Параметры системы

$g := 10 \quad L := 1 \quad m := 0.5 \quad M := 3 \quad b := \frac{m}{M+m} = 0.143 \quad \beta := 2$

Компоненты состояния

$$x = \begin{pmatrix} \theta \\ \omega \\ x \\ v \end{pmatrix} \qquad \frac{d}{dt}X = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}\theta \\ \frac{d}{dt}\omega \\ \frac{d}{dt}x \\ \frac{d}{dt}v \end{pmatrix}$$

Матрица состояния

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{m+M}{L \cdot M}\cdot g & 0 & 0 & -\frac{m+M}{L\cdot M}\cdot\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{m}{M}\cdot g & 0 & 0 & \frac{m}{M}\cdot\beta \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{L\cdot M} \\ 0 \\ \frac{1}{M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.333 \\ 0 \\ 0.333 \end{pmatrix}$$

Убеждаемся что собственные числа матрицы состояния неустойчивые

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 11.667 & 0 & 0 & -2.333 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1.667 & 0 & 0 & 0.333 \end{pmatrix} \qquad \text{eigenvals}(A) = \begin{pmatrix} 0 \\ -3.253 \\ 3.586 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Для не устойчивой системы будем использовать линейный квадратиччный регулятор.
Для этого решаем матричное уравнение Лурье

$$\rho := 0.01 \qquad Q := \begin{pmatrix} 50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix}$$

Коэффициенты функционала качества

$$P := \begin{pmatrix} 20 & 20 & 0 & 0 \\ 20 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Стартовые значения для решения матричного уравнения относительно P

Given

$$P\cdot A + A^T\cdot P - \frac{1}{\rho}\cdot P\cdot B\cdot B^T\cdot P = -Q$$

$P := \text{Find}(P)$

$$P = \begin{pmatrix} 28.05 & 5.161 & 3.51 & 1.295 \\ 5.161 & 1.544 & 1.239 & 0.491 \\ 3.51 & 1.239 & 2.32 & 0.939 \\ 1.295 & 0.491 & 0.939 & 0.568 \end{pmatrix} \qquad k := \frac{B^T\cdot P}{\rho} = (-128.885 \quad -35.104 \quad -10 \quad 2.578)$$

Убеждаемся что собственные числа матрицы стали устойчивыми

Были

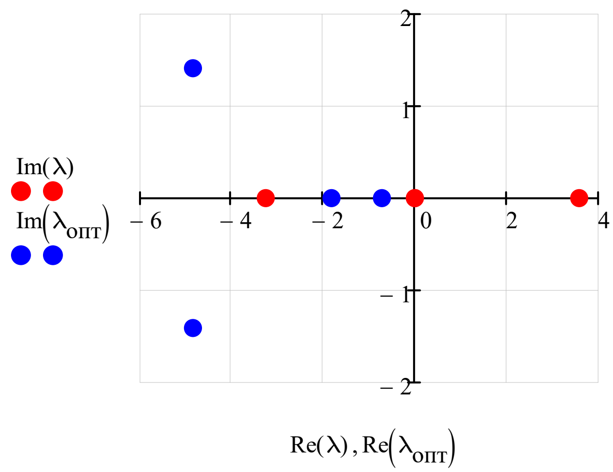
$$\lambda := \text{eigenvals}(A) = \begin{pmatrix} 0 \\ -3.253 \\ 3.586 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Стали

$$Ac := A - B\cdot k$$

$$\lambda_{\text{опт}} := \text{eigenvals}(Ac) = \begin{pmatrix} -4.844 + 1.41i \\ -4.844 - 1.41i \\ -0.719 \\ -1.821 \end{pmatrix}$$

Рисуем расположения новых и старых корней (собственных чисел)



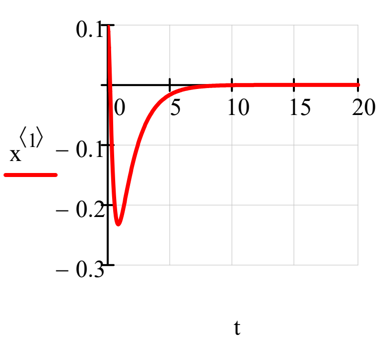
Решаем дифференциальное уравнение с оптимальным расположением корней

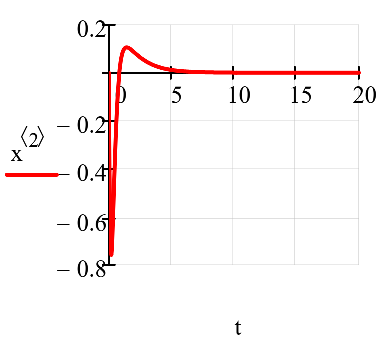
$$D(L,t,x) := (A - B\cdot k)\cdot x \qquad T := 20 \qquad N := 10^2\cdot 4$$

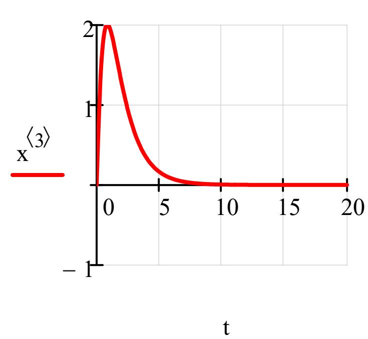
Для токо чтобы толкнуть систему, можно задать начальную скорость равную vo=5 или 10

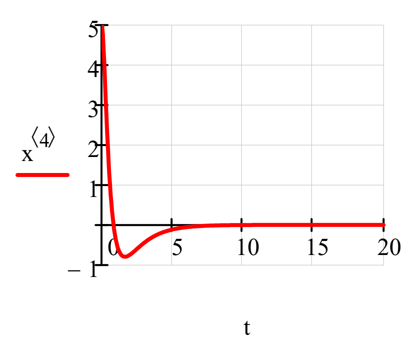
$$x := \text{rkfixed}\left[\begin{pmatrix} 0.1 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, 0, T, N, D(L)\right]$$

$$t := x^{\langle 0 \rangle} \qquad i := 0..N$$









Геометрия системы и анимация

$$a := 0.5 \qquad b := 0.2$$

$$j := \text{FRAME}$$

$$z := (-a - i\cdot b \quad -a + i\cdot b \quad a + i\cdot b \quad a - i\cdot b \quad -a - i\cdot b)^T + \left(x^{\langle 3 \rangle}\right)_j$$

$$z1\_ := L\cdot\sin\left[\left(x^{\langle 1 \rangle}\right)_j\right] + \left(x^{\langle 3 \rangle}\right)_j + i\cdot L\cdot\cos\left[\left(x^{\langle 1 \rangle}\right)_j\right]$$

$z1 := \left[\left(x^{\langle 3 \rangle} \right)_j \quad z1\_ \right]^T$ $\qquad t := -a, -a + 0.001 .. a$ $\qquad to := \left(x^{\langle 3 \rangle} \right)_j$

$tt_i := \frac{2 \cdot \pi}{N} \cdot i$ $\qquad r := 0.1$ $\qquad$ радиус колёс

$c_i := r \cdot \sin\left(tt_i\right) + r \cdot i \cdot \cos\left(tt_i\right)$ $\qquad c2 := c + z1\_$ $\qquad y := -5, -5 + 1 .. 7$ $\qquad s := 0 .. j$

$z\_o := -(b + r) \cdot i + \frac{a}{2}$ $\qquad zo\_ := -(b + r) \cdot i - \frac{a}{2}$ $\qquad Z\_ := \text{stack}(c + z\_o, c + zo\_) + \left(x^{\langle 3 \rangle} \right)_j$