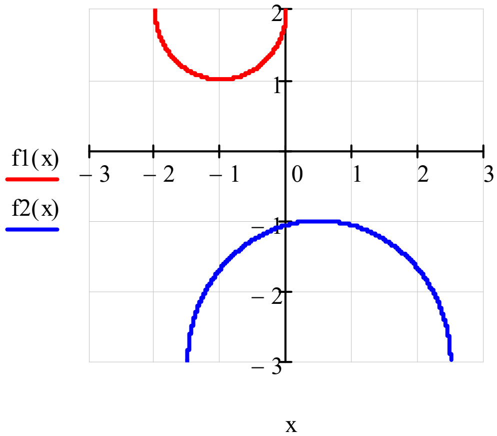
Заданы две линии. Нужно найти минимальное расстояние между ними

$R_1 := 1 \quad f1(x) := -\sqrt{R_1^2 - (x+1)^2} + 2$

$R_2 := 2 \quad f2(x) := \sqrt{R_2^2 - (x-0.5)^2} - 3$

$x := -3, -3 + 0.0001 .. 3$



Запишем элемент дуги

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

И функционал минимизации расстояния между линиями

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_f} \sqrt{1 + (y')^2}\,dx = \int_{x_0}^{x_f} F(y')dx$$

Уравнение Эйлера в этом случае вырождается в простое дифференциальное уравнение

$$y' = 0$$

Решим его

$$y(x) = C_1 x + C_2$$

Уравнения линий, между которыми ищется расстояние, заданы в виде: $f_1(x), \ f_2(x)$.

Записываем уравнение оптимальной прямой $\quad f(x) := C_1 \cdot x + C_2$

Находим производные линий

$$f1'(x) := \frac{2 \cdot x + 2}{2 \cdot \sqrt{1 - (x+1)^2}}$$

$$f2'(x) := -\frac{2 \cdot x - 1.0}{2 \cdot \sqrt{4 - (x-0.5)^2}}$$

$$\begin{cases} C_1 \cdot x1 + C_2 = f1(x1) \\ C_1 \cdot x2 + C_2 = f2(x2) \end{cases}$$

Записываем условия пересечения линий с оптимальной прямой

$$\begin{cases} f1'(x1) \cdot C_1 = -1 \\ f2'(x2) \cdot C_1 = -1 \end{cases}$$

Записываем условие трансверсальности в точках пересечения

Задаем стартовые значния неизвестных произвольно

$C_1 := 1 \quad C_2 := 1 \quad x1 := -1 \quad x2 := 0$

Given

$$C_1 \cdot x1 + C_2 = f1(x1)$$

$$C_1 \cdot x2 + C_2 = f2(x2)$$

$$f1'(x1) \cdot C_1 = -1$$

$$f2'(x2) \cdot C_1 = -1$$

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ x1 \\ x2 \end{pmatrix} := \mathrm{Find}(C_1, C_2, x1, x2) = \begin{pmatrix} -3.333 \\ -1.333 \\ -0.713 \\ -0.075 \end{pmatrix}$$

Задаем точки пересечения линий с оптимальной прямой

$$z := (x1 + f1(x1) \cdot i \quad x2 + i \cdot f2(x2))^T$$

Строим графики