Пункт 1. Находим аналитическое решение

Нахом экстремаль функционала

$$J(x)=\int_0^1\left(x(t)^2+\dot{x}(t)^2+2x(t)e^t\right)dt$$

Краевые условия для функционала $x(0)=0,\ x(1)=0$

Составляем уравнение Эйлера

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}-\frac{\partial F}{\partial x}=0\quad F(x,\dot{x},t)=x^2+\dot{x}^2+2xe^t,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)=2\ddot{x},\ \frac{\partial F}{\partial x}=2x+2e^t$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}-\frac{\partial F}{\partial x}=2\ddot{x}-2x-2e^t=0$$

Таким образом, получаем уравнение в виде

$$\ddot{x}-x=-e^t$$

Решаем характеристическое

$$p^2-1=0,\ p_{1,2}=\pm 1$$

Находим решение однородного уравнения

$$\ddot{x}-x=0,\ \to\ x_{св}=A_1e^t+A_2e^{-t}$$

Далее находим решение неоднородного уравнения. Ищем его в виде $x_в=tBe^t$. Для того что бы найти *B*.

$$\dot{x}_в=\frac{d}{dt}\left(tBe^t\right)=Be^t+tBe^t,\ \ddot{x}_в=\frac{d}{dt}\left(Be^t+tBe^t\right)=Be^t+Be^t+tBe^t$$

$$\ddot{x}_в=2Be^t+tBe^t$$

Поставляем все найденные значения в неоднородное уравнение

Запишем все решения уравнения, которые мы нашли

$$x_{св}=A_1e^t+A_2e^{-t},\ x_в=\frac{1}{2}te^t,\ x(t)=x_{св}+x_в=A_1e^t+A_2e^{-t}+\frac{1}{2}te^t$$

Теперь осталось найти константы интегрирования из краевых условий $x(0)=0,\ x(1)=0$

$$x(t)=x_{св}+x_в=A_1e^t+A_2e^{-t}+\frac{t}{2}e^t$$

$$\begin{cases} x(0)=0=A_1+A_2 \\ x(1)=0=A_1e+A_2e^{-1}+\frac{1}{2}e \end{cases}$$

Составляем матричное уравнение

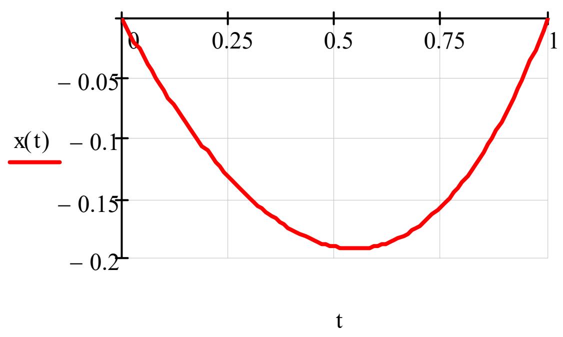
$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 0 \\ A_1 e + A_2 e^{-1} = -\dfrac{1}{2}e \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e & e^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{1}{2}e \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e & e^{-1} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{1}{2}e \end{pmatrix}$$

1. $$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2\left(e^{-2}-1\right)} \\ -\dfrac{1}{2\left(e^{-2}-1\right)} \end{pmatrix} \qquad x(t) = \frac{1}{2\left(e^{-2}-1\right)}e^{t} - \frac{1}{2\left(e^{-2}-1\right)}e^{-t} + \frac{t}{2}e^{t}$$

Строим графики в Mathcad

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e & e^{-1} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{-1}{2}e \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2\cdot e^{-2} - 2} \\ -\dfrac{1}{2\cdot e^{-2} - 2} \end{pmatrix}$$

$$x(t) := A_1 e^{t} + A_2 e^{-t} + \frac{t}{2}\cdot e^{t} \qquad t := 0, .01 .. 1$$



Пункт 2, 3 Решаем задачу, используя встроенную программу Mathcad ***Odesolve***

Given

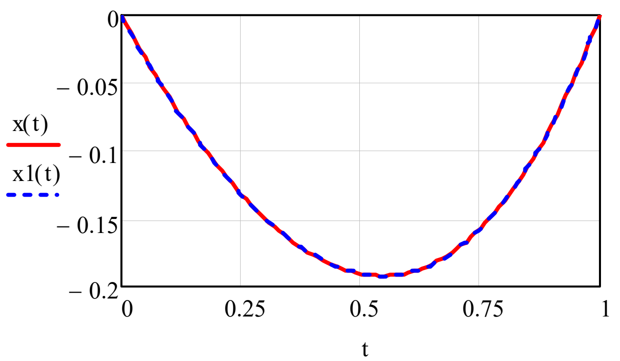
$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) - x(t) = e^{t} \qquad x(0) = 0 \qquad x(1) = 0$$

$$x := \text{Odesolve}(t, 1, 20)$$

Строим график. Сравниваем решения аналитическое и численное

$$x1(t) := \frac{-e^2}{2\cdot\left(e^2 - 1\right)}e^{t} + \frac{e^2}{2\cdot\left(e^2 - 1\right)}e^{-t} + \frac{t}{2}\cdot e^{t}$$ аналитическое решение

$$t := 0, .01 .. 1$$

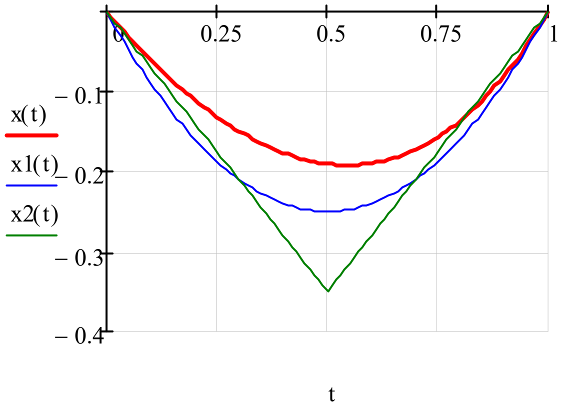


Пункт 4. Определяем экстремум функционала

Строим вариации – выбираем 2 функции с теми же граничными условиями

1. $x1(t) := \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$ **2.** $x2(t) := |t - 0.5| \cdot 0.7 + -0.35$

Строим графики на заданном интервале



Записываем функционал

$$J1(x) := \int_0^1 \left[x(t)^2 + \left(\frac{d}{dt}x(t)\right)^2 + 2 \cdot x(t) \cdot e^t\right] dt$$

И ищем функционал $J1(x) = -0.22$ $J1(x1) = -0.197$ $J1(x2) = -0.058$

Делаем вывод что у нас экстремум-минимум потому-что самое маленькое значение.

Пункт 5. Делаем выводы по работе самостоятельно.