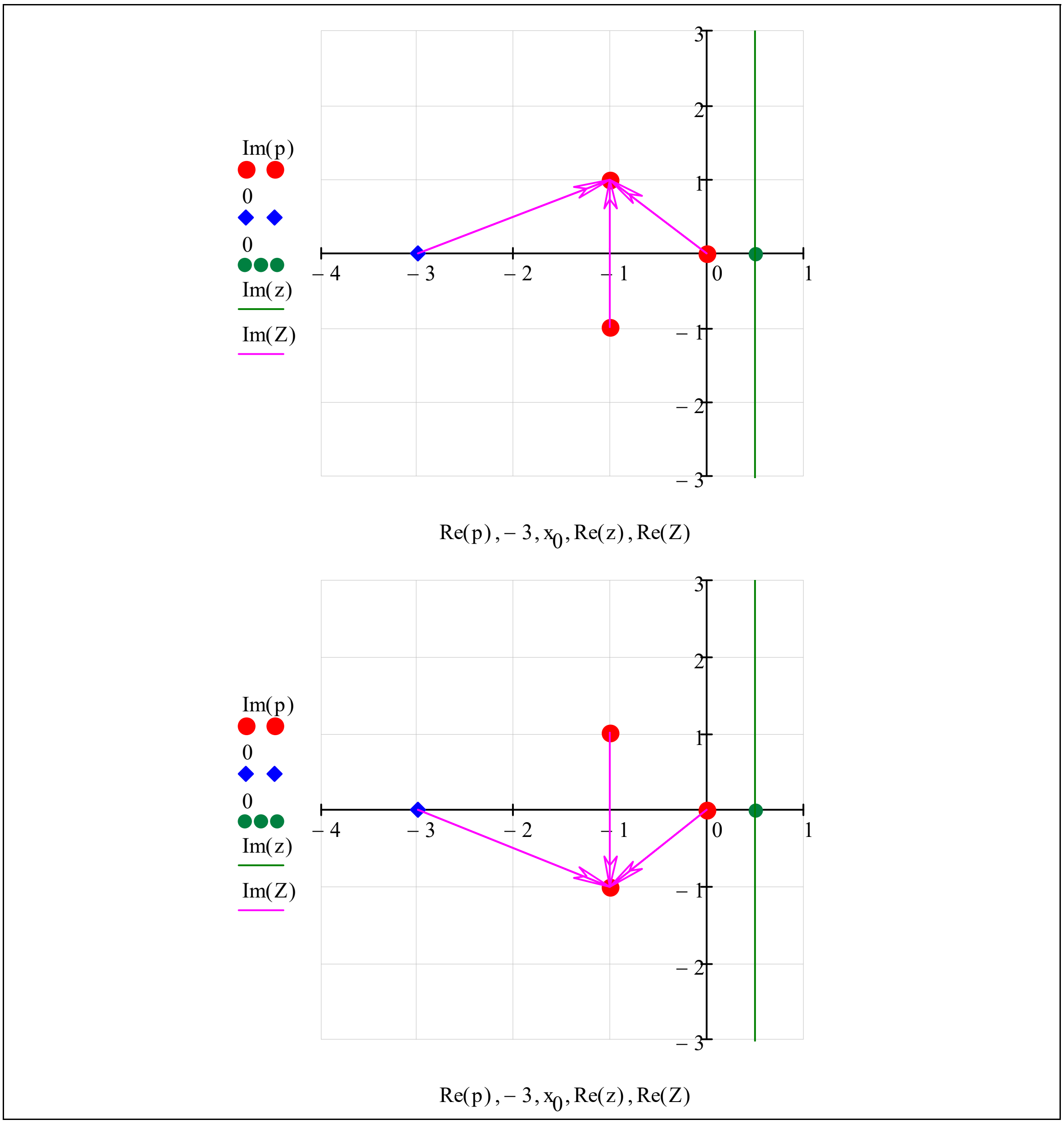
$$\varphi = \begin{pmatrix}1.571\\4.712\end{pmatrix} \qquad \frac{\varphi}{\deg} = \begin{pmatrix}90\\270\end{pmatrix} \qquad z := \left(x_0 + 10e^{i\cdot\varphi_0}\ \ x_0\ \ x_0 + 10e^{i\cdot\varphi_1}\right)^T$$



Находим углы выхода годографа из полюсов мнимых корней

$$\theta_{x1} = 180^\circ - (90^\circ + 135^\circ - 28^\circ) = 17^\circ \quad \text{(для верхней точки)}$$

$$\theta_{x2} = 180^\circ - (-90^\circ - 135^\circ + 28^\circ) = -377^\circ = -17^\circ \quad \text{(для нижней точки)}$$



Запишем характеристическое уравнение для замкнутой системы

$$W_з(p) = \frac{\lambda(p+3)}{p(p^2+2p+2)+\lambda(p+3)} = \frac{\lambda Q(p)}{P(p)+\lambda Q(p)}$$

$$D(p) = p(p^2+2p+2)+\lambda(p+3) = p^3+2p^2+(2+\lambda)p+3\lambda = 0$$

Составляем таблицу Рауса, для того чтобы определить критические значения настроечного параметра.

$$a_0p^3 + a_1p^2 + a_2p + a_3 = 0$$

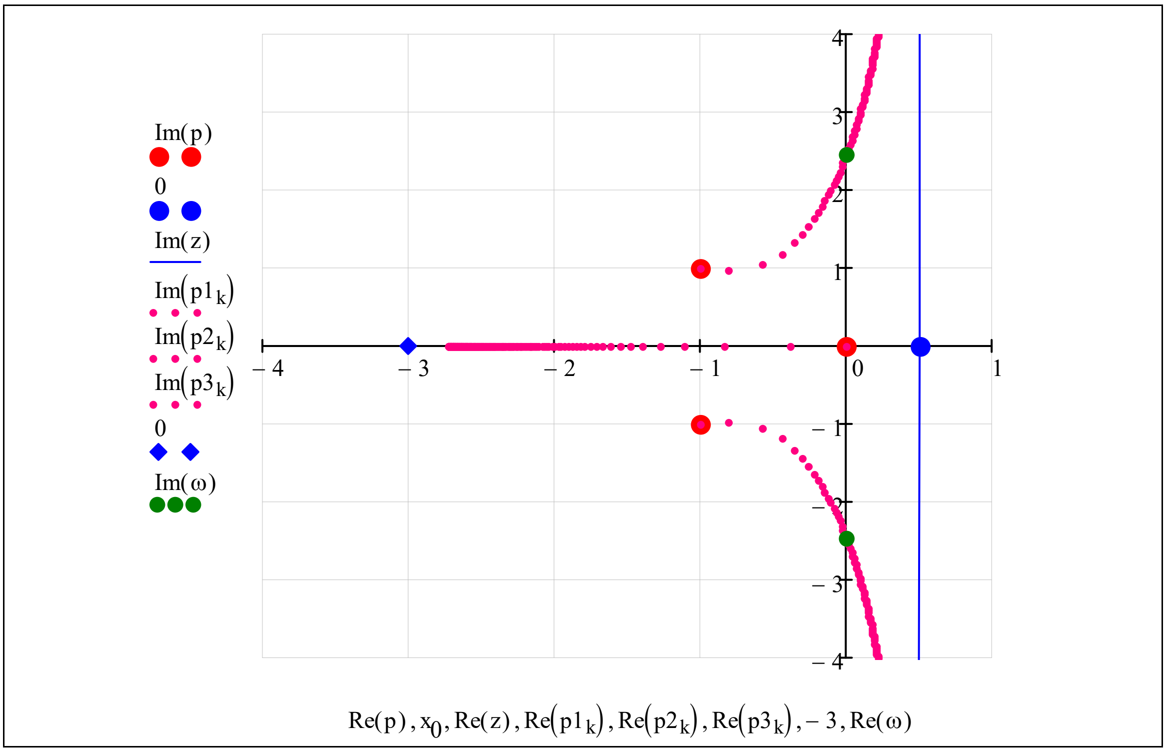
Значение r	Ном строки	Номер столбца	
		1	2
-	1	$a_0 = 1$	$a_2 = 2 + \lambda$
-	2	$a_1 = 2$	$a_3 = 3\lambda$
$r_0 = a_0 / a_1 = 1/2$	3	$c_{13} = a_2 - r_0 a_3$ $= 2 + \lambda - 3\lambda / 2 = 2 - \lambda / 2$	0
$r_1 = a_1 / c_{13}$	4	$c_{14} = a_3 - r_1 0$ $= 3\lambda$	

Из третьей строки следует, что $\lambda = 4$

$$D(j\omega) = (j\omega)^3 + 2(j\omega)^2 + (2+\lambda) j\omega + 3\lambda = 0$$

$$= (j\omega)^3 + (2+\lambda) j\omega - 2\omega^2 + 3\lambda \rightarrow \omega^2 = 3\lambda / 2 = 12/2 = 6$$

$$\omega = \sqrt{6} = 2{,}45$$



Метод размещения полюсов

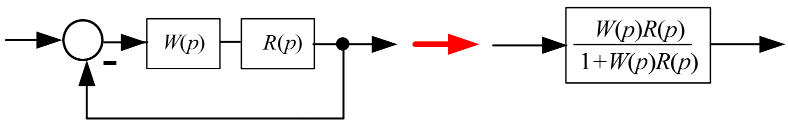
Один из простых методов синтеза регулятора – ***метод размещение полюсов*** передаточной функции замкнутой системы. Регулятор во многом определяют ее динамику, например, быстродействие и степень затухания колебаний. Смысл в том, чтобы разместить эти полюса в заданных точках комплексной плоскости с помощью специально выбранного регулятора. Эта задача сводится к решению системы линейных уравнений.

Пусть передаточная функция объекта задана в виде отношения полиномов

$$W(p)=\frac{N(p)}{D(p)}=\frac{n_1 p+n_0}{p^2+d_1 p+d_0}$$

Выберем регулятор вида

$$R(p)=\frac{N_R(p)}{D_R(p)}=\frac{a_1 p+a_0}{b_1 p+b_0}$$



где a_0, a_1, b_0, b_1 – неизвестные коэффициенты, которые нужно определить.

Характеристический полином замкнутой системы равен:

$$\frac{W(p)R(p)}{1+W(p)R(p)}=\frac{N(p)N_R(p)}{\boxed{D(p)D_R(p)+N(p)N_R(p)}}$$

$$\Delta(p)=N(p)N_R(p)+D(p)D_R(p)=\left(n_1 p+n_0\right)\left(a_1 p+a_0\right)+\left(p^2+d_1 p+d_0\right)\left(b_1 p+b_0\right)$$

$$=b_1 p^3+\left(n_1 a_1+d_1 b_1+b_0\right)p^2+\left(n_0 a_1+n_1 a_0+d_1 b_0+d_0 b_1\right)p+n_0 a_0+d_0 b_0$$

Предположим, что мы хотим выбрать регулятор так, чтобы разместить корни полинома $\Delta(p)$ в заданных точках, то есть добиться выполнения равенства

$$\Delta(p)=1p^3+\delta_2 p^2+\delta_1 p^1+\delta_0$$

где $\delta_0, \delta_1, \delta_2$ – заданные числа. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях p в последних двух равенствах, получаем:

$$\begin{aligned}
p^3 &: \quad b_1=1\\
p^2 &: \quad n_1 a_1+d_1 b_1+b_0=\delta_2\\
p &: \quad n_1 a_0+n_0 a_1+d_1 b_0+d_0 b_1=\delta_1\\
p^0 &: \quad n_0 a_0+d_0 b_0=\delta_0
\end{aligned}$$

или в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & n_1 & d_1 & 1 \\ n_1 & n_0 & d_0 & d_1 \\ n_0 & 0 & 0 & d_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ b_1 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \delta_2 \\ \delta_1 \\ \delta_0 \end{pmatrix}$$

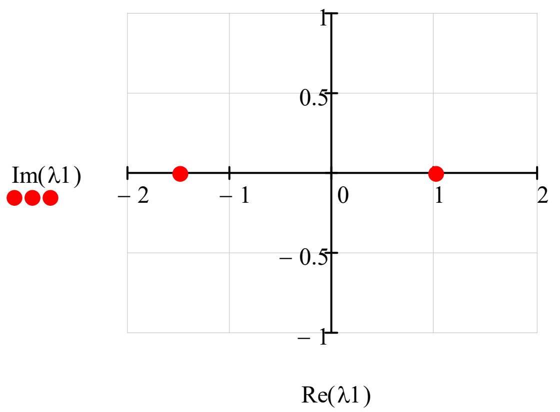
Решение уравнения имеет вид

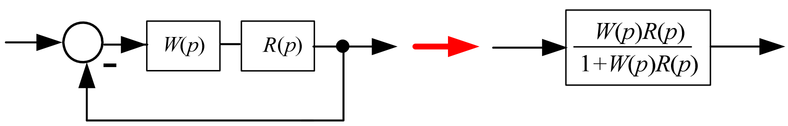
$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ b_1 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & n_1 & d_1 & 1 \\ n_1 & n_0 & d_0 & d_1 \\ n_0 & 0 & 0 & d_0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \delta_2 \\ \delta_1 \\ \delta_0 \end{pmatrix}$$

Конечно, квадратная матрица в этом выражении (она называется *матрицей Сильвестра*) должна быть обратима.

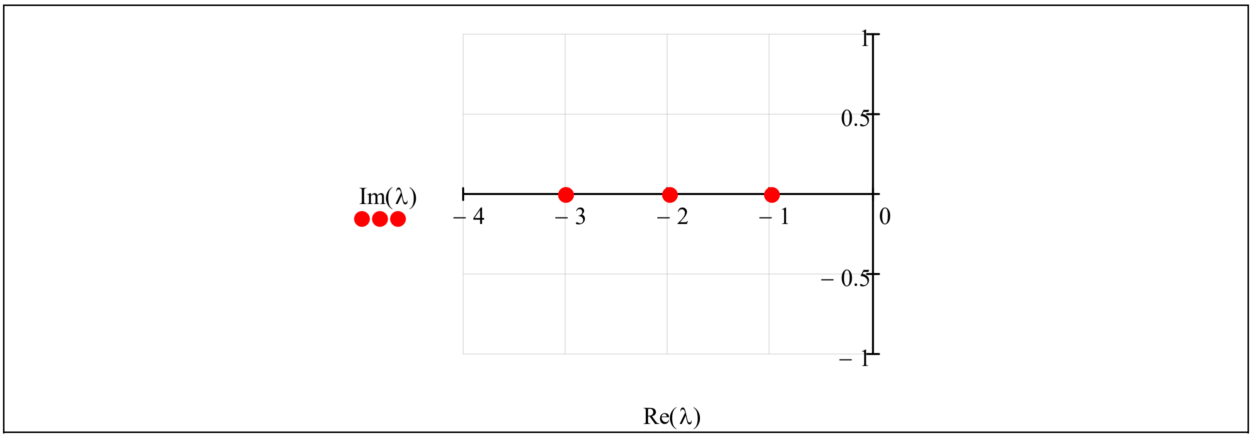
Пример Задана передаточная функция с неустойчивыми корнями

$$W(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{2}{p^2 + p - 2} = \frac{2}{(p-1)(p+1{,}5)}$$





Найти регулятор, который преобразует неустойчивую систему в устойчивую систему с расположения корней в точках $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3$.



Решение:

1. Записываем коэффициенты полиномов числителя и знаменателя передаточной функции

$$W(p)=\frac{N(p)}{D(p)}=\frac{2}{p^2+0,5p-1,5}$$

$$W(p)=\frac{N(p)}{D(p)}=\frac{n_0+n_1p}{p^2+d_1p+d_0}=\frac{2}{p^2+0,5p-1,5}\rightarrow$$

$$n_0=2,\ n_1=0,\ d_1=0,5,\ d_0=-1,5$$

2. Записываем коэффициенты полиномов числителя и знаменателя регулятора

$$R(p)=\frac{N_R(p)}{D_R(p)}=\frac{a_0+a_1p}{b_0+b_1p}$$

3. Запишем характеристический полином желаемой передаточной функции

$$z(\mathrm{p})=(p-\lambda_1)(p-\lambda_2)(p-\lambda_3)=$$

$$=(p+1)(\ p+2)(p+3)=p^3+6p^2+11p+6$$

$$\delta_2=6,\ \delta_1=11,\ \delta_0=6$$

$$p^3+\delta_2p^2+\delta_1p+\delta_0=0$$

4. Составляем уравнения для определения коэффициентов

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ b_1 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & n_1 & d_1 & 1 \\ n_1 & n_0 & d_0 & d_1 \\ n_0 & 0 & 0 & d_0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \delta_2 \\ \delta_1 \\ \delta_0 \end{pmatrix}$$

Подставляем значения коэффициентов в уравнения

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ b_1 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 1 \\ 0 & 2 & -1{,}5 & 0{,}5 \\ 2 & 0 & 0 & -1{,}5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7{,}125 \\ 4{,}875 \\ 1 \\ 5{,}5 \end{pmatrix}$$

Таким образом, найден регулятор, обеспечивающий заданное расположение корней.

$$R(p) = \frac{N_R(p)}{D_R(p)} = \frac{a_0 + a_1 p}{b_0 + b_1 p} = \frac{7.125 + 4{,}875p}{5.5 + p}$$

Результирующая передаточная функция равна:

$$\frac{W(p)R(p)}{1 + W(p)R(p)} = \frac{9{,}75p + 14{,}25}{p^3 + 6p^2 + 11p + 6} \ .$$