Приводим аналитический вид первых пяти **полиномов Лежандра**

$$P(n,x) := \frac{1}{2^n \cdot n!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n$$

$$P(0,x) \rightarrow 1 \qquad P(1,x) \rightarrow x$$

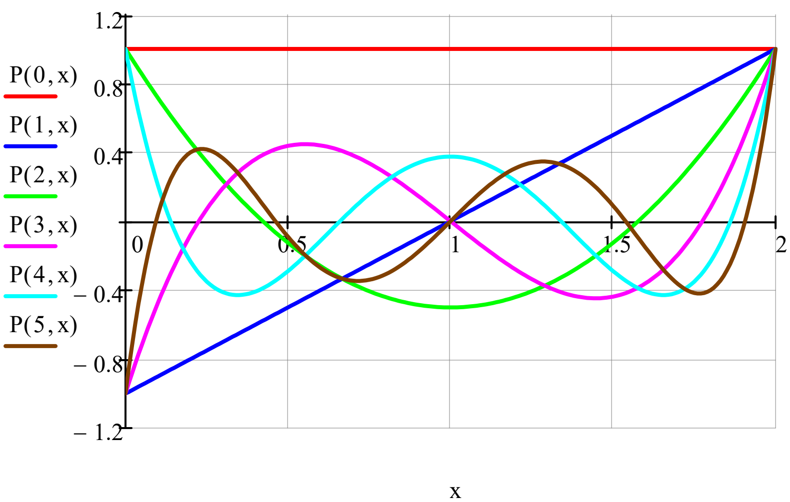
$$P(2,x) \rightarrow \frac{3\cdot x^2}{2} - \frac{1}{2} \qquad P(3,x)\ \text{simplify} \rightarrow \frac{x\cdot\left(5\cdot x^2-3\right)}{2}$$

$$P(4,x)\ \text{simplify} \rightarrow \frac{35\cdot x^4}{8} - \frac{15\cdot x^2}{4} + \frac{3}{8} \qquad P(5,x)\ \text{simplify} \rightarrow \frac{x\cdot\left(63\cdot x^4 - 70\cdot x^2 + 15\right)}{8}$$

Выбираем интервал ортогональности x1=0, x2=2. (в соответсвии с вариантом)
Произведем преобразование и построим полиномы на новом интервале

$$x1 := 0 \qquad x2 := 2 \qquad P(n,x) := \text{Leg}\left(n, 2\cdot\frac{x-x1}{x2-x1} - 1\right)$$

$$x := x1, x1 + 0.01 .. x2$$



Убеждаемся в ортогональности полиномов Лежандра на интервале x1 и x2 на примере нескольких полиномов

$$M := 10 \qquad n := 0 .. M$$

$$\int_{x1}^{x2} P(1,x)\cdot P(2,x)\,dx = 0 \qquad \int_{x1}^{x2} P(2,x)\cdot P(3,x)\,dx = 0 \qquad \int_{x1}^{x2} P(3,x)\cdot P(4,x)\,dx = 0 \qquad \int_{x1}^{x2} P(5,x)\cdot P(4,x)\,dx = 0$$

Произведем нормировку полиномов Лежандра интервале x1 и x2

$$N_n := \int_{x1}^{x2} P(n,x)^2\,dx$$

$$P(n,x) := \frac{P(n,x)}{\sqrt{\frac{2}{2\cdot n+1}}}$$

N =

	0
0	2
1	0.667
2	0.4
3	0.286
4	0.222
5	0.182
6	0.154
7	0.133
8	0.118
9	0.105
10	0.095

$$\frac{2}{2\cdot n+1} =$$

2
0.667
0.4
0.286
0.222
0.182
0.154
0.133
0.118
0.105
0.095

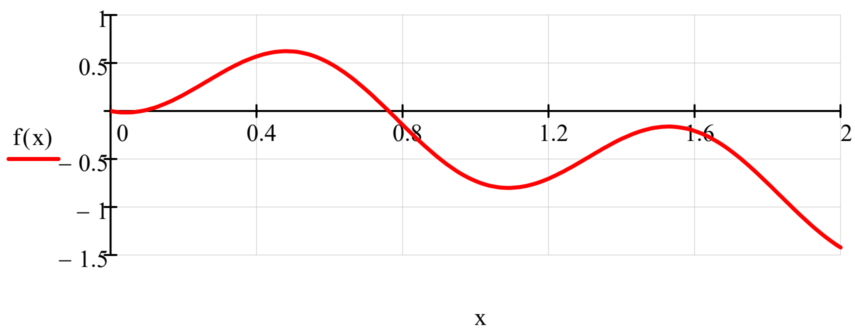
$$N_n := \int_{x1}^{x2} P(n,x)^2\,dx$$

$N^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...

Выбираем функцию с ссответсвии с вариантом

$$f(x) := \sin(x\cdot 3)^2 - 0.5\cdot x - 0.25\cdot x$$

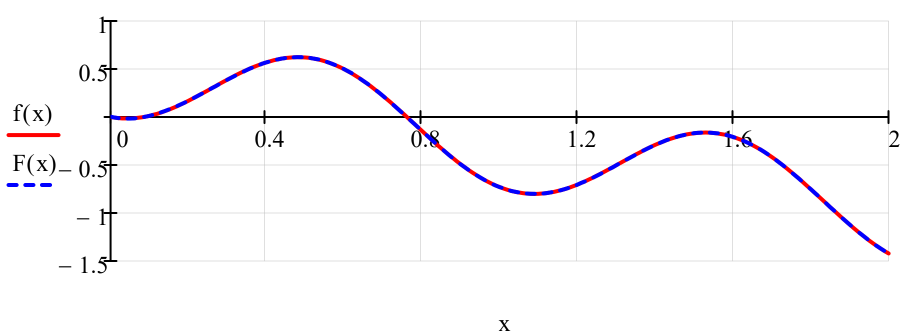


Разложим функцию в ряд по полиномам Лежандра

$$a_n := \int_{x1}^{x2} P(n,x)\cdot f(x)\,dx$$

$$a^T = \begin{pmatrix} -0.322 & -0.555 & -0.057 & 0.071 & -0.401 & -0.104 & 0.23 & 0.034 & -0.05 & -5.43\times 10^{-3} & 6.092\times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$F(x) := \sum_{k=0}^{M} \left(a_k P(k,x)\right)$$



Проверим точность разложения используя теорему Парсеваля

$$\sum_{k=0}^{M} \left(a_k\right)^2 = 0.648 \qquad \int_{x1}^{x2} f(x)^2\,dx = 0.648$$

Полиномы Чебышева

Строим полиномы Чебышёва на интервале [-1 , 1]

$T(n,t) := \cos(n\cdot\mathrm{acos}(t))$

$T(0,t) \to 1$

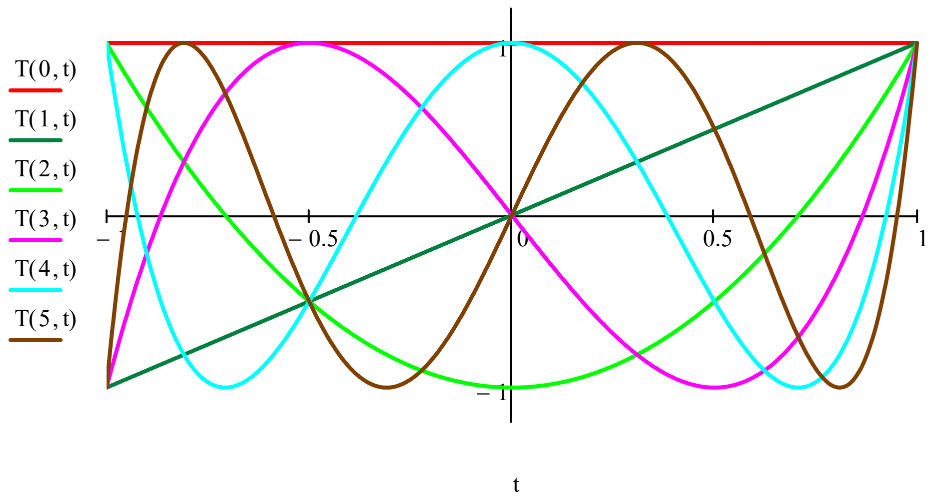
$T(1,t)$ simplify $\to t$

$T(2,t)$ simplify $\to 2\cdot t^2 - 1$

$T(3,t)$ simplify $\to t\cdot\left(4\cdot t^2 - 3\right)$

$T(4,t)$ simplify $\to 8\cdot t^4 - 8\cdot t^2 + 1$

$T(5,t)$ simplify $\to t\cdot\left(16\cdot t^4 - 20\cdot t^2 + 5\right)$



$M := 10$ $\quad n := 0..M$

Проверим ортогональность полиномов Чебышёва интервале x1 и x2

$$\int_{-1}^{1} \frac{T(1,x)\cdot T(2,x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 0 \qquad \int_{-1}^{1} \frac{T(3,x)\cdot T(2,x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 0 \qquad \int_{-1}^{1} \frac{T(3,x)\cdot T(4,x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 0 \qquad \int_{-1}^{1} \frac{T(3,x)\cdot T(5,x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 0$$

Произведем нормировку полиномов Чебышёва интервале x1 и x2

$$N_n := \int_{-1}^{1} \frac{T(n,x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

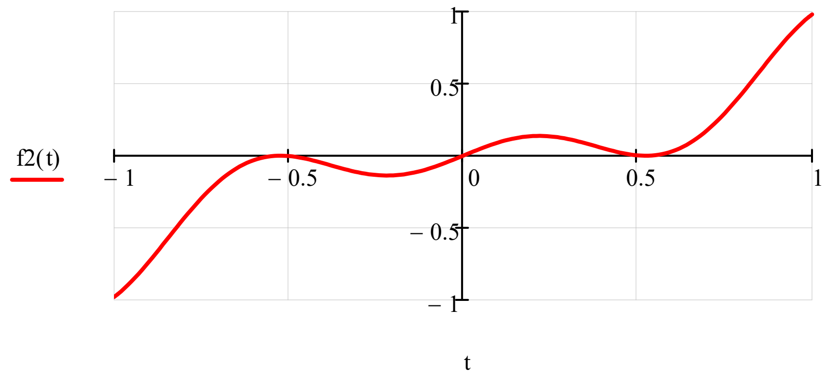
$$N^T = (3.142 \quad 1.571 \quad 1.571 \quad 1.571 \quad 1.571 \quad 1.571 \quad 1.571 \quad 1.571 \quad 1.571 \quad 1.571 \quad 1.571)$$

$$T(n,x) := \mathrm{if}\left(n = 0, \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)\cdot T(n,x) \qquad N_n := \int_{-1}^{1} \frac{T(n,x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \qquad N^T = (1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)$$

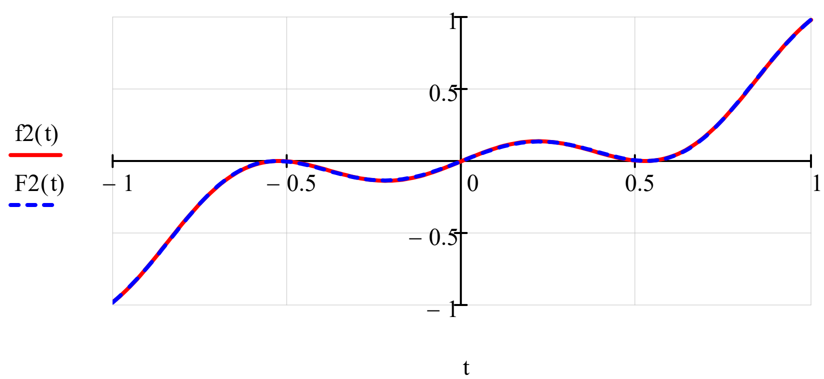
Разложим функцию (см вариант) по полимомам Чебышёва интервале x1 и x2

$$f2(t) := \cos(t\cdot 3)^2\cdot t \qquad b_n := \int_{-1}^{1} \frac{T(n,t)\cdot f2(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

Строим график функции $t := -1, -1 + 0.01 .. 1$



$$F2(x) := \sum_{k=0}^{M} \left(b_k\cdot T(k,x)\right)$$



Проверка точности вычисления

$$\sum_{k=0}^{M} \left(b_k\right)^2 = 0.924 \qquad \int_{-1}^{1} \frac{f2(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = 0.924$$

Неортогональное разложение ***(используем функциию из первого пункта)***

Выбираем базис $\varphi(n,x) := x^n$ на интервале x1=0 x2=3 находим скалярное произведение элементов базиса

$n := 0 .. M \qquad m := n$

$$B_{n,m} := \int_{x1}^{x2} \varphi(n,x)\cdot\varphi(m,x)\,dx$$

B =

	0	1	2	3
0	2	2	2.667	4
1	2	2.667	4	6.4
2	2.667	4	6.4	10.667
3	4	6.4	10.667	18.286
4	6.4	10.667	18.286	32
5	10.667	18.286	32	56.889
6	18.286	32	56.889	102.4
7	32	56.889	102.4	186.182
8	56.889	102.4	186.182	341.333
9	102.4	186.182	341.333	630.154
10	186.182	341.333	630.154	...

находим скалярное произведение элементов базиса и функции

$$A_n := \int_{x1}^{x2} \varphi(n,x)\cdot f(x)\,dx$$

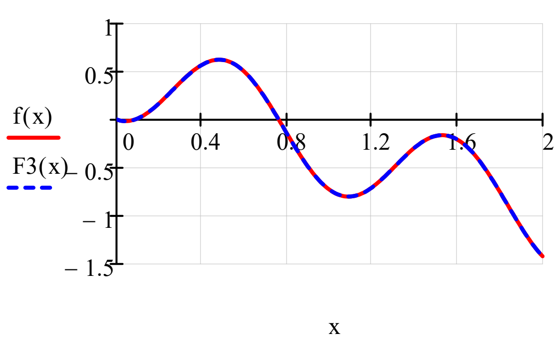
$$A^T = (-0.455 \quad -0.908 \quad -1.537 \quad -2.598 \quad -4.503 \quad -8 \quad -14.493 \quad -26.639 \quad -49.476 \quad -92.602 \quad -174.328)$$

Находим коэффициенты разложения

$$a := B^{-1}\cdot A$$

$$a^T = \left(3.097\times10^{-3} \quad -0.97 \quad 12.829 \quad -28.664 \quad 87.29 \quad -269.063 \quad 423.576 \quad -350.201 \quad 157.945 \quad -37.018 \quad 3.543\right)$$

$$F3(t) := \sum_{k=0}^{M} \left(a_k\cdot\varphi(k,t)\right)$$



Проверяем точность разложение

$$\int_{x1}^{x2} f(x)^2\,dx = 0.648 \qquad \sum_{k=0}^{M} \left(a_k \cdot A_k\right) = 0.648$$

Написать выводы по проделанной работе !!!