Лекция 5

Синтез оптимального управления

Рассмотрим нелинейную систему (объект управления)

$$\dot{x} = f(x,u), \ \ x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

С функционалом качества

$$J(x) = \int_{t_0}^{T} f^0(x,u)\,dt$$

$$x^* = \arg\min_{x(t)} J(x), \qquad u^* = \arg\max_{u(t)} J(u)$$

Поставим задачу оптимального управления.

Найти такое оптимальное управление u^*, которое обеспечивает оптимальный переходный процесс x^* (желаемый процесс) объекта управления при граничных условиях $x(0) = x_0$, $x(T) = x_T$ и доставляющий минимум функционалу. Эта задача на условный экстремум.

В качестве неголономного ограничения запишем уравнение (1)

$$q(x,\dot{x},u) = \dot{x} - f(x,u) = 0.$$

Запишем подынтегральную функцию расширенного функционала

$$\widehat{f}^0(x,\dot{x},u,\lambda) = f^0(x,u) + \lambda^T\left(\dot{x} - f(x,u)\right). \tag{*}$$

$$J(x,u,\lambda) = \int_{t_0}^{T} \widehat{f}^0(x,\dot{x},u,\lambda)\,dt.$$

Для определения экстремума функционала, нужно записать уравнения Эйлера Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \widehat{f}^0}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \widehat{f}^0}{\partial x} = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial \widehat{f}^0}{\partial u} = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial \widehat{f}^0}{\partial \lambda} = 0 \tag{4}$$

Из уравнения (4) получаем

$$\dot{x} = f(x,u) .$$

Из уравнения (2) получаем так называемое ***сопряженное уравнение*** (в результате дифференцирования функции $\widehat{f}^0$ по переменной x)

$$\dot{\lambda} = -\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T \lambda + \left(\frac{\partial f^0}{\partial x}\right)^T.$$

Для замыкания уравнений расшифровываем уравнение (3)

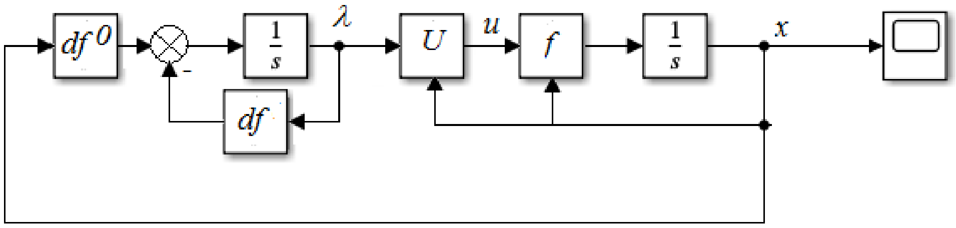
$$\frac{\partial \widehat{f}^0}{\partial u} = 0 \rightarrow \frac{\partial f^0}{\partial u} - \lambda^T \frac{\partial f}{\partial u} = 0$$

Решая последнее уравнение, получаем зависимость $u = U(x, \lambda)$. Сведем последние уравнения в систему

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ \dot{\lambda} = -\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T \lambda + \left(\frac{\partial f^0}{\partial x}\right)^T \\ u = U(x, \lambda) \end{cases} \tag{5}$$

Полученная система уравнений ***с краевыми условиями*** позволяет получить желаемые траектории системы x^*, u^* которые доставляют минимум функционалу $J(x, u)$

Приведем для неё структурную схему



В качестве **примера** рассмотрим линейную систему вида

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

С квадратичным функционалом

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty} \left(x^T Q x + \rho u^2\right) dt$$

Алгоритм действия следующий:

1.Записывается расширенный функционал с неопределенным коэффициентом Лагранжа.

$$J=\int_{t_0}^{\infty}\frac{1}{2}\left(x^TQx+\rho u^2\right)+\lambda\left(\dot{x}-Ax-Bu\right)dt$$

$$\widehat{f}^0(x,\dot{x},u,\lambda)=\frac{1}{2}\left(x^TQx+\rho u^2\right)+\lambda\left(\dot{x}-Ax-Bu\right).$$

2. Записывается уравнения Эйлера – Лагранжа для подынтегральной функции расширенного функционала (для обобщенных координат).

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\widehat{f}^0}{\partial\dot{q}}-\frac{\partial\widehat{f}^0}{\partial q}=0\ ,\quad q=\{x,u,\lambda\}$$

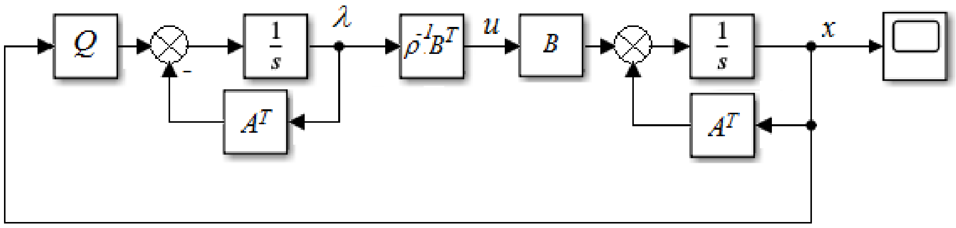
3. Записывается система обыкновенных дифференциальных уравнений

Система уравнений (5) будет в этом случае иметь вид

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ \dot{\lambda}=-A^T\lambda+Qx\\ \rho u-\lambda^TB=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ \dot{\lambda}=-A^T\lambda+Qx\\ u=\dfrac{1}{\rho}B^T\lambda\end{cases}$$

Подставим последнее уравнение в первое и получим.

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+\dfrac{1}{\rho}BB^T\lambda\\ \dot{\lambda}=-A^T\lambda+Q\end{cases}\tag{6}$$



Для полученной системы нужны еще краевые условия. На правой границе заданы условия на бесконечности и это затрудняет решение задачи краевой задачи. В приведенной системе могут быть не устойчивым либо первое уравнение, либо сопряженное уравнение.

Рекомендуется следующий подход. Нужно искать решение сопряженного вектора λ в виде линейной зависимости от x

$$\lambda=-Px\quad\rightarrow\quad\dot{\lambda}=-P\dot{x}$$

Решая совместно с уравнением (6) получим

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \dfrac{1}{\rho} BB^T \lambda \\ \dot{\lambda} = -A^T \lambda + Qx = -P\dot{x} \end{cases} \rightarrow -P\dot{x} = -P\left(Ax + \frac{1}{\rho} BB^T \lambda \right) = -A^T \lambda + Qx$$

$$-PAx + \frac{1}{\rho} PBB^T Px = A^T Px + Qx \rightarrow \left(PA + A^T P - \frac{1}{\rho} PBB^T P + Q \right) x = 0$$

Последнее выражение справедливо, если матрица P удовлетворяет уравнению

$$PA + A^T P - \frac{1}{\rho} PBB^T P = -Q \tag{7}$$

Последнее уравнение очень похоже на уравнение Ляпунова. Оно называется ***уравнение Лурье*** и относится к ***уравнению типа Риккати***. Если решить матричное алгебраическое уравнение, то решения системы можно записать в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \dfrac{1}{\rho} BB^T \lambda \\ \lambda = -Px \end{cases} \rightarrow \dot{x} = Ax - \frac{1}{\rho} BB^T Px = \left(A - \frac{1}{\rho} BB^T P \right) x = A_c x$$

$$u = Kx, \;\; K = -\frac{1}{\rho} B^T P$$

Из уравнения видно, что спектр исходной матрицы A, то есть её корни сдвинулись по отношению к границе устойчивости. Например, спектр матрицы A может иметь не устойчивые корни, а после преобразований становится устойчивым.

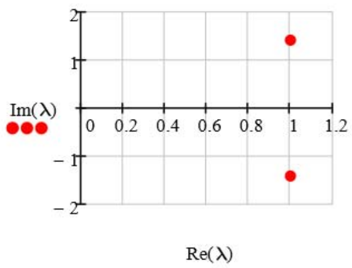
Приведем несколько **примеров**

$$\frac{d}{dt}x_1 = x_1 - 2 \cdot x_2 + 1$$
$$\frac{d}{dt}x_2 = x_1 + x_2$$

$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \lambda := \text{eigenvals}(A) = \begin{pmatrix} 1 + 1.414i \\ 1 - 1.414i \end{pmatrix}$

Фунционал качества

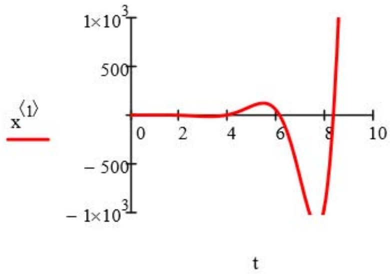
$$J = \int_0^{\infty} \left(x^T \cdot Q \cdot x + \rho \cdot u^2 \right) dt$$

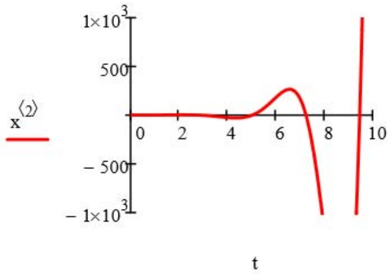


Дифференциальное уравнение решается методом Рунге-Кутта 4-го порядка

$D(t,x) := A \cdot x + B$ $\quad N := 10^2 \cdot 3$ $\quad T := 10$

$x := \text{rkfixed}\left[\begin{pmatrix} 0.1 \\ 0 \end{pmatrix}, 0, T, N, D \right]$ $\quad t := x^{\langle 0 \rangle}$





Ршаем также как решали для метода Ляпунова

$x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $\quad Q := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.7 \end{pmatrix}$ $\quad x^T \cdot Q \cdot x \to x_1^{\ 2} + 0.7 \cdot x_2^{\ 2}$ $\quad P := Q$ $\quad \rho := 0.25$

Given

$$A^T \cdot P + P \cdot A - \frac{1}{\rho} \cdot P \cdot B \cdot B^T \cdot P = -Q$$

$$P := \mathrm{Find}(P) = \begin{pmatrix} 1.289 & 1.532 \\ 1.532 & 7.411 \end{pmatrix}$$

Найден оптимальный коэффициент усиления

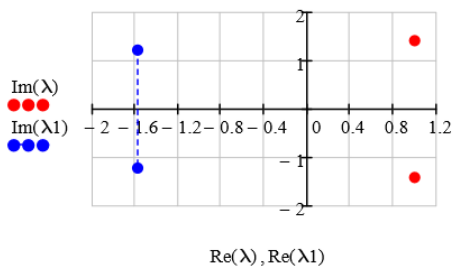
$K := \frac{1}{\rho} \cdot B^T \cdot P = (5.154 \quad 6.129)$ $\qquad B \cdot K = \begin{pmatrix} 5.154 & 6.129 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

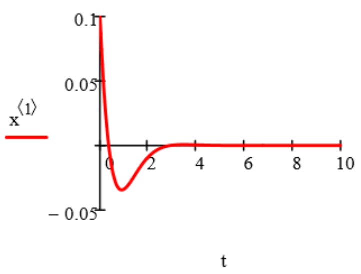
$Ac := A - B \cdot K = \begin{pmatrix} -4.154 & -8.129 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \lambda := \mathrm{eigenvals}(A) = \begin{pmatrix} 1 + 1.414i \\ 1 - 1.414i \end{pmatrix}$ корни которые были в неустойчивой системе

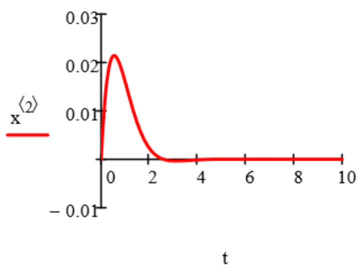
$\lambda1 := \mathrm{eigenvals}(Ac) = \begin{pmatrix} -1.577 + 1.22i \\ -1.577 - 1.22i \end{pmatrix}$ корни которые получились после преобразований

$D(t, x) := Ac \cdot x$ $\qquad N := 10^2 \cdot 3$ $\qquad T := 10$

$x := \mathrm{rkfixed}\left[\begin{pmatrix} 0.1 \\ 0 \end{pmatrix}, 0, T, N, D\right]$ $\qquad t := x^{\langle 0 \rangle}$





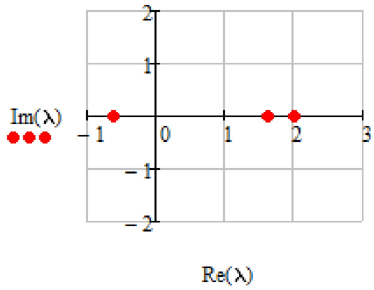


Приведем метод Аккермана. Для этого нам нужна матрица управляемости.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda := \mathrm{eigenvals}(A) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1.618 \\ -0.618 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Желаемые корни

$$\lambda 1 := (-1 \;\; -2 \;\; -3)^T$$



Желаемое характристическое уравнение

$$z(p) := \left(p - \lambda 1_0\right)\cdot\left(p - \lambda 1_1\right)\cdot\left(p - \lambda 1_2\right)$$

$$z(p) \text{ expand } \rightarrow p^3 + 6\cdot p^2 + 11\cdot p + 6$$

Уравнение Гамельтона Келли для желаемой матрицы

$$I := \mathrm{identity}(3) \qquad A^3 + 6\cdot A^2 + 11\cdot A + I\cdot 6 = 0$$

Матрица управляемости упраляемости

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad A\cdot B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad A^2\cdot B = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad C := \mathrm{augment}\left(B, A\cdot B, A^2\cdot B\right)$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 8 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \qquad C^{-1} = \begin{pmatrix} 1.25 & 0.25 & -0.5 \\ 0.25 & -1.75 & 1.5 \\ -0.25 & 0.75 & -0.5 \end{pmatrix}$$

Ранг матрицы должен соответствовать порядку исходной системы

$$\mathrm{rank}(C) = 3$$

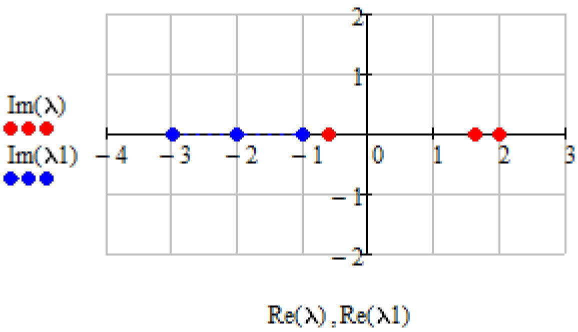
Формула Аккермана для определения коэффициента усиления

$$k := (0 \;\; 0 \;\; 1)\cdot C^{-1}\left(A^3 + 6\cdot A^2 + 11\cdot A + I\cdot 6\right)$$

$$k = (-6 \;\; 17 \;\; -2)$$

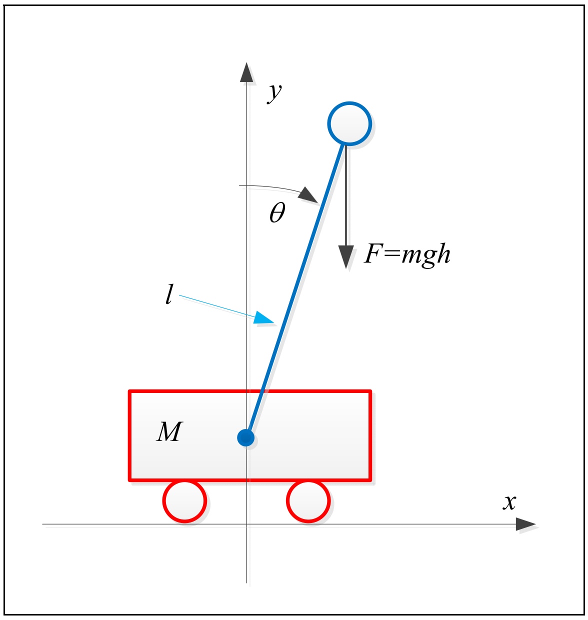
$$Ac := A - B\cdot k \qquad \lambda 1 := \mathrm{eigenvals}(Ac) = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Показано смещения спектра матрицы



Применим рассмотренную теорию к перевернутому маятнику на каретке

Составим уравнения перевернутого маятника на каретке.



Запишем выражение для кинетической энергии системы маятник-каретка. Все обозначения приведены на рисунке. Кинетическая энергия будет состоять из суммы кинетических энергий каретки и маятника

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m{v_A}^2$$

Здесь v скорость груза маятника, определяемая выражением

$$v_A^{\ 2} = \dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2,\ x_A = x + l\sin(\theta),\ y_A = l\cos(\theta),$$
$$\dot{x}_A = \dot{x} + l\cos(\theta)\dot{\theta},\ \ \dot{y}_A = -l\sin(\theta)\dot{\theta},$$
$$v_A^{\ 2} = \dot{x}^2 + 2l\cos(\theta)\dot{\theta}\dot{x}\ + l^2\dot{\theta}^2$$

Подставив последние выражения в выражение для кинетической энергии, получим:

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + 2l\dot{\theta}\dot{x}\cos(\theta)\ + l^2\dot{\theta}^2) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(m + M\right)\dot{x}^2 + \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} + ml\dot{\theta}\dot{x}\cos(\theta)$$

Используем уравнение Лагранжа, в котором используется разность кинетической и потенциальной энергий $L = T - U,\ U = mgh = -mgl(1-\cos(\theta))$,

$L = \frac{1}{2}\left(m+M\right)\dot{x}^2 + m\frac{l^2\dot{\theta}^2}{2} + ml\dot{\theta}\dot{x}\cos(\theta) + mgl(1-\cos(\theta))$, (выражение mgl никак не влияет на Лагранжиан, его можно не учитывать, оно не зависит от переменных)

$$L = \frac{1}{2}\left(m+M\right)\dot{x}^2 + m\frac{l^2\dot{\theta}^2}{2} + ml\dot{\theta}\dot{x}\cos(\theta) - mgl\cos(\theta)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = f\ ,\ \ q = \left\{x, \theta\right\} \text{-обобщенные координаты} \ \rightarrow \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \dfrac{\partial L}{\partial x} = f \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \end{cases}$$

Берем производные по соответствующим координатам и получаем

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{d}{dt}\Big(\left(m+M\right)\dot{x} + ml\dot{\theta}\cos(\theta)\Big) = \left(m+M\right)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos(\theta) - ml\dot{\theta}^2\sin(\theta),\ \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{d}{dt}\Big(ml^2\dot{\theta} + ml\dot{x}\cos(\theta)\Big) = ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x}\cos(\theta) - ml\dot{x}\sin(\theta)\dot{\theta},\ \ \frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl\sin(\theta) - ml\dot{x}\dot{\theta}\sin(\theta)$$

Стрелочками показаны слагаемые, которые сокращаются.

После преобразований получаем систему уравнений (во втором уравнении сократили на величину ml):

$$\begin{cases} \ddot{x}\left(m+M\right)+\ddot{\theta}ml\cos(\theta)-ml\sin(\theta)\dot{\theta}^2=f \\ \ddot{\theta}l+g\sin(\theta)-\ddot{x}\cos(\theta)=0 \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} \ddot{x}\left(m+M\right)+\ddot{\theta}ml\cos(\theta)=ml\sin(\theta)\dot{\theta}^2+f \\ \ddot{x}\cos(\theta)+\ddot{\theta}l=-g\sin(\theta) \end{cases}$$

$$\to \begin{pmatrix} \left(m+M\right) & ml\cos(\theta) \\ \cos(\theta) & l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ml\sin(\theta)\dot{\theta}^2+f \\ -g\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

$$D=\begin{vmatrix} \left(m+M\right) & ml\cos(\theta) \\ \cos(\theta) & l \end{vmatrix}=\left(m+M\right)l-ml\cos^2(\theta)=Ml+ml\sin^2(\theta)$$

Решая задачу методом Крамера получаем:

$$\begin{cases} \ddot{x}=\dfrac{1}{D}\left(ml^2\dot{\theta}^2\sin(\theta)+lf-mgl\sin(\theta)\cos(\theta)\right) \\ \ddot{\theta}=\dfrac{1}{D}\left((M+m)g\sin(\theta)+ml\dot{\theta}^2\sin(\theta)\cos(\theta)-f\cos(\theta)\right) \end{cases}$$

Перейдем к методу пространство состояний, введя дополнительные координаты $\upsilon=\dot{x}, \quad \omega=\dot{\theta}$

$$\begin{cases} \dot{x}=\upsilon \\ \dot{\upsilon}=\dfrac{1}{D}\left(ml^2\dot{\theta}^2\sin(\theta)+lf-mgl\sin(\theta)\cos(\theta)\right) \\ \dot{\theta}=\omega \\ \dot{\omega}=\dfrac{1}{D}\left((M+m)g\sin(\theta)+ml\dot{\theta}^2\sin(\theta)\cos(\theta)-f\cos(\theta)\right) \end{cases} \tag{2}$$

Что бы определить точки положения равновесия надо все производные прировнять нулю и из полученного алгебраического уравнения найти корни. В пределах изменения угла в интервале 0, 2π первая точка это $\theta=0$, а вторая точка это $\theta=\pi$. Найдем якобиан системы. Заметим, что в правые части не входят переменные x, υ. Эти переменные не определяют характер точки положения равновесия

$$A(\theta,\omega)=\begin{pmatrix} \partial F_1/\partial\theta & \partial F_1/\partial\omega \\ \partial F_2/\partial\theta & \partial F_2/\partial\omega \end{pmatrix}$$

Здесь F_1, F_2 правые части уравнения (2). Найдем собственные числа якобиана в точках $\theta=0$ и $\theta=\pi$. Это будет седло и центр.

Разложим в окрестности $\theta = 0$ все функции входящие в (2). Линеаризуем уравнения системы (2) принимая, во внимание, что $\sin(\theta) \sim \theta,\ \cos(\theta) \sim 1,\ \dot{\theta} = 0$

$$\begin{cases} \dot{x} = \upsilon \\ \dot{\upsilon} = \dfrac{1}{D}\left(lf - mgl\theta\right) \\ \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = \dfrac{1}{D}\left((M+m)g\theta - f\right) \end{cases} \quad , \ D = \left(m + M\right)l - ml = Ml$$

Получаем систему линейный, дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = \upsilon \\ \dot{\upsilon} = \dfrac{1}{M}\left(f - mg\theta\right) \\ \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = \dfrac{1}{Ml}\left((M+m)g\theta - f\right) \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\upsilon} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dfrac{m+M}{Ml}g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \upsilon \\ \theta \\ \omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{M} \\ 0 \\ -\dfrac{1}{Ml} \end{pmatrix} f$$