Физико-технический институт

ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Лекция 14. Теплопроводность в ядерном реакторе

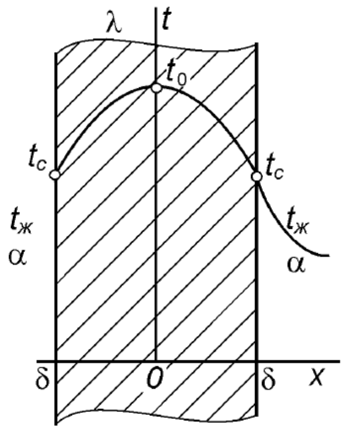
Теплопроводность при наличии внутренних источников тепла

08 апреля 2016

Для стационарного режима дифференциальное уравнение теплопроводности при наличии источников тепла имеет вид:

$$\nabla^2 t + \frac{q_v}{\lambda} = 0$$

Теплопроводность однородной пластины



Источники тепла равномерно распределены по всему объему и $q_v = \text{const}$.
Заданы коэффициенты теплоотдачи $\alpha = \text{const}$.
Температура жидкости вдали от пластины $t_ж = \text{const}$.
Благодаря равномерному охлаждению температуры обеих поверхностей пластины одинаковы. При указанных условиях температура пластины будет изменяться только вдоль оси x, направленной нормально к поверхности тела.
Температуры на оси пластины и на ее поверхности обозначим соответственно через t_0 и $t_с$. Кроме того, необходимо найти распределение температуры в пластине и количество тепла, отданного в окружающую среду. Дифференциальное уравнение в рассматриваемом случае упрощается и принимает вид:

$$\frac{d^2t}{dx^2} + \frac{q_v}{\lambda} = 0 \qquad (1)$$

Граничные условия:

при $x = \pm\delta$ $\quad \pm\lambda\left(\frac{dt}{dx}\right)_{x=\pm\delta} = \alpha\left(t_\text{с} - t_\text{ж}\right)$

С учетом того, что рассматривается только одна половина пластины:

$$\left.\begin{aligned} x = 0; &\quad \left(\frac{dt}{dx}\right)_{x=0} = 0 \\ x = \delta; &\quad -\lambda\left(\frac{dt}{dx}\right)_{x=\delta} = \alpha\left(t_\text{с} - t_\text{ж}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

После интегрирования (1) получим:

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{q_v x}{\lambda} + C_1; \qquad (3)$$

$$t = -\frac{q_v}{2\lambda}x^2 + C_1 \cdot x + C_2. \qquad (4)$$

Постоянные интегрирования определяем из граничных условий (2):

$$C_1 = 0, \qquad C_2 = t_ж + \frac{q_v \delta}{\alpha} + \frac{q_v \delta^2}{2\lambda}.$$

После подстановки, получаем уравнение температурного поля:

$$t(x) = t_ж + \frac{q_v \delta}{\alpha} + \frac{q_v}{2\lambda}\left(\delta^2 - x^2\right), \qquad -\delta \le x \le \delta \qquad (5)$$

Тепловой поток изменяется вдоль оси x: $q = q_v x$.
При $x = 0$ тепловой поток равен нулю ($q = 0$). Тепловой поток с единицы поверхности пластины при $x = \delta$:

$$q = \alpha(t_с - t_ж) = q_v \delta \qquad (6)$$

общее количество тепла, отданное всей поверхностью в единицу времени (вся поверхность F равна двум боковым поверхностям F_1),

$$Q = qF = q_v \delta 2F_1 \qquad (7)$$

Из уравнения (5) следует, что температура в плоской стенке при наличии симметрии распределяется по параболическому закону. Если в уравнении (5) положить $\alpha = \infty$, то полученное выражение будет представлять температурное поле для граничных условий первого рода, т. к. при $\alpha = \infty$ $t_ж \equiv t_с$. С учетом сказанного уравнение (5) принимает вид:

$$t(x) = t_с + \frac{q_v}{2\lambda}\left(\delta^2 - x^2\right), \quad -\delta \le x \le \delta \tag{8}$$

При этом температура на плоскости симметрии пластины ($x = 0$)

$$t_0 = t_с + \frac{q_v \delta^2}{2\lambda}$$

а перепад температур между плоскостью симметрии стенки и ее поверхностью равен:

$$t_0 - t_с = \frac{q_v}{2\lambda}\delta^2 = \frac{q\delta}{2\lambda} \tag{9}$$

Часто эта зависимость коэффициента теплопроводности имеет линейный характер, т.е. $\lambda = \lambda_0 (1 + bt)$
Тогда

$$q_v x = -\lambda_0 (1 + bt) \frac{dt}{dx}.$$

Разделяя переменные и интегрируя последнее уравнение, получаем:

$$t + b\frac{t^2}{2} = -\frac{1}{\lambda_0} \frac{q_v x^2}{2} + C.$$

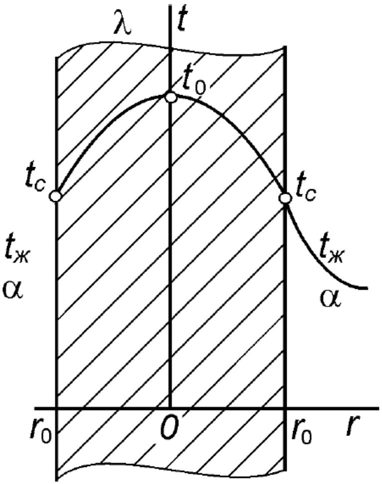
Положим, что при $x = 0$ $t = t_0$, тогда из последнего уравнения следует, что

$$C = t_0 + \frac{b}{2} t_0^2$$

Подставляем найденное C и, решая квадратное уравнение относительно t, получаем уравнение температуры:

$$t(x) = -\frac{1}{b} + \sqrt{\left(t_0 + \frac{1}{b}\right)^2 - \frac{q_v x^2}{\lambda_0 b}}, \qquad -\delta \le x \le \delta \qquad (10)$$

Теплопроводность однородного цилиндрического стержня



Рассмотрим круглый цилиндр, радиус которого мал по сравнению с длиной. При этих условиях температура будет изменяться только вдоль радиуса. Рассматриваемая задача соответствует случаю цилиндрического тепловыделяющего элемента без оболочки (длинный топливный стержень или столб цилиндрических топливных таблеток).

Внутренние источники тепла равномерно распределены по объему тела. Заданы температура окружающей среды $t_ж$ = const и постоянный по всей поверхности коэффициент теплоотдачи.
При этих условиях температура во всех точках внешней поверхности цилиндра будет одинакова. Для цилиндра, как и для пластины, задача будет одномерной и симметричной. Уравнение теплопроводности при этом имеет вид:

$$\frac{d^2t}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dt}{dr} + \frac{q_v}{\lambda} = 0 \qquad (11)$$

Граничные условия:

$$\left.\begin{aligned} r = 0; &\qquad \left(\frac{dt}{dr}\right)_{r=0} = 0 \\ r = r_0; &\qquad -\lambda\left(\frac{dt}{dr}\right)_{r=r_0} = \alpha\left(t_с - t_ж\right) \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Необходимо найти уравнение температурного поля и тепловой поток, а также значения температур на оси t_0 и на поверхности t_c.
Проинтегрировав уравнение (11) и найдя константы C_1 и C_2 получим уравнение распределения температуры в стержне:

$$t(r) = t_{ж} + \frac{q_v r_0}{2\alpha} + \frac{q_v}{4\lambda}\left(r_0^2 - r^2\right), \quad 0 \le r \le r_0. \qquad (13)$$

Полученное уравнение дает возможность вычислить температуру в любой точке внутри цилиндрического стержня и на его поверхности. Оно показывает, что распределение температуры в круглом стержне подчиняется параболическому закону. Из уравнения (13) при $r = 0$ определяется температура на оси цилиндра:

$$t_0 = t_{ж} + \frac{q_v r_0}{2\alpha} + \frac{q_v r_0^2}{4\lambda} \qquad (14)$$

Удельный тепловой поток с единицы поверхности стержня:

$$q = \alpha\left(t_{\text{с}} - t_{\text{ж}}\right) = \frac{q_v r_0}{2} \qquad (15)$$

Полный тепловой поток с поверхности цилиндра:

$$Q = qF = q_v \pi r_0^2 l \qquad (16)$$

Из уравнения (15) следует, что плотность теплового потока зависит только от производительности внутренних источников и от величины внешней поверхности r_0, через которую проходит тепловой поток. Пусть теперь заданы граничные условия первого рода, т.е. температура поверхности цилиндра $t_{\text{с}}$. Эти условия соответствуют частному случаю предыдущей задачи, если полагать, что коэффициент теплоотдачи имеет бесконечное значение: $\alpha = \infty$. При этом, очевидно $t_{\text{ж}} \equiv t_{\text{с}}$. Тогда уравнение (13) примет вид:

$$t(r) = t_{\text{с}} + \frac{q_v r_0^2}{4\lambda}\left[1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right], \quad 0 \le r \le r_0 \qquad (17)$$

Температура на оси цилиндра ($r = 0$)

$$t_0 = t_c + \frac{q_v r_0^2}{4\lambda} \qquad (18)$$

Если необходимо учитывать зависимость коэффициента теплопроводности от температуры, как линейную зависимость от температуры, то используют следующую зависимость для описания температурной кривой:

$$t(r) = -\frac{1}{b} + \sqrt{\left(t_0 + \frac{1}{b}\right)^2 - \frac{q_v r_0^2}{2\lambda_0 b}}, \quad 0 \le r \le r_0 \qquad (19)$$

Теплопроводность цилиндрической стенки

Рассмотрим бесконечно длинную цилиндрическую стенку (трубу) с внутренним радиусом r_1, наружным r_2 и постоянным коэффициентом теплопроводности λ. Внутри этой стенки имеются равномерно распределенные источники тепла производительностью q_v. Рассматриваемая задача соответствует случаю трубчатого тепловыделяющего элемента без оболочки.

В такой стенке температура будет изменяться только в направлении радиуса, и процесс теплопроводности будет описываться уравнением (11). Интеграл этого уравнения представлен выражением

$$t = -\frac{q_v r^2}{4\lambda} + C_1 \ln r + C_2 \qquad (20)$$

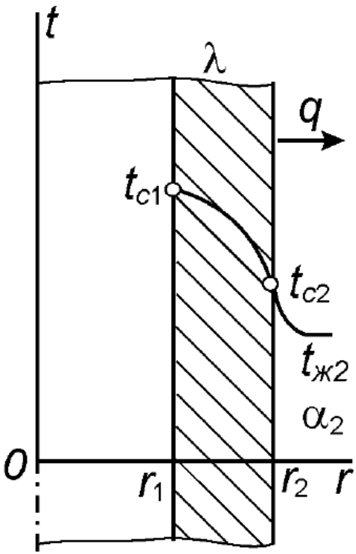
Постоянные интегрирования C_1 и C_2 в последнем уравнении определяются из граничных условий. Рассмотрим случаи, когда теплоотдающей поверхностью являются только внутренняя или только наружная поверхность, и обе поверхности одновременно.

1. Тепло отводится только через наружную поверхность трубы.

Будем рассматривать случай, когда заданы граничные условия третьего рода, т.е. температура окружающей среды со стороны наружной поверхности и постоянный коэффициент теплоотдачи на внешней поверхности трубы. При этом граничные условия запишутся:

$$r = r_1;\ \ q = 0 \ \text{ или } \left(\frac{dt}{dr}\right)_{r=r_1} = 0;$$

$$r = r_2;\quad -\lambda\left(\frac{dt}{dr}\right)_{r=r_2} = \alpha_2\left(t_{c2} - t_{ж2}\right).$$



Из уравнения (20) при $r = r_1$ получим:

$$C_1 = \frac{q_v r_1^2}{2\lambda}$$

При $r = r_2$ из уравнения (20) с учетом найденного выражения для C_1 получим:

$$t_{c2} = t_{ж2} + \frac{q_v r_2}{2\alpha} - \frac{q_v r_1^2}{2\alpha r_2}$$

Тогда

$$C_2 = t_{ж2} + \frac{q_v r_2}{2\alpha} + \frac{q_v r_2^2}{4\lambda} - \frac{q_v}{2\alpha}\frac{r_1^2}{r_2} - \frac{q_v r_1^2}{2\lambda}\ln r_2$$

Подставляя найденные значения C_1 и C_2 в уравнение (20), получаем выражение для температурного поля:

$$t(r) = t_{ж2} + \frac{q_v r_2}{2\alpha}\left[1-\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right] + \frac{q_v r_2^2}{4\lambda}\left[1+\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 2\ln\frac{r}{r_2} - \left(\frac{r}{r_2}\right)^2\right],\ r_1 \le r \le r_2. \quad (21)$$

Для внешней теплоотдающей поверхности (при $r = r_2$)

$$t_{c2} = t_{ж2} + \frac{q_v r_2}{2\alpha}\left[1-\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right] \quad (22)$$

Удельный тепловой поток с единицы теплоотдающей поверхности найдется как

$$q = \alpha_2\left(t_{c2} - t_{ж2}\right) = \frac{q_v r_2}{2}\left[1-\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right]. \quad (23)$$

Температура на внутренней поверхности стенки определяется из уравнения (21) при подстановке в него значений $r = r_1$

$$t_{c1} = t_{ж2} + \frac{q_v r_2}{2\alpha}\left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right] + \frac{q_v r_2^2}{4\lambda}\left[1 + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 2\ln\frac{r_1}{r_2} - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right]. \qquad (24)$$

При заданных граничных условиях первого рода, т.е. при температуре теплоотдающей поверхности t_{c2}, эти условия можно трактовать как частный случай рассмотренной задачи, когда коэффициент теплоотдачи на поверхности очень велик ($\alpha = \infty$). Тогда температура жидкости будет равна температуре поверхности трубы. С учетом сказанного уравнение (21) принимает вид:

$$t(r) = t_{c2} + \frac{q_v r_2^2}{4\lambda}\left[1 + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 2\ln\frac{r}{r_2} - \left(\frac{r}{r_2}\right)^2\right], \quad r_1 \le r \le r_2. \qquad (25)$$

Полагая в этом уравнении $r = r_1$ и $t = t_{c1}$, находим перепад температуры на стенках:

$$t_{c1} - t_{c2} = \frac{q_v r_1^2}{4\lambda}\left[\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 - 2\ln\frac{r_2}{r_1} - 1\right]. \qquad (26)$$