Лекция 6

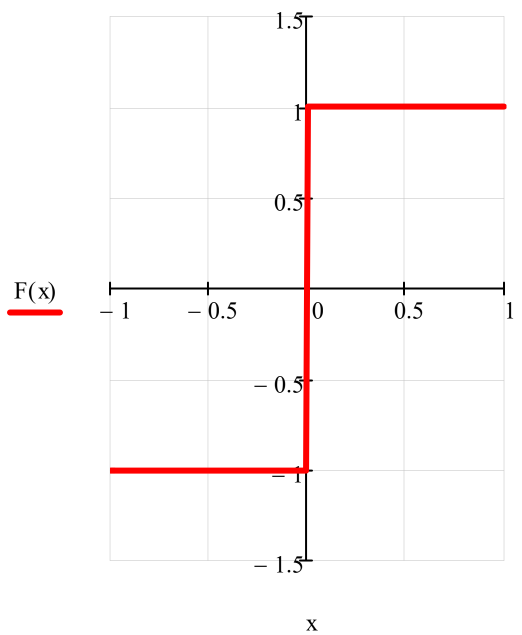
(Метод Понтрягина (Принцип Максимума), Метод Беллмана, мы пока пропустим. Мы вернемся к этим методам на последующих лекциях. Они очень похожи на метод Ляпунова где ищется производная функции Ляпунова.

Существенно-нелинейные системы.

Приведем типовые характеристики нелинейных систем. Это кусочно-постоянные или кусочно-линейные функции. Их иногда называют релейными характеристиками.

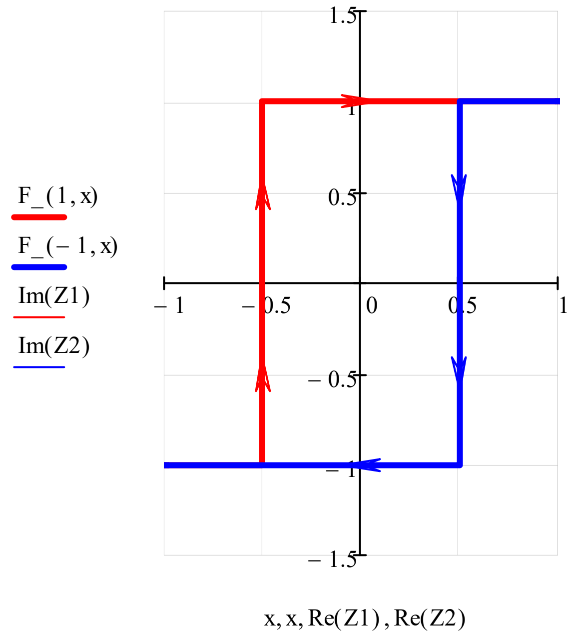
$c := 1$ $\quad F(x) := c\cdot \mathrm{sign}(x)$

$$F(x) = \mathrm{sign}(x)$$



$b := 0.5$ $\quad F\_(v, x) := \mathrm{if}(v > 0, F(x + b), F(x - b))$

Характеристика гистерезисного типа



На характеристиках гистерезисного типа важно учитывать направления процесса, и поэтому в качестве добавочного аргумента здесь появляется скорость. Когда координата увеличивается, скорость положительна, а когда координата уменьшается, скорость отрицательна. Учитывая скорость процесса можно выбирать соответствующие ветви гистерезисного графика.

Характеристика с зоной замирания (характеристики моделирующие люфт, или замирание системы)

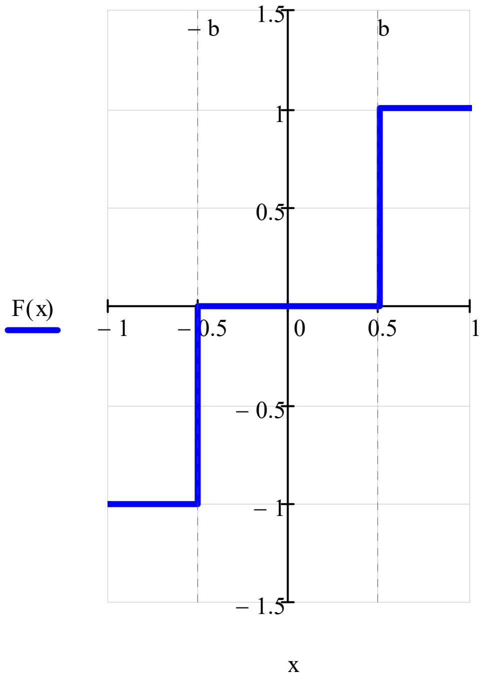
$a := 1 \quad b := 0.5$

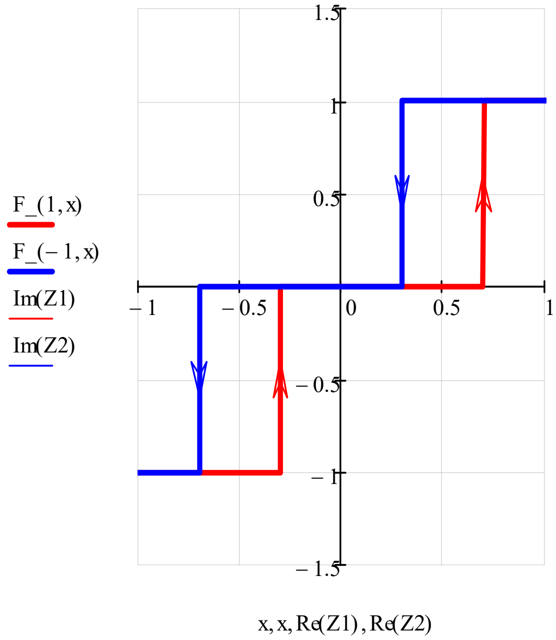
$$F(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } -b \le x \le b \\ a\cdot \mathrm{sign}(x) & \text{if } b < |x| \end{cases}$$

$x := -2, -2 + 0.001 .. 2$

$Z2 := \mathrm{stack}(v, \sigma, v2) \quad b2 := 0.2$

$F\_(v, x) := \mathrm{if}(v > 0, F(x - b2), F(x + b2))$



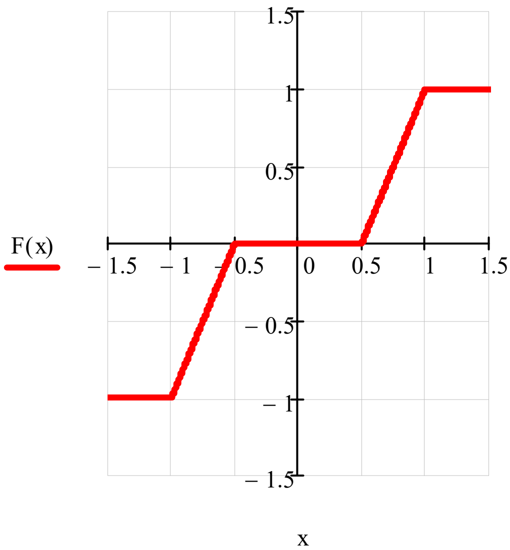


Кусочно-линейные с зоной замирания

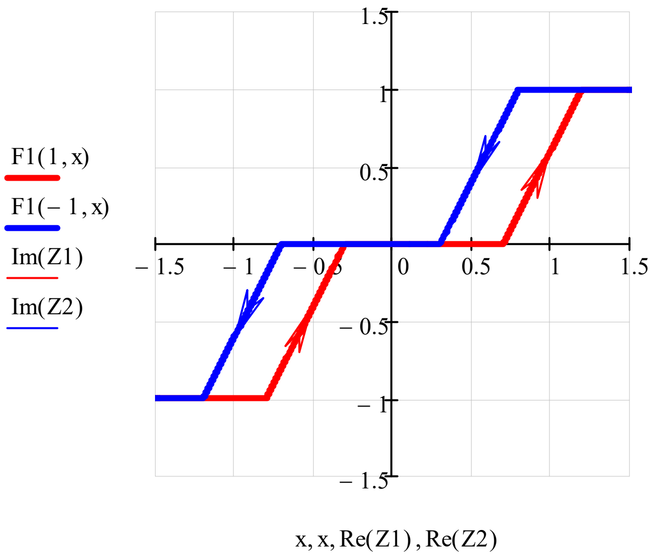
$b := 0.5 \quad a := 2$

$$F(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } |x| < b \\ (x - b)\cdot a & \text{if } 1 \ge x \ge b \\ (x + b)\cdot a & \text{if } -1 \le x \le -b \\ (1 - b)\cdot a\cdot \operatorname{sign}(x) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$F(x) := F(x) \quad s := 0.2$



$F1(v, x) := \text{if}(v > 0, F(x - s), F(x + s))$

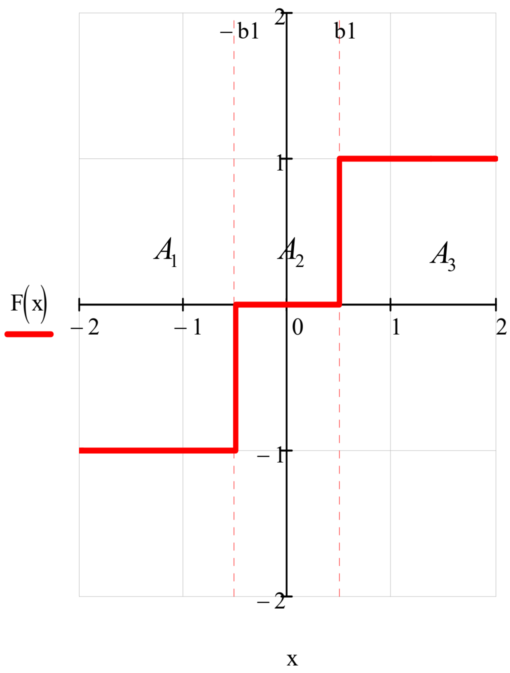


Для характеристик представленного типа невозможно исследовать устойчивость системы, основываясь на разложении поведения системы в окрестности точек положения равновесия. Потому что в таких системах появляется множество точек положения равновесия. Эти точки положения равновесия образуют отрезки или кривые, которые называются ***аттракторами*** (***Предельные циклы Пуанкаре*** **H.Poincare**). Такие кривые

образуются при переходе нелинейной системы в режим автоколебания. Поэтому поведение системы анализируется вокруг аттрактора, и в таком случае удобно использовать метод гармонической линеаризации.
Метод гармонической линеаризации является аналогом разложения в окрестности точек положения равновесия для обычных нелинейных систем..
Рассмотрим переходные процессы в существенно-нелинейных системах.

Переходные процессы и автоколебания в релейных системах.
Метод припасовывания (сшивание на границе раздела областей)

Рассмотрим нелинейную систему с нелинейным элементом с зоной нечувствительности.



$$T\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}=-kF(x)$$

Введем новую переменную $y = dx/dt$ и получим систему уравнений, которую запишем в форме Каши:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{1}{T}y-\dfrac{1}{T}kF(x)\end{cases}$$

Теперь можно решить эту систему уравнения разбив на подобласти решений, где нелинейная функция принимает три различных значения это подобласти A_1, A_2, A_3

$$F(x)=1\rightarrow\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{1}{T}y-\dfrac{1}{T}k\end{cases},\quad F(x)=0\rightarrow\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{1}{T}y\end{cases},\quad F(x)=-1\rightarrow\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{1}{T}y+\dfrac{1}{T}k\end{cases}$$

$$T\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}=-1\qquad T\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}=0\qquad T\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}=1$$

Подели второе уравнение на первое и получим

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{1}{T}y-\dfrac{1}{T}kF(x)\end{cases}\rightarrow\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{T}\frac{y+kF(x)}{y}\rightarrow\frac{ydy}{y+kF(x)}=-\frac{dx}{T}$$

Последнее уравнение нужно проинтегрировать слева и справа. Добавим и вычтем в числителе слагаемое вида $kF(x)$

$$\frac{\left[\left(y+kF(x)\right)-kF(x)\right]dy}{y+kF(x)}=-\frac{dx}{T}\ \rightarrow\ dy-kF(x)\frac{dy}{y+kF(x)}=-\frac{dx}{T}\ \rightarrow$$

$$y-kF(x)\ln\left|y+kF(x)\right|=-\frac{x}{T}+C$$

C- определяется начальными условиями.

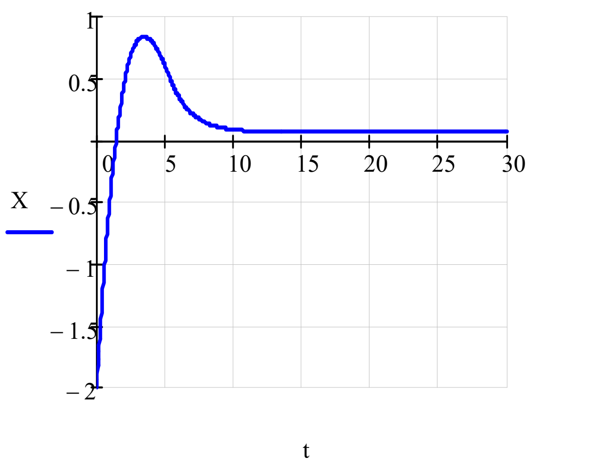
Теперь, если подставить значения нелинейной функции в соответствующих областях, можно получить:

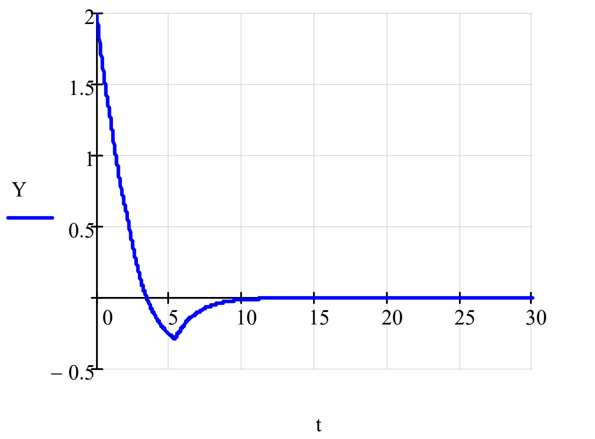
$$y-k\ln\left|y+k\right|=-\frac{x}{T}+C\quad \text{для области } A_1$$

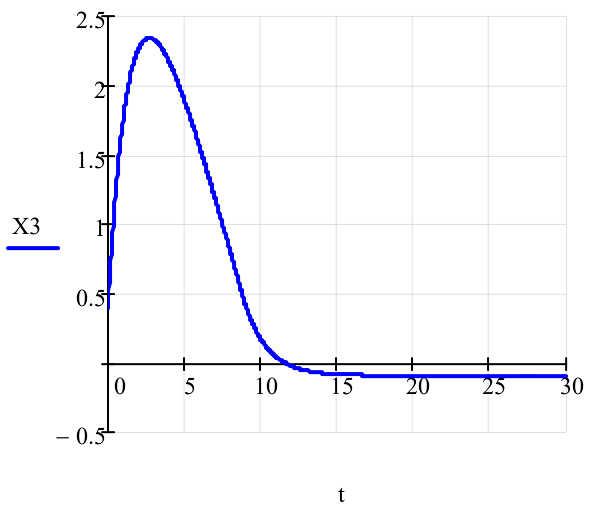
$$y=-\frac{x}{T}+C\quad \text{для области } A_2$$

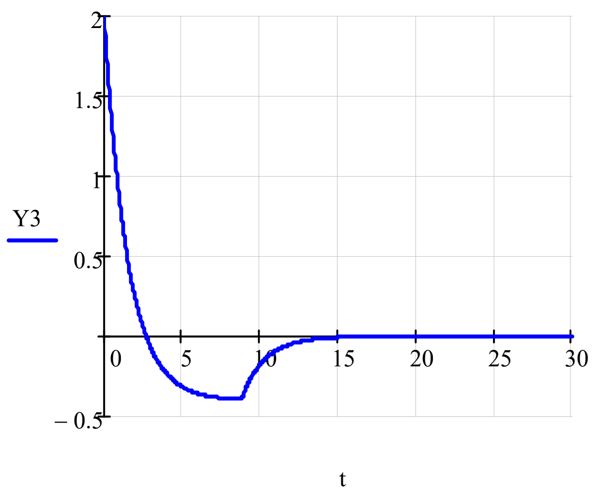
$$y-k\ln\left|y-k\right|=-\frac{x}{T}+C\quad \text{для области } A_3$$

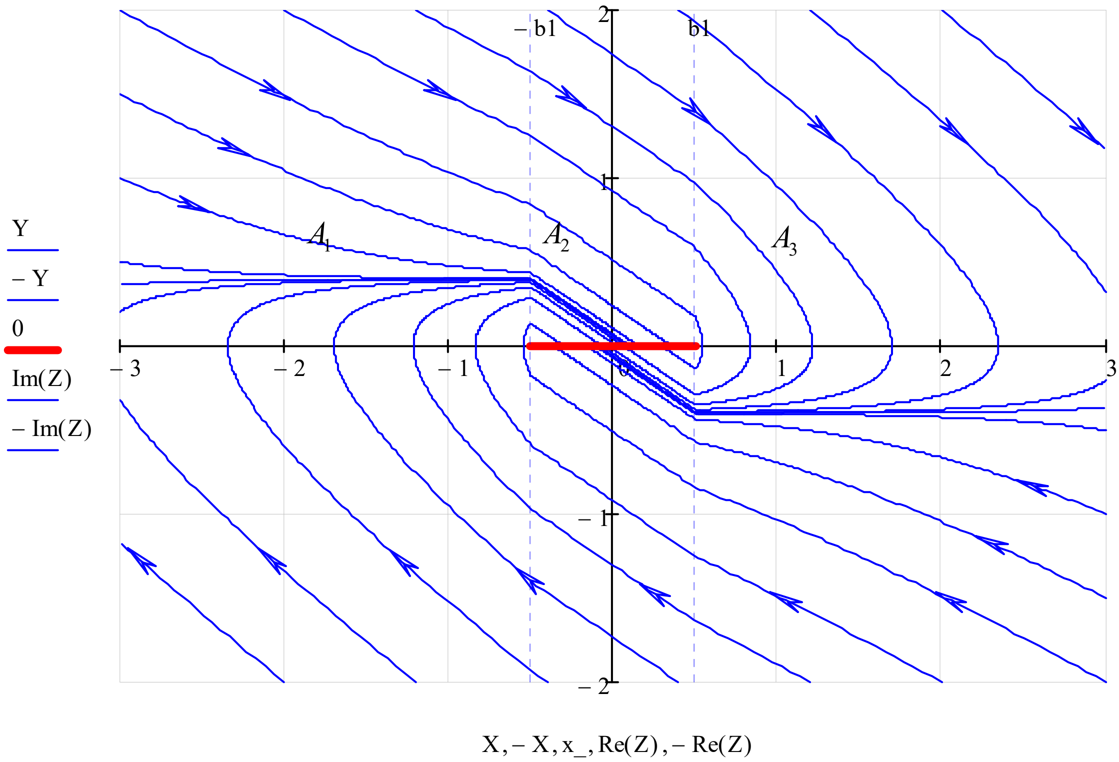
Если продолжать решать задачу аналитически, то нужно сшивать решения на границе областей, считая переменные x, y непрерывными функциями времени. Это называется метод припасовывания (см. рис. ниже). Однако при решении этой задачи численным методом предполагает автоматическое припасовывание решений. Примеры решений для нескольких начальных условий приведены на рисунках ниже.





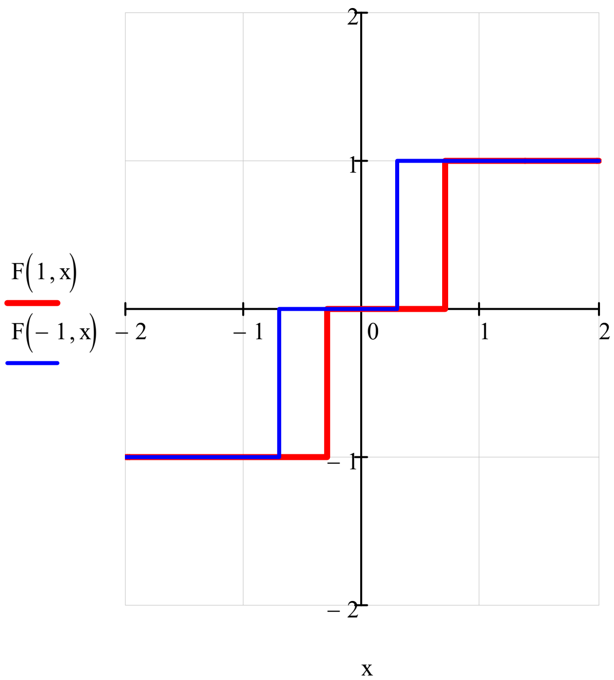






Мы видим на графиках, что решение сходятся не в точку, а в некоторый ***атрактиный*** отрезок.

Нелинейная характеристика с зоной замирания и гистерезисного типа

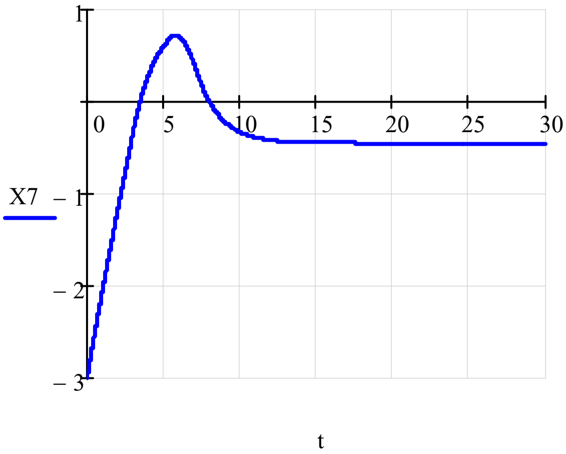


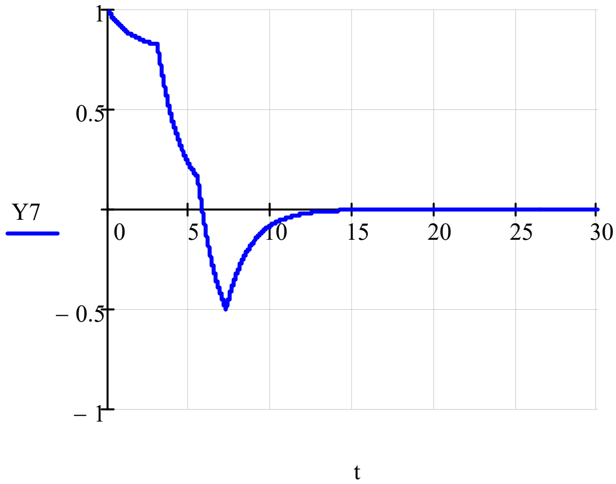
$F(v,x) := \text{if}(v > 0, F(x - q), F(x + q))$ $k_1 := 0.4$ $T_1 := 1.5$ $D(t,x) := \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{-x_1}{T_1} - \frac{k_1}{T_1} \cdot F(x_1, x_0) \end{pmatrix}$

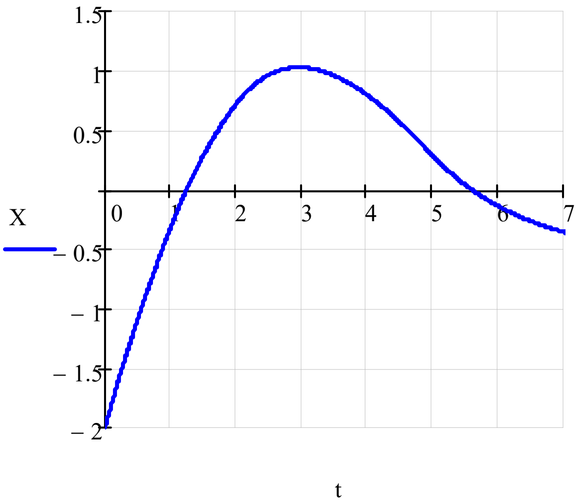
$N := 10^3$ $T := 30$ $xo := -2$

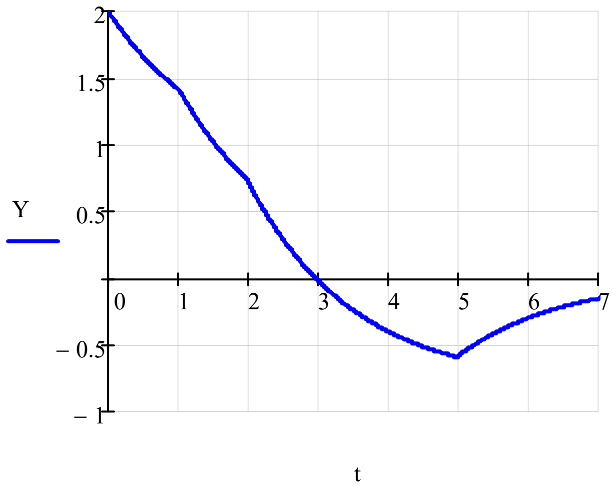
$yo := 3$

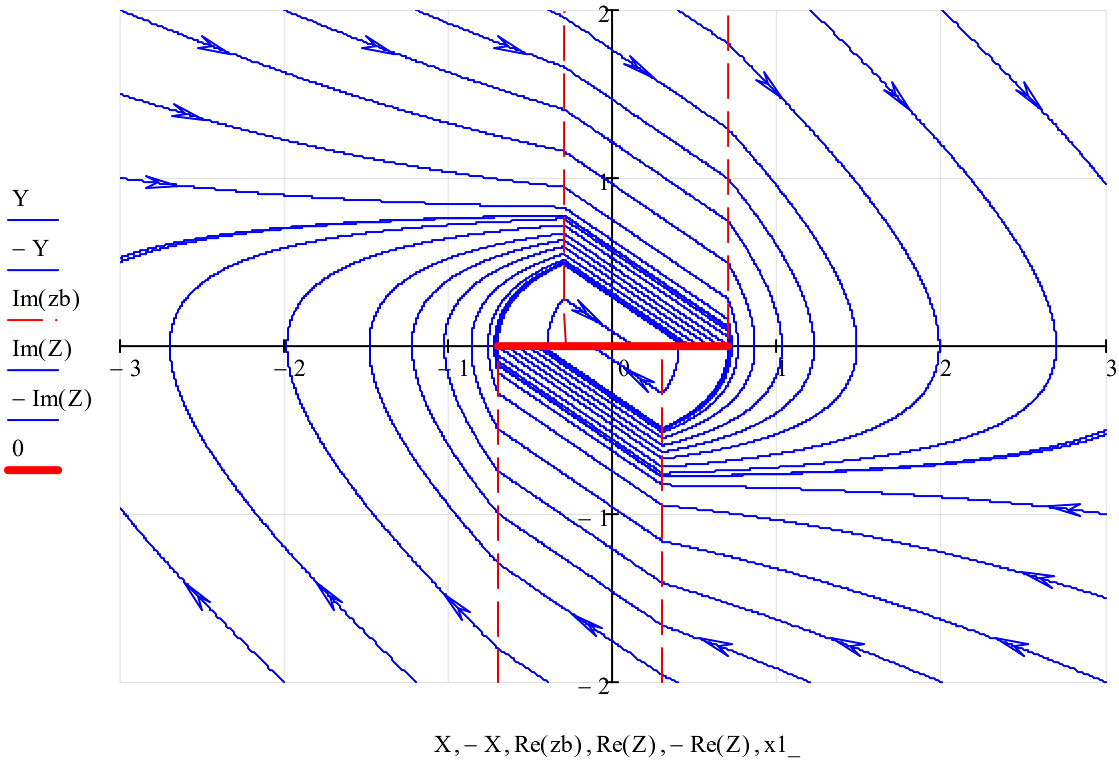
$$x(xo, yo) := \mathrm{rkfixed}\left[\begin{pmatrix} xo \\ yo \end{pmatrix}, 0, T, N, D\right] \qquad t := x(xo, yo)^{\langle 0 \rangle}$$











Решения уравнений в ***Mathcad***

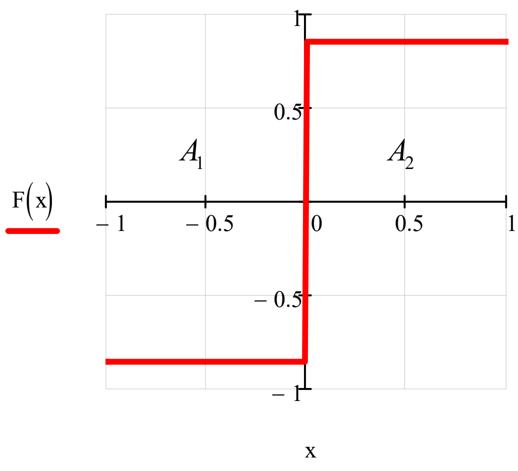
$$k_1 := 0.4 \quad T_1 := 1.5 \quad D(t,x) := \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{-x_1}{T_1} - \frac{k_1}{T_1} \cdot F(x_0) \end{pmatrix}$$

$$N := 10^3 \quad T := 30 \quad xo := -2 \quad yo := 3$$

$$x(xo,yo) := rkfixed\left[\begin{pmatrix} xo \\ yo \end{pmatrix}, 0, T, N, D\right] \quad t := x(xo,yo)^{\langle 0 \rangle} \quad X := x(-2,2)^{\langle 1 \rangle} \quad Y := x(-2,2)^{\langle 2 \rangle}$$

Мы видим на графиках, что решение сходятся не в точку, а в некоторый ***атрактиный*** отрезок. Подобластей с различными решениями стало больше.

Рассмотрим случай, когда нелинейная система имеет функции знака



$$T\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = -kF(x)$$

Введем новую переменную $y = dx/dt$ и получим систему уравнений, которую запишем в форме Каши:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{1}{T}y - \dfrac{1}{T}kF(x) \end{cases}$$

Теперь можно решить эту систему уравнения

	разбив на подобласти решений, где нелинейная функция принимает три различных значения это подобласти A_1, A_2

$$F(x)=1 \to \begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=y \\ \dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{1}{T}y-\dfrac{1}{T}k \end{cases}, \qquad F(x)=-1 \to \begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=y \\ \dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{1}{T}y+\dfrac{1}{T}k \end{cases}$$

$$T\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}=-1 \qquad T\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}=1$$

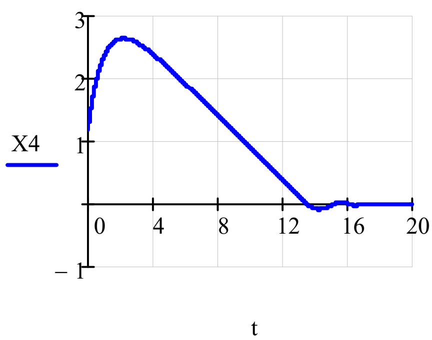
Подели второе уравнение на первое и получим

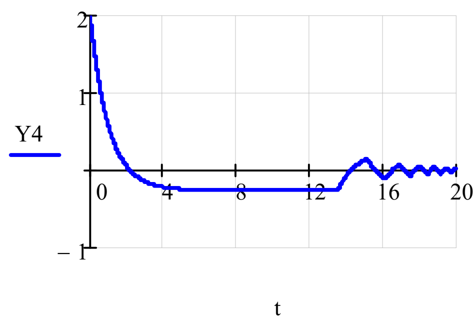
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=y \\ \dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{1}{T}y-\dfrac{1}{T}kF(x) \end{cases} \to \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{T}\frac{y+kF(x)}{y} \to \frac{ydy}{y+kF(x)}=-\frac{dx}{T}$$

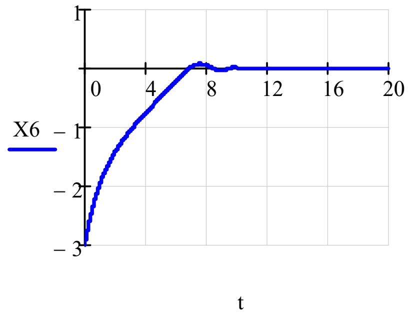
Последнее уравнение нужно проинтегрировать слева и справа. Добавим и вычтем в числителе слагаемое вида $kF(x)$

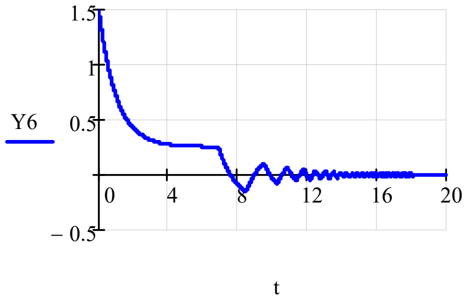
$xo := 2 \quad k_1 := 0.3 \quad T_1 := 1 \quad T := 20 \quad D1(t,x) := \begin{pmatrix} x_1 \\ \dfrac{-x_1}{T_1} - \dfrac{k_1}{T_1}\cdot F(x_0) \end{pmatrix} \quad yo := 1$

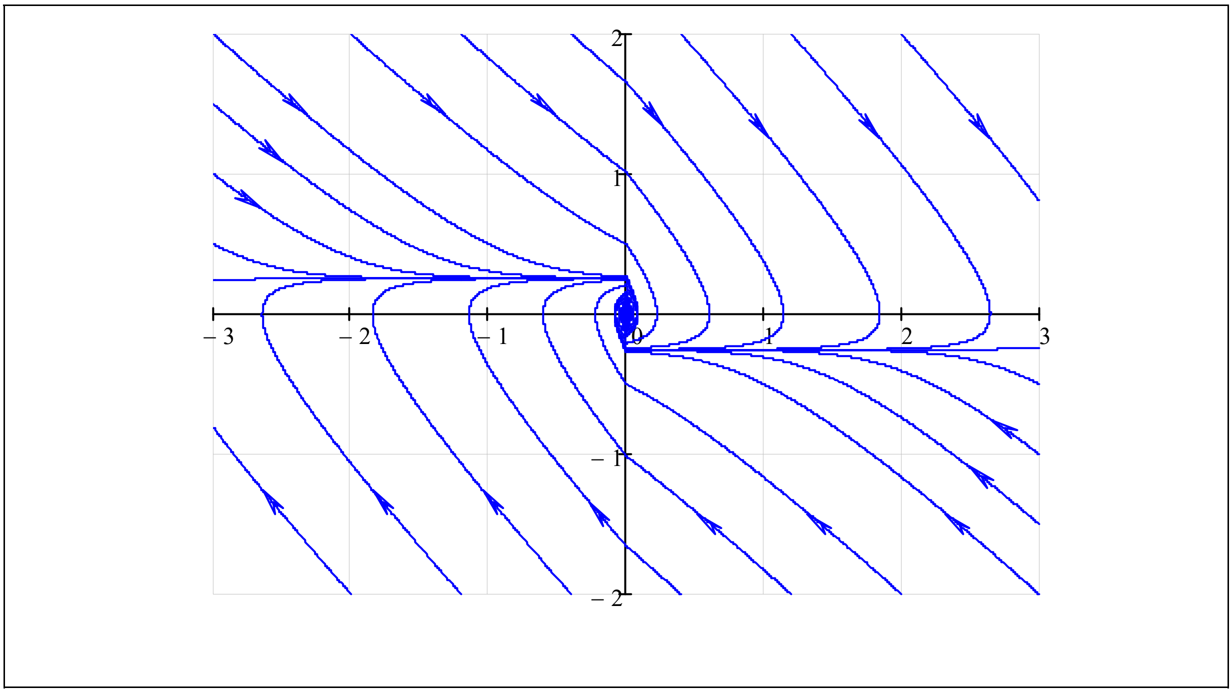
$x(xo,yo) := \mathrm{rkfixed}\left[\begin{pmatrix} xo \\ yo \end{pmatrix}, 0, T, N, D1\right] \quad t := x(xo,yo)^{\langle 0 \rangle}$





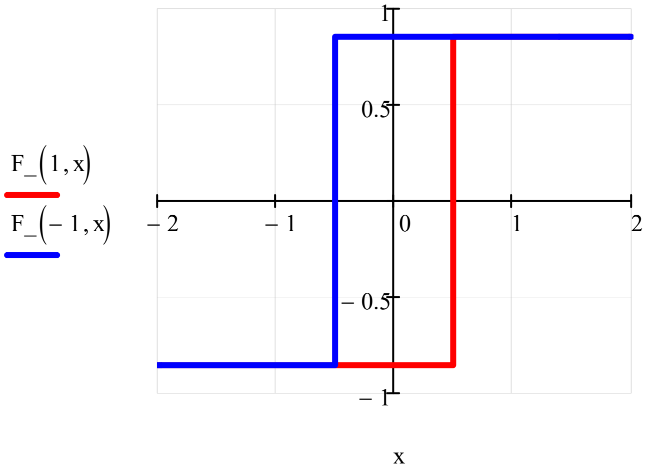


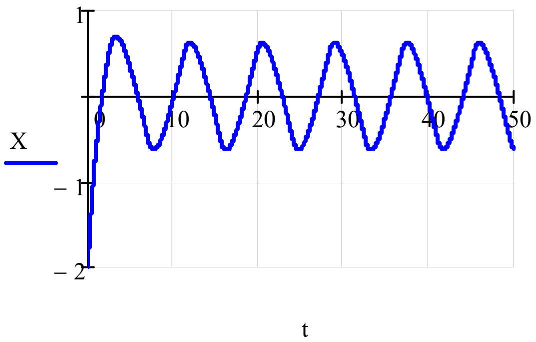


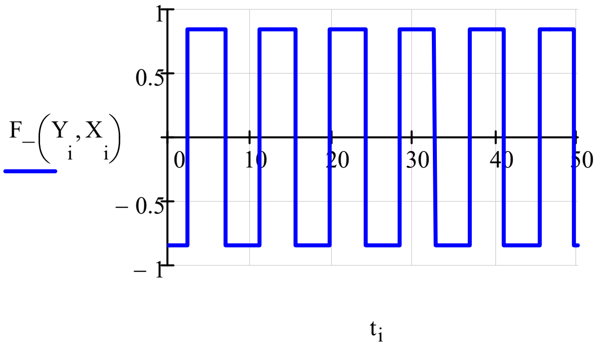

2
1
− 1
− 2
− 3
− 2
− 1
0
1
2
3

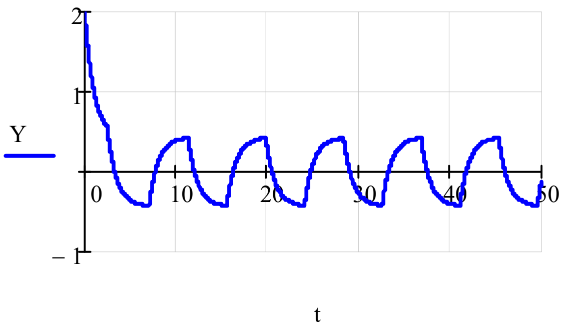
Пример с гистерезисной кривой

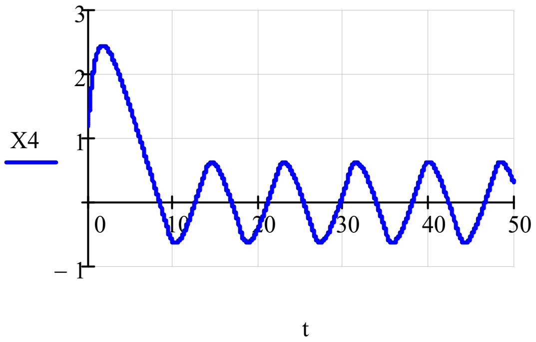
$c := 0.85 \quad b2 := 0.5 \qquad F\_(v,x) := \mathrm{if}(v > 0, F(x - b2), F(x + b2))$

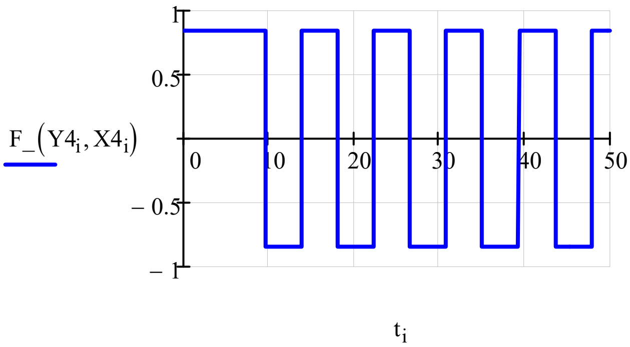


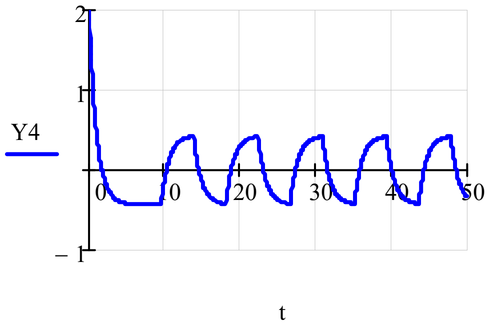


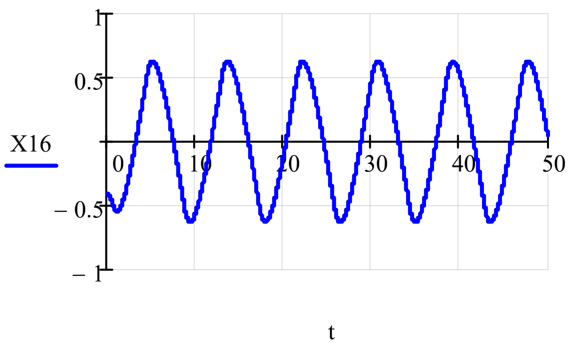


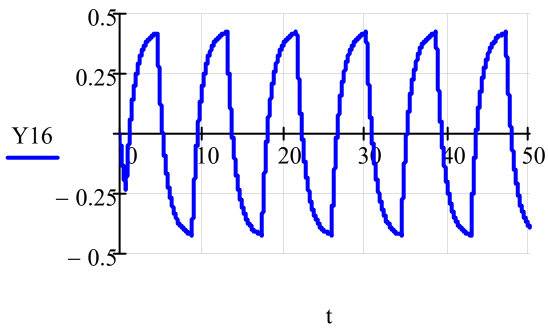


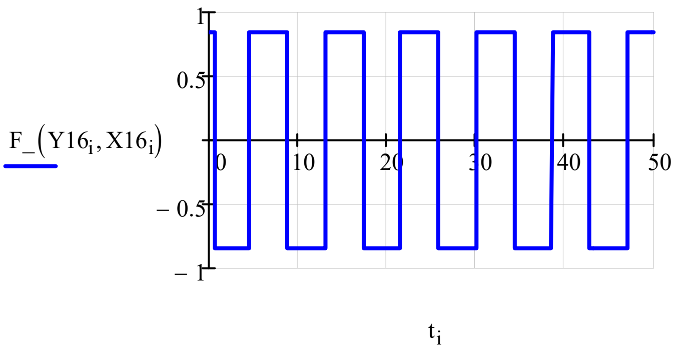

X4
t


F_(Y4_i, X4_i)
t_i


Y4
t


X16
t


Y16
t


F_(Y16_i, X16_i)
t_i

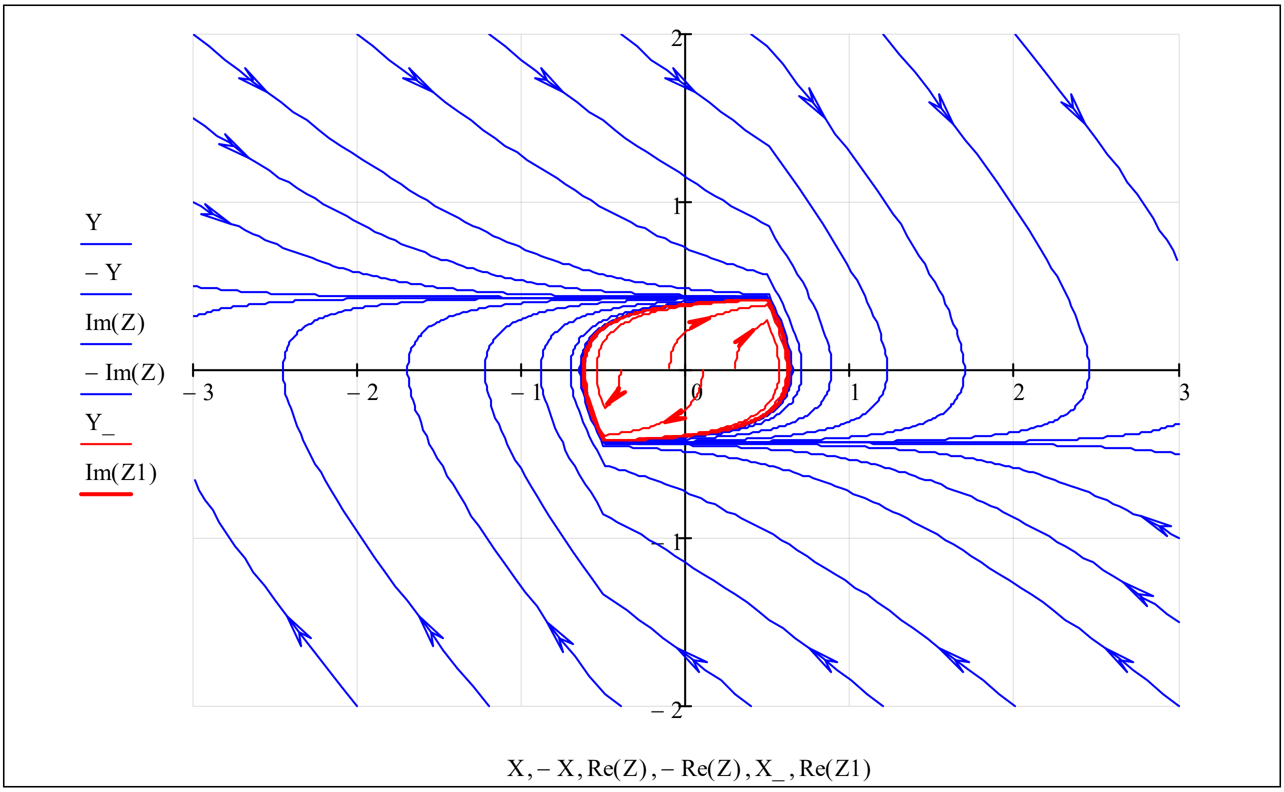
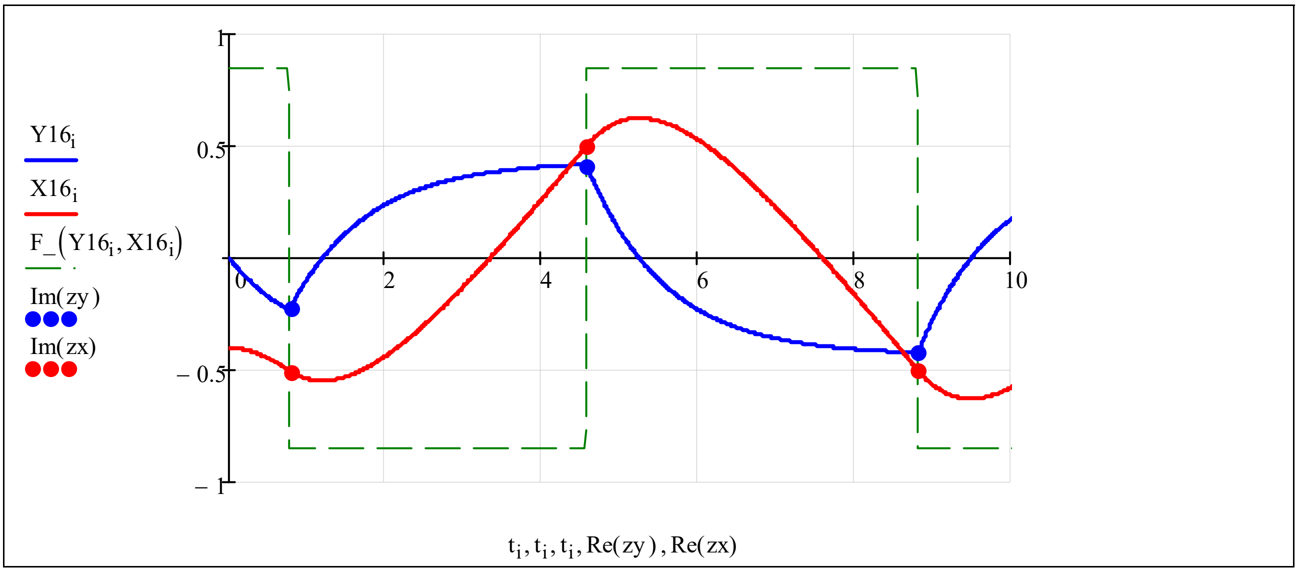
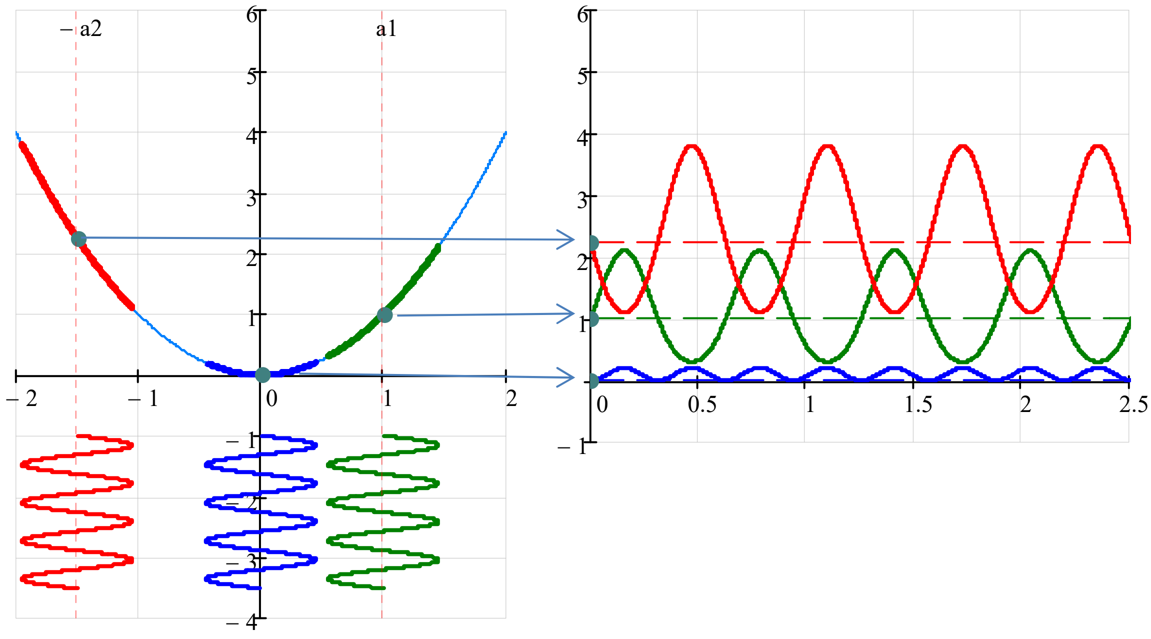


График для объяснения припасовывания. Пунктиром показаны моменты переключения нелинейной функции



Примеры автоколебательных систем и их применение

Поиск экстремума



По фазе сигнала определяют, с какой стороны от минимума функционала находится система.

По амплитуде сигнала определяют, насколько система близка к минимуму функционала.