Методы линейного программирования

Пусть задана линейная функция (ЦФ) своих аргументов.

$$f(x_1, x_2) = x_1 - x_2 \ . \qquad (1)$$

И система уравнений (дополнительные условия)

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_5 &= 5 \end{aligned} \qquad (2)$$

С условиями на не отрицательность величин $x_i \geq 0, i = 1..5$

В задаче требуется найти неотрицательные значения переменных удовлетворяющих условиям (2) и максимизирующих функцию $f(x_1, x_2)$.

Число уравнений системы (2) - 3, число неизвестных 5.

Будем использовать геометрический метод. ***Выбираем базисные переменные***, это переменные которые входят в каждое уравнение по одному разу x_3, x_4, x_5 и разрешаем уравнение относительно этих переменных

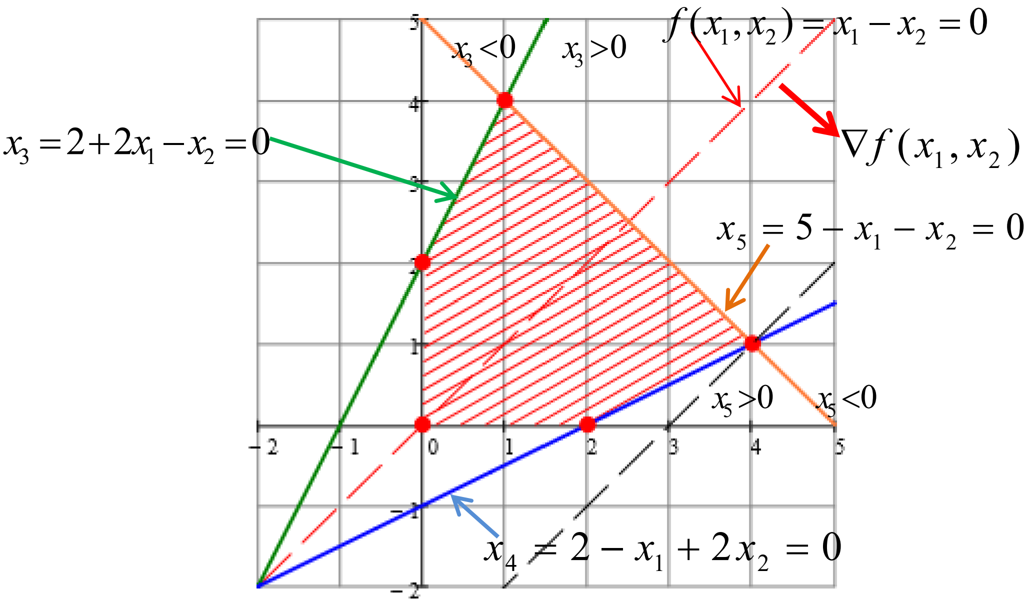
Уравнения, разрешенные относительно базисные переменных:

$$\begin{aligned} x_3 &= 2 + 2x_1 - x_2 \\ x_4 &= 2 - x_1 + 2x_2 \ , \\ x_5 &= 5 - x_1 - x_2 \end{aligned}$$

эти уравнения удобно писать так, что бы свободные коэффициенты были впереди.

Переменные x_1, x_2 - будем называть ***свободными переменными***.

Рисуем эти графики для значений, когда базисные переменные x_3, x_4, x_5 равны нулю. По условию задачи, нам нужен диапазон изменения всех переменных от 0 в положительную сторону. Для x_1, x_2, это первый квадрант. Для других переменных это менее очевидно, но если посмотреть на уравнения для x_3, x_4, x_5, то можно увидеть, что точка, начало координат $x_1 = 0, x_2 = 0$ находится в той части полуплоскости, для которой $x_3, x_4, x_5 > 0$. Для того



Заштрихованный пятиугольник является областью допустимых значений для всех переменных $x_i \geq 0, i = 1..5$.

Линии на графике это значения базисных переменных равных нулю. В точках пересечения две базисные переменные равны нулю. Направления увеличения целевой функции $f(x_1, x_2) = x_1 - x_2$ (указанно красной стрелкой) направленно в низ. Значит, крайнее положение функции $f(x_1, x_2)$, нарисованное пунктирной линией, есть максимум функции $f(x_1, x_2)$.

Приведем решения в программе MATLAB (примечание!!! В MATLABе ищется минимум ЦФ поэтому нужно поменять знак на f= -f)

```
>> A=[-2 1 1 0 0;1 -2 0 1 0; 1 1 0 1 1]

A =

    -2     1     1     0     0
     1    -2     0     1     0
     1     1     0     1     1

>> B=[2; 2; 5]

B =

     2
     2
     5

>> f=[-1 1 0 0 0 ]

f =

    -1     1     0     0     0
```

```
>> lb=zeros(5,1)

lb =

     0
     0
     0
     0
     0

>> [x,minf]=linprog(f,A,B,[],[],lb)

Optimal solution found.


x =

    4.0000
    1.0000
         0
         0
         0


minf =

   -3.0000
```

Лекция 2.

Симплекс метод решения задачи линейного программирования

Пусть задана линейная функция (ЦФ) своих аргументов, максимум которой требуется найти.

$$f(x_1, x_2) = x_1 - x_2 \ . \tag{1}$$

И система уравнений (дополнительные условия)

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_5 &= 5 \end{aligned} \tag{2}$$

С условиями на не отрицательность величин $x_i \geq 0, i = 1..5$

Выбираем ***базисные переменные***, это переменные не входящие в функцию цели x_3, x_4, x_5 и разрешаем уравнение относительно этих переменных

$$
\begin{aligned}
x_3 &= 2 + 2x_1 - x_2 \\
x_4 &= 2 - x_1 + 2x_2 \\
x_5 &= 5 - x_1 - x_2
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Как и прежде, переменные x_1, x_2 - будем называть ***свободными переменными***. Подставим в место x_1, x_2 нули и получим

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \ x_3 = 2,\ x_4 = 2,\ x_5 = 5$$

Функция цели при этом будет иметь вид

$$f(x_1, x_2) = x_1 - x_2 = 0$$

Увеличение свободной составляющей x_2 влечет за собой уменьшении функции $f(x_1, x_2) = x_1 - x_2$. А увеличение свободной составляющей x_1 влечет за собой увеличение функции $f(x_1, x_2) = x_1 - x_2$. ***Признаком того, что функция не достигла своего максимума, является наличие свободной составляющей с положительным знаком. Нужно сделать такие преобразования, что бы функция f зависела от переменных, которые будут входить в неё с отрицательным знаком.*** Свободная составляющая x_2 входит с отрицательным знаком, следовательно, мы её оставляем в качестве свободной. А вот x_1 переводим в базисные переменные. Но в место какой переменной? Той, которая быстрее стремиться к нулю по сравнению других переменных, при увеличении x_1, и при подставке $x_2 = 0$. Получаем

$$
\begin{aligned}
x_3 &= 2 + 2x_1 \\
x_4 &= 2 - x_1 \\
x_5 &= 5 - x_1
\end{aligned}
$$

Из уравнения следует, что $x_3 \uparrow$, $x_4 \downarrow$, $x_5 \downarrow$, но x_4 уменьшается быстрее остальных переменных

В уравнении (3) во второй строке выражаем x_1, через свободные координаты x_2, x_4 и подставляем в другие уравнения. То есть разрешаем уравнение (3) относительно нового базиса

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 2 + 2x_2 - x_4 \\
x_3 &= 6 + 3x_2 - 2x_4 \\
x_5 &= 3 - 3x_2 + x_4
\end{aligned}
$$

Теперь целевая функция записывается через новые свободные координаты

$$f(x_2, x_4) = 2 + x_2 - x_4$$

В выражении для целевой функции положительной сводной координатой является x_2. Нужно перевести её в базисные координаты. Поступаем как в предыдущем случае. Подставляем $x_4 = 0$ и наблюдаем, какая из базисных координат быстрее всех стремится к нулю при увеличении x_2.

$$x_1 = 2 + 2x_2$$
$$x_3 = 6 + 3x_2$$
$$x_5 = 3 - 3x_2$$

быстрее всех стремиться к нулю координата x_5, следовательно, мы переводим её в свободные координаты, а x_2 в базисные координаты. Получаем уравнения для нового базиса

$$x_1 = 4 - \frac{1}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_5$$
$$x_2 = 1 + \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5$$
$$x_3 = 9 - x_4 - x_5$$

Целевая функция записывается через новые независимые координаты в виде.

$$f(x_4, x_5) = 3 - \frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5$$

Мы добились того что бы целевая функция состояла только из тех переменных которые входят в нее с отрицательным знаком. Видно, что увеличение переменных x_4, x_5 приводит только к уменьшению функции, а значит, максимум функции равен 3

$$f(0,0) = 3$$

Пример 2

Пусть задана линейная функция (ЦФ) своих аргументов, требуется найти экстремум функции.

$$f(x) = -x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 \ \rightarrow extr \ . \qquad (1)$$

И система уравнений (дополнительные условия)

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 4 \end{aligned} \qquad (2)$$

С условиями на не отрицательность величин $x_i \geq 0, i = 1,..,4$

Когда имеются равенства - задача называется канонической.

Выбираем в качестве базиса x_3, x_4 потому что они входят только в одно уравнение. Разрешаем относительно x_3, x_4 уравнения

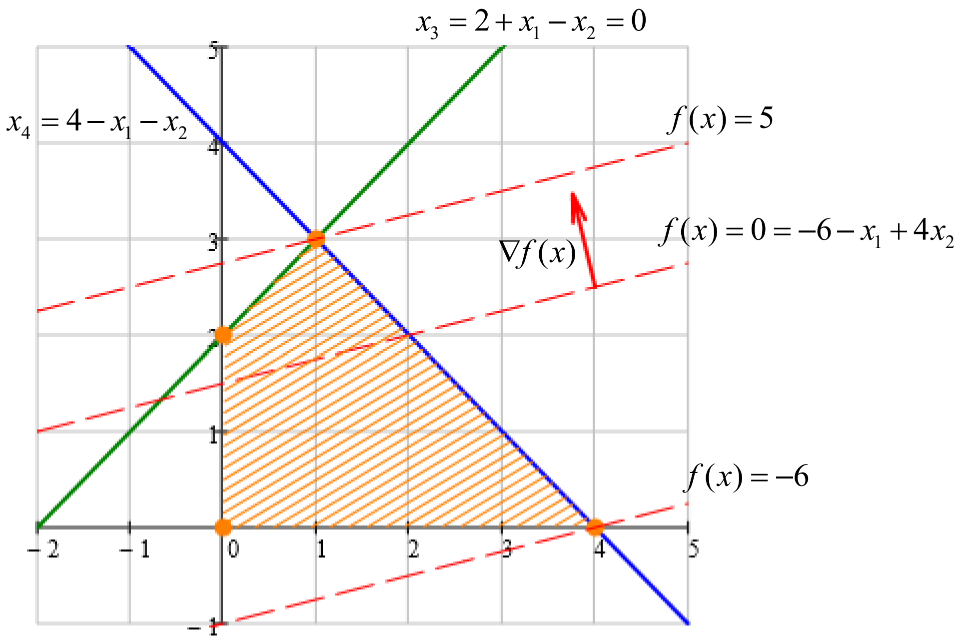
$$\begin{aligned} x_3 &= 2 + x_1 - x_2 \\ x_4 &= 4 - x_1 - x_2 \end{aligned} \qquad (3)$$

Подставляем полученные зависимости в функцию цели

$$f(x) = -x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = -6 - x_1 + 4x_2$$

Строим графические зависимости, считая, что базисные переменные равны нулю. Для каждой зависимости строим градиент, который показывает сторону увеличения функции. Антиградиент показывает, в какую сторону функция убывает. Заштрихованная область находящаяся в первом квадранте соответствует условию $x_i \geq 0, i = 1,..,4$. Градиент целевой функции $\nabla f(x) = \mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \mathbf{j}\frac{\partial f}{\partial x_2} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ показывает направление увеличения функции. Для линейных функций он всегда постоянный в любой точке приложения. Если двигаться в сторону увеличения функции (ЦФ) показанное стрелкой, то максимум ЦФ может получиться только на границе. Максимум получается в самой верхней точке выделенной заштрихованной области. Эта точка с координатами $x_1 = 1,\ x_2 = 3$. При этом функция будет равна $f(x_1, x_2) = -6 - x_1 + 4x_2 = -6 - 1 + 4 \cdot 3 = 5$. Значения переменных $x_3,\ x_4$ в этой точке равны нулю.

Если двигаться в сторону антиградиента, в сторону уменьшения функции (ЦФ), то мы приходим в точку с координатами $x_1 = 4,\ x_2 = 0$ и значения целевой функции в этой точке равно $f(x_1, x_2) = -6 - x_1 + 4x_2 = -6 - 4 + 4 \cdot 0 = -10$



Решаем задачу симплекс методом

Пример 2

Пусть задана линейная функция (ЦФ) своих аргументов, требуется найти экстремум функции.

$$f(x) = -x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 \ \to extr \ . \tag{1}$$

И система уравнений (дополнительные условия)

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 4 \end{aligned} \tag{2}$$

С условиями на не отрицательность величин $x_i \geq 0, i = 1,..,4$

Когда имеются равенства - задача называется канонической.

Выбираем в качестве базиса x_3, x_4 потому что они входят только в одно уравнение. Разрешаем относительно x_3, x_4 уравнения

$$\begin{aligned} x_3 &= 2 + x_1 - x_2 \\ x_4 &= 4 - x_1 - x_2 \end{aligned} \tag{3}$$

Подставляем полученные зависимости в функцию цели

$$\begin{aligned} f(x) &= -x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = \\ &= -x_1 + 2x_2 - 1\cdot(2 + x_1 - x_2) - 1\cdot(4 - x_1 - x_2) = \\ &= -6 - x_1 + 4x_2 \end{aligned}$$

Нам необходимо сделать такие преобразования, что бы в ФЦ входили только отрицательные переменные. Избавимся от x_2 то есть переводим эту переменную в базис.

Подставим нули вместо свободных переменных и смотрим, какая из величин меняется быстрее при увеличении x_2:

$$x_3 = 2, x_4 = 4, x_1 = 0, x_2 = 0, \; f(x) = -6 - x_1 + 4x_2 = -6$$

$$\begin{cases} x_3 = 2 - x_2 \\ x_4 = 4 - x_2 \end{cases} \rightarrow x_3$$

$$\begin{aligned} x_2 &= 2 + x_1 - x_3 \\ x_4 &= 4 - x_1 - x_2 = 4 - x_1 - \left(2 + x_1 - x_3\right) \\ &= 2 - 2x_1 - x_3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_2 &= 2 + x_1 - x_3 \\ x_4 &= 2 - 2x_1 - x_3 \end{aligned}$$

Теперь в базис переводим x_2 в место x_3

$$\begin{aligned} x_2 &= 2 + x_1 - x_3 \\ x_4 &= 2 - 2x_1 - x_3 \\ f(x) &= 2 + 3x_1 - 4x_3 \end{aligned}$$

В ФЦ положительный к/т при x_1. Переводим x_1 в место x_4

$$\begin{aligned} x_2 &= 3 + x_3/2 - x_4/2 \\ x_1 &= 1 + x_3/2 - x_4/2 \\ f(x) &= 5 - x_3\frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_4 \end{aligned}$$

Максимум функции в точке $x_3 = 0,\; x_4 = 0,\; x_2 = 3,\; x_1 = 1,\; f(x_3, x_5) = 5$

Решение в MATLAB

```
>> a=[-1 1 1 0; 1 1 0 1]

a =

    -1     1     1     0
     1     1     0     1

>> b=[2;4]

b =

     2
     4

>> f=[1 -2 1 1]

f =

     1    -2     1     1

>> bl=zeros(4,1)

bl =

     0
     0
     0
     0
```

```
>> [x,p]=linprog(f,a,b,[],[],bl)

Optimal solution found.


x =

     1
     3
     0
     0


p =

    -5
```

Рассмотрим формализм ***симплекс метода*** (он основан ***методе Жордана-Гаусса***)

$$f(x) = -x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 \to \max \tag{1}$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 4 \end{cases} \tag{2}$$

Введем 5 векторов, которые называются ***опорным планам***

$$P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3 + P_4x_4 = P_0$$

Где $P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

1) Формируем таблицу следующим образом (см обозначения в таблице выделенные красном цветом).
2) Выделяем столбец с P_2 потому что в ЦФ коэффициент при x_2 положительный

Тб.1

		базис	$C_б$	P_0	-1	2	-1	-1	C_i Из (1)
					P_1	P_2	P_3	P_4	
l	1	P_3	-1	2	-1	$\boxed{1}$	1	0	a_{ij} Из (2)
	2	P_4	-1	4	1	1	0	1	
	Δ_i			-6	-1	4	0	0	
				b_i		k			

3) Переводим x_2 в базисные координаты в место переменной дающей минимум величины $\min(P_0(1)/P_2(1); P_0(2)/P_2(2)) = \min(2/1; 4/1) = 2$ это первая строка в $P_0(1)$ Это строка принадлежит переменной x_3. В следующей таблице строка с x_3 будет заменена на строку x_2
4) Заполняем нижнюю строку в таблице. Вычисляем относительные оценки

$$\Delta_1 = C_1 - C_б P_1 \cdot = -1 - \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 - (1 - 1) = -1$$

$$\Delta_2 = C_2 - C_б P_2 \cdot = 2 - \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 - (-1 - 1) = 4$$

$$\Delta_3 = C_3 - C_б P_3 \cdot = -1 - \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 - (-1) = 0$$

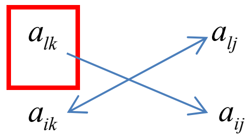
$$\Delta_4 = C_4 - C_б P_4 \cdot = -1 - \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 - (-1) = 0$$

$$\Delta_0 = C_б P_0 = \begin{pmatrix} -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 - 4 = -6$$

$$f(x) = -6 - 1 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2$$

Переходим к поиску нового опорного плана. Для этого используем Жордана-Гаусса, так называемую формулу прямоугольника

$$b_i' = \begin{cases} b_i - \dfrac{b_l}{a_{lk}} a_{ik} & при \;\; i \neq l, \\ \dfrac{b_l}{a_{lk}} & при \;\; i = l. \end{cases} \qquad a_{ij}' = \begin{cases} a_{ij} - \dfrac{a_{lj}}{a_{lk}} a_{ik} & при \;\; i \neq l, \\ \dfrac{a_{lj}}{a_{lk}} & при \;\; i = l. \end{cases}$$



Число в красном квадратике (в таблице), на пересечении выделенной строки и столбца, в расчётах будем ставить в знаменатель.

Тб.2

				-1	2	-1	-1
	базис	$C_б$	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4
1	P_2	2	2	-1	1	1	0
2	P_4	-1					
Δ_i							

1) Начиная расчет со строчки l . Все элементы этой строки делим на 1. То есть она остается без изменения ($\dfrac{b_l}{a_{lk}}, \; \dfrac{a_{lj}}{a_{lk}} \quad при \;\; i = l$)
2) Переходим к следующей строчке. (Все величины для расчетов берутся из **Тб.1**)

$4 - \dfrac{2(1)}{1} = 4 - 2 = 2$, (0 столбец)

$1 - \dfrac{1(-1)}{1} = 1 + 1 = 2$, (1 столбец)

$1 - \dfrac{1 \cdot 1}{1} = 1 - 1 = 0$, (2 столбец)

$0 - \dfrac{1 \cdot 1}{1} = 0 - 1 = -1$, (3 столбец)

$1 - \dfrac{1 \cdot 0}{1} = 1 - 0 = 1$, (4 столбец)

1) Переходим к следующей строчке. Вычисляем относительные оценки

$$\Delta_1 = -1 - \frac{4(-1)}{1} = -1 + 4 = 3,\ \ \Delta_2 = 4 - \frac{4(1)}{1} = 4 - 4 = 0$$

$$\Delta_3 = 0 - \frac{4(1)}{1} = 0 - 4 = -4,\ \ \Delta_4 = 0 - \frac{4(0)}{1} = 0 - 0 = 0 \qquad ,$$

$$\Delta_0 = -6 + \frac{4(2)}{1} = -6 + 8 = 2 \quad (+)\ \textit{потому что с правой стороны}$$

Тб.2

	базис	$C_б$	P_0	-1	2	-1	-1
				P_1	P_2	P_3	P_4
1	P_2	2	2	-1	1	1	0
2	P_4	-1	2	$\boxed{2}$	0	-1	1
Δ_i			2	3	0	-4	0

$f(x) = 2 + 3 \cdot x_1 - 4 \cdot x_3$, из таблицы видим, что $\Delta_1 = 3 > 0$ наибольшая положительная величина.

Выбираем наименьшее из **неотрицательных** (!) отношений: $\min(2/-1; 2/2) = 2$ в столбце P_0 это вторая строка

1) Начиная расчет со строчки l. Все элементы этой строки делим на 2.

Тб.3

	базис	$C_б$	P_0	-1	2	-1	-1
				P_1	P_2	P_3	P_4
1	P_2	2					
2	P_1	-1	1	1	0	-1/2	1/2
Δ_i							

2) Переходим к следующей строчке, к верхней. (Все величины для расчетов берутся из **Тб.2)** .

$2 - \frac{2(-1)}{2} = 2 + 1 = 3$, (0 столбец)

$-2-\frac{2(-1)}{2}=-2+2=0$, (1 столбец)

$1-\frac{-1\cdot 0}{2}=1+0=1$, (2 столбец)

$1-\frac{(-1)\cdot(-1)}{2}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, (3 столбец)

$0-\frac{1\cdot(-1)}{2}=0-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$, (4 столбец)

Переходим к следующей строчке. (Все величины для расчетов берутся из **Тб.2)**.
Вычисляем относительные оценки

$$\Delta_1=3-\frac{3\cdot(2)}{2}=-3+3=0,\ \Delta_2=0-\frac{3\cdot(0)}{2}=0-0=0$$

$$\Delta_3=-4-\frac{3\cdot(-1)}{2}=-4+\frac{3}{2}=-\frac{5}{2},\ \Delta_4=0-\frac{3\cdot(1)}{2}=0-\frac{3}{2}=-\frac{3}{2},$$

$$\Delta_0=2+\frac{3\cdot(2)}{2}=2+3=5$$

Тб.3

				-1	2	-1	-1
	базис	$C_б$	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4
1	P_2	2	3	0	1	3/2	-1/2
2	P_1	-1	1	1	0	-1/2	1/2
Δ_i			5	0	0	-5/2	-3/2

$$f(x)=5-\frac{5}{2}\cdot x_3-\frac{3}{2}\cdot x_4$$

В последнем выражении видно что максимум функции находится в точке $x_3=0,\ x_4=0$ и равен $f(0,0)=5$