Физико-технический институт

ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Лекция 13. Теплопроводность в ядерном реакторе

Теплопроводность при стационарном режиме. Передача тепла через плоскую стенку

04 апреля 2016

Теплопроводность при стационарном режиме. Передача тепла через плоскую стенку

При установившемся, или стационарном, тепловом режиме температура тела во времени остается постоянной, т. е. $\partial t / \partial \tau = 0$. При этом дифференциальное уравнение теплопроводности будет иметь вид:

$$\lambda \nabla^2 t + q_v = 0. \quad (1)$$

Если внутренние источники тепла отсутствуют ($q_v = 0$), то уравнение (1) упростится и примет вид:

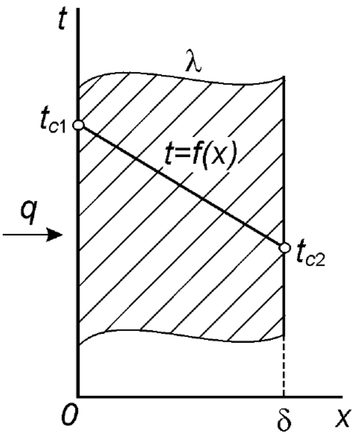
$$\nabla^2 t = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0. \quad (2)$$

1. Граничные условия первого рода.

Рассмотрим однородную и изотропную стенку толщиной δ с постоянным коэффициентом теплопроводности λ. На наружных поверхностях стенки поддерживаются постоянными температуры t_{c1} и t_{c2}.

При заданных условиях температура будет изменяться только в направлении, перпендикулярном плоскости стенки. Если ось *ox* направить, как показано на рисунке, то температура в направлении осей *oy* и *oz* будет оставаться постоянной, т. е.

$$\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial z} = 0.$$



В связи с этим дифференциальное уравнение теплопроводности для рассматриваемого случая запишется в виде

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = 0. \qquad (3)$$

Граничные условия зададим так:

$$\left.\begin{array}{l} \text{при } x = 0 \; t = t_{c1} \\ \text{при } x = \delta \; t = t_{c2} \end{array}\right\} \qquad (4)$$

Закон распределения температур по толщине стенки найдется в результате двойного интегрирования уравнения (3).

Первое интегрирование дает:

$$\frac{dt}{dx} = C_1. \tag{5}$$

После второго интегрирования:

$$t = C_1 x + C_2. \tag{6}$$

Из уравнения (6) следует, что при постоянном коэффициенте теплопроводности температура в стенке изменяется по линейному закону.

Постоянные C_1 и C_2 в уравнении (6) определяются из граничных условий:

при $x = 0$ $t = t_{c1}$, следовательно $C_2 = t_{c1}$;

при $x = \delta$ $t = t_{c2}$, следовательно $C_1 = -\frac{t_{c1} - t_{c2}}{\delta}$.

Закон распределения температуры в рассматриваемой плоской стенке:

$$t = t_{c1} - \frac{t_{c1}-t_{c2}}{\delta} x. \qquad (7)$$

Для определения количества тепла, проходящего через единицу поверхности стенки в единицу времени в направлении оси *ox*, воспользуемся законом Фурье, согласно которому

$$q = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x}.$$

Тогда, с учетом (7):

$$q = \frac{\lambda}{\delta}(t_{c1} - t_{c2}). \qquad (8)$$

Из уравнения (8) следует, что количество тепла, проходящего через единицу поверхности стенки в единицу времени, прямо пропорционально коэффициенту теплопроводности λ и разности температур на наружных поверхностях стенки и обратно пропорционально толщине стенки δ.

Следует указать, что тепловой поток определяется не абсолютным значением температур, а их разностью $\Delta t = t_{c1} - t_{c2}$, которую принято называть температурным напором.
Отношение λ / δ называется тепловой проводимостью стенки, а обратная величина δ / λ [м^2·К/Вт] – тепловым или термическим сопротивлением стенки. Последнее представляет собой падение температуры в стенке на единицу плотности теплового потока.
Знная удельный тепловой поток, легко вычислить общее количество тепла, которое передается через поверхность стенки величиной F за промежуток времени τ:

$$Q = q \cdot F \cdot \tau. \qquad (9)$$

Рассмотрим теплопроводность многослойной плоской стенки, состоящей из n однородных слоев. Примем, что контакт между слоями совершенный и температура на соприкасающихся поверхностях двух слоев одинакова.

При стационарном режиме тепловой поток, проходящий через любую изотермическую поверхность неоднородной стенки, один и тот же, т. е.

$$\frac{\partial q}{\partial x} = 0.$$

При заданных температурах на внешних поверхностях такой стенки, заданных размерах слоев и соответственно коэффициентах теплопроводности можно составить систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} q &= \frac{\lambda_1}{\delta_1}\left(t_{c1} - t_{c2}\right); \\ q &= \frac{\lambda_2}{\delta_2}\left(t_{c2} - t_{c3}\right); \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ q &= \frac{\lambda_n}{\delta_n}\left(t_{cn} - t_{c(n+1)}\right). \end{aligned}\right\}$$

Определив температурные напоры в каждом слое, сложив левые и правые части уравнений, получим:

$$t_{c1} - t_{c(n+1)} = q\left(\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \ldots + \frac{\delta_n}{\lambda_n}\right).$$

Отсюда плотность теплового потока:

$$q = \frac{t_{c1} - t_{c(n+1)}}{\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \ldots + \frac{\delta_n}{\lambda_n}} = \frac{t_{c1} - t_{c(n+1)}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_i}{\lambda_i}}. \qquad (10)$$

Величина $\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_i}{\lambda_i}$, равная сумме тепловых сопротивлений всех n слоев, называется полным тепловым или термическим сопротивлением теплопроводности многослойной стенки.

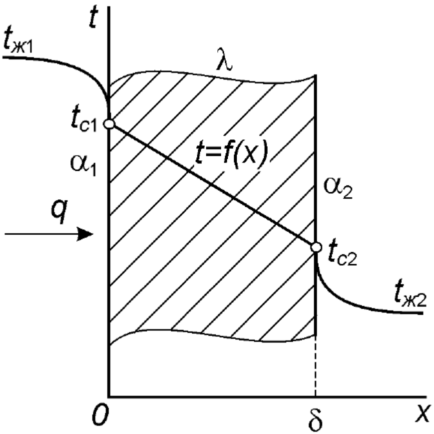
При рассмотрении переноса тепла через многослойную стенку и стенку из однородного материала удобно ввести в рассмотрение эквивалентный коэффициент теплопроводности $\lambda_{экв}$ многослойной стенки, который равен

$$\lambda_{экв} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \delta_i}{\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_i}{\lambda_i}}. \qquad (11)$$

Из уравнения (11) следует, что эквивалентный коэффициент теплопроводности зависит не только от теплофизических свойств слоев, но и от их толщины.

2. Граничные условия третьего рода (теплопередача)
Передача тепла от одной подвижной среды (жидкости или газа) к другой через разделяющую их однородную или многослойную твердую стенку любой формы называется теплопередачей.
Теплопередача включает в себя теплоотдачу от более горячей жидкости к стенке, теплопроводность в стенке, теплоотдачу от стенки к более холодной подвижной среде.
Рассмотрим теплопередачу через однородную и многослойную плоские стенки. Пусть плоская однородная стенка имеет толщину δ (рис.).
Заданы:

- коэффициент теплопроводности стенки λ,
- температуры окружающей среды $t_{ж1}$ и $t_{ж2}$,
- коэффициенты теплоотдачи α_1 и α_2.



Удельный тепловой поток от горячей жидкости к стенке определяется уравнением

$$q = \alpha_1(t_{ж1} - t_{с1}). \qquad (12)$$

При стационарном тепловом режиме тот же тепловой поток пройдет путем теплопроводности через твердую стенку:

$$q = \frac{\lambda}{\delta}(t_{c1} - t_{c2}). \qquad (13)$$

Тот же тепловой поток передается от второй поверхности стенки к холодной жидкости за счет теплоотдачи

$$q = \alpha_2(t_{с2} - t_{ж2}). \qquad (14)$$

Сложим уравнения (12)–(14):

$$q\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{\delta}{\lambda}+\frac{1}{\alpha_2}\right)=t_{ж1}-t_{ж2}\,.$$

Отсюда:

$$q=\frac{t_{ж1}-t_{ж2}}{\dfrac{1}{\alpha_1}+\dfrac{\delta}{\lambda}+\dfrac{1}{\alpha_2}}\,. \qquad (15)$$

Введем обозначение:

$$\frac{1}{\dfrac{1}{\alpha_1}+\dfrac{\delta}{\lambda}+\dfrac{1}{\alpha_2}}=k\,. \qquad (16)$$

Тогда: $$q = k(t_{ж1} - t_{ж2}) \qquad (17)$$

Величина k имеет ту же размерность, что и α, и называется коэффициентом теплопередачи. Коэффициент теплопередачи k характеризует интенсивность передачи тепла от одной жидкости к другой через разделяющую их стенку и численно равен количеству тепла, которое передается через единицу поверхности стенки в единицу времени при разности температур между жидкостями в 1 К. Величина, обратная коэффициенту теплопередачи, называется полным термическим сопротивлением.

Полное термическое сопротивление однослойной стенки запишется:

$$R = \frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}. \qquad (18)$$

Поскольку общее термическое сопротивление состоит из частных термических сопротивлений, то совершенно очевидно, что в случае многослойной стенки нужно учитывать термическое сопротивление каждого слоя. Полное термическое сопротивление теплопередачи через многослойную стенку при этом равно:

$$R = \frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}. \tag{19}$$

Удельный тепловой поток через многослойную стенку, состоящую из *n* слоев, будет равен:

$$q = \frac{t_{ж1} - t_{ж2}}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}}. \tag{20}$$

Уравнение (20) для многослойной стенки подобно уравнению (17) для однородной плоской стенки. Различие заключается в выражениях для коэффициентов теплопередачи k. При сравнении уравнений (18) и (19) видно, что соотношение (18) является частным случаем уравнения (19) при $n = 1$.

Тепловой поток через поверхность F твердой стенки

$$Q = qF = k\Delta tF \qquad (21)$$

Температуры поверхностей однородной стенки можно найти из следующих уравнений:

$$t_{\text{с}1} = t_{\text{ж}1} - q / \alpha_1$$

$$t_{c2} = t_{\text{ж}1} - q\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda}\right); \quad \text{или} \quad t_{c2} = t_{\text{ж}2} + q / \alpha_2.$$

Из сопоставления уравнений (10) и (20) следует, что передача тепла через многослойную стенку при граничных условиях первого рода является частным случаем более общего случая передачи тепла при граничных условиях третьего рода.
На основании сказанного температура на границе любых двух слоев i и $i+1$ при граничных условиях третьего рода может быть определена по уравнению

$$t_{c(i+1)} = t_{ж1} - q\left(\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_i}{\lambda_i}\right)$$