Физико-технический институт

ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Лекция 11. Основные дифференциальные уравнения тепломассообмена

25 марта
2016

Условия однозначности включают в себя: геометрические условия, характеризующие форму и размеры тела, в котором протекает процесс; физические условия, характеризующие физические свойства среды и тела; временные и начальные условия, характеризующие распределение температур в изучаемом теле в начальный момент времени; граничные условия, характеризующие взаимодействие рассматриваемого тела с окружающей средой.

Геометрическими условиями задаются форма и линейные размеры тела, в котором протекает процесс.

Физическими условиями задаются физические параметры тела λ, c, ρ др. и может быть задан закон распределения внутренних источников тепла.

Начальные условия необходимы при рассмотрении нестационарных процессов и состоят в задании закона распределения температуры внутри тела в начальный момент времени. В общем случае:

$$\text{при } \tau = 0 \qquad t = f(x, y, z)$$

В случае равномерного распределения температуры:

$$\tau = 0 \qquad t = t_0 = \text{const}$$

а) Граничные условия первого рода. При этом задается распределение температуры на поверхности тела для каждого момента времени:

$$t_c = f(x, y, z, \tau)$$

где t_c – температура на поверхности тела; x, y, z – координаты поверхности тела.

В частном случае, когда температура является постоянной во времени протекания процессов теплообмена, уравнение упрощается:

$$t_c = \text{const}.$$

б) Граничные условия второго рода. При этом задаются величины теплового потока для каждой точки поверхности тела и любого момента времени.

Аналитически это можно представить следующим образом:

$$q = f(x, y, z, \tau),$$

где q – плотность теплового потока на поверхности тела.

В простейшем случае плотность теплового потока по поверхности и во времени остается постоянной:

$$q = q_0 = \text{const}.$$

Такой случай теплообмена имеет место, например, при нагревании различных металлических изделий в высокоэнергетических установках.

в) Граничные условия третьего рода. При этом задаются температура окружающей среды $t_{ж}$ и закон теплообмена между поверхностью тела и окружающей средой. Граничные условия третьего рода характеризуют закон теплообмена между поверхностью и окружающей средой в процессе охлаждения и нагревания тела. Для описания процесса теплообмена между поверхностью тела и средой используется закон Ньютона – Рихмана.

Процесс теплообмена между поверхностью тела и средой относится к очень сложным процессам и зависит от большого количества параметров. Подробно эти вопросы будут рассмотрены в третьей главе.

Согласно закону Ньютона – Рихмана количество тепла, отдаваемое единицей поверхности тела в единицу времени, пропорционально разности температур поверхности тела t_c и окружающей среды $t_{ж}$ ($t_c > t_{ж}$):

$$q = \alpha\left(t_c - t_{ж}\right),$$

где α – коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом теплоотдачи, Вт/(м^2·К).

Коэффициент теплоотдачи характеризует интенсивность теплообмена между поверхностью тела и окружающей средой. Численно он равен количеству тепла, отдаваемого (или воспринимаемого) единицей поверхности в единицу времени при разности температур между поверхностью тела и окружающей средой, равной 1 К. Согласно закону сохранения энергии количество тепла, которое отводится с единицы поверхности в единицу времени вследствие теплоотдачи, должно равняться теплу, подводимому к единице поверхности в единицу времени вследствие теплопроводности из внутренних объемов тела, т. е.

$$\alpha\left(t_{с}-t_{ж}\right)=-\lambda\left(\frac{\partial t}{\partial n}\right)_{с},$$

где n – нормаль к поверхности тела, индекс «с» указывает на то, что температура и градиент относятся к поверхности тела (при n = 0).

Окончательно граничное условие третьего рода можно записать в следующем виде:

$$\left(\frac{\partial t}{\partial n}\right)_c = -\frac{\alpha}{\lambda}\left(t_c - t_{ж}\right).$$

Уравнение называется уравнением теплоотдачи, по существу является частным выражением закона сохранения энергии для неподвижной поверхности тела.

Коэффициент теплоотдачи зависит от большого числа факторов. Однако во многих случаях коэффициент теплоотдачи можно считать неизменным, поэтому мы будем в дальнейшем при решении задач теплопроводности принимать величину α постоянной.

г) Граничные условия четвертого рода характеризуют условия теплообмена системы тел или тела с окружающей средой по закону теплопроводности. Предполагается, что между телами осуществляется идеальный контакт (температуры соприкасающихся поверхностей одинаковы).

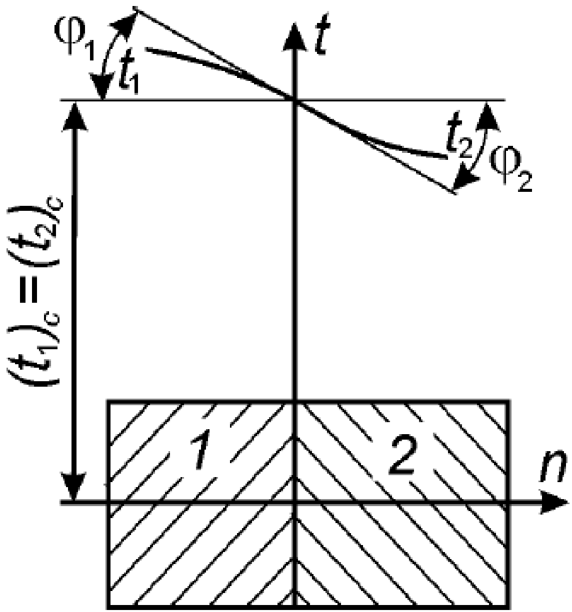
В рассматриваемых условиях имеет место равенство тепловых потоков, проходящих через поверхность соприкосновения, т. е.

$$\lambda_1 \left(\frac{\partial t_1}{\partial n} \right)_c = \lambda_2 \left(\frac{\partial t_2}{\partial n} \right)_c .$$

В задачах с граничным условием четвертого рода задается отношение тангенсов угла наклона касательных к температурным кривым в точке соприкосновения тел или тела и среды

$$\frac{\mathrm{tg}\,\varphi_1}{\mathrm{tg}\,\varphi_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \mathrm{const} .$$

Условия однозначности для процессов теплопроводности

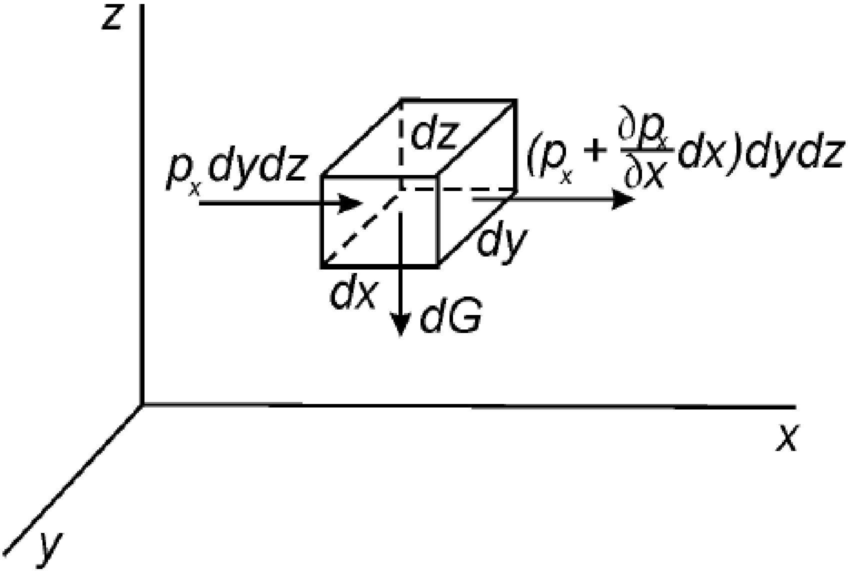


Так как при совершенном контакте оба тела на поверхности соприкосновения имеют одинаковую температуру, то касательные у поверхности раздела проходят через одну и ту же точку. Дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{c\rho}\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right) + \frac{q_v}{c\rho}$$

совместно с условиями однозначности дает полную математическую формулировку конкретной задачи теплопроводности. Поставленная таким образом задача разрешается аналитически или численным методом. При исследовании процессов теплообмена также используются методы компьютерного моделирования или тепловых аналогий.

Зависимость между силами, действующими в жидкости, устанавливается в форме уравнений движения жидкости. Сначала установим эту связь для жидкости, движущейся без трения (идеальная жидкость) и находящейся под действием сил тяжести и сил давления. Для вывода уравнения применим основной принцип механики, согласно которому тело находится в состоянии движения, если сумма проекций всех сил, действующих на тело, равна произведению массы движущегося тела на его ускорение. Выделим в движущейся жидкости элементарный параллелепипед с гранями $dxdydz$ (см. рис.), выразим проекции сил, действующих на него, при этом силу тяжести dG направим по оси z. Получим для осей x, y и z соответственно


z
$p_x dydz$
dz
$(p_x + \frac{\partial p_x}{\partial x}dx)dydz$
dy
dx
dG
x
y

$$p_x dydz - \left(p_x + \frac{\partial p_x}{\partial x} dx \right) dydz = \rho \frac{Dw_x}{d\tau} dxdydz \,,$$

$$p_y dxdz - \left(p_y + \frac{\partial p_y}{\partial y} dy \right) dxdz = \rho \frac{Dw_y}{d\tau} dxdydz \,,$$

$$-dG + p_z dxdy - \left(p_z + \frac{\partial p_z}{\partial z} dz \right) dxdy = \rho \frac{Dw_z}{d\tau} dxdydz \,.$$

$$-\frac{\partial p_x}{\partial x} = \rho \frac{Dw_x}{d\tau} \,,$$

$$-\frac{\partial p_y}{\partial y} = \rho \frac{Dw_y}{d\tau} \,,$$

$$-\gamma - \frac{\partial p_z}{\partial z} = \rho \frac{Dw_z}{d\tau} \,.$$

Раскрывая полные производные в правой части уравнений, получим

$$-\frac{\partial p_x}{\partial x} = \rho\left(\frac{\partial w_x}{\partial \tau} + w_x\frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y\frac{\partial w_x}{\partial y} + w_z\frac{\partial w_x}{\partial z}\right),$$

$$-\frac{\partial p_y}{\partial y} = \rho\left(\frac{\partial w_y}{\partial \tau} + w_x\frac{\partial w_y}{\partial x} + w_y\frac{\partial w_y}{\partial y} + w_z\frac{\partial w_y}{\partial z}\right),$$

$$-\gamma - \frac{\partial p_z}{\partial z} = \rho\left(\frac{\partial w_z}{\partial \tau} + w_x\frac{\partial w_z}{\partial x} + w_y\frac{\partial w_z}{\partial y} + w_z\frac{\partial w_z}{\partial z}\right).$$

Данная система дифференциальных уравнений называется дифференциальными уравнениями движения Эйлера.

Для установившегося режима движения жидкости при условии, что компоненты скорости изменяются только в направлении соответствующих осей, уравнение движения будет иметь вид

$$-\frac{\partial p_x}{\partial x} = \rho w_x \frac{\partial w_x}{\partial x},$$

$$-\frac{\partial p_y}{\partial y} = \rho w_y \frac{\partial w_y}{\partial y},$$

$$-\gamma - \frac{\partial p_z}{\partial z} = \rho w_z \frac{\partial w_z}{\partial z}.$$

Уравнения выражают действие сил в точке движущейся жидкости. Чтобы выразить действие сил по всей длине граней параллелепипеда (рис. выше), необходимо левые и правые части уравнений умножить на длину соответствующих граней. Тогда получим

$$-\frac{\partial p_x}{\partial x}dx = \rho w_x \frac{\partial w_x}{\partial x}dx\,,$$

$$-\frac{\partial p_y}{\partial y}dy = \rho w_y \frac{\partial w_y}{\partial y}dy\,,$$

$$-\gamma\,dz - \frac{\partial p_z}{\partial z}dz = \rho w_z \frac{\partial w_z}{\partial z}dz\,.$$

Сложив уравнения, получим полное изменение действия сил во всем объеме элементарного параллелепипеда:

$$\gamma dz + \left(\frac{\partial p_x}{\partial x} dx + \frac{\partial p_y}{\partial y} dy + \frac{\partial p_z}{\partial z} dz \right) +$$

$$+ \rho \left(w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} dx + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} dy + w_z \frac{\partial w_z}{\partial z} dz \right) = 0$$

Выражения, стоящие в скобках, представляют полные дифференциалы давления dP и квадрата скорости, так как в последнем случае любое слагаемое можно представить как

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} dx = d\left(\frac{w_x^2}{2} \right).$$

$$\gamma dz + dP + \rho d\left(\frac{w^2}{2} \right) = 0 .$$

Интегралом уравнения соответственно будет

$$\gamma z + P + \rho \frac{w^2}{2} = \text{const}$$

или

$$z + \frac{P}{\gamma} + \frac{w^2}{2g} = \text{const},$$

где z – положение рассматриваемой точки в текущей жидкости относительно уровня сравнения (нивелирная высота), м; P/γ – статический напор в рассматриваемой точке, м; $w^2/2g$ – скоростной или динамический напор в рассматриваемой точке, м.

Для двух рассматриваемых точек жидкости, расположенных на разных уровнях, уравнение Бернулли записывается в следующем виде:

$$z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{w_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{w_2^2}{2g}.$$

Согласно уравнению Бернулли закон движения жидкости можно интерпретировать:

1) при установившемся движении идеальной жидкости для любой точки потока сумма статического и динамического напоров остается величиной постоянной;

2) при установившемся движении идеальной жидкости в той точке потока, где скорость больше, давление меньше;

3) при установившемся движении идеальной жидкости сумма потенциальной ($z + P/\gamma$) и кинетической энергии ($w^2/2g$) остается величиной постоянной.