НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
Фазовое пространство и фазовые портреты динамических систем

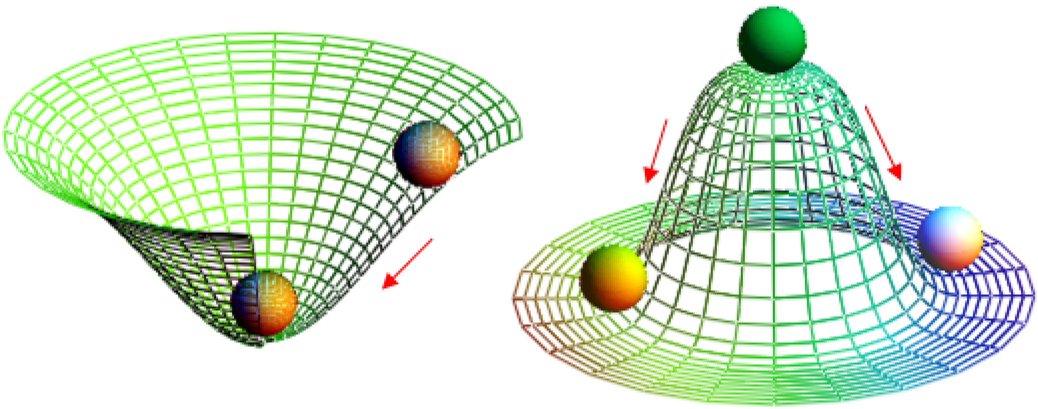


Рис. 1 Устойчивая система Неустойчивая система

Любая система является динамической системой. Элементы, входящие в систему могут быть нелинейными, следовательно, дифференциальные уравнения, описывающие динамические системы являются нелинейными.

Для исследования нелинейных систем и наглядного представления, происходящих в них динамических процессов использует ***фазовое пространство***, в котором строятся ***фазовые портреты.*** Каждая динамическая система имеет свой фазовый портрет. На фазовом портрете изображаются ***особые точки – точки положения равновесия***, которые помогают, без решения дифференциальных уравнений, предсказать поведение динамической системы. Эти точки принято называть точками ***устойчивого положения равновесия*** или ***неустойчивого положения равновесия***. Если динамическая система находится в окрестности точки устойчивого равновесия, то малые возмущения не нарушат устойчивой работы системы. Если точка является точкой не устойчивого положения равновесия, то возмущения будут прогрессировать, что может привести к превышению системы пороговых (критических) значений (по механической прочности, по температуре).

Рассмотрим метод фазового пространства применительно к динамической системе второго порядка

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = F_1(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = F_2(x,y) \end{cases}, \qquad (1)$$

здесь $F_1(x,y)$ и $F_2(x,y)$ нелинейные функции своих аргументов.

Чтобы получить фазовые траектории нужно исключить время для чего делим второе уравнение на первое

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F_2(x,y)}{F_1(x,y)} \qquad (2)$$

В точках положения равновесия производные по времени превращаются в нуль и тогда получаем отношение неопределенностей:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F_2(x,y)}{F_1(x,y)} = \frac{0}{0} \tag{3}$$

Точки, в которых встречаются неопределенности, называются особыми точками. В особых точках на фазовой плоскости решения могут разветвляться.
Опишем алгоритм поиска особых точек (точек положения равновесия).

В положении равновесия – при установившемся процессе искомые величины x и y не изменяются, поэтому производные равны нулю:

$$\begin{cases} 0 = F_1(x,y) \\ 0 = F_2(x,y) \end{cases} \tag{4}$$

Решая полученную систему нелинейных уравнений, находим точки положения равновесия x_0, y_0. После определения координат точки положения равновесия нужно определить характер точки. Для определения характера точки, разложим функции $F_1(x,y)$ и $F_2(x,y)$ в окрестности точек положения равновесия x_0, y_0, и ограничиваемся первыми тремя членами разложения:

$$\begin{cases} F_1(x,y) = F_1(x_0,y_0) + \dfrac{\partial F_1}{\partial x}\left(x - x_0\right) + \dfrac{\partial F_1}{\partial y}\left(y - y_0\right) + \ldots \\ F_2(x,y) = F_2(x_0,y_0) + \dfrac{\partial F_2}{\partial x}\left(x - x_0\right) + \dfrac{\partial F_2}{\partial y}\left(y - y_0\right) + \ldots \end{cases} \tag{5}$$

Выписываем коэффициенты при линейных членах и получаем матрицу Якоби или Якобиан:

$$\mathbf{A}(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{6}$$

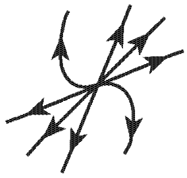
Элементы матрицы Якоби $a_{i,j}$ являются постоянными величинами.

Следующий этап – определение характера точки. Для этого нужно найти собственные числа матрицы Якоби λ, решая характеристического уравнение.

$$\left|\mathbf{I} - \lambda\mathbf{A}\right| = \det\left(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{A}\right) = 0\,. \tag{7}$$

Где $\mathbf{I}$ –единичная матрица.
Определять собственные числа удобно с помощью программы **MathCAD** с использованием функции **eigenvals**(A), при этом возможны несколько случаев.

1. Оба собственных числа вещественны и положительны:

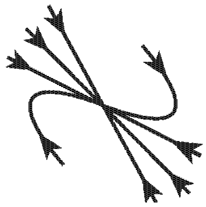


$$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$$

Тогда, точка положения равновесия с координатами x_0, y_0 называется ***неустойчивый узел***.

Фазовые кривые вокруг неустойчивого узла

2. Оба собственных числа вещественны и отрицательны:

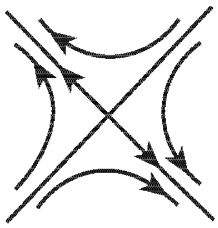


$$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$$

Тогда, точка положения равновесия с координатами x_0, y_0 называется ***устойчивый узел***.

Фазовые кривые вокруг устойчивого узла

3. Собственные числа вещественны и имеют разные знаки:

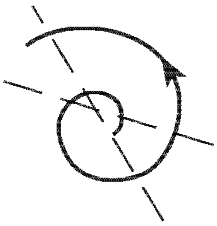


$$\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0 \quad \text{или} \quad \lambda_2 < 0, \lambda_1 > 0$$

Тогда, точка положения равновесия с координатами x_0, y_0 называется ***седло,*** или ***седловой точкой***.

Фазовые кривые вокруг седловой точки

4. Собственные числа комплексно сопряженные числа и имеют положительные действительные части:

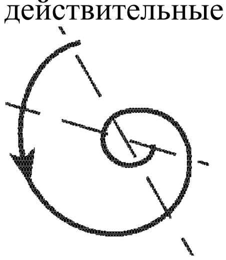


$$\lambda_1 = \beta + j\omega, \lambda_2 = \beta - j\omega, \quad \beta > 0$$

Тогда, точка положения равновесия с координатами x_0, y_0 называется ***неустойчивый фокус***.

Фазовые кривые вокруг неустойчивого фокуса

5. Собственные числа комплексно сопряженные числа и имеют отрицательные действительные части:

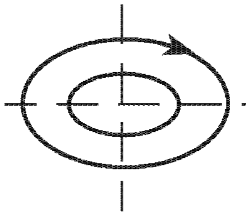


$$\lambda_1 = \beta + j\omega, \lambda_2 = \beta - j\omega, \quad \beta < 0$$

Тогда, точка положения равновесия с координатами x_0, y_0 называется ***устойчивый фокус***.

Фазовые кривые вокруг устойчивого фокуса

6. Собственные числа чисто мнимые сопряженные числа:



Фазовые кривые вокруг центра

$$\lambda_1 = j\omega, \lambda_2 = -j\omega$$

Тогда точка положения равновесия с координатами x_0, y_0 называется ***центр***.

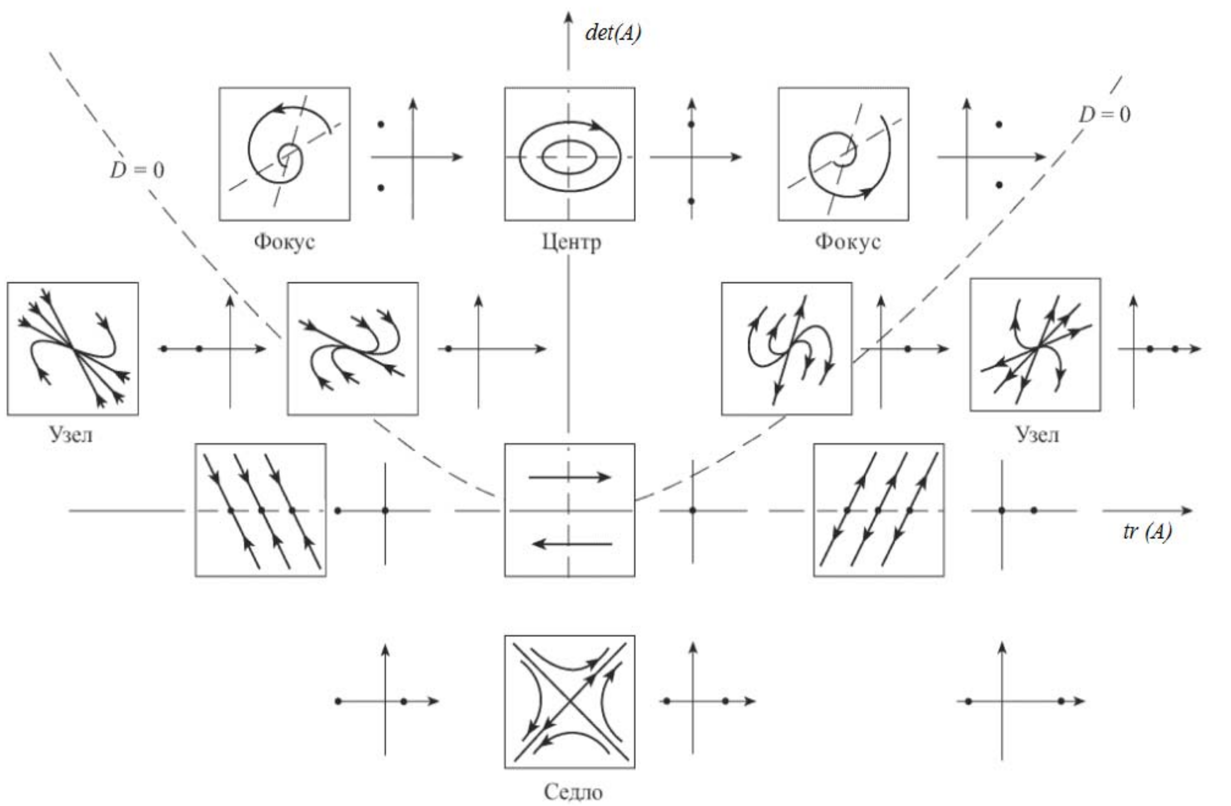
Коэффициенты характеристического полинома определяются матрицей Якоби, и записывается в виде.

$$p^2 - tr(A) \cdot p + det(A) = 0,$$

$$p^2 + bp + c = 0, \quad b = -tr(A), \; c = \det(A) = |A|$$

$tr(A) = \sum_i a_{ii}$ - след матрицы, сумма диагональных элементов. Эту величину принято называть шпуром (от немецкого – ***spur***) и или следом-трейсом (от английского - ***trace***). Если дискриминант уравнения обозначить через функции D, то можно нарисовать график зависимости определителя- $det(A) = |A|$ от след- $tr(A)$ матрицы Якоби, дающую общую картину возможных решений.

$$D = b^2 - 4c = 0 \;\; \rightarrow \;\; c(b) = b^2 / 4$$



Плоскость коэффициентов характеристического уравнения

Пример применения метода фазовой плоскости для линейной системы **(см. приложение!!!!!)**

Приведем несколько примеров определения точек положения равновесия и определим их характер, используя **MathCAD**.

ORIGIN:= 1

Пример 1. Дана динамическая система

$$\frac{d}{dt}x = x^2 + y^2 - 17$$

$$\frac{d}{dt}y = x \cdot y + 4$$

Находим точки равновесия динамической системы

$F_2(x,y) := x \cdot y + 4 \qquad F_1(x,y) := x^2 + y^2 - 17$

$$z := \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{pmatrix} \text{solve}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -4 \\ 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Ищем якобиан

$$A(x,y) := \begin{pmatrix} \frac{d}{dx}F_1(x,y) & \frac{d}{dy}F_1(x,y) \\ \frac{d}{dx}F_2(x,y) & \frac{d}{dy}F_2(x,y) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \cdot x & 2 \cdot y \\ y & x \end{pmatrix} \qquad a := A(-4,1) = \begin{pmatrix} -8 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$\text{eigenvals}(a) = \begin{pmatrix} -8.449 \\ -3.551 \end{pmatrix}$ точка с координатами x=-4 и y =1 является ***устойчивым узлом***

$a := A(-1,4) = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{eigenvals}(a) = \begin{pmatrix} -7.179 \\ 4.179 \end{pmatrix}$

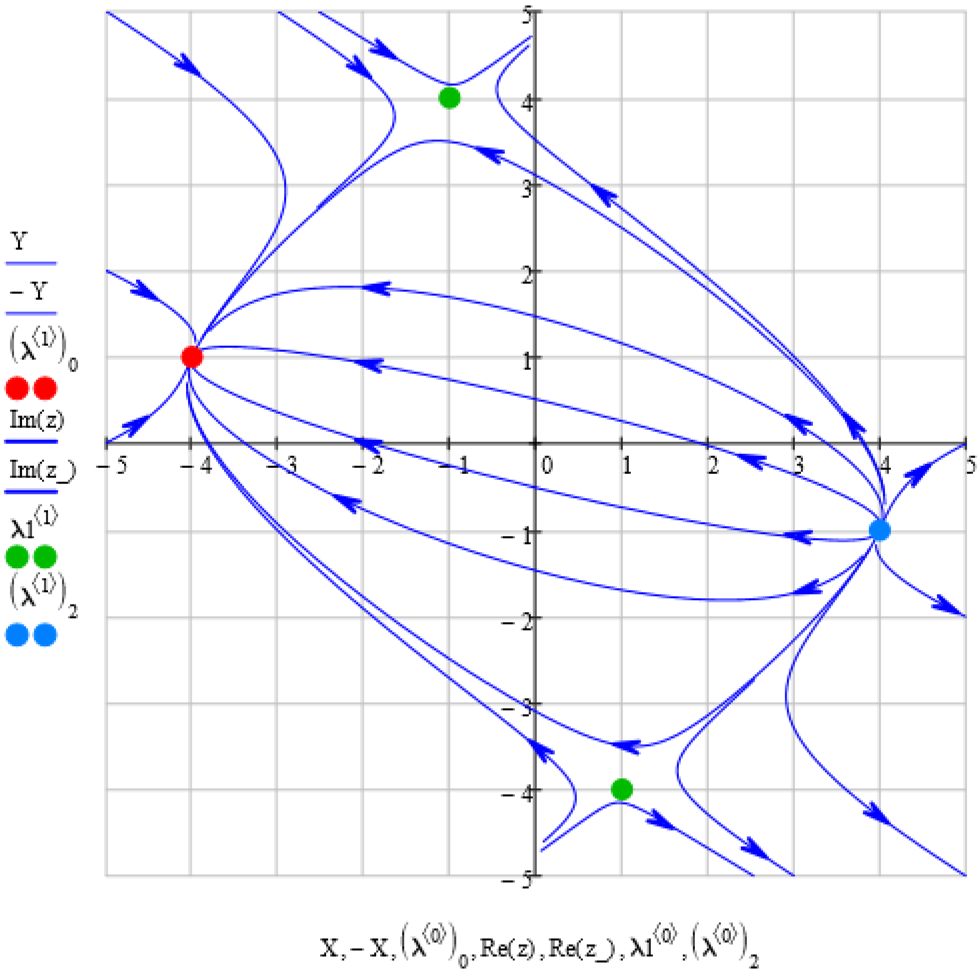
точка с координатами x= -1 и y= 4 является ***седлом***

$a := A(1,-4) = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

$\text{eigenvals}(a) = \begin{pmatrix} 7.179 \\ -4.179 \end{pmatrix}$ точка с координатами x= 1 и y= -4 является ***седлом***

$a := A(4,-1) = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\mathrm{eigenvals}(a) = \begin{pmatrix} 8.449 \\ 3.551 \end{pmatrix}$ точка с координатами *x*= 4 и *y*= -1 является ***неустойчивым узлом***

Фазовый портрет динамической системы



2.1.1. Построение фазовых портретов с использованием поверхностей (для консервативных систем. Энергетическая трактовка)

Приведем еще пару примеров с построением поверхностей, позволяющих установить структуру разбиения фазовой плоскости на траектории. Предварительно проделаем некоторые полезные вспомогательные вычисления. Запишем уравнение движения Ньютона для тела с единичной массой, на которое действует сила $F(x)$:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = F(x) \tag{8}$$

Учитывая, что сила равняется градиенту потенциальной функции с отрицательным знаком, уравнение можно переписать в виде:

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \quad \rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dU(x)}{dx} \tag{9}$$

Это уравнение можно преобразовать умножением каждой стороны на скорость $v = dx/dt$

$$v\frac{dv}{dt} = -\frac{dU}{dx}\frac{dx}{dt} \;\rightarrow\; \frac{1}{2}\frac{dv^2}{dt} + \frac{dU}{dt} = 0 \;\rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2} + U\right) = 0$$

Из полученного соотношения следует, что выражение в скобках равно некой константе E

$$\frac{v^2}{2} + U(x) = E(x,v) \;\text{ где }\; U(x) = -\int_0^x F(x)dx \qquad (10)$$

Теперь перейдем к исследованию динамической системы, имеющей вид

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 4x^3 \end{cases}$$

Если в первом выражении системы скорость обозначить через $2y$, а во втором уравнении правую часть считать за силу, действующую на частицу с единичной массой, тогда можно записать вспомогательную потенциальную функцию $U(x)$ в виде:

$$U(x) = -\int_0^x \left(4x - 4x^3\right)dx = -2x^2 + x^4$$

Тогда выражение поверхности постоянной энергии будет иметь вид:

$$U(x) + 2y^2 = E \;\rightarrow \left(-2x^2 + x^4 + 2y^2\right) = E$$

Для построения фазового портрета строим поверхность постоянной энергии

Для решения этой задачи будем использовать **MathCAD**

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}x = 2y \\ \dfrac{d}{dt}y = 4x - 4x^3 \end{array}\right.$$

$F_1(x,y) := 2\cdot y \quad F_2(x,y) := 4\cdot x - 4\cdot x^3$

Находим точки положения равновесия

$$z := \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{pmatrix} \left|\begin{array}{l} \text{solve}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \text{float}, 5 \end{array}\right. \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1. & 0 \\ -1. & 0 \end{pmatrix} \quad x := z^{\langle 0 \rangle} \quad y := z^{\langle 1 \rangle}$$

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Находим Якобиан

$$A(x,y) := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}F_1(x,y) & \frac{\partial}{\partial y}F_1(x,y) \\ \frac{\partial}{\partial x}F_2(x,y) & \frac{\partial}{\partial y}F_2(x,y) \end{pmatrix} \qquad A(x,y) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 - 12\cdot x^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Определяем характер точки с координатами 0, 0

$$A_1 := A(x_0, y_0) \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda := \mathrm{eigenvals}(A_1)$$

$\lambda = \begin{pmatrix} 2.828 \\ -2.828 \end{pmatrix}$ ***Седловая точка***

Определяем характер точки с координатами 1, 0

$$A_2 := A(x_1, y_1) \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -8 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda := \mathrm{eigenvals}(A_2)$$

$\lambda = \begin{pmatrix} 4i \\ -4i \end{pmatrix}$ ***Центр***

Определяем характер точки с координатами -1, 0

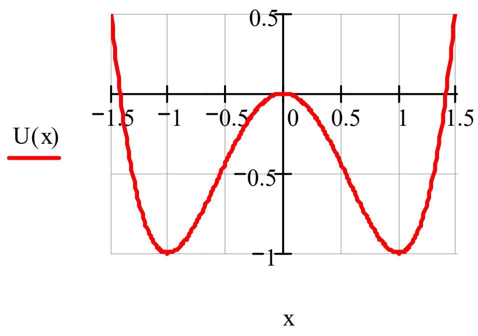
$$A_3 := A(x_2, y_2) \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -8 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda := \mathrm{eigenvals}(A_3)$$

$\lambda = \begin{pmatrix} 4i \\ -4i \end{pmatrix}$ ***Центр***

Записываем вспомогательную потенциальную функцию *U*(x)

$$U(x) := -\int_0^x 4\cdot x - 4\cdot x^3 \, dx \rightarrow (-2)\cdot x^2 + x^4$$

$$x := -1.5, -1.5 + 0.01 .. 1.5$$



Записываем вспомогательную функцию энергии E(x,y)

$E(x,y) := y^{2}\cdot 2 + U(x)$

Рисуем фазовый портрет

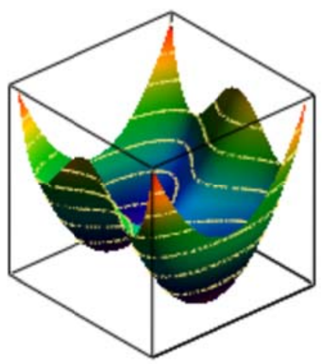
$N := 251 \quad i := 0..N \quad j := i \quad x_i := -1.5 + \frac{3}{N}\cdot i \quad y_j := -1 + \frac{2}{N}\cdot j$

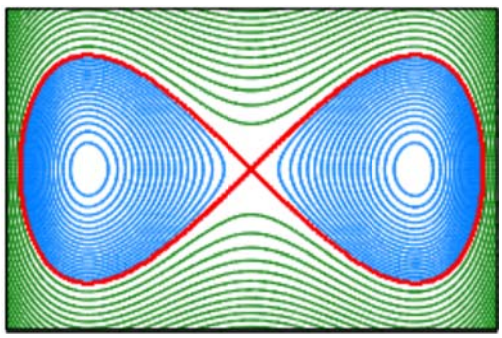
Поверхность $\quad E_{i,j} := E\left(x_i, y_j\right)$

Поверхность ограниченная сепаратрисой $\quad E1_{i,j} := \mathrm{if}\left(E_{i,j} < 0, E_{i,j}, 0\right)$

Поверхность за сепаратрисой $\quad E2_{i,j} := \mathrm{if}\left(E_{i,j} > 0, E_{i,j}, 0\right)$

Сепаратриса $\quad \delta := 10^{-1} \quad Es_{i,j} := \mathrm{if}\left(E_{i,j} > 0, \delta, 0\right)$

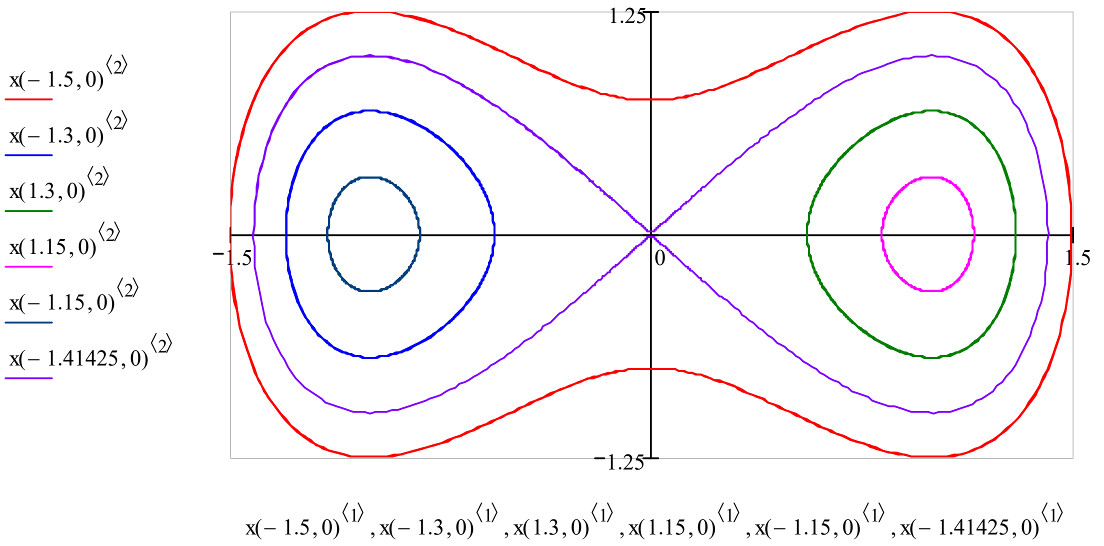


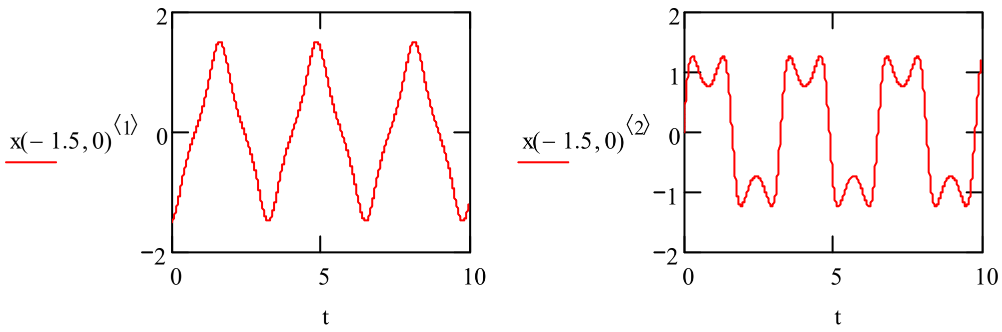


Для сравнения приведем непосредственное решение уравнений

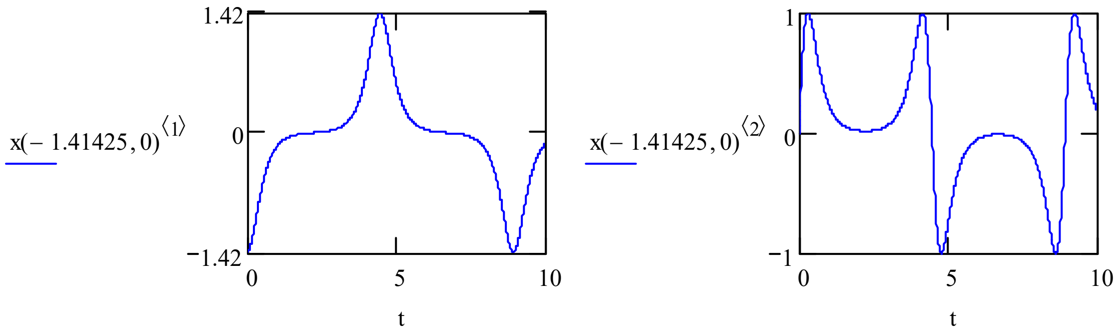
Все кривые на фазовой плоскости замкнутые кривые, значит, решения будут периодическими

$D(t,x) := \begin{bmatrix} 2\cdot x_1 \\ 4\cdot x_0 - 4\cdot\left(x_0\right)^3 \end{bmatrix} \quad N := 10^3 \quad T := 10 \quad x\left(x_0, y_0\right) := \mathrm{rkfixed}\left[\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, 0, T, N, D\right] \quad t := x(0,0)^{\langle 0\rangle}$

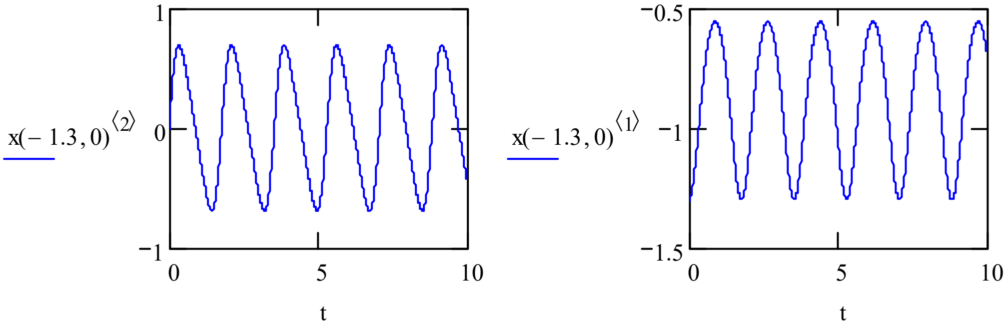




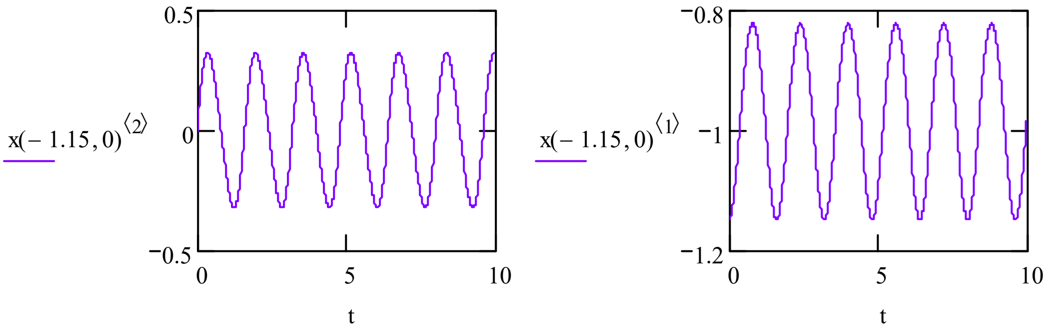
Решение за сепаратрисой



Решение на сепаратрисе



Решение в пределах сепаратрисы



Решение в пределах сепаратрисы в

Чем больше область, охватываемая фазовой кривой, тем больше период колебаний

2.3. Прямой метод Ляпунова (второй метод устойчивости)

Метод основан на использовании скалярных функций, обладающих на решениях динамической системы некоторыми специальными свойствами и получивших название функций Ляпунова. Функции Ляпунова позволяют оценить устойчивость и качество системы, а также синтезировать алгоритмы управления, обеспечивающие заданные качественные показатели процессов.

Для системы, описанной системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f_1(x, y) \\ \dfrac{dy}{dt} = f_2(x, y) \end{cases} \tag{12}$$

где функции f_1, f_2 произвольны и содержат любого вида нелинейности, но всегда удовлетворяют условию $f_1 = f_2 = 0,$ при $x_1 = x_2 = 0$, так как в установившемся состоянии все отклонения переменных и их производные равны нулю, можно ввести некоторую функцию всех фазовых координат системы (12) $V(x, y)$ где x, y представляют собой отклонения переменных от некоторых установившихся значений. Функцию можно представить в 2-мерном фазовом пространстве. Тогда в каждой точке фазового пространства V будет принимать определенное значение, а в начале координат будет равна нулю.

Функцию V будем называть ***знакоопределенной*** в некоторой области, если в любых точках внутри ее функция V – имеет определенный знак и в ноль обращается только в начале координат. Рассмотрим пример знакоопределенной положительной функции для системы второго порядка $n = 2$

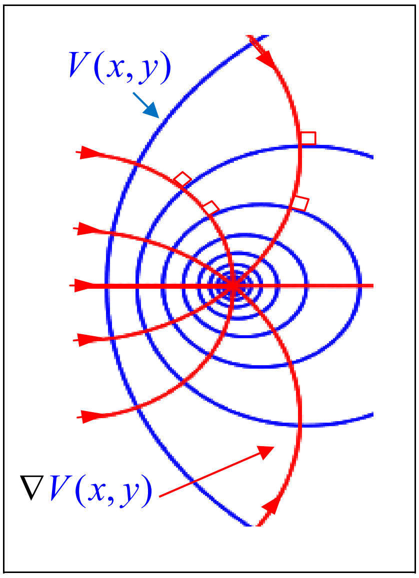
$$V(x, y) = x^2 + y^2 \tag{13}$$

очевидно, что $V > 0$, и $V = 0$, только при $x = y = 0$.

Функция V называется ***знакопостоянной,*** если она сохраняет один и тот же знак, но может обращаться в нуль не только в начале координат, но и в других точках данной области.

Функция V называется ***знакопеременной***, если она в данной области вокруг начала координат может иметь разные знаки.

Произвольная функция $V = V(x, y)$, которая обращается в ноль только при $x = y = 0$, и где x, y– отклонения, в которых записано уравнение движения системы, называется ***функцией Ляпунова***. Определим производную функции V по времени. Для этого необходимо вспомнить, что такое оператор градиента ∇:



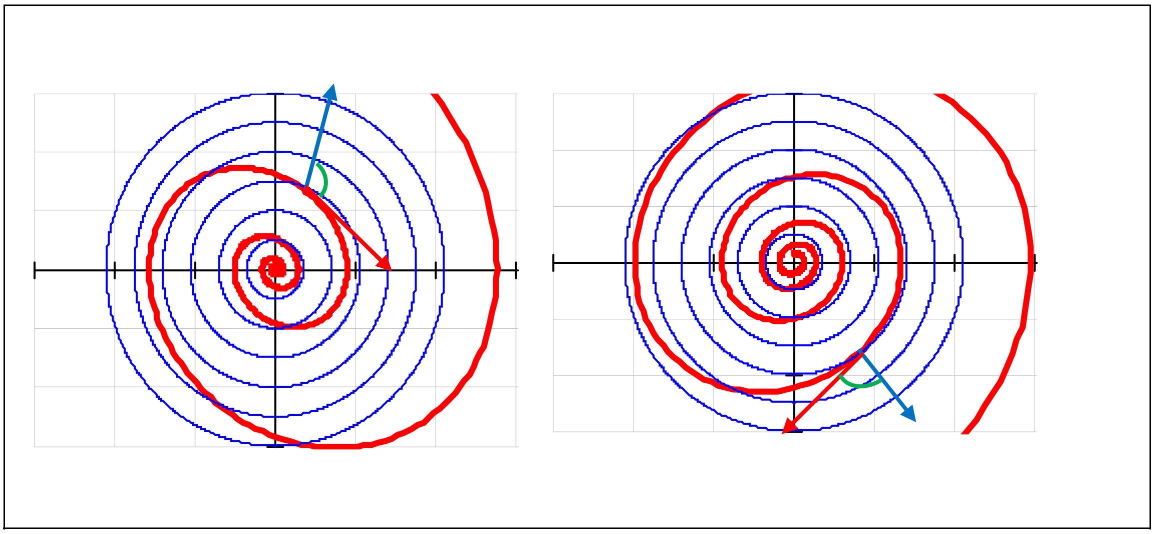
$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \nabla V(x,y) = \mathbf{grad}\, V(x,y)$$

– направления наибольшего (быстрого) изменения функции. Теперь можно записать производную функции $f(x,y)$ по времени, предполагая зависимость x, y от t:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \cancel{\frac{\partial V}{\partial t}} + \frac{\partial V}{\partial x} f_1(x,y) + \frac{\partial V}{\partial y} f_2(x,y)$$

$$\frac{dV}{dt} = (\nabla V, \mathbf{v}),\ \mathbf{v} = (f_1, f_2) \rightarrow |\nabla V||\mathbf{v}|\cos(\phi)$$

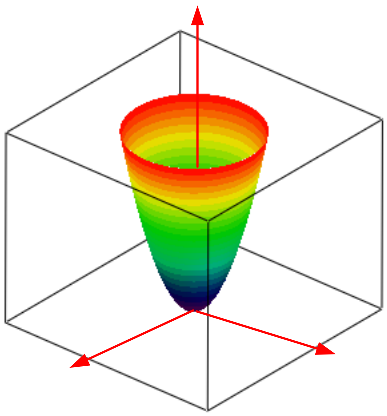
Производная будет отрицательной, если косинус угла отрицательный, следовательно, угол между векторами тупой. Производная будет положительной, если косинус угла положительный, следовательно, угол между векторами острый.



Второй критерий Ляпунова об устойчивости нелинейных систем: если при заданных в форме (14) уравнениях системы можно подобрать такую знакоопределенную функцию Ляпунова $V(x, y)$, чтобы ее производная по времени dV / dt тоже была знакоопределенной (или знакопостоянной), но имела знак, противоположный знаку V, то данная система устойчива.

Пример: Пусть нелинейная система описывается уравнениями

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - x^3 \\ \dfrac{dy}{dt} = -y^3 \end{cases}$$



Знакоопределенная функция Ляпунова $V(x,y) = x^2 + y^2$

Подберем знакоопределенную функцию Ляпунова вида:

$$V(x,y) = x^2 + y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = X^T Q X$$

Находим производную по времени функции Ляпунова

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} f_1(x,y) + \frac{\partial V}{\partial y} f_2(x,y)$$

$$\frac{dV}{dt} = 2x\left(-x - x^3\right) + 2y\left(-y^3\right) = -2\left(x^2 + x^4 + y^4\right)$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} f_1(x,y) + \frac{\partial V}{\partial y} f_2(x,y)$$

$$\frac{dV}{dt} = 2x\left(-x - x^3\right) + 2y\left(-y^3\right) = -2\left(x^2 + x^4 + y^4\right) < 0$$

Функции dV/dt является функцией знакопостоянной, но противоположна по знаку функции $V(x,y)$, следовательно, система устойчивая.

Критерий Ляпунова часто используется для оптимизации линейных и нелинейных систем

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 0,2y \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dx}{dt} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -0,3 \end{pmatrix} \quad \frac{dX}{dt} = AX$$

Введем функцию Ляпунова в виде

$$V(x,y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = X^T PX \qquad (1)$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dX^T}{dt}PX + X^T P\frac{dX}{dt} = \frac{dX^T}{dt}PX + X^T P\frac{dX}{dt} = \left(AX\right)^T PX + X^T P\left(AX\right) =$$
$$= X^T A^T PX + X^T P\left(AX\right) = X^T\left(A^T P + PA\right)X$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}f_1(x,y) + \frac{\partial V}{\partial y}f_2(x,y) = (x,y)\left(A^T P + PA\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} < 0$$

Если выражение в скобочках обозначить через C то производная будет меньше нуля.

$$\frac{dV}{dt} = (x,y)\left(A^T P + PA\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x,y)C\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -x^2 - y^2 < 0, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

По критерию Сильвестра для того чтобы функция $V(x,y)$ (1) была знакоположительной (имела минимум) необходимо что бы главные миноры P были положительными.

На практике поступают наоборот. Берут $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ и решают матричное уравнение в виде

$$\left(A^T P + PA\right) = C, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -0,3 \end{pmatrix} \rightarrow P = \begin{pmatrix} 7,55 & 0,25 \\ 0,25 & 3,75 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_0 \cdot \frac{d}{dt}y + a_1 \cdot y + a_2 \cdot x = 1 \\ \frac{d}{dt}x(t) = y \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = y \\ \frac{d}{dt}y(t) = -y \cdot \frac{a_1}{a_0} - x \cdot \frac{a_2}{a_0} \end{cases}$$

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-a_2}{a_0} & \frac{-a_1}{a_0} \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -0.2 \end{pmatrix}$$

$$P := \text{identity}(2) \qquad C := -\text{identity}(2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \frac{d}{dt}V = x^T \cdot \left(A^T \cdot P + P \cdot A\right) \cdot x$$

Given

$$A^T \cdot P + P \cdot A = C$$

$$P := \text{Find}(P)$$

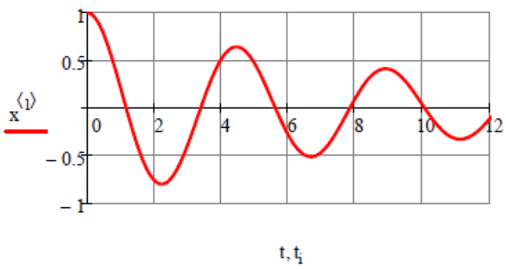
$$P = \begin{pmatrix} 7.55 & 0.25 \\ 0.25 & 3.75 \end{pmatrix}$$

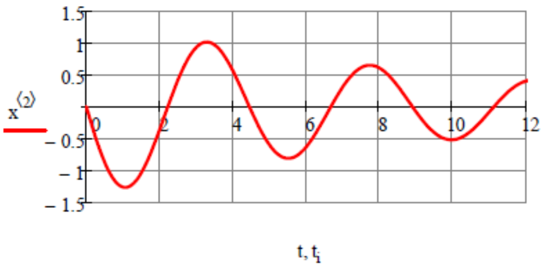
Критерий Сильвестра если матрица положительно определённая (у функции есть минимум) то главные миноры должны быть положительными

$$P_{0,0} = 7.55 \qquad |P| = 28.25$$

$$N := 10^3 \qquad T := 12 \qquad D(t,x) := A \cdot x$$

$$x := \text{rkfixed}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, 0, T \cdot 4, N, D\right] \qquad t := x^{\langle 0 \rangle} \qquad i := 0..N$$





$$P := \begin{pmatrix} 7.55 & 0.25 \\ 0.25 & 3.75 \end{pmatrix} \qquad V(x,y) := (x \ \ y) P \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

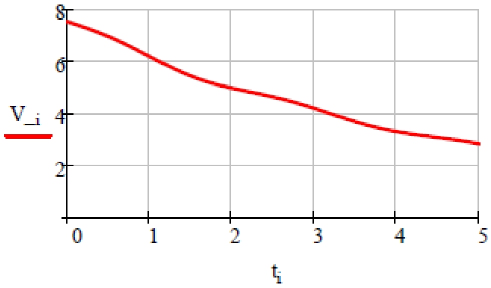
$$V(x,y) \text{ simplify } \rightarrow 7.55 \cdot x^2 + 0.5 \cdot x \cdot y + 3.75 \cdot y^2$$

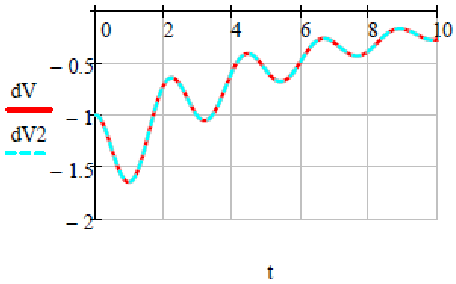
$$\frac{d}{dx}V(x,y) \rightarrow 15.1 \cdot x + 0.5 \cdot y \qquad \frac{d}{dy}V(x,y) \rightarrow 7.5 \cdot y + 0.5 \cdot x$$

$$dV_i := \left[15.1\cdot\left(x^{\langle 1\rangle}\right)_i + 0.5\cdot\left(x^{\langle 2\rangle}\right)_i\right]\cdot\left(x^{\langle 2\rangle}\right)_i + \left[7.5\cdot\left(x^{\langle 2\rangle}\right)_i + 0.5\cdot\left(x^{\langle 1\rangle}\right)_i\right]\cdot\left[-\left(x^{\langle 2\rangle}\right)_i\cdot a_1 - \left(x^{\langle 1\rangle}\right)_i\cdot a_2\right]$$

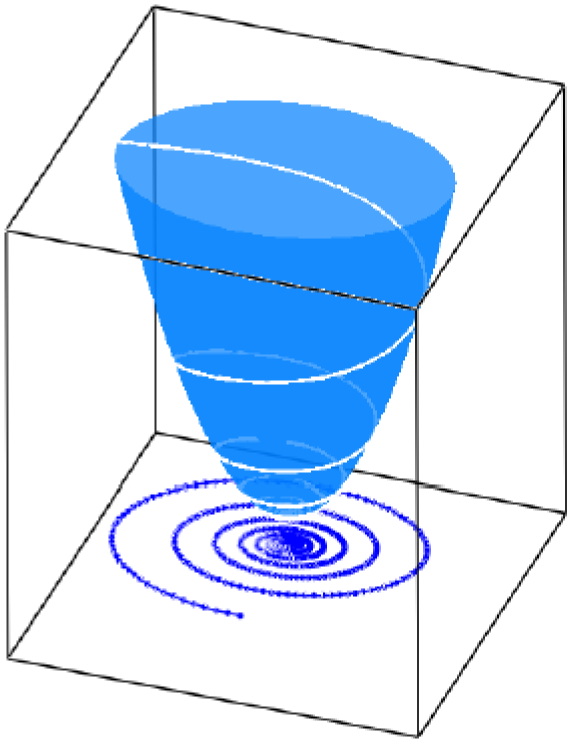
$$C := A^T\cdot P + P\cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad dV2_i := \left[\left(x^{\langle 1\rangle}\right)_i \;\; \left(x^{\langle 2\rangle}\right)_i\right]\cdot C\cdot\begin{bmatrix}\left(x^{\langle 1\rangle}\right)_i \\ \left(x^{\langle 2\rangle}\right)_i\end{bmatrix}$$

$$V\_i := V\left[\left(x^{\langle 1\rangle}\right)_i, \left(x^{\langle 2\rangle}\right)_i\right]$$





$$V1_i := V\left[\left(x^{\langle 1\rangle}\right)_i, \left(x^{\langle 2\rangle}\right)_i\right] \qquad V0_i := -0.5$$



$$V, \left(x^{\langle 1\rangle}, x^{\langle 2\rangle}, V1\right), \left(x^{\langle 1\rangle}, x^{\langle 2\rangle}, V0\right)$$