# Определение устойчивости по метод Ляпунова

## *Задана модель динамической системы*

$$\frac{d}{dt}x_1 = -1\cdot x_1 + 2\cdot x_2$$
$$\frac{d}{dt}x_2 = -8\,x_1 - 2\cdot x_2$$

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -8 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda := \mathrm{eigenvals}(A) = \begin{pmatrix} -1.5 + 3.969i \\ -1.5 - 3.969i \end{pmatrix}$$

**1)** Определить устойчивость по Ляпунову. Функцияю Ляпунова будем искать в виде:

$$x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad V = x^T\cdot P\cdot x \to V = P\cdot x_1^{\,2} + P\cdot x_2^{\,2}$$

$$C := -\mathrm{identity}(2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

по заданным значениям матриц **C** и **A** находим матрицу **P**

$$P := \mathrm{identity}(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- стартовые значения матрицы для решения матричного уравнения Ляпунова

Given

$$A^T\cdot P + P\cdot A = C$$

$$P := \mathrm{Find}(P) = \begin{pmatrix} 0.796 & -0.037 \\ -0.037 & 0.213 \end{pmatrix}$$

решение матричного уравнения

**2)** Проверяем найденную матрицу по критерию Сельвестра

По критерию Сильвестра найденная матрица положительно определенная так как главные миноры матрицы P больше нуля. Следовательно Система устойчивая

$$P_{0,0} = 0.796 \qquad |P| = 0.168$$

**3)** Убеждаемся что производная функции Ляпунова по времени меньше нуля (решая дифференциально уравнение заданной системы)

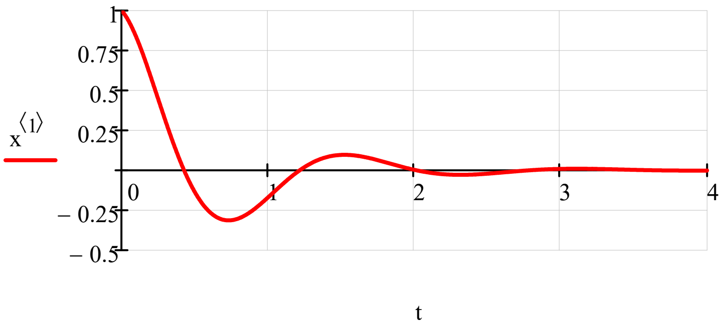
Теперь нам нужно убедится, что $\frac{d}{dt}V = x^T\cdot\left(A^T\cdot P + P\cdot A\right)\cdot x$ меньше нуля

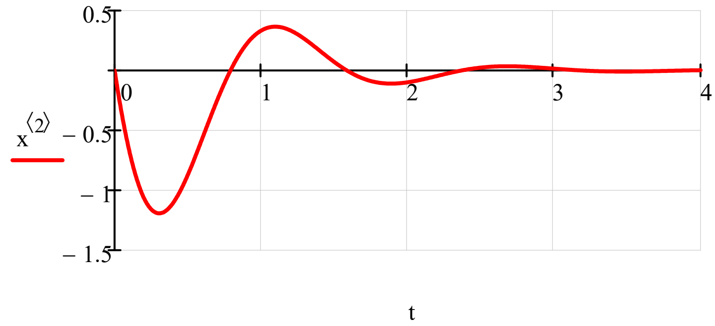
***Линейная (исследуемая) система будет устойчивой если производная функции Ляпунова будет отрицательной***

Решаем дифференциальное уравнение для заданной динамической системы, методом Рунге- Кутта 4-го порядка

$$D(t,x) := A\cdot x \qquad T := 4 \qquad N := 10^3 \qquad x := \mathrm{rkfixed}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, 0, T, N, D\right] \qquad t := x^{\langle 0 \rangle} \qquad i := 0..N$$

**4)** построим графики переходных процессов




Находим производную функции Ляпунова

**Примечание!** здесь для индексов x поставлены точки!

$$\frac{d}{dt}V(x_1,x_2) = v_{x1}\cdot\frac{\partial}{\partial x_1}V(x_1,x_2) + v_{x2}\cdot\frac{\partial}{\partial x_2}V(x_1,x_2) = \left(\frac{d}{dt}x_1\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x_1}V(x_1,x_2) + \left(\frac{d}{dt}x_2\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x_2}V(x_1,x_2)$$

$$P = \begin{pmatrix} 0.796 & -0.037 \\ -0.037 & 0.213 \end{pmatrix} \qquad V(x_1,x_2) := (x_1 \ \ x_2)\cdot P\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \ \Big|\begin{matrix}\text{simplify} \\ \text{float}, 4\end{matrix} \rightarrow 0.7963\cdot x_1^{\,2} + 0.213\cdot x_2^{\,2} + -0.07407\cdot x_1\cdot x_2$$

$$\frac{d}{dx_1}V(x_1,x_2) \rightarrow -0.07407\cdot x_2 + 1.5926\cdot x_1 \qquad \frac{d}{dx_2}V(x_1,x_2) \rightarrow -0.07407\cdot x_1 + 0.426\cdot x_2$$

В нашем уравнении $v_{x1} = \frac{d}{dt}x_1 = -0.07407\cdot x_2 + 1.5926\cdot x_1$ $\qquad v_{x2} = \frac{d}{dt}x_2 = -0.07407\cdot x_1 + 0.426\cdot x_2$

поэтому производная функции Ляпунова будет выглядеть так

$$\frac{d}{dt}V(x_1,x_2) = \left(\frac{d}{dt}x_1\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x_1}V(x_1,x_2) + \left(\frac{d}{dt}x_2\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x_2}V(x_1,x_2) = (-0.07407\cdot x_2 + 1.5926\cdot x_1)\cdot(-1\cdot x_1 + 2\cdot x_2) + (-0.07407\cdot x_1 + 0.426\cdot x_2)\cdot(-8\,x_1 +$$

введем обозначения

$$x1 := x^{\langle 1\rangle} \qquad x2 := x^{\langle 2\rangle} \qquad t := x^{\langle 0\rangle}$$

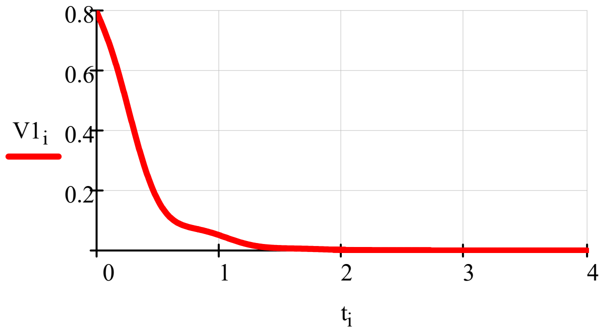
$$dV_i := (-0.07407\cdot x2_i + 1.5926\cdot x1_i)\cdot(-1\cdot x1_i + 2\cdot x2_i) + (-0.07407\cdot x1_i + 0.426\cdot x2_i)\cdot(-8\,x1_i - 2\cdot x2_i)$$

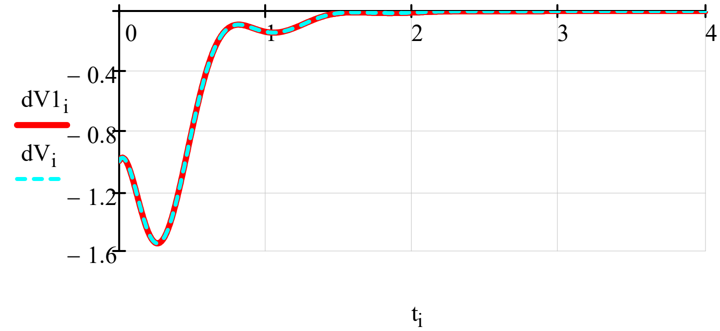
$$C := A^T\cdot P + P\cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$ или $$dV1_i := (x1_i \ \ x2_i)\cdot C\cdot\begin{pmatrix} x1_i \\ x2_i \end{pmatrix}$$

**5)** Построим функцию Ляпунова и ее производную от времени

$V1_i := V(x1_i, x2_i)$ ***функция Ляпунова в зависимости от времени***

***производная функции Ляпунова в зависимости от времени*.**
Критерий Ляпунова вылняется, производная функции Ляпунова меньше нуля

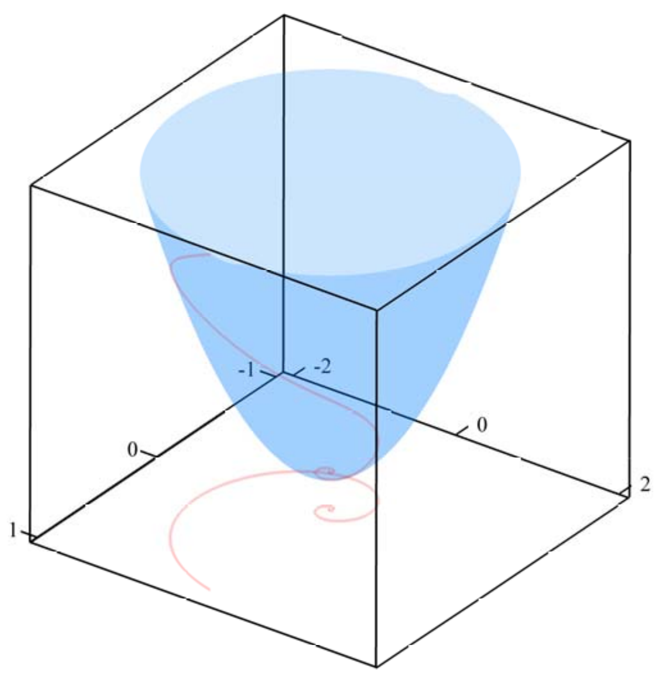


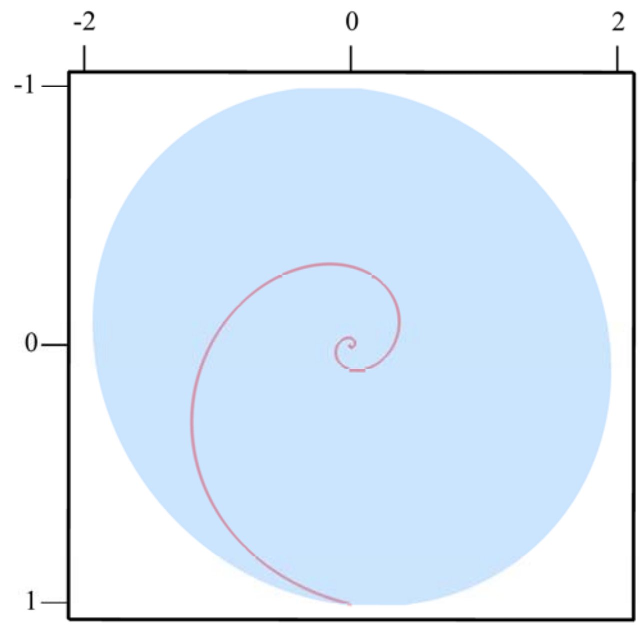




**6)** Построим поверхность функции Ляпунова и приведем решение системы на поверхности Ляпунова

$V(x_1, x_2) := 0.7963 \cdot x_1^{2} + 0.213 \cdot x_2^{2} + -0.07407 \cdot x_1 \cdot x_2 \qquad Vo_i := -0.1$

вид сверху




$V, \left(x^{\langle 1 \rangle}, x^{\langle 2 \rangle}, V1\right), \left(x^{\langle 1 \rangle}, x^{\langle 2 \rangle}, Vo\right)$

$V, \left(x^{\langle 1 \rangle}, x^{\langle 2 \rangle}, V1\right), \left(x^{\langle 1 \rangle}, x^{\langle 2 \rangle}, Vo\right)$

**7)** Написать выводы по работе !