И.А. Реброва

ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

Учебное пособие

Омск • 2010

Федеральное агентство по образованию
ГОУ ВПО «Сибирская государственная автомобильно-дорожная
академия (СибАДИ)»

И.А. Реброва

ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

Учебное пособие

Омск
СибАДИ
2010

УДК 681.5
ББК 32.965.5
Р 31

Рецензенты:
д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой «Физики и высшей математики» Омского института водного транспорта филиала НГАВТ И.В. Широков;
канд. техн. наук, доц., ст. науч. сотр. ОФИМ СО РАН О.Г. Чанышев

Работа одобрена редакционно-издательским советом СибАДИ в качестве учебного пособия по дисциплине «Планирование эксперимента» для студентов специальности 220301 «Автоматизация технологических процессов и производств (строительство)»

Реброва И.А.
Р 31 Планирование эксперимента: учебное пособие. – Омск: СибАДИ, 2010. – 105 с.

ISBN

В учебном пособии рассмотрены основные понятия теории эксперимента, задачи дисперсионного, корреляционного, регрессионного анализа и методы их решения, планирование и обработка результатов многофакторного эксперимента. Учебное пособие предназначено для изучения дисциплины «Планирование эксперимента» студентами специальности «Автоматизация технологических процессов и производств (строительство)»

Табл. 29. Ил. 16. Библиогр.: 3 назв.

ISBN

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Экспериментальные исследования широко применяются на всех стадиях разработки, производства и эксплуатации различных технических объектов, в частности средств автоматики и информационно-измерительной техники. При создании электронных и электротехнических устройств основные затраты приходятся на их настройку и испытания.

Теория планирования эксперимента формулирует приемы и способы оптимальной организации исследовательской работы. Овладение основами теории эксперимента и практическими приемами ее использования повышает эффективность работы исследователя, позволяет с наименьшими затратами решать многие практически важные исследовательские задачи: построение по опытным данным математической модели объектов, оптимизацию процессов, проверку различных предположений.

Рабочие процессы устройств автоматики протекают в изменяющихся условиях, следовательно, зависят от большого числа переменных. Описание таких процессов аналитическими методами не всегда возможно. Поэтому при исследовании рабочих процессов устройств необходимо применять методы планирования эксперимента, которые позволяют проводить исследования, одновременно варьируя все влияющие факторы. По экспериментальным данным формируется математическая модель исследуемого объекта. Математическое описание устройств и процессов позволяет исследовать и оптимизировать их параметры.

В учебном пособии изложены элементы теории планирования эксперимента и рассмотрено применение дисперсионного, корреляционно-регрессионного анализа, а также планов первого порядка многофакторного эксперимента при решении различных инженерных задач.

1. ПОНЯТИЕ О ПЛАНЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

Принятие проектных решений в любой отрасли промышленности и оценка их качества в основном осуществляются на основании данных эксперимента.

Экспериментом называют целенаправленное воздействие на объект исследования с целью получения о нем достоверной информации.

Планирование эксперимента – это средство построения математических моделей различных процессов с целью повышения эффективности экспериментальных исследований: сокращения времени и средств на проведение эксперимента, повышения достоверности результатов исследования.

Основой теории планирования эксперимента является математическая статистика, так как результаты эксперимента могут рассматриваться как случайные величины или случайные процессы.

1.1. Классификация экспериментов

Эксперименты классифицируют по структуре на:

– натуральные – средства экспериментального исследования взаимодействуют непосредственно с объектом исследования;

– модельные – экспериментируют не с самим объектом, а с его моделью;

– модельно-кибернетические (машинные) – разновидности модельного эксперимента, при котором соответствующие характеристики изучаемого объекта вычисляются с помощью алгоритма на ЭВМ.

По стадии научных исследований различают:

- лабораторные эксперименты для изучения общих закономерностей различных явлений и процессов при проверке научных гипотез и теорий;
- стендовые эксперименты, которые проводятся при необходимости изучить конкретный процесс, протекающий в исследуемом объекте, определением физических, химических и других свойств;
- промышленные эксперименты, которые обязательны при внедрении нового изделия или процесса, при оптимизации действующего

процесса, при проведении контрольно-выборочных испытаний качества выпускаемой продукции.

По характеру постановки задачи для определения модели объекта эксперименты бывают:

– учитывающие наличие неоднородностей различного вида (состав материала, изменение во времени и т.п.);

– рассчитанные на выявление механизма явления (исследования хорошо организованных объектов при достаточно высоком уровне исходной информации);

– учитывающие локальную область пространства параметров объекта, соответствующую экстремуму некоторого критерия оптимальности при наличии временного изменения параметров;

– учитывающие локальную область пространства параметров объекта, соответствующую экстремуму некоторого критерия оптимальности при отсутствии временного изменения параметров;

– учитывающие степень влияния входных переменных на выходные переменные;

– позволяющие преобразовать набор переменных объекта исследования;

– рассчитанные на прогнозирование поведения объекта исследования.

По способу проведения различают:

• пассивный эксперимент, который основан на регистрации входных и выходных параметров, характеризующих объект исследования, без вмешательства в эксперимент в процессе его проведения. Обработка экспериментальных данных осуществляется только после окончания эксперимента;

• активный эксперимент. При использовании методов активного эксперимента математическое описание строится в виде совокупности статических и динамических выходных характеристик объекта, которые регистрируются при подаче на его входы специальных возмущающих воздействий по заранее спланированной программе.

Активный эксперимент позволяет быстро устанавливать закономерности, находить оптимальные режимы функционирования объекта, но его обычно и труднее осуществить. Вмешательство в технологический процесс может привести к снижению производительности и выпуску бракованной продукции. Иногда, например, при астрономических наблюдениях активный эксперимент вообще невозможен.

1.2. Математическая модель объекта исследования

В общем виде объект исследования можно представить структурной схемой, приведенной на рис. 1.1. Состояние объекта исследования можно представить зависимостью

$$Y = f(X;U;Z), \qquad (1.1)$$

где $X = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ – независимые управляющие (входные) переменные, которые в процессе эксперимента можно целенаправленно изменять (питающее напряжение, технологические режимы и т. п.); $U = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ – контролируемые возмущающие воздействия, которые не допускают целенаправленного изменения в ходе исследования (температура окружающей среды, освещение и т.п.); $Z = (z_1, z_2, \ldots, z_h)$ – неконтролируемые и неуправляемые возмущения, неизвестные исследователю, медленно изменяющиеся во времени случайным образом; $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ – контролируемые или вычисляемые параметры, характеризующие состояние объекта.

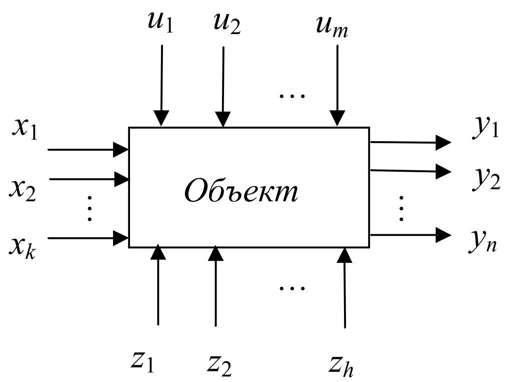

Рис.1.1. Структурная схема объекта исследования

Такое представление объекта (рис. 1.1) основано на широко используемом в технике принципе «черного ящика», т.е. системы, структура которой скрыта от наблюдателя, а суждение об ее функционировании создается только на основании внешних воздействий и ответствующих им реакциях системы. Следовательно, одной из основных задач эксперимента является выявление взаимосвязей между входными и выходными параметрами объекта и представление их в количественной форме в виде **математической модели**. Такая модель является математическим отображением наиболее существенных взаимосвязей между параметрами объекта. Она представляет собой совокупность уравнений, условий и алгоритмических правил и позволяет получить информацию о процессах, протекающих в объекте, которая может быть использована для управления моделируемым объектом с целью поиска оптимальных условий, а также анализировать и проектировать системы.

Входные параметры, которые оказывают влияние на объект и могут быть измерены, называют **факторами**. Так, например, при исследовании измерительного преобразователя с целью получения его математической модели в качестве факторов могут выступать измеряемая величина, температура окружающей среды, напряжение питания и т.п. Очевидно, что при планировании активного эксперимента факторы должны быть управляемыми и независимыми.

Каждый фактор имеет область определения, которая должна быть установлена до проведения эксперимента. Она может быть непрерывной или дискретной, причем при непрерывной области обычно производят ее искусственную дискретизацию. Считают, что каждый из параметров может изменяться в некоторых пределах:

$$\begin{aligned} &x_{iH} \le x_i \le x_{iB} \quad (i = 1,2,\ldots,k);\\ &u_{jH} \le u_j \le u_{jB} \quad (j = 1,2,\ldots,m);\\ &z_{gH} \le z_g \le z_{gB} \quad (g = 1,2,\ldots,h). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Выход хотя бы одного параметра за эти пределы приводит к нарушению нормальной работы устройства (или нормального протекания процесса). Задача исследователя заключается в том, чтобы при фиксированных параметрах $z_g = \mathrm{const}$ и $u_j = \mathrm{const}$ выбрать такие значения $x_i = \mathrm{var}$ (такую рабочую точку в области работоспособности), при которых выходной (или оптимизируемый) параметр объекта y достигает оптимальной величины. Другими словами, необходимо оптимизировать функцию $y = f(x_i = \mathrm{var};\, u_j = \mathrm{const};\, z_g = \mathrm{const})$ в области определения x_i.

Каждую конкретную комбинацию факторов можно рассматривать как точку в многомерном факторном пространстве. Область возможных комбинаций факторов, построенная в многомерном факторном пространстве, называют **областью планов эксперимента**.

При планировании эксперимента с целью нахождения оптимальных условий в качестве единственной выходной величины рассматривается критерий оптимальности (параметр оптимизации), зависящий от выходных параметров объекта. Эту функцию рассматривают как отклик объекта на указанную комбинацию факторов и называют **функцией отклика**. Геометрический образ в факторном пространстве соответствующей функции отклика называют **поверхностью отклика**.

В зависимости от источника информации, используемого при построении математической модели, различают физические (аналитические) и статистические (эмпирические) модели.

Физические модели представляют в виде сложных систем уравнений (алгебраических, дифференциальных, интегральных или дифференциально-интегральных), позволяющих очень точно описать процессы, протекающие в объекте, и допускающих экстраполяцию в точки факторного пространства, в которых невозможно непосредственное наблюдение этих процессов.

Статистические модели получают в результате статистической обработки экспериментальной информации, собранной об исследуемом объекте. Эти модели имеют относительно простую структуру и часто представляются в виде полиномов. Область их применения ограничивается ближайшей окрестностью рабочих точек, в которых проводятся эксперименты. Во многих случаях построение таких моделей можно выполнить при сравнительно небольших затратах времени и средств.

Принято также различать стационарные и динамические модели. Первые из них представляют неизменяющиеся во времени соотношения, вторые описывают переходные процессы, т.е. нестационарные состояния.

1.3. Основные этапы проведения экспериментальных исследований

В общем случае планирование и организация эксперимента включают в себя следующие последовательно выполняемые этапы:

– постановка задачи (определение цели эксперимента, выявление исходной ситуации, оценка допустимых затрат времени и средств, установление типа задачи);

– сбор априорной информации об исследуемом объекте (изучение литературы, опрос специалистов и т.п.);

– выбор способа решения и стратегии его реализации (установление типа модели, выявление возможных влияющих факторов, выявление параметров, выбор целевых функций);

– проверка выбранного способа решения задачи (предварительные эксперименты с целью проверки экспериментальной установки и методики, а также предварительной оценки качества модели);

– реализация выбранного способа решения задачи (уточнение типа экспериментальной установки, определение значения целевой функции и факторов, объемов выборки, кратности повторения опытов и т. д.; завершается этап проведением экспериментов);

– анализ и интерпретация результатов, их представление (получение оценок интересующих экспериментатора величин и определение степени достоверности этих оценок, выражение результатов анализа в терминах и понятиях той области науки или техники, в интересах которой был проведен эксперимент).

1.4. Классификация задач эксперимента

Можно выделить несколько типичных задач, решаемых экспериментатором. Это:

– оценка определенных характеристик изучаемого объекта, проявляющих себя статистически, а также проверка некоторых гипотез, касающихся этих характеристик. Такая задача относится к **измерительным процессам**;

– выявление воздействия на выходную величину тех или иных факторов; результатом этого эксперимента должно быть одно из утверждений: «да» или «нет», например, влияет ли добавка некоторого компонента на прочность бетона и т.п. Соответствующая экспериментальная процедура называется **дисперсионным анализом**;

– установление функции отклика, т.е. статистически достоверной зависимости, связывающей отклик с факторами; другими словами, построение математической модели изучаемого объекта. Это задача **регрессионного анализа**;

– определение степени взаимной статистической связи двух величин, например, затрат на изучение технической информации и количество изобретений и т.п. Определение степени подобной связи является предметом **корреляционного анализа**;

– нахождение оптимальных условий протекания процесса, т.е. определение значений факторов, при которых отклик является максимальным (или минимальным). Эта задача решается в ходе выполнения **экстремального эксперимента**.

1.5. Параметры оптимизации

Выбор параметров оптимизации (критериев оптимизации) является одним из главных этапов работы на стадии предварительного изучения объекта исследования.

Под **параметром оптимизации** понимают характеристику цели, заданную количественно. Параметр оптимизации является откликом на воздействие факторов, которые определяют поведение исследуемой системы. Каждый реальный объект может характеризоваться несколькими или одним параметром оптимизации.

Параметр оптимизации необходимо выбирать с учетом комплекса требований. Он должен:

– быть количественным, т.е. иметь числовую оценку;

– обладать однозначностью в статистическом смысле. Заданному набору значений факторов должно соответствовать одно значение параметра оптимизации, при этом обратное утверждение неверно: одному и тому же значению параметра могут соответствовать разные наборы значений факторов;

– быть универсальным и всесторонне отражать характеристики объекта, процесса, явления. Универсальными обычно являются экономические и технико-экономические параметры (себестоимость, надежность и др.);

– быть эффективным как с точки зрения достижения цели, так и в статистическом смысле. Если, например, за параметр оптимизации принять себестоимость восстановления детали, то он не будет характеризовать надежность ее работы. Поэтому в качестве параметра оптимизации целесообразно выбирать себестоимость при допустимой износостойкости или износостойкость при допустимой себестоимости. Статистически эффективным параметром оптимизации является тот, который имеет наименьшие ошибки измерений;

– иметь ясный физический смысл. Это требование не только определяет цель исследования, но и облегчает интерпретацию полученных результатов эксперимента.

Задачи с одним выходным параметром имеют очевидные преимущества. Но на практике чаще всего приходится учитывать несколько выходных параметров. Иногда их число довольно велико. Так, например, при производстве резиновых и пластмассовых изделий приходится учитывать физико-механические, технологические, экономические, художественно-эстетические и другие параметры. Математические модели можно построить для каждого из параметров, но одновременно оптимизировать несколько функций невозможно.

Обычно оптимизируется одна функция, наиболее важная с точки зрения исследования, из множества выходных параметров выбирается один в качестве параметра оптимизации, а остальные служат ограничениями. Используя корреляционный анализ, исследуется также возможность уменьшения числа выходных параметров. Кроме того, для выбора единого параметра оптимизации применяются математические преобразования, переход от нескольких параметров оптимизации к обобщенному.

Пусть исследуемый объект характеризуют n частных откликов y_u $(u = 1,2,\ldots,n)$, каждый из этих откликов имеет свой физический смысл и, чаще всего, разную размерность и измеряется в N опытах. Тогда y_{ui} – это значение u-го отклика в i-м опыте $(i = 1,2,\ldots,N)$. Чтобы объединить отклики, необходимо ввести для каждого из них некоторую безразмерную шкалу, которая должна быть однотипной для всех объединяемых откликов. Если каждому y_{ui} присвоить только два значения: 0 – неудовлетворительный результат, 1 - удовлетворительный результат, то таким образом можно стандартизовать шкалу частных откликов. Обобщенный отклик в этом случае также должен принимать одно из этих двух возможных значений, причем так, чтобы значение 1 имело место, если все частные отклики в этом опыте приняли значение 1, и 0, если хотя бы один из откликов обратился в 0. Тогда для построения обобщенного отклика удобно воспользоваться формулой

$$Y_i = \sqrt[n]{\prod_{u=1}^{n} y_{ui}}, \tag{1.3}$$

где Y_i – обобщенный отклик в i-м опыте; П – произведение частных откликов $y_{1i}, y_{2i}, \ldots, y_{ni}$.

Если для каждого из частных откликов известен «идеал» y_{u0} – наилучшее значение u-го отклика, тогда модуль разности $|y_{ui} - y_{u0}|$ можно рассматривать как некоторую меру близости к идеалу. Чтобы перейти к безразмерным значениям, достаточно модуль разности разделить на желаемое значение $|y_{ui} - y_{u0}| / y_{u0}$. При совпадении с идеалом всех частных откликов в некотором опыте Y_i равно нулю. Это и есть то значение, к которому необходимо стремиться.

Недостатком такой оценки является то, что все частные отклики входят в обобщенный отклик на равных правах. На практике же различные показатели бывают далеко неравноправны. Устранить этот недостаток можно введением некоторого веса a_u.

$$Y_i = \sqrt{\sum_{u=1}^{n} a_u \left(\frac{y_{ui} - y_{u0}}{y_{u0}} \right)^2}, \tag{1.4}$$

причем $\sum_{u=1}^{n} a_u = 1$ и $a_u > 0$. Чтобы проранжировать отклики по степени важности и найти соответствующие веса, можно воспользоваться экспертными оценками.

Вместо шкалы с двумя классами 0 и 1, можно, используя отношения предпочтения, получить более содержательную шкалу желательности. Шкала желательности относится к психофизическим шкалам. Ее назначение – установление соответствия между физическими и психологическими параметрами. Под физическими параметрами понимаются всевозможные отклики, характеризующие функционирование исследуемого объекта, а под психологическими параметрами понимаются субъективные оценки экспериментатора желательности того или иного значения отклика.

Чтобы получить шкалу желательности, можно воспользоваться готовыми таблицами соответствия между отношениями предпочтения в эмпирической и числовой системах (табл. 1.1).

Таблица 1.1

Стандартные отметки на шкале желательности

Желательность	Отметки на шкале желательности
Очень хорошо	1,00-0,80
Хорошо	0,80-0,63
Удовлетворительно	0,63-0,37
Плохо	0,37-0,20
Очень плохо	0,20-0,00

В табл. 1.1 представлены числа, соответствующие некоторым точкам кривой (рис. 1.2), которая задается уравнением $d = \exp[-\exp(-y)]$, где exp – принятое обозначение экспоненты. На оси ординат нанесены значения желательности, изменяющиеся от 0 до 1. По оси абсцисс указаны значения отклика, записанные в условном масштабе. Кривую желательности обычно используют как номограмму. Границы допустимых значений для частных откликов могут быть односторонними в виде $y_{ui} > y_{\min}$ и двусторонними в виде

$y_{\min} < y_{ui} < y_{\max}$, причем $y_{\min}$ соответствует отметке на шкале желательности $d_u = 0{,}37$, значение $y_{\max}$ устанавливается на основании сложившейся ситуации и опыта исследователя.

Преобразовав частные отклики в частные функции желательности, приступают к построению обобщенной функции желательности. Обобщают по формуле

$$D_i = \sqrt[n]{\prod_{u=1}^{n} d_{ui}}\,, \qquad (1.5)$$

где D_i - обобщенная желательность; d_{ui} - частные желательности.

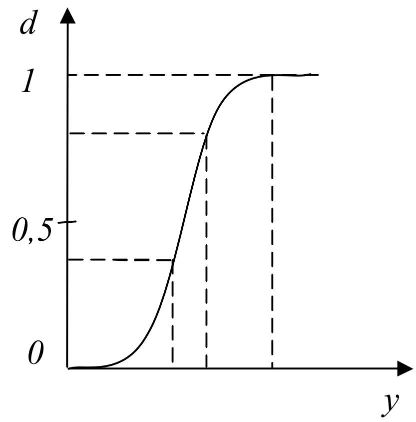

Рис.1.2. Кривая желательности

Способ задания обобщенной функции желательности таков, что если хотя бы одна желательность $d_{ui} = 0$, то обобщенная функция будет равна нулю. С другой стороны, $D_i = 1$ только тогда, когда все $d_{ui} = 1$.

Например, при установлении пригодности материала с данным набором свойств и в заданных условиях использования, если хотя бы один частный отклик не удовлетворяет требованиям, то материал считается непригодным. Если при определенных температурах материал становится хрупким и разрушается, то, как бы ни были хороши другие свойства, этот материал не может быть применим по назначению.

Обобщенная функция желательности является количественным, однозначным, единым и универсальным показателем качества исследуемого объекта и обладает такими свойствами, как адекватность, эффективность, статистическая чувствительность, и поэтому может использоваться в качестве критерия оптимизации.

1.6. Факторы

Под фактором понимают величину, воздействующую на исследуемый процесс и принимающую в некоторый момент определенное значение. Фактор считается заданным, если вместе с его названием указывается область его определения. Под областью определения понимается совокупность всех значений, которые может принимать данный фактор. Область определения может быть непрерывной и дискретной. При планировании эксперимента значения факторов принимаются дискретными. В практических задачах области определения факторов имеют ограничения, которые носят либо принципиальный, либо технический характер.

Различают качественные и количественные факторы. Качественные факторы рекомендуется учитывать на первой стадии эксперимента (марка материала, тип оборудования и т.д.). К количественным относятся те факторы, которые можно измерять.

При выборе факторов необходимо учитывать следующие требования:

– управляемость. Под управляемостью понимается возможность придавать фактору любой уровень в области его определения и поддерживать этот уровень постоянным в течение всего опыта;

– однозначность. Фактор не должен быть функцией других факторов.

При планировании эксперимента обычно одновременно изменяются несколько факторов. Поэтому существуют требования, предъявляемые к совокупности факторов:

- совместность. Каждый фактор может быть установлен на любом уровне вне зависимости от значений уровней других факторов;
- независимость. Отсутствие корреляции между факторами (т.е. связь между факторами не должна быть линейной);
- точность. Степень точности определяется диапазоном изменения факторов. Точность фиксации уровней факторов должна быть значительно выше, чем точность измерения параметра оптимизации.

При выборе области определения необходимо учитывать следующие ограничения:

- принципиальные ограничения для значений факторов, которые не могут быть нарушены ни при каких обстоятельствах (например, минимальное температурное значение – абсолютный ноль);
- технико-экономические ограничения (например, стоимость сырья);
- ограничения, определяемые конкретными условиями проведения процесса (например, возможности средств измерения).

Процедура выбора области эксперимента включает два этапа:

– выбор основного (нулевого) уровня;

– выбор интервала варьирования.

Выбранные для эксперимента количественные или качественные состояния фактора называются **уровнями фактора.**

В качестве нулевой точки выбирают такое состояние объекта исследований, которое принимается за исходное при поиске оптимума. Оптимизация связана с улучшением состояния объекта по сравнению с его состоянием в нулевой точке. Если проведению эксперимента предшествовали другие исследования в этой же области, то за нулевую принимается точка, в которой параметр оптимизации имеет наилучшее значение, установленное в результате формализации априорной информации. В этом случае нулевыми уровнями факторов являются те значения, сочетания которых соответствуют координатам нулевой точки.

Интервалом варьирования факторов называется некоторое число (свое для каждого фактора), прибавление которого к основному уровню дает верхний, а вычитание – нижний уровни факторов. Другими словами, интервал варьирования – это расстояние на координатной оси между основным (нулевым) и верхним уровнями, между основным и нижним уровнями.

Нижний уровень – это значение фактора, откладываемое в отрицательном направлении оси координат. Верхний уровень – это значение фактора, откладываемое в положительном направлении оси координат. Верхний уровень принято обозначать «+», нижний уровень – «–».

На выбор интервала варьирования накладываются ограничения:

– снизу он не может быть меньше ошибки фиксирования уровня фактора;

– сверху верхний или нижний уровень не должен выходить за область определения.

Кроме того, чрезмерное увеличение величины интервалов варьирования нежелательно, т.к. это может привести к снижению эффективности поиска оптимума. Очень малый интервал варьирования уменьшает область эксперимента, что замедляет поиск оптимума.

При выборе интервала варьирования целесообразно учитывать, если это возможно, число уровней варьирования факторов в области эксперимента. От числа уровней зависят объем эксперимента и эффективность оптимизации.

Зависимость числа опытов от числа уровней факторов имеет вид

$$N = p^k, \tag{1.6}$$

где N – число опытов; p – число уровней факторов; k – число факторов.

В каждом отдельном случае число уровней выбирают с учетом условий задачи и предполагаемых методов планирования эксперимента. Геометрической интерпретацией области определения факторов является поверхность отклика. В случае двух факторов имеем двухмерное пространство (рис. 1.3). Если факторы совместны, то границы образуют на плоскости некоторый прямоугольник. Для числа факторов более двух пространство многомерное и геометрическая наглядность теряется.

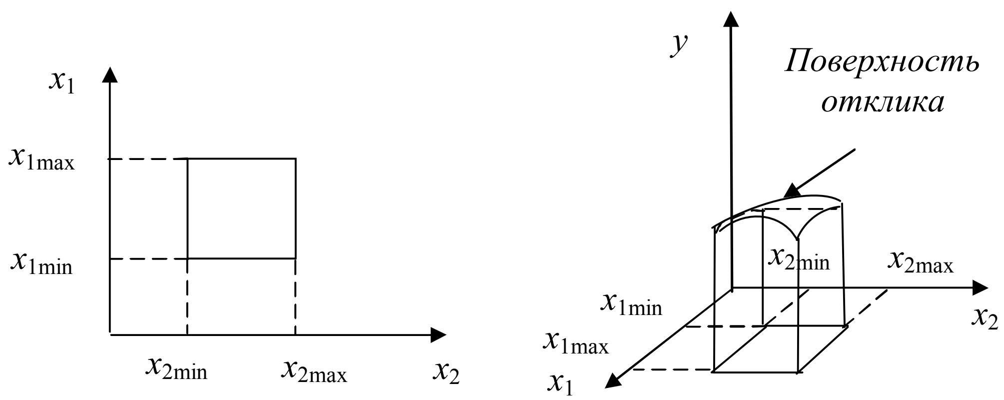

Рис. 1.3. Область определения факторов. Поверхность отклика:
——— границы совместимости факторов
– – – границы определения факторов

Пространство, в котором строится поверхность отклика, называется **факторным пространством**. Оно задается координатными осями, по которым откладываются значения факторов и параметров оптимизации.

Вопросы для самоподготовки

1. Дайте определение эксперимента.
2. Какие вопросы решает планирование эксперимента?
3. Классификация экспериментов.
4. Дайте определение математической модели объекта исследования.
5. Что называют факторами, областью определения факторов?
6. Что называют функцией отклика и поверхностью отклика?

7. Виды математических моделей.
8. Перечислите этапы проведения экспериментальных исследований.
9. Перечислите основные задачи эксперимента.
10. Дайте определение параметра оптимизации.
11. Перечислите требования, предъявляемые к параметру оптимизации.
12. Что называют обобщенным параметром оптимизации?
13. Назначение шкалы желательности.
14. Изобразите кривую желательности.
15. Требования, предъявляемые к факторам.
16. Что называют уровнями факторов и интервалом варьирования факторов?
17. Какие ограничения необходимо учитывать при выборе интервала варьирования?
18. Как зависит количество опытов в эксперименте от числа уровней факторов?
19. Дайте определение факторного пространства.

2. ИЗМЕРЕНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

2.1. Физические величины

Физическая величина – это свойство, общее в качественном отношении для многих физических объектов, но индивидуальное для каждого из них в количественном отношении.

Качественная сторона понятия «физическая величина» определяет «род» величины (например, электрическое сопротивление как общее свойство проводников), а количественная – ее «размер» (сопротивление конкретного исследуемого проводника). Индивидуальность в количественном отношении понимают в том смысле, что свойство может быть для одного объекта в определенное число раз больше или меньше, чем для другого.

Выделяют измеряемые физические величины, которые могут быть выражены количественно в виде определенного числа установленных единиц измерения, и оцениваемые величины, для которых по каким-либо причинам не может быть введена единица измерения.

Классификация физических величин приведена на рис. 2.1.

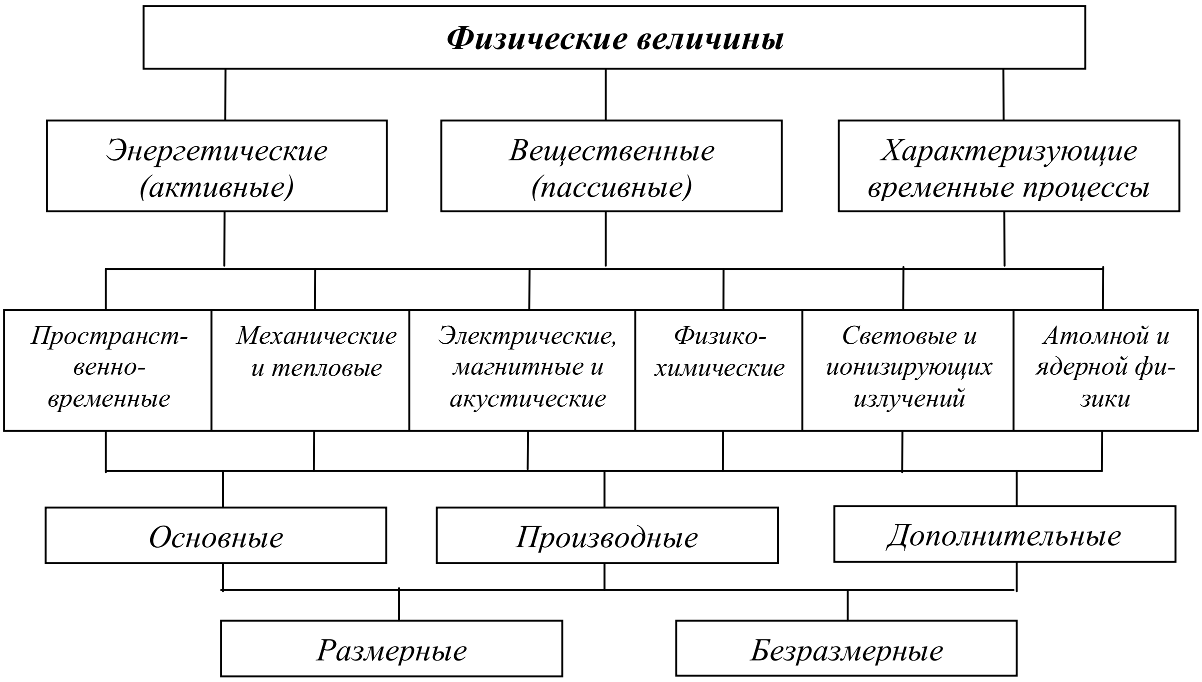

Рис. 2.1. Классификация физических величин

По видам явлений физические величины делятся на следующие группы:

– энергетические (активные), т.е. величины, описывающие энергетические характеристики процессов преобразования, передачи и использования энергии; к ним относятся ток, напряжение, мощность, энергия, заряд; они могут быть преобразованы в сигналы измерительной информации без использования вспомогательных источников энергии;

– вещественные (пассивные), т.е. величины, описывающие физические и физико-химические свойства веществ, материалов; для их измерения необходим вспомогательный источник энергии, с помощью которого формируется сигнал измерительной информации; при этом пассивные физические величины преобразуются в активные, которые и измеряются;

– характеризующие временные процессы; к этой группе относятся различного вида спектральные и поляризационные характеристики, корреляционные функции и др.

По принадлежности к различным группам физических процессов практически все указанные физические величины делятся на пространственно-временные, механические, тепловые, электрические, магнитные, акустические, физико-химические, световые, ионизирующих излучений, атомной и ядерной физики.

По степени условной независимости от других величин данной группы физические величины могут быть основными, производными и дополнительными.

По наличию размерности физические величины делятся на размерные и безразмерные.

Значение физической величины – оценка размера физической величины в виде некоторого числа принятых для нее единиц измерения.

Истинным значением физической величины называется значение физической величины, которое идеальным образом отражало бы в качественном и количественном отношении соответствующее свойство объекта. Определить экспериментально его невозможно вследствие неизбежных погрешностей измерения.

Действительным значением физической величины называется значение физической величины, найденное экспериментальным путем и настолько приближающееся к истинному значению, что для данной цели может быть использовано вместо него.

Единица физической величины – физическая величина фиксированного размера, которой, по определению, условно присвоено стандартное числовое значение, равное единице. Она применяется для количественного выражения однородных физических величин.

Единицы физических величин подразделяются на основные и производные и объединяются в соответствии с принятыми принципами в системы единиц физических величин.

Физические величины, встречающиеся в эксперименте, относят к следующим основным типам:

– **случайная величина**. Такая физическая величина связана со случайными процессами, поэтому результат отдельного измерения не может быть однозначно предсказан заранее. Вместе с тем проведение достаточно большого количества измерений случайной величины позволяет установить, что результаты измерений отвечают определенным статистическим закономерностям. Их выявление, изучение и учет составляют неотъемлемую часть любого эксперимента;

– **постоянная величина**. К таким величинам должны быть отнесены физические постоянные, например, заряд электрона, скорость света в вакууме и т.п. Можно считать постоянными величинами также некоторые характеристики конкретного объекта, находящегося при фиксированных условиях. Этот тип физических величин чаще всего встречается в экспериментах, например, при определении длины образца, его массы и т.п. Однако многократные измерения постоянной величины могут дать неодинаковые результаты, так как результаты измерений подвержены неконтролируемым влияниям многочисленных воздействий внешней среды, включая неконтролируемые процессы в исследуемых объектах и используемых измерительных приборах. Вследствие этого постоянная величина зачастую проявляет себя как случайная величина, а результаты ее измерений отражают случайную природу воздействий и отвечают определенным статистическим закономерностям;

– **изменяющаяся величина**. Такая величина закономерно меняется с течением времени вследствие процессов, проходящих в исследуемом объекте, например, скорость сложной химической реакции. Измерения, проводимые в различные моменты времени, фиксируют величину в новых условиях. Набор результатов однократных измерений представляет собой результаты принципиально неповторимых измерений;

– **нестабильная величина**. Такая величина изменяется с течением времени, без каких бы то ни было статистических закономерностей. К основной характеристике нестабильной величины следует отнести отсутствие у экспериментатора информации о ее зависимости от времени. Измерения такой величины дают набор данных, не несущих сколько-нибудь полезных сведений. Вместе с тем нестабильная величина может быть переведена в разряд изменяющихся величин, если экспериментально или теоретически установлена закономерность изменения ее во времени.

2.2. Основные понятия теории измерений

Измерением называется процесс нахождения значения физической величины опытным путем с помощью специальных технических средств.

Получаемая при измерениях физических величин информация называется **измерительной**. Зачастую информация об объекте измерения известна до проведения исследований. Такую информацию об объекте измерения называют **априорной информацией**. При полном отсутствии этой информации измерение в принципе невозможно, так как неизвестно, что же необходимо измерить, а следовательно, нельзя выбрать нужные средства измерений. При наличии априорной информации об объекте в полном объеме, т.е. при известном значении измеряемой величины, измерения попросту не нужны. Априорная информация определяет достижимую точность измерений и их эффективность.

Результат измерений физической величины – это значение физической величины, полученное путем ее измерения.

Принцип измерений – совокупность физических явлений, на которых основаны измерения.

Средство измерений – это техническое средство, предназначенное для измерений, имеющее нормированные метрологические характеристики, воспроизводящее и (или) хранящее единицу физической величины, размер которой принимается неизменным в течение известного интервала времени.

Метод измерений – совокупность приемов использования принципов и средств измерений.

Сходимость результатов измерений характеризует качество измерений, отражающее близость друг к другу результатов измерений одной и той же величины, выполняемых повторно одними и теми же методами и средствами измерений в одних и тех же условиях.

Воспроизводимость результатов измерений – характеристика качества измерений физической величины, отражающая близость друг к другу результатов измерений одной и той же величины, полученных в разных местах, разными методами и средствами измерений, разными операторами, но приведенных к одним и тем же условиям.

2.3. Методы измерений

Методы измерений определяются физическим характером измеряемой величины, требуемой точностью измерений, необходимой скоростью измерения, условиями и пр. Наибольшее распространение получила классификация по общим приемам получения результатов измерений. Согласно этому признаку, измерения делятся на прямые, косвенные, совместные и совокупные.

Наиболее часто применяются **прямые измерения**, состоящие в том, что искомое значение величины находят из опытных данных путем экспериментального сравнения. Математически прямые измерения можно охарактеризовать элементарной формулой $A = x$. Часто под прямыми понимаются такие измерения, при которых не производится промежуточных преобразований.

Если искомое значение величины находят на основании известной закономерности между этой величиной и величинами, найденными прямыми измерениями, то этот метод измерений называют **косвенным**. Уравнение косвенного измерения $A = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где x_i – результат i-го прямого измерения.

Совокупные измерения осуществляются путем одновременного измерения нескольких одноименных величин, искомое значение при этом находят решением системы уравнений, получаемых в результате прямых измерений различных сочетаний этих величин. При этом могут измеряться несколько комбинаций значений величин.

Совместными называют одновременно проводимые измерения двух и более неодноименных величин с целью нахождения функциональной связи между этими величинами.

Косвенные, совместные и совокупные измерения объединяются одним принципиально важным общим свойством: их результаты рассчитываются по известным функциональным зависимостям между измеряемыми величинами и величинами, определенными путем прямых измерений.

2.4. Погрешности измерений

Погрешностью измерения называется отклонение результата измерения от истинного значения измеряемой величины. Т.к. истинное значение измеряемой величины неизвестно, то при количественной оценке погрешности пользуются действительным значением физической величины.

Погрешность результата измерения можно оценить с разной точностью на основании различной исходной информации. В соответствии с этим различают измерения с точной, приближенной и предварительной оценкой погрешностей. При измерениях с точной оценкой погрешности учитывают индивидуальные метрологические свойства и характеристики каждого из примененных средств измерений, анализируют метод измерений, контролируют условия измерений с целью учета их влияния на результат измерения. Если измерения ведут с приближенной оценкой погрешности, то учитывают лишь метрологические характеристики средства измерений и оценивают влияние на результат только отклонения условий измерения от нормальных. Измерения с предварительной оценкой погрешности выполняются по типовым методикам, регламентированным нормативными документами, в которых указаны методы и условия измерений, типы погрешностей и т.д., и на основе этих данных заранее оценена возможная погрешность результата.

По форме количественного выражения погрешности измерения разделяются на абсолютные, относительные и приведенные.

Абсолютной погрешностью, выражаемой в единицах измеряемой величины, называется отклонение результата измерения от истинного значения

$$\Delta = Y(x) - x. \tag{2.1}$$

Абсолютная погрешность характеризует величину и знак полученной погрешности, но не определяет качество самого измерения.

Чтобы иметь возможность сравнивать качество измерений, используют относительную погрешность.

Относительной погрешностью называется отношение абсолютной погрешности результата измерения к истинному значению измеряемой величины

$$\delta = \frac{\Delta}{x}. \tag{2.2}$$

Мерой точности измерений служит показатель, обратный модулю относительной погрешности

$$k_T = \frac{1}{|\delta|}. \tag{2.3}$$

Приведенной погрешностью, выражающей потенциальную точность измерений, называется отношение абсолютной погрешности к некоторому нормирующему значению (например, конечное значение шкалы прибора, предел измерений)

$$\gamma = \frac{\Delta}{x_N} 100\%. \tag{2.4}$$

По характеру проявления погрешности измерений подразделяются на три основных класса: систематические, случайные и грубые (промахи).

Систематические погрешности – составляющие погрешности измерений, остающиеся постоянными или закономерно изменяющиеся при многократных измерениях одной и той же величины в одних и тех же условиях.

Случайные погрешности – составляющие погрешности измерений, изменяющиеся случайным образом по значению и по знаку при повторных измерениях одной и той же физической величины в одних и тех же условиях. Практически случайные погрешности неизбежны, неустранимы и всегда имеют место в результате измерения. Однако их можно уменьшить путем многократного измерения физической величины и последующей статистической обработкой полученных результатов.

Грубые погрешности (промахи) – погрешности, существенно превышающие ожидаемые при данных условиях измерения. Грубые погрешности возникают из-за ошибок оператора или неучтенных внешних воздействий. В случае однократного измерения промах обнаружить нельзя. При многократных измерениях промахи выявляют в процессе обработки результатов и исключают из рассмотрения, пользуясь определенными правилами.

Таким образом, если не учитывать промахи, абсолютная погрешность измерения имеет систематическую и случайную составляющие:

$$\Delta = \Delta_{сист} + \Delta_{сл}. \qquad (2.5)$$

По причинам возникновения погрешности измерения подразделяются на методические, инструментальные, внешние и субъективные (личные).

Методические погрешности возникают из-за несовершенства метода измерений, некорректности алгоритмов или формул, по которым производятся вычисления результатов измерений, отличия принятой модели объекта измерения от той, которая правильно описывает его свойство, определяемое путем измерения, а также из-за влияния выбранного средства измерений на измеряемые параметры сигналов.

Инструментальные (приборные) **погрешности** возникают из-за несовершенства средств измерений. Источниками инструментальных погрешностей могут быть, например, неточная градуировка прибора и смещение нуля, вариации показаний прибора в процессе эксплуатации.

Внешняя погрешность – составляющая погрешности измерения, связанная с отклонением одной или нескольких влияющих величин от нормальных значений или выходом за пределы нормальной области (влажность, температура, нестабильность источников питания).

Субъективные погрешности вызываются ошибками оператора при отсчете показаний средств измерения.

По характеру поведения измеряемой величины в процессе измерений различают статические и динамические погрешности.

Статические погрешности возникают при измерении установившегося значения измеряемой физической величины.

Динамические погрешности имеют место при динамических измерениях, когда измеряемая величина изменяется во времени и требуется установить закон ее изменения.

Причина появления динамических погрешностей состоит в несоответствии скоростных (временных) характеристик прибора и скорости изменения измеряемой величины.

По условиям эксплуатации средств измерений различают основную и дополнительную погрешности.

Основная погрешность средства измерений имеет место при нормальных условиях эксплуатации, оговоренных в регламентирующих документах.

Дополнительная погрешность возникает вследствие выхода какой-либо из влияющих величин за пределы нормальной области значений.

2.5. Математическая модель формирования результата и погрешности измерения

Результат измерения представляет собой случайную величину следующей структуры:

$$Y(x) = kx + kF + H, \tag{2.6}$$

где kx – мультипликативная составляющая результата измерения (k – коэффициент чувствительности средства измерений СИ); kF – аддитивная случайная составляющая результата измерения, обусловленная возмущением, действующим на измеряемую величину x на входе средства измерений; H – аддитивная составляющая, обусловленная возмущением, действующим на измеряемую величину x на выходе средства измерений [округление (квантование) результата измерения, субъективные ошибки оператора, выполняющего измерение].

Формирование результата измерения, представленного выражением (2.6), можно изобразить в виде структурной схемы (рис. 2.2).

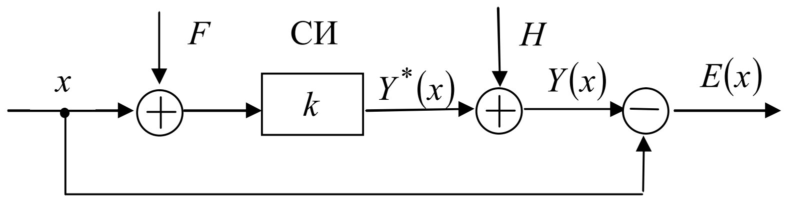

Рис. 2.2. Структурная схема формирования результата и погрешности измерения

Погрешность результата измерения, сформированного по выражению (2.6), равна

$$E(x) = Y(x) - x = kx + kF + H - x = (k-1)x + kF + H, \tag{2.7}$$

где $(k-1)x$ – мультипликативная составляющая погрешности; kF – аддитивная случайная составляющая, обусловленная случайным возмущением, действующим на входе средства измерений; H – аддитивная составляющая, обусловленная случайным возмущением, действующим на выходе средства измерений.

Главная особенность мультипликативной погрешности состоит в том, что она зависит от значения измеряемой величины. Причина ее появления состоит в том, что размер единицы величины, воспроизводимой средством измерений, не равен единице.

Особенности аддитивных составляющих погрешности состоят в том, что они не зависят от измеряемой величины. Причинами их появления являются аддитивные возмущения, действующие на входе и выходе средства измерений. Они всецело определяются аддитивными составляющими результата измерения.

2.6. Правила и формы представления результатов измерений

Любая измерительная информация – результаты и погрешности измерений, эмпирические зависимости и т.д. – должна сопровождаться показателями точности измерений. В целях единообразия отражения результатов и погрешностей измерений необходимо применять однотипные показатели точности измерений и формы представления результатов измерений.

Распространенной ошибкой при оценивании результатов и погрешностей измерений является вычисление их и запись с большим числом значащих цифр. Этому способствует использование для расчетов вычислительной техники, позволяющей получать результаты расчета с четырьмя и более значащими цифрами. Однако погрешности измерений не всегда требуется знать с очень высокой точностью. Для технических измерений допустимой считается погрешность оценивания погрешности 15 – 20%. Например, погрешность 0,4359 для результата 12,7254. Имеет ли смысл записывать результат с такой погрешностью, если достоверность результата характеризуется десятыми долями? Вклад последующих значащих цифр в оцененную погрешность будет все менее весом и ничего не добавит к информации об измеряемой величине. Поэтому необходимо ограничивать число значащих цифр в записи результата измерения.

В численных показателях точности измерений (в том числе и в погрешности) должно быть не более двух значащих цифр. Так, при записи наименьшие разряды числовых значений результата измерения и численных показателей точности должны быть одинаковы. В приведенном примере оценка погрешности должна быть записана как 0,44 или 0,4, а результат измерения – 12,73 или 12,7 соответственно.

Погрешность округления погрешности в первом случае составляет 1,4%, во втором – 8,2%.

Существуют следующие правила округления результатов и погрешностей измерений:

1. Результат измерения округляется до того же десятичного знака, которым оканчивается округленное значение абсолютной погрешности. Лишние цифры в целых числах заменяются нулями. Если десятичная дробь в числовом значении результата измерения оканчивается нулями, то нули отбрасываются до того разряда, который соответствует разряду числового значения погрешности. Например, результат 4,08000, погрешность 0,003; результат округляют до 4,080.
2. Если цифра старшего из отбрасываемых разрядов меньше 5, то остальные цифры числа не изменяются. Лишние цифры в целых числах заменяются нулями, в десятичных дробях отбрасываются. Например, число 174437 при сохранении четырех значащих цифр должно быть округлено до 174400, число 174,437 – до 174,4.
3. Если цифра старшего из отбрасываемых разрядов больше или равна 5 и за ней следуют отличные от нуля цифры, то последнюю сохраненную цифру увеличивают на единицу. Например, при сохранении трех значащих цифр число 12567 округляют до 12600, число 12,567 – до 12,6.
4. Если отбрасываемая цифра 5, а следующие за ней цифры неизвестны или нули, то последнюю сохраняемую цифру не изменяют, если она четная, и увеличивают на единицу, если она нечетная. Например, число 232,5 при сохранении трех значащих цифр округляют до 232, а число 233,5 – до 234.
5. Погрешность результата измерения указывается двумя значащими цифрами, если первая из них равна 1 или 2, и одной значащей цифрой, если первая цифра равна 3 и более.
6. Округление производят лишь в окончательном ответе, а все предварительные вычисления проводят с одним или двумя лишними знаками.

Предельная погрешность, обусловленная округлением, равна половине единицы последнего разряда числового значения результата измерения.

Вопросы для самоподготовки

1. Дайте определение физической величины.
2. Перечислите основные типы физических величин. Дайте характеристику каждому типу.
3. Перечислите методы измерений. Дайте характеристику каждому методу.
4. Что называют погрешностью измерений?
5. Классификация погрешностей по форме количественного выражения.
6. Классификация погрешностей по характеру их поведения во времени.
7. Классификация погрешностей по причине возникновения.
8. Математическая модель результата измерения.
9. Математическая модель погрешности измерения.
10. Особенности аддитивной и мультипликативной составляющих погрешности измерения.
11. Как правильно должен быть представлен результат измерений?
12. Сформулируйте правила округления числовых значений результата измерения.

3. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

3.1. Случайные величины и их характеристики

Ввиду того, что результат измерения в общем случае является случайной величиной, его описывают и оценивают с помощью аппарата теории вероятностей и математической статистики. Наиболее общей характеристикой случайной величины является закон ее распределения.

Пусть случайная величина X принимает значения $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n$. Отношение числа опытов m, при проведении которых случайная величина X приняла значения x_i, к общему числу опытов n называется частотой повторения события. Частота m/n является случайной величиной и изменяется в зависимости от числа проведенных опытов. При большом числе опытов она имеет тенденцию стабилизироваться около некоторого значения P_i, называемого **вероятностью события**. Сумма вероятностей всех возможных значений дискретной случайной величины равна единице, так как вероятность того, что случайная величина в результате опыта примет одно из своих значений, есть достоверное событие.

Вероятность события $X < x_i$

$$P(X < x_i) = F(x) \tag{3.1}$$

называется **функцией распределения** случайной величины.

Плотностью распределения вероятностей случайной величины X называется функция

$$p(x) = \frac{dF(x)}{dx}. \tag{3.2}$$

Связь между функцией распределения $F(x)$ и плотностью распределения определяется выражением

$$F(x) = P(-\infty \le X \le x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)dx. \tag{3.3}$$

Описание случайных величин с помощью законов распределения $p(x)$ является наиболее полным, но экспериментальное определение этих законов требует весьма больших затрат времени. Однако во многих практических случаях нет необходимости описывать случайную величину полностью, достаточно охарактеризовать числами лишь отдельные ее свойства. Такие числовые характеристики в теории вероятностей и математической статистике называют **моментами**. Наиболее часто при анализе законов распределения $p(x)$ используются моменты 1-го и 2-го порядков.

Начальный момент 1-го порядка (**математическое ожидание** случайной величины) характеризует центр распределения $p(x)$ и определяется выражением

$$m_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx. \tag{3.4}$$

Центральный момент 2-го порядка (**дисперсия** случайной величины) характеризует рассеяние случайной величины и вычисляется как

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_1)^2 p(x) dx. \tag{3.5}$$

Так как дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины, то обычно используется **среднее квадратическое отклонение** (СКО) $\sigma = \sqrt{D}$, имеющее размерность случайной величины.

3.2. Законы распределения случайных величин

В теории планирования эксперимента важную роль играют следующие законы распределения.

1. Нормальный закон распределения случайной величины.

Случайная величина X распределена по нормальному закону (или закону Гаусса), если ее плотность вероятности имеет вид

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-(x - m_1)^2 / \left(2\sigma^2\right)\right]. \tag{3.6}$$

Обычно вводят случайную величину t:

$$t = \frac{x - m_1}{\sigma}, \tag{3.7}$$

подстановка которой в (3.6) позволяет представить ее в виде

$$p(t) = \left(\sqrt{2\pi}\right)^{-1} \exp\left(-t^2 / 2\right). \tag{3.8}$$

Кривая нормального распределения [график функции $p(t)$] представлена на рис. 3.1. Произведенное преобразование сохраняет нормальный закон распределения, но приводит его к частному виду, соответствующему случаю $m_1 = 0$ и $\sigma = 1$. Говорят, что плотность нормального распределения $p(t)$ является нормированной [площадь под кривой $p(t)$ равна единице], центрированной (максимум находится при $t = 0$), стандартизованной ($\sigma = 1$).

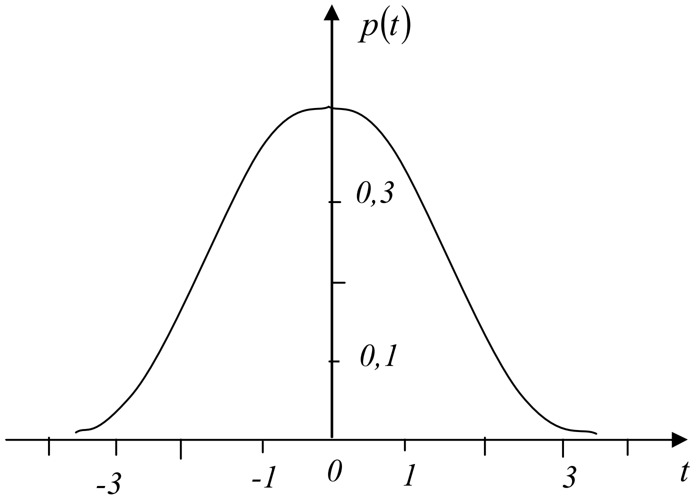

Рис. 3.1. Кривая плотности нормального распределения

2. Распределение Пирсона (χ^2 - распределение).

Рассмотрим n независимых случайных величин $u_1,\ldots,u_n$, каждая из которых распределена нормально с параметрами (0,1). Сумма квадратов этих случайных величин называется χ_f^2 - суммой:

$$\chi_f^2 = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \qquad \left(0 \le \chi_f^2 < \infty\right), \tag{3.9}$$

где $f = n$ – число степеней свободы χ^2.

Функция χ^2 обладает распределением, которое в силу нормированности u_i зависит только от f. Плотность χ^2-распределения, характеризующая вероятность обнаружения значений в интервале $\left[\chi^2, \chi^2 + d\chi^2\right]$, имеет вид

$$p\left(\chi^2\right) = \frac{1}{2^{\frac{f}{2}}\,\Gamma\left(\frac{f}{2}\right)}\left(\chi^2\right)^{\frac{f}{2}-1} \exp\left(-\frac{\chi^2}{2}\right), \tag{3.10}$$

где Γ – гамма-функция.

Кривые плотности χ^2-распределения для различных f приведены на рис. 3.2. Согласно (3.10), $m_1\left(\chi^2\right) = f$; $D\left(\chi^2\right) = 2f$. При $f > 1$ распределение переходит в нормальное.

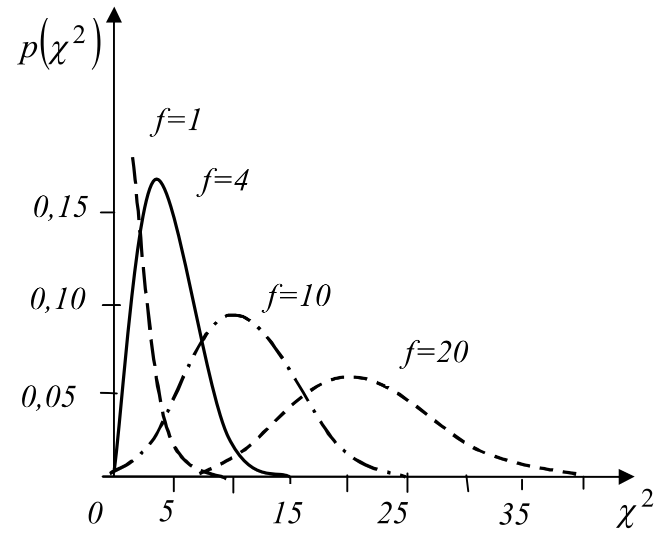

Рис. 3.2. χ^2-распределение для различных f

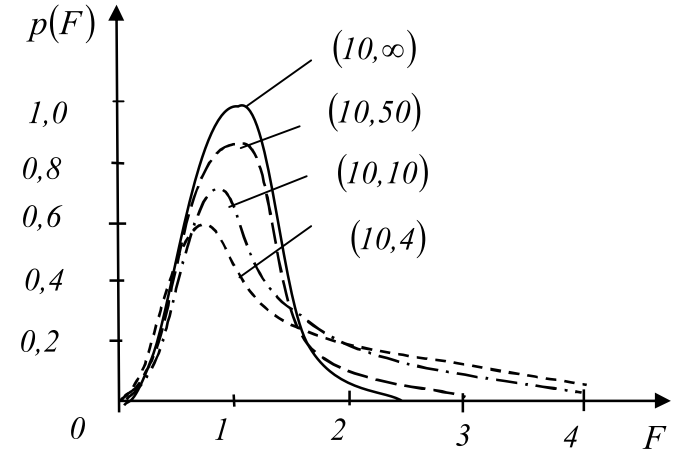

Рис. 3.3. F-распределение для различных f_1 и f_2

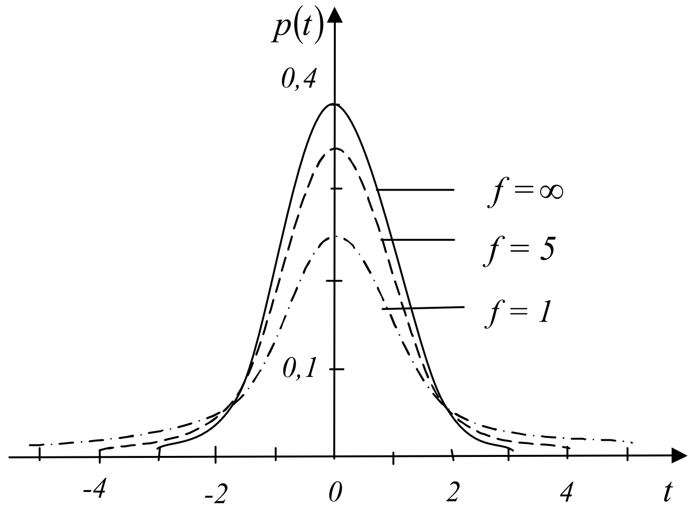

Рис. 3.4. Кривые плотности t-распределения

3. Распределение Фишера (*F*-распределение).

Рассмотрим случайную величину

$$F(f_1, f_2) = \frac{\chi_1^2}{f_1} \bigg/ \frac{\chi_2^2}{f_2} \qquad (0 \le F < \infty), \tag{3.11}$$

где $\chi_{1,2}^2$ определяются согласно формулам (3.9) и (3.10).

Плотность распределения $p(F)$ описывается соотношением Фишера

$$p(F) = \frac{\Gamma\left(\frac{f_1+f_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{f_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{f_2}{2}\right)} \cdot f_1^{\frac{f_1}{2}} \cdot f_2^{\frac{f_1}{2}} \cdot \frac{(F)^{\frac{f_1}{2}-1}}{(f_2 + f_1 F)^{\frac{f_1+f_2}{2}}}. \tag{3.12}$$

Кривые плотности *F*-распределения для различных f_1 и f_2 представлены на рис. 3.3. Согласно (3.12), среднее значение $\overline{F} = f_2/(f_2 - 2)$, если $f_2 > 2$.

4. Распределение Стьюдента (*t*-распределение).

Случайная величина

$$t = u/\sqrt{\chi^2/f} \qquad (-\infty < t < \infty), \tag{3.13}$$

где u и χ^2 определяются согласно (3.9), (3.10), имеет распределение Стьюдента

$$p(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi f}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{f+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{f}{2}\right)} \cdot \left(1 + \frac{t^2}{f}\right)^{-\frac{f+1}{2}}, \tag{3.14}$$

которое может быть получено непосредственно из (3.12) преобразованием $t = \pm\sqrt{F(1, f)}$, где *t*-распределение симметрично относительно нуля. При $f \to \infty$ распределение стремится к нормальному с параметрами (0,1) (рис. 3.4).

3.3. Выборка и ее характеристики

Полный набор всех возможных значений, которые может принимать случайная величина в ходе эксперимента, называется **генеральной совокупностью**. Она может быть конечной и реально существующей или бесконечной, гипотетической. Генеральная совокупность обладает некоторыми неслучайными свойствами, которые могут быть выявлены в результате эксперимента.

Рассмотренные функции распределения $p(x)$ описывают поведение генеральной совокупности. Однако реальное число n наблюдений физической величины всегда ограничено, поэтому результаты наблюдений допустимо считать величинами дискретными. Некоторый набор значений случайной величины $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ называют **выборкой**. Число полученных экспериментальных результатов n называется **объемом выборки**. Основная задача математической статистики заключается в том, чтобы по результатам эксперимента (по данным выборки) высказать обоснованное суждение о свойствах генеральной совокупности.

Выборка должна достаточно полно характеризовать генеральную совокупность, т.е. она должна быть представительной. Чтобы обеспечить представительность выборки, необходимо выполнить два важных условия: во-первых, все элементы генеральной совокупности должны появляться в выборке с одинаковой вероятностью; во-вторых, наблюдения должны быть независимыми, т.е. появление каждого из элементов выборки не должно влиять на вероятность появления других элементов. Так как элементы выборки случайные, все заключения и результаты, полученные на основе выборочных данных, носят вероятностный характер.

Выборка содержит лишь часть генеральной совокупности, по которой можно попытаться оценить числовые характеристики всей генеральной совокупности. Существует два типа оценок – точечные и интервальные.

Под **точечной оценкой** понимается отдельное число, которое используется в качестве оценки параметра генеральной совокупности. Например, выборочное среднее

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{3.15}$$

есть точечная оценка математического ожидания m_1, точечная оценка дисперсии

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 . \tag{3.16}$$

Возможны различные оценки одной и той же числовой характеристики, например, для математического ожидания оценками могут служить выборочное среднее, выборочная медиана и т.п. Чтобы оценить качество оценки в статистическом анализе, рассматриваются четыре критерия:

– несмещенность. Оценка называется несмещенной, если все выборочные значения располагаются симметрично относительно истинного значения оцениваемого параметра. Согласно центральной предельной теореме, распределение выборочных средних является нормальным, а значит, симметричным;

– эффективность. Эффективная оценка обладает наименьшей дисперсией по сравнению с другими оценками данной числовой характеристики. Относительно выборочного среднего дисперсия и СКО обладают свойствами минимальности;

– состоятельность. Говорят, что оценка истинного значения параметра является состоятельной, если по мере увеличения объема выборки ее значение приближается к истинному значению параметра;

– достаточность. Оценка является достаточной, если при ее вычислении используется вся содержащаяся в выборке информация.

Таким образом, выборочное среднее является наилучшей оценкой математического ожидания, так как она удовлетворяет всем четырем критериям.

В качестве **интервальной оценки** используют доверительный интервал. **Доверительный интервал** – это отрезок, центром которого является точечная оценка числовой характеристики, включающий истинное значение данной числовой характеристики с заданной вероятностью. Эта вероятность называется **доверительной вероятностью**. Таким образом, интервал является мерой точности оценки, а доверительная вероятность характеризует достоверность оценки. Размер доверительного интервала зависит от того, каким значением доверительной вероятности задался экспериментатор. Чем выше доверительная вероятность, тем шире должен быть интервал, чтобы с заданной вероятностью включать в себя истинное значение числовой характеристики. Часто выбирают значение доверительной вероятности P=0,95, только иногда, в случае ответственных и очень ответственных исследований, полагают P=0,99 и 0,999 соответственно.

Процедура построения доверительного интервала включает в себя два этапа:

– записывается вероятностное утверждение относительно некоторой случайной функции, включающей в себя разность или отношение оценки числовой характеристики и ее истинного значения. Такая функция несет информацию о степени близости этих величин. Необходимо, чтобы закон распределения этой функции был известен;

– вероятностное утверждение преобразуется к виду, при котором границы доверительного интервала числовой характеристики представлены в явном виде.

Построим доверительный интервал для математического ожидания при известной дисперсии. Вероятностная функция в этом случае имеет вид

$$t = \frac{\bar{x} - m_1}{\sigma / \sqrt{n}} \tag{3.17}$$

и распределена нормально. Для построения доверительного интервала можно использовать соответствующую таблицу нормального распределения для определения значения t_α, такого, что за пределами $-t_\alpha$ и $+t_\alpha$ остается часть площади, равная α, тогда как в пределах $[-t_\alpha, +t_\alpha]$ заключена часть площади, равная $1-\alpha$ (рис. 3.5).

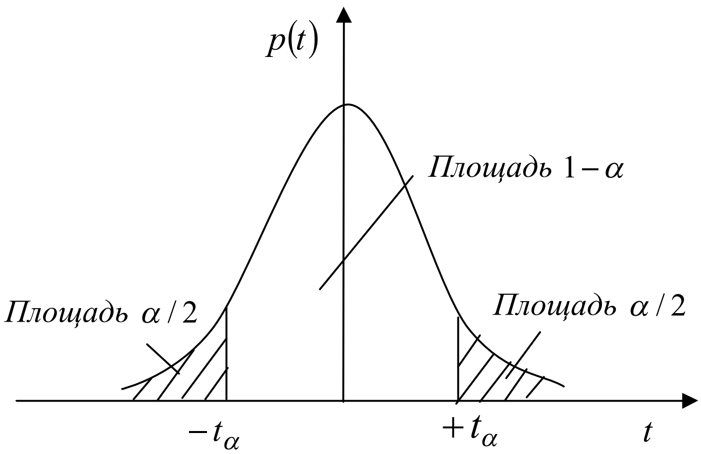

Рис. 3.5. Кривая нормального распределения

Следовательно, можно записать следующее вероятностное утверждение:

$$P\left\{-t_\alpha \le \frac{\bar{x} - m_1}{\sigma / \sqrt{n}} \le t_\alpha\right\} = 1 - \alpha . \tag{3.18}$$

Преобразуем выражение в скобках:

$$P\left\{\bar{x} - t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m_1 \le \bar{x} + t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = 1 - \alpha . \tag{3.19}$$

Величина $1-\alpha = P_Д$ – доверительная вероятность. При этой доверительной вероятности доверительный интервал для математического ожидания m_1 задается пределами $\left[\bar{x} - t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$.

Величина $\Delta_{\bar{x}} = t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = t_\alpha S_{\bar{x}}$ представляет случайную ошибку наблюдения.

3.4. Проверка статистических гипотез

Статистической гипотезой H называется предположение о свойстве генеральной совокупности, которое можно проверить, опираясь на данные выборки. Гипотезы о параметрах генеральной совокупности называются параметрическими, о распределениях – непараметрическими.

Любая гипотеза формулируется до опыта и проверяется на основе последующего эксперимента. Основная гипотеза H_0 обычно высказывается в форме, отрицающей наличие каких-либо видимых отличий, поэтому гипотеза H_0 называется **нулевой**. Одновременно формулируется альтернативная гипотеза H_1.

Проверка гипотезы осуществляется на основе выявления согласованности эмпирических (экспериментальных) данных с гипотетическими (теоретическими). Если расхождение между сравниваемыми величинами не выходит за пределы случайных ошибок, гипотезу принимают. При этом не делается никаких заключений о правильности самой гипотезы, речь идет лишь о согласованности сравниваемых данных. Нулевая гипотеза отвергается тогда, когда по выборке получается результат, который при истинности выдвинутой нулевой гипотезы маловероятен. Границей невозможного или маловероятного обычно считают $\alpha = 0{,}05$, или 0,01, или 0,001 и называют **уровнем значимости**.

Процедура проверки гипотезы производится при помощи **статистического критерия** – правила, определяющего условия, при котором проверяемую нулевую гипотезу следует либо принять, либо отклонить. Критерий представляет собой случайную функцию результатов наблюдения с известным законом распределения (t-, F-, χ^2-критерий). В соответствии с характером распределения одни значения критерия являются более вероятными, другие – менее. Таким образом, область возможных значений делится на две части. Одна называется **областью принятия гипотезы**, другая (где гипотеза должна быть отвергнута) – **критической областью**. Чтобы проверить гипотезу, необходимо вычислить критерий и посмотреть, в какую область попадает вычисленное значение.

Проверка статистических гипотез складывается из следующих этапов:

– формулируется в виде статистической гипотезы задача исследования;

– выбирается статистическая характеристика гипотезы;

– выбираются нулевая H_0 и альтернативная H_1 гипотезы на основе анализа возможных ошибочных решений и их последствий;

– выбирается приемлемый уровень значимости α;

– выбирается критерий проверки гипотезы H_0;

– вычисляется фактическое значение статистического критерия;

– определяется критическое значение статистического критерия по соответствующей таблице;

– проверяется нулевая гипотеза на основе сравнения фактического и критического значений критерия, в зависимости от результатов проверки гипотеза либо отклоняется, либо не отклоняется.

При проверке гипотез по одному из критериев возможны два ошибочных решения:

- неправильное отклонение нулевой гипотезы – ошибка первого рода;
- неправильное принятие нулевой гипотезы – ошибка второго рода.

Возможные решения приведены в табл. 3.1. Вероятность ошибки первого рода равна уровню значимости α. Вероятность не совершить ошибку второго рода $(1-\beta)$ называют мощностью критерия. Обычно задают α и пытаются сделать β возможно малым.

Таблица 3.1

Возможные выводы при проверке гипотез

Решение по критерию	Фактически	
	H_0 верна	H_0 не верна
H_0 отклоняется	Ошибка первого рода	Правильное решение
H_0 не отклоняется	Правильное решение	Ошибка второго рода

3.4.1. Проверка гипотезы о законе распределения

Гипотезы о распределениях заключаются в том, что выдвигается предположение о том, что распределение в генеральной совокупности подчиняется какому-то определенному закону. При планировании эксперимента важно, чтобы наблюдаемые значения физических величин подчинялись нормальному закону распределения. Поэтому нулевая гипотеза H_0: результаты наблюдений подчиняются нормальному закону распределения; альтернативная H_1: результаты наблюдений не подчиняются нормальному закону распределения.

В качестве статистических характеристик гипотезы о законе распределения принимаются оценки параметров распределения. Предположим, что при выполнении n наблюдений одной и той же величины постоянная систематическая погрешность полностью исключена. Тогда результат i-го наблюдения $x_i = x_{ист} + \Delta_i$ находится с некоторой абсолютной случайной погрешностью $\Delta_i = x_i - x_{ист}$.

При нормальном законе распределения случайной погрешности Δ_i за истинную величину $x_{ист} = m_1$ принимают ее оптимальную оценку, равную оценке математического ожидания (3.15).

Затем вычисляют абсолютную погрешность каждого из n наблюдений

$$\Delta_i = x_i - \bar{x} \; . \qquad (3.20)$$

Далее находят оценку СКО наблюдений S, характеризующую точность метода измерений:

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\Delta_i^2} \; . \qquad (3.21)$$

Если число наблюдений $n > 20$, строится интервальный вариационный ряд. При его построении в первой графе отдельные значения признака указываются в интервалах «от – до», во второй графе – численность единиц, входящих в интервал. Величина интервала определяется по формуле

$$i = R/m \, , \qquad (3.22)$$

где R –размах варьирования признака, $R = x_{\max} - x_{\min}$; m – число групп, которое приближенно определяется по формуле Стерджесса

$$m = 1 + 3{,}32\lg n \, . \qquad (3.23)$$

Полученную по этой формуле величину округляют до целого большего числа. Нижнюю границу первого интервала определяют, вычитая из $x_{\min}$ половину последнего разряда.

Оценка математического ожидания в этом случае определяется по формуле

$$\overline{x} = \frac{\sum_{j=1}^{m} x'_j f_j^*}{\sum_{j}^{m} f_j^*}, \tag{3.24}$$

где x'_j – середина интервала; f_j^* – частота попадания результатов наблюдения x_i в заданный интервал; j – номер интервала.

Оценка СКО

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{m} \left(x'_j - \overline{x}\right)^2 f_j^*}{\sum_{j=1}^{m} f_j^*}}. \tag{3.25}$$

Выбирается приемлемый уровень значимости, обычно $\alpha = 0{,}05$.

Проверка гипотезы состоит в том, чтобы на основании сравнения эмпирических (фактических) частот с предполагаемыми (теоретическими) сделать вывод о соответствии эмпирического распределения гипотетическому. Для проверки близости теоретического и эмпирического распределений используются специальные показатели, называемые критериями согласия. Наиболее распространенным является критерий Пирсона χ^2, вычисляемый по формуле

$$\chi^2 = \sum_{j} \frac{\left(f_j^* - f_j\right)^2}{f_j}, \tag{3.26}$$

где f_j^* – эмпирические частоты в интервале; f_j – теоретические частоты в интервале.

Если все эмпирические частоты равны соответствующим теоретическим частотам, то χ^2 равно нулю. Очевидно, что чем больше отличаются эмпирические и теоретические частоты, тем χ^2 больше; если расхождение несущественно, то χ^2 должно быть малым.

Теоретическая частота в данной группе вычисляется как произведение объема совокупности (числа наблюдений) на вероятность попадания в данный интервал. Теоретические частоты нормального распределения определяются по формуле

$$f_j = \frac{n \cdot i}{S\sqrt{2\pi}} \exp\left(-t_j^2/2\right), \tag{3.27}$$

где t_j – нормированное отклонение

$$t_j = \frac{x'_j - \bar{x}}{S}. \tag{3.28}$$

Величина $p(t) = \left(\sqrt{2\pi}\right)^{-1} \exp\left(-t^2/2\right)$ – табличное значение (прил. 1), поэтому формулу (3.27) можно переписать в виде

$$f_j = \frac{n \cdot i}{S} p(t_j). \tag{3.29}$$

При расчете критерия Пирсона необходимо соблюдать условия:

– число наблюдений должно быть достаточно велико $(n \geq 50)$;

– теоретические частоты в интервале должны быть больше 5. Если теоретические частоты в некоторых интервалах меньше 5, то соседние интервалы объединяют.

Критическое значение χ_T^2 определяется по таблице распределения Пирсона (прил. 2) в соответствии с числом степеней свободы $d.f.$ и уровнем значимости α.

Число степеней свободы рассчитывается так: если эмпирический ряд распределения имеет k категорий (число интервалов с учетом объединения), то k эмпирических частот $f_1^*, f_2^*, \ldots, f_k^*$ должны быть связаны следующим соотношением: $\sum_{j=1}^{k} f_j^* = n$. Если параметры теоретического распределения известны, то только $(k-1)$ частот могут принимать произвольные значения, а последняя частота может быть найдена из указанного соотношения. Поэтому говорят, что система из k частот благодаря наличию одной связи теряет одну степень свободы и имеет только $(k-1)$ степеней свободы. Кроме того, если при нахождении теоретических частот p параметров теоретического распределения неизвестны, то они должны быть найдены по данным эмпирического ряда. Это накладывает на эмпирические частоты еще p связей, благодаря чему система теряет еще p степеней свободы. Таким образом, число свободно варьируемых частот (а значит, и число степеней свободы) становится равным

$$d.f. = k - (p+1). \tag{3.30}$$

Если $\chi^2 < \chi_T^2$, то гипотеза H_0 о нормальном законе распределения эмпирических данных принимается.

3.4.2. Пример проверки гипотезы о нормальном законе распределения экспериментальных данных

В табл. 3.2 приведены данные о затратах времени на производство единицы продукции. Установить, можно ли с вероятностью $P_Д = 0{,}95$ считать закон распределения экспериментальных данных нормальным.

Таблица 3.2

Затраты времени на производство единицы продукции

Номер изделия	Операционное время, мин									
1-10	9	9	11	9	9	11	9	7	9	6
11-20	9	6	9	11	9	7	9	7	10	7
21-30	9	10	6	10	8	6	9	8	8	8
31-40	8	7	8	7	9	8	9	11	9	9
41-50	8	10	9	8	10	8	8	9	11	9

Основная гипотеза H_0: результаты наблюдений подчиняются нормальному закону распределения.

Определим числовые оценки параметров нормального распределения $\bar{x}$, S. Обобщим данные в виде вариационного ряда (табл. 3.3).

Размах $R = x_{\max} - x_{\min} = 11 - 6 = 5$ (мин).

Число интервалов $m = 1 + 3{,}32 \lg n = 1 + 3{,}32 \lg 50 \approx 6$.

Величина интервала $i = R/m = 5/6 = 0{,}8$ мин. Примем $i = 1$ мин.

Среднее значение определяем по формуле (3.24): $\bar{x} = 8{,}6$ мин.

Оценку СКО вычисляем по формуле (3.25): $S = 1{,}3$ мин.

Таблица 3.3

Ряд эмпирического распределения

Интервал группировки	5,5 – 6,5	6,5 – 7,5	7,5 – 8,5	8,5 – 9,5	9,5 – 10,5	10,5 – 11,5
Середина интервала x'_j	6	7	8	9	10	11
Частота f_j^*	4	6	11	19	5	5

Определяем теоретические частоты распределения (табл. 3.4) по формуле (3.29): $\frac{n \cdot i}{S} = \frac{50 \cdot 1}{1{,}3} = 38{,}5$; $t_j = \frac{x'_j - 8{,}6}{1{,}3}$; $f_j = 38{,}5 \cdot p(t_j)$; величину $p(t_j)$ определяем по прил. 1.

Таблица 3.4

Вспомогательная таблица для расчета теоретических частот нормального распределения

Интервал группировки	5,5 – 6,5	6,5 – 7,5	7,5 – 8,5	8,5 – 9,5	9,5 – 10,5	10,5 – 11,5
Середина интервала x'_j	6	7	8	9	10	11
Нормированное отклонение t_j	-2,00	-1,23	-0,46	0,31	1,08	1,85
$p(t_j)$	0,0540	0,1874	0,3588	0,3802	0,2227	0,0721
Частота теоретическая f_j	2,08	7,21	13,81	14,64	8,57	2,78
Частота эмпирическая f_j^*	4	6	11	19	5	5

Так как для использования критерия Пирсона теоретическая частота должна быть больше 5, объединяем первый и второй и пятый и шестой интервалы (табл. 3.5).

Таблица 3.5

Вариационный ряд с учетом объединения интервалов

Интервал группировки	5,5 – 7,5	7,5 – 8,5	8,5 – 9,5	9,5 – 11,5
Частота теоретическая f_j	9,29	13,81	14,64	11,35
Частота эмпирическая f_j^*	10	11	19	10

Рассчитываем χ^2-критерий: $\chi^2 = \sum_{j=1}^{4} \frac{(f_j^* - f_j)^2}{f_j} = 2{,}08$.

Определяем число степеней свободы по формуле (3.30): $k = 4$ – число интервалов, оставшихся после объединения; $p = 2$, т.к. среднее значение и СКО найдены по данным эмпирического ряда; $d.f. = 4 - (1 + 2) = 1$.

Табличное значение критерия для $d.f.=1$ и уровня значимости $\alpha = 0{,}05$; $\chi_T^2 = 3{,}841$. $\chi^2 < \chi_T^2$. Следовательно, гипотеза о нормальном законе распределения эмпирических данных принимается.

3.4.3. Проверка параметрических гипотез

К параметрическим относятся гипотезы о числовых характеристиках закона распределения.

Основные гипотезы о средних величинах следующие:

– гипотеза о равенстве математического ожидания некоторому числу при известной дисперсии или при неизвестной дисперсии;

– гипотеза о равенстве средних значений нормально распределенных совокупностей при известных дисперсиях, при неизвестных равных дисперсиях, при неизвестных неравных дисперсиях.

Первая задача чаще всего решается при неизвестной дисперсии. Испытуемая гипотеза H_0: $m_1 = a$. Проверку гипотезы проводят с помощью *t*-критерия. При большом числе наблюдений критическое значение критерия определяют по таблице интеграла вероятностей (прил. 3), при малом числе наблюдений $(n < 20)$ – по таблице распределения Стьюдента (прил. 4) для заданного уровня значимости и числа степеней свободы $d.f. = n-1$.

Фактическое значение критерия представляет отношение

$$t = \frac{\bar{x} - a}{S_{\bar{x}}}, \tag{3.31}$$

где $S_{\bar{x}}$ – возможная ошибка выборочного среднего.

При малой выборке

$$S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n-1}}, \tag{3.32}$$

при большой выборке

$$S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}}. \tag{3.33}$$

Выборочное СКО *S* определяется по формулам (3.21) или (3.25) в зависимости от объема выборки.

Если $t < t_T$, гипотеза H_0 принимается.

Гипотеза о равенстве средних выдвигается, когда необходимо определить, существенно ли расхождение между двумя выборочными средними. Для проверки этой гипотезы определяют среднюю (стандартную) случайную ошибку разности двух выборочных средних S_δ. Для двух независимых выборок она определяется по формуле

$$S_\delta = \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}, \qquad (3.34)$$

где S_1^2 и S_2^2 – выборочные дисперсии соответственно в первой и второй выборках.

$$S_1^2 = \frac{\sum (x' - \bar{x}_1)^2 f}{n_1 - 1}; \; S_2^2 = \frac{\sum (x' - \bar{x}_2)^2 f}{n_2 - 1}. \qquad (3.35)$$

Фактическое значение критерия

$$t = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{S_\delta}. \qquad (3.36)$$

Критическое значение t_T определяют по таблице распределения Стьюдента для заданного уровня значимости и числа степеней свободы $d.f. = n_1 + n_2 - 2$. Если $t < t_T$, нулевая гипотеза принимается. Следовательно, можно считать, что математические ожидания в двух подгруппах одинаковы, эти подгруппы можно объединить в одну группу и характеризовать последнюю общим средним.

При проверке параметрических гипотез можно также выявить наличие грубых погрешностей (промахов) в экспериментальных данных. Если в полученной группе результатов наблюдений одно или два существенно отличаются от остальных, а наличия ошибки в снятии показаний, описки и других промахов не обнаружено, то необходимо проверить, не являются ли они грубыми погрешностями, подлежащими исключению. Решение этой задачи выполняется общими методами проверки статистических гипотез в предположении нормального распределения результатов наблюдений. Проверяемая гипотеза состоит в утверждении, что результат *i*-го наблюдения x_i не содержит грубой погрешности, т.е. является одним из значений измеряемой величины. Пользуясь определенными статистическими критериями, пытаются опровергнуть выдвинутую гипотезу. Если это удается, то результат наблюдения рассматривают как грубую погрешность и его исключают.

Критерий оценки анормальности результатов наблюдений при неизвестном СКО. При исключении по этому критерию грубых погрешностей из результатов наблюдений проводят следующие операции:

– результаты группы из n наблюдений упорядочивают по возрастанию $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$. Выделяют предполагаемые промахи, обычно ими могут оказаться результаты x_1 и x_n;

– вычисляют оценки математического ожидания $\bar{x}$ и СКО S. Значения $\bar{x}$ и S вычисляют без учета экстремальных значений x_i;

– для предполагаемых промахов проводят расчет коэффициентов:

$$t_1 = \frac{|x_1 - \bar{x}|}{S};\ t_n = \frac{|x_n - \bar{x}|}{S}, \tag{3.37}$$

задаются уровнем значимости критерия ошибки α. Очевидно, этот уровень должен быть достаточно малым, чтобы вероятность ошибки была невелика. По заданным параметрам α, n находят критическое значение t_T из таблиц для распределения Стьюдента (n<20) (прил. 4) либо нормального распределения (n>20) (см. прил. 3);

– выполняют сравнение коэффициентов, определенных по формулам (3.37), с критическими значениями. Если выполняются условия $t_1 > t_T$ и $t_n > t_T$, то результаты x_1 и x_n относят к промахам и исключают из результатов наблюдений. Процедуру проверки повторяют для x_2, x_{n-1} и т.д., пока все промахи не будут исключены из выборки.

Критерий «трех сигм». Данный критерий применяется для результатов измерений, распределенных по нормальному закону, одним из граничных параметров служит оценка СКО измерений S. По этому критерию считается, что результат, полученный с вероятностью $\alpha < 0{,}003$, маловероятен, и его можно считать промахом, если $|x_i - \bar{x}| > 3S$. Данный критерий достаточно хорошо работает при числе измерений $n \ge 20...50$.

Вопросы для самоподготовки

1. Что называют функцией и плотностью распределения случайной величины?
2. Дайте определение математического ожидания и дисперсии случайной величины.
3. Основные законы распределения случайной величины, применяемые при планировании эксперимента. Числовые характеристики этих законов.

4. Дайте определения генеральной совокупности, выборки.
5. Характеристики точечной оценки и критерии ее качества.
6. Интервальная оценка и доверительный интервал.
7. Что называют статистической гипотезой? Параметрические и непараметрические гипотезы.
8. Почему основную гипотезу называют нулевой?
9. Что называют уровнем значимости и областью принятия гипотезы?
10. Дайте определение статистического критерия. Что называют мощностью критерия?
11. Перечислите этапы проверки гипотезы.
12. Что относят к ошибкам первого и второго рода и какова вероятность их совершить?
13. Задача, решаемая при проверке гипотезы о законе распределения.
14. Роль критерия Пирсона при проверке гипотезы о законе распределения.
15. Какие статистические критерии применяются при проверке параметрических гипотез?
16. Основные гипотезы о выборочных средних, порядок их проверки.
17. Выявление грубых погрешностей с использованием параметрических гипотез.

4. ЭЛЕМЕНТЫ ДИСПЕРСИОННОГО АНАЛИЗА

4.1. Общие сведения

Дисперсионный анализ является одним из методов изучения влияния одного или нескольких факторов на результат наблюдений (отклик). Если результаты наблюдения зависят от некоторых независимых факторов, то возможно разделить вклады этих факторов, анализируя соотношения между их дисперсиями. Таким образом, общая дисперсия отклика раскладывается на независимые случайные слагаемые, обусловленные действием независимых факторов, и остаточную дисперсию, связанную с ошибками эксперимента. Решение о существенности влияния некоторого фактора на исход эксперимента зависит от того, насколько значимой является составляющая дисперсии, обусловленная этим фактором, по сравнению с дисперсией, обусловленной ошибкой эксперимента. В зависимости от количества факторов выделяют однофакторный и многофакторный дисперсионный анализ.

Наиболее простым является случай, когда проверяется действие только одного фактора. Для подтверждения наличия связи между признаком, положенным в основу группировки, и результативным признаком необходимо проверить гипотезу о существенности расхождения нескольких средних величин.

Пусть все n наблюдений разбиты на k групп. Вариацию, обусловленную влиянием фактора, положенного в основу группировки, характеризует **межгрупповая дисперсия** δ^2. Она является мерой вариации частных средних по группам $\bar{x}_j$ вокруг общего среднего $\bar{x}_0$. Оценка межгрупповой дисперсии определяется по формуле

$$S_\delta^2 = \frac{\sum\limits_{j=1}^{k}\left(\bar{x}_j - \bar{x}_0\right)^2 f_j}{k-1}, \tag{4.1}$$

где f_j – число единиц в j-й группе; $\bar{x}_j$ – частное среднее по j-й группе; $\bar{x}_0$ – общее среднее по совокупности единиц.

Вариацию, обусловленную влиянием прочих факторов, характеризует в каждой группе **внутригрупповая дисперсия** σ_j^2, ее оценка

$$S_j^2 = \frac{\sum_{i=1}^{f_j}\left(x_{ij} - \bar{x}_j\right)^2}{f_j - 1}. \qquad (4.2)$$

Оценка средней из внутригрупповых дисперсий $\bar{\sigma}^2$ – среднее СКО.

$$\bar{S}^2 = \frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{f_j}\left(x_{ij} - \bar{x}_j\right)}{n - k}. \qquad (4.3)$$

Между общей дисперсией σ_0^2, средней из внутригрупповых дисперсий $\bar{\sigma}^2$ и межгрупповой дисперсией δ^2 существует соотношение

$$\sigma_0^2 = \bar{\sigma}_j^2 + \delta^2. \qquad (4.4)$$

Если фактор, положенный в основу группировки, не оказывает влияния на вариацию изучаемого признака, то дисперсия групповых средних будет отражать влияние прочих факторов, которые определяют вариацию внутри групп, а поэтому отношение дисперсий будет близко к единице или отличаться от нее в силу присутствия случайных колебаний.

Дисперсионное отношение имеет вид

$$F = \frac{\delta^2}{\bar{\sigma}^2} \qquad (4.5)$$

или

$$F = \frac{S_\delta^2}{\bar{S}^2}. \qquad (4.6)$$

Если верна нулевая гипотеза (равенство средних в двух выборках), то можно ожидать сравнительно небольшое различие выборочных средних из-за чисто случайной изменчивости. Поэтому при нулевой гипотезе внутригрупповая дисперсия будет практически совпадать с общей дисперсией, подсчитанной без учета групповой принадлежности.

Для проверки значимости результата (т.е. случайности или неслучайности отклонения двух дисперсий) учитывается число степеней свободы. Для расчета межгрупповой дисперсии число степеней свободы равно $d.f_1 = k - 1$, а для расчета внутригрупповой дисперсии $d.f_2 = n - k$. Предельный размер отклонений внутригрупповой дисперсии от общей устанавливают по таблицам F-распределения Фишера (прил. 5). Числа в таблице Фишера больше 1, поэтому критическая область всегда правосторонняя, и при вычислении экспериментального значения F большую дисперсию делят на меньшую, чтобы получить значение больше 1.

Если $F > F_T$, то с заданной вероятностью можно утверждать, что между факторным и результативным признаком существует взаимосвязь.

4.2. Пример применения однофакторного дисперсионного анализа

Известны результаты выборочного обследования пробега автомобильных шин нового типа в различных условиях эксплуатации (табл. 4.1). Установить, существует ли зависимость между условиями эксплуатации и величиной пробега шин, гарантируя результат с вероятностью 0,95.

Таблица 4.1

Пробег шин в различных условиях эксплуатации

Условия эксплуатации	Пробег шин, тыс. км	f_j
Городские	70,5; 71,8; 69,8; 58,9; 68,7; 72,1; 70,3; 69,1; 72,0; 58,7; 66,2	11
Смешанные	58.9; 59,1; 60,1; 62,2; 60,5; 58,4; 59,0; 61,8	8
Загородные	54,2; 58,8; 56,6; 55,0; 56,4	5

Факторный признак – условия эксплуатации.

Результативный признак – величина пробега шин.

Для каждой группы определяем средний пробег шин:

городские условия $$\bar{x}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{11} x_{i1}}{11} = 68{,}0 \text{ тыс. км;}$$

смешанные условия $$\bar{x}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{8} x_{i2}}{8} = 60{,}0 \text{ тыс. км;}$$

загородные условия $$\bar{x}_3 = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_{i3}}{5} = 56{,}2 \text{ тыс. км.}$$

Общее среднее $$\bar{x}_0 = \frac{\sum_{i=1}^{24} x_{i}}{24} = 62{,}9 \text{ тыс. км.}$$

Полученные средние величины пробега шин для разных условий эксплуатации отличаются друг от друга. Для того чтобы установить, является ли это различие существенным и вызвано различными условиями эксплуатации, определяется дисперсионное отношение (4.6).

$$S_{\delta}^{2}=\frac{(68{,}0-62{,}9)^{2}\cdot 11+(60{,}0-62{,}9)^{2}\cdot 8+(56{,}2-62{,}9)^{2}\cdot 5}{3-1}=288{,}92 \text{ тыс км}^{2};$$

$$\overline{S}^{2}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{11}(x_{i1}-\overline{x}_{1})^{2}+\sum\limits_{i=1}^{8}(x_{i2}-\overline{x}_{2})^{2}+\sum\limits_{i=1}^{5}(x_{i3}-\overline{x}_{3})^{2}}{24-3}=12{,}5 \text{ тыс км}^{2};$$

$$F=\frac{288{,}92}{12.5}=23{,}11.$$

При вероятности 0,95 и числе степеней свободы $d.f_1=2$; $d.f_2=21$ по таблице F-распределения (прил. 5) $F_T=3{,}467$. $F>F_T$, следовательно, условия эксплуатации оказывают существенное влияние на величину пробега шин.

Вопросы для самоподготовки

1. Задачи, решаемые в дисперсионном анализе.
2. Дайте характеристику межгрупповой и внутригрупповой дисперсии.
3. Чем обусловлена вариация групповых средних вокруг общего среднего?
4. Какая параметрическая гипотеза принимается в качестве нулевой при дисперсионном анализе? Порядок проверки этой гипотезы.
5. Что называют дисперсионным отношением?
6. Какое вероятностное распределение применяют для проверки гипотезы в дисперсионном анализе? Перечислите его числовые характеристики.

5. КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ И РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ

5.1. Понятие о статистической и корреляционной связи

Важную часть методологии научного исследования составляют методы выявления и измерения связей между физическими величинами. Различают два типа связей: функциональную и статистическую.

Если с изменением значения одной из переменных вторая изменяется строго определенным образом, т.е. значению одной переменной обязательно соответствует одно или несколько точно заданных значений другой переменной, связь между ними является **функциональной**.

Если с изменением значения одной из переменных вторая может в определенных пределах принимать любые значения с некоторыми вероятностями, но ее среднее значение или иные статистические характеристики изменяются по определенному закону, связь является **статистической**.

Корреляционной связью называют частный случай статистической связи, состоящий в том, что разным значениям одной переменной соответствуют различные средние значения другой. С изменением значения признака x закономерным образом изменяется среднее значение признака $\bar{y}$; в то время как в каждом отдельном случае значение признака y (с различными вероятностями) может принимать множество значений.

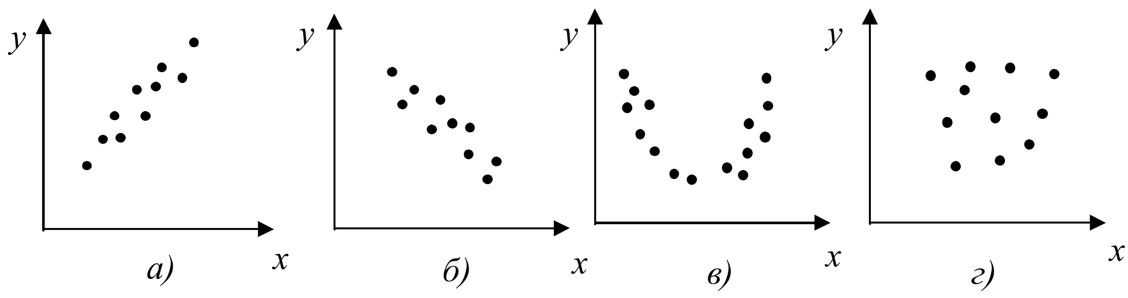

Рис. 5.1. Корреляционные зависимости

Корреляционная связь между признаками может возникать из-за:

– причинной зависимости результативного признака (отклика) или его вариации от вариации факторного признака;

– связи между двумя следствиями общей причины;

– взаимосвязи признаков, каждый из которых и причина и следствие.

По характеру корреляционные связи могут быть прямолинейными и криволинейными. Прямолинейной называется такая корреляционная связь, когда равным изменениям одной переменной соответствуют равные изменения другой переменной (рис. 5.1, *а, б)*. В случае криволинейной корреляции равным изменениям одной переменной могут соответствовать любые изменения другой переменной (рис. 5.1, *в)*. На рис. 5.1, *г* представлен случай, когда между переменными отсутствует связь (нет корреляции).

5.2. Условия применения и задачи корреляционно-регрессионного анализа

Поскольку корреляционная связь является статистической, первым условием возможности ее изучения является общее условие всякого статистического исследования: наличие данных по достаточно большой совокупности явлений. Число наблюдений, достаточное для анализа корреляционной связи, зависит от цели анализа, требуемой точности и надежности параметров связи, от числа факторов, корреляция с которыми изучается. Обычно считают, что число наблюдений должно быть не менее чем в 5 – 6, а лучше не менее чем в 10 раз больше числа факторов.

Вторым условием закономерного проявления корреляционной связи служит условие, обеспечивающее надежное выражение закономерности в средней величине. Кроме большого числа единиц совокупности для этого необходима достаточно качественная однородность совокупности. Иногда как условие корреляционного анализа выдвигают необходимость подчинения распределения совокупности по результативному и факторным признакам нормальному закону распределения вероятностей. Это условие связано с применением метода наименьших квадратов при расчете параметров корреляции: только при нормальном распределении метод наименьших квадратов дает оценку параметров, отвечающую принципам максимального правдоподобия.

Корреляционно-регрессионный анализ учитывает межфакторные связи, следовательно, дает более полное измерение роли каждого фактора: прямое, непосредственное его влияние на результативный признак; косвенное влияние фактора через его влияние на другие факторы; влияние всех факторов на результативный признак.

В соответствии с сущностью корреляционной связи ее изучение имеет две цели:

– определение тесноты связи двух (или большего числа) признаков между собой;

– определение параметров уравнения, выражающего связь средних значений зависимой переменной со значениями независимой переменной (зависимость средних величин результативного признака от значений одного или нескольких факторных признаков).

Основным методом нахождения параметров уравнения связи является **метод наименьших квадратов** (МНК), разработанный Гауссом. Он состоит в минимизации суммы квадратов отклонений фактически измеренных значений зависимой переменной y от ее значений, вычисленных по уравнению связи с факторным признаком (многими признаками) x.

Корреляционно-регрессионный анализ позволяет разделить влияние комплекса факторных признаков, анализировать различные стороны взаимосвязей.

5.3. Парная линейная корреляция

Простейшей системой корреляционной связи является линейная связь между двумя признаками – парная линейная корреляция. Практическое ее значение состоит в том, что существуют системы, в которых среди всех факторов, влияющих на результативный признак, выделяется один важнейший фактор, который в основном определяет вариацию результативного признака. Измерение парных корреляций составляет необходимый этап в изучении сложных многофакторных связей. Рассмотрение линейных связей объясняется ограниченной вариацией переменных и тем, что в большинстве случаев нелинейные формы связей для выполнения расчетов преобразуются в линейную форму.

По общему направлению связи могут быть прямые и обратные. При прямых связях с увеличением признака x увеличивается и признак y, при обратных с увеличением признака x признак y уменьшается. Изучение парной корреляции осуществляется при совместном измерении двух физических величин.

Уравнение парной линейной корреляционной связи называется уравнением парной регрессии и имеет вид

$$\tilde{y} = a + bx, \tag{5.1}$$

где $\tilde{y}$ – среднее значение результативного признака y при определенном значении факторного признака x; a – свободный член уравнения; b – **коэффициент регрессии**, измеряющий среднее отношение отклонения результативного признака от его средней величины к отклонению факторного признака от его средней величины на одну единицу его измерения (вариация y, приходящаяся на единицу вариации x).

Показателем тесноты парной линейной корреляционной связи является **коэффициент корреляции** r_{xy}. Этот показатель представляет собой стандартизованный коэффициент регрессии, т.е. коэффициент, выраженный не в абсолютных единицах измерения признаков, а в долях СКО результативного признака:

$$r_{xy} = b\frac{\sigma_x}{\sigma_y}. \tag{5.2}$$

Интерпретация коэффициента корреляции такова: отклонение признака-фактора от его среднего значения на величину СКО в среднем по совокупности приводит к отклонению результативного признака от своего среднего значения на r_{xy} его СКО. В отличие от коэффициента регрессии b коэффициент корреляции не зависит от принятых единиц измерения признаков и сравним для любых признаков.

5.4. Статистическое изучение корреляционной связи

Целью статистического исследования является получение модели зависимости результативного признака от признака-фактора для ее практического использования. Решение этой задачи осуществляется следующим образом.

5.4.1. Сбор первичной информации, проверка ее на однородность и нормальность распределения

Устанавливаются результативный показатель y и влияющий на его изменение фактор x.

Для оценки однородности совокупности используется коэффициент вариации по факторному признаку

$$V = \frac{S_x}{\bar{x}} \cdot 100\%, \qquad (5.3)$$

где $\bar{x}$, S_x –выборочное среднее и оценка СКО факторного признака соответственно, определяемые по формулам (3.15), (3.21), (3.24), (3.25) в зависимости от объема выборки.

Совокупность считается однородной, если коэффициент вариации V не превышает 33%.

Проверка нормальности распределения исследуемых факторных признаков проводится по методике, изложенной в разделе 3.4.1. Для упрощения процедуры проверки можно воспользоваться табл. 5.1.

Таблица 5.1

Проверка признака-фактора на нормальность

Интервалы значений фактора	Число единиц, входящих в интервал	Удельный вес единиц, входящих в интервал, %	Удельный вес единиц, входящих в интервал, при нормальном распределении, %
1	2	3	4
$(\bar{x} - S_x) - (\bar{x} + S_x)$			68,3
$(\bar{x} - 2S_x) - (\bar{x} + 2S_x)$			95,4
$(\bar{x} - 3S_x) - (\bar{x} + 3S_x)$			99,7

Сопоставление данных граф 3 и 4 позволяет судить о наличии или отсутствии нормальности распределения. На практике часто встречаются случаи отклонения закона распределения факторов от нормального, однако это не означает, что следует отказаться от применения корреляционного анализа.

5.4.2. Исключение из массива первичной информации промахов

Определяются и исключаются промахи в соответствии с методикой, изложенной в разделе 3.4.3. Для упрощения анализа применяется критерий «трех сигм»: определяются значения фактора *x*, не попавшие в последнюю строку табл. 5.1, они являются промахами и исключаются из выборки. Для последующего анализа формируется новый массив.

5.4.3. Установление факта наличия и направления корреляционной зависимости между результативным и факторным признаками

Для установления наличия корреляционной связи используются методы: параллельного сопоставления рядов результативного и факторного признака, графического изображения фактических данных с помощью поля корреляции, построения корреляционной таблицы.

Основным методом выявления наличия корреляционной связи является метод аналитической группировки и определения групповых средних. Он заключается в том, что все единицы совокупности разбиваются на группы по величине признака-фактора и для каждой группы определяется средняя величина результативного признака. На основе данных аналитической группировки строится график эмпирической линии связи (линия регрессии), вид которой не только позволяет судить о возможном наличии связи, но и дает некоторое представление о форме корреляционной связи. Если эмпирическая линия связи по своему виду приближается к прямой линии, то можно предположить наличие прямолинейной корреляционной связи; если эмпирическая линия приближается к какой-либо кривой, то это связано с наличием криволинейной связи.

5.4.4. Измерение степени тесноты связи, оценка ее существенности

Для определения степени тесноты парной линейной зависимости служит линейный коэффициент корреляции r. Степень тесноты связи при любой форме зависимости (линейной, криволинейной) оценивают с помощью эмпирического корреляционного отношения η.

Расчет линейного коэффициента корреляции по несгруппированным данным осуществляется по формуле

$$r = \frac{\sum xy - \frac{\sum x \sum y}{n}}{\sqrt{\left(\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}\right) \cdot \left(\sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{n}\right)}}. \qquad (5.4)$$

Линейный коэффициент корреляции может принимать значения в пределах от –1 до +1. Чем ближе он по абсолютной величине к 1, тем теснее связь. Знак при коэффициенте указывает направление связи: знак «+» соответствует прямой зависимости, знак «–» – обратной. Если коэффициент корреляции равен нулю, то связи между признаками нет; если он равен единице, то между признаками существует функциональная связь.

Оценка существенности линейного коэффициента корреляции проводится с использованием *t*-критерия Стьюдента по формуле

$$t = \frac{|r|}{S_r}, \tag{5.5}$$

где S_r – средняя квадратическая ошибка коэффициента корреляции.

При большом объеме выборки (свыше 50)

$$S_r = \frac{1 - r^2}{\sqrt{n - 1}}. \tag{5.6}$$

При недостаточно большом объеме выборки

$$S_r = \frac{\sqrt{1 - r^2}}{\sqrt{n - 2}}. \tag{5.7}$$

Критическое значение t_T определяется по таблице распределения Стьюдента для заданного уровня значимости и числа степеней свободы $d.f. = n - 1$ или $d.f. = n - 2$ (в зависимости от объема выборки). Если $t > t_T$, то следует говорить о существенности коэффициента корреляции.

Корреляционное отношение определяется по формуле

$$\eta = \sqrt{\frac{S^2_{\delta y}}{S^2_y}}, \tag{5.8}$$

где $S^2_{\delta y}$ – межгрупповая дисперсия результативного признака, вызванная влиянием признака-фактора; S^2_y – общая дисперсия результативного признака.

$$S^2_{\delta y} = \frac{\sum \left(\bar{y}_j - \bar{y}_0\right)^2 f_j}{\sum f_j}; \tag{5.9}$$

$$S^2_y = \frac{\sum \left(y_i - \bar{y}_0\right)^2}{n}, \tag{5.10}$$

где $\bar{y}_j$ – среднее значение результативного признака в соответствующих группах, выделенных по величине признака-фактора; $\bar{y}_0$ – общая средняя для всей совокупности; f_j – число единиц в соответствующих группах.

Вычисление корреляционного отношения требует достаточно большого объема информации, которая должна быть представлена в форме групповой таблицы или в форме корреляционной таблицы, т.е. обязательным условием является группировка данных по признаку-фактору.

5.4.5. Построение модели связи

Тип модели выбирается на основе сочетания теоретического анализа и исследования эмпирических данных посредством построения эмпирической линии регрессии. Чаще всего используются следующие типы функций:

линейная $\tilde{y}_x = a + bx$;

гиперболическая $\tilde{y}_x = a + b\frac{1}{x}$;

параболическая $\tilde{y}_x = a + bx + cx^2$;

показательная $\tilde{y}_x = ab^x$.

Для проверки возможности использования линейной функции определяется модуль разности $\left|\eta^2 - r^2\right|$; если она менее 0,1, то считается возможным применение линейной функции.

Система уравнений для определения параметров a и b уравнения прямолинейной корреляционной связи (для несгруппированных данных) имеет вид

$$\begin{cases} \sum y = an + b\sum x; \\ \sum yx = a\sum x + b\sum x^2. \end{cases} \tag{5.11}$$

Параметры a и b можно определить по формулам:

$$a = \bar{y} - b\bar{x};\ b = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}. \tag{5.12}$$

В качестве меры достоверности уравнения корреляционной зависимости используется процентное отношение средней квадратической ошибки уравнения S_e к среднему уровню результативного признака $\bar{y}$:

$$\frac{S_e}{\bar{y}} \cdot 100\% ; \quad S_e = \sqrt{\frac{\sum (y - \tilde{y})^2}{n - g}} , \qquad (5.13)$$

где y – фактические значения результативного признака; $\tilde{y}$ – значения результативного признака, рассчитанные по уравнению регрессии; g – число параметров уравнения регрессии.

Если это отношение не превышает 10 – 15%, то следует считать, что уравнение регрессии достаточно хорошо отображает изучаемую взаимосвязь.

Для результативного признака определяются доверительные границы, в пределах которых с заданной доверительной вероятностью будет находиться теоретическое значение y. Доверительные границы результативного признака y при значении факторного признака x_0 определяются следующим образом:

$$\tilde{y}_{x_0} - t_\alpha \frac{S_e}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_x{}^2}} \le y \le \tilde{y}_{x_0} + t_\alpha \frac{S_e}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_x{}^2}} , \qquad (5.14)$$

где t_α определяется в соответствии с уровнем значимости по распределению Стьюдента для числа степеней свободы $d.f. = n - 1$.

5.4.6. Пример применения корреляционно-регрессионного анализа

В табл. 5.2 приведены данные исследования зависимости объема выпускаемой продукции от уровня автоматизации поточных линий. Провести на основе приведенных данных исследование взаимосвязи объема выпускаемой продукции от уровня автоматизации поточных линий. Результативный признак – объем продукции y. Факторный признак – уровень автоматизации поточной линии x.

Первичная информация проверяется на однородность по признаку-фактору с помощью коэффициента вариации.

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = 73{,}5 \ \%; \qquad S_x = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}} = 4{,}1 \ \%; \qquad V = \frac{4{,}1}{73{,}5} \cdot 100 = 5{,}4 \ \%.$$

$V < 33\%$, следовательно, совокупность можно считать однородной.

Проверка первичной информации на нормальность распределения проводится с помощью правила «трех сигм» (табл. 5.3). Можно считать, что значения фактора подчиняются закону нормального распределения.

Таблица 5.2

Данные для анализа

Номер линии	Уровень автоматизации, %	Объем продукции, млн руб.	Номер линии	Уровень автоматизации, %	Объем продукции, млн руб.
1	77,8	18,5	11	69,6	17,5
2	69,0	18,2	12	79,2	21,8
3	76,5	20,4	13	70,8	16,5
4	80,7	21,8	14	72,3	16,8
5	72,0	16,8	15	79,2	21,0
6	77,1	20,8	16	73,5	16,8
7	64,0	14,2	17	71,1	16,5
8	72,0	17,0	18	69,9	17,0
9	75,9	18,4	19	70,5	17,5
10	73,2	19,5	20	75,0	20,9

Таблица 5.3

Проверка признака-фактора на нормальность

Интервалы значений фактора	Число единиц, входящих в интервал	Удельный вес единиц, входящих в интервал, в общем их числе, %	Удельный вес единиц, входящих в интервал, при нормальном распределении, %
69,4 – 77,6	14	70,0	68,3
65,3 – 81,7	19	95,0	95,4
61,2 – 85,8	20	100	99,7

Все значения факторного признака попадают в интервал «три сигма» $61{,}2 \le x_i \le 85{,}8$, следовательно, грубых ошибок (промахов) в первичной информации нет.

Для установления наличия связи $y(x)$ производится аналитическая группировка по факторному признаку. Группировка выполняется при равных интервалах и числе групп m=5. Величина интервала

$$i = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{m} = \frac{80{,}7 - 64{,}0}{5} = 3{,}4\ \%.$$

Расчеты приведены в табл. 5.4, 5.5. Как видно из данных групповой таблицы, с увеличением уровня автоматизации поточных линий объем выпускаемой на них продукции растет. На рис. 5.2 представлен график связи. Эмпирическая линия связи приближается к прямой линии. Следовательно, можно предполагать наличие прямолинейной корреляции.

Таблица 5.4

Вспомогательная таблица для заполнения групповой таблицы

x, %	64,0 – 67,4	67,4 – 70,8	70,8 – 74,2	74,2 – 77,6	77,6 – 81,0
Номер линии	7	2; 11; 18; 19	5; 8; 10; 13; 14; 16; 17	3; 6; 9; 20	1; 4; 12; 15
y, млн руб	14,2	18,2; 17,5; 17,0; 17,5	16,8;17,0; 19,5; 16,5; 16,8; 16,8; 16,5	20,4; 20,8; 18,4; 20,9	18,5; 21,8; 21,8; 21,0

Таблица 5.5

Групповая таблица

x, %	x', %	f_j	$\sum_i y_{ij}$	$\bar{y}_j$, млн руб.
64,0 – 67,4	65,7	1	14,2	14,2
67,4 – 70,8	69,1	4	70,2	17,6
70,8 – 74,2	72,5	7	119,9	17,1
74,2 – 77,6	75,9	4	80,5	20,1
77,6 – 81,0	79,3	4	83,1	20,8

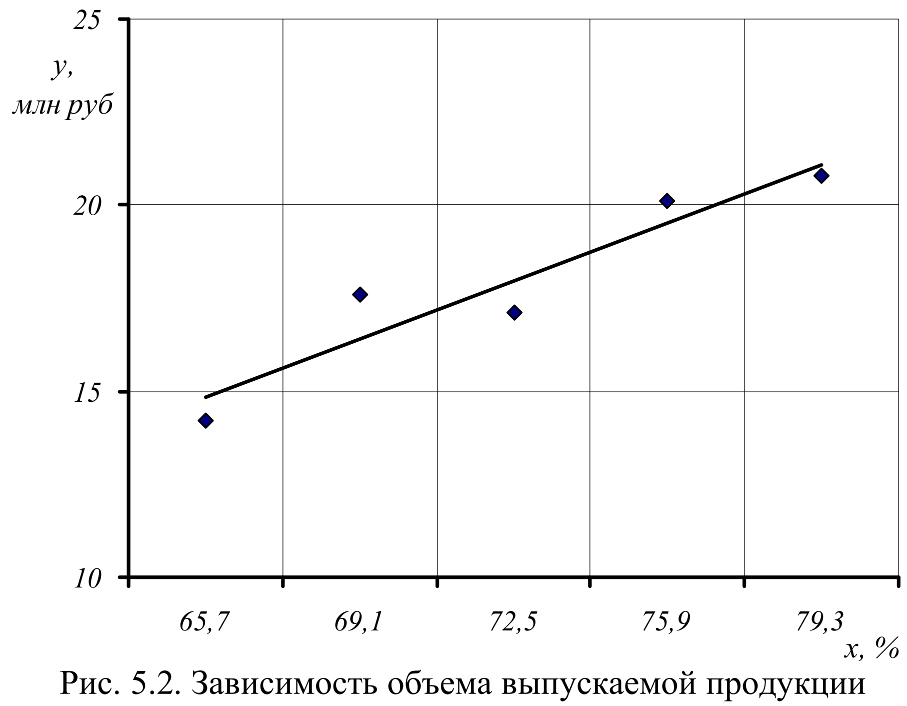

Рис. 5.2. Зависимость объема выпускаемой продукции от уровня автоматизации поточных линий

Для измерения степени тесноты связи вычисляем линейный коэффициент корреляции (5.4).

Для расчета r использована вспомогательная табл. 5.6

$$r = \frac{27173{,}1 - \frac{1469{,}3 \cdot 367{,}9}{20}}{\sqrt{\left(108274{,}1 - \frac{1469{,}3^2}{20}\right) \cdot \left(6852{,}8 - \frac{367{,}9^2}{20}\right)}} = \frac{145{,}3}{168{,}2} = 0{,}86 .$$

Значение линейного коэффициента корреляции свидетельствует о наличии прямой и достаточно тесной связи.

Средняя квадратическая ошибка коэффициента корреляции

$$S_r = \frac{\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{n-2}} = \frac{\sqrt{1-0{,}86^2}}{\sqrt{20-2}} = 0{,}12 ; \; t = \frac{|r|}{S_r} = \frac{0{,}86}{0{,}12} = 7{,}167 .$$

Критическое значение t определяем по таблице распределения Стьюдента для $\alpha = 0{,}05$ и $d.f. = 18$. $t_T = 1{,}734$. $t > t_T$, следовательно, можно утверждать существенность коэффициента корреляции.

Таблица 5.6

Данные для расчета коэффициента корреляции и уравнения связи

Номер линии	x, %	y, млн руб	x^2	y^2	xy	$\tilde{y}$	$y-\tilde{y}$	$(y-\tilde{y})^2$
1	77,8	18,5	6052,8	342,3	1439,3	20,3	-1,8	3,21
2	69,0	18,2	4761,0	331,2	1255,8	16,4	1,8	3,17
3	76,5	20,4	5852,3	416,2	1560,6	19,7	0,7	0,46
4	80,7	21,8	6512,5	475,2	1759,3	21,6	0,2	0,05
5	72,0	16,8	5184,0	282,2	1209,6	17,7	-0,9	0,88
6	77,1	20,8	5944,4	432,6	1603,7	20,0	0,8	0,67
7	64,0	14,2	4096,0	201,6	908,8	14,2	0,0	0,00
8	72,0	17,0	5184,0	289,0	1224,0	17,7	-0,7	0,55
9	75,9	18,4	5760,8	338,6	1396,6	19,5	-1,1	1,12
10	73,2	19,5	5358,2	380,3	1427,4	18,3	1,2	1,52
11	69,6	17,5	4844,2	306,3	1218,0	16,7	0,8	0,67
12	79,2	21,8	6272,6	475,2	1726,6	20,9	0,9	0,80
13	70,8	16,5	5012,6	272,3	1168,2	17,2	-0,7	0,51
14	72,3	16,8	5227,3	282,2	1214,6	17,9	-1,1	1,15
15	79,2	21,0	6272,6	441,0	1663,2	20,9	0,1	0,01
16	73,5	16,8	5402,3	282,2	1234,8	18,4	-1,6	2,56
17	71,1	16,5	5055,2	272,3	1173,2	17,3	-0,8	0,71
18	69,9	17,0	4886,0	289,0	1188,3	16,8	0,2	0,03
19	70,5	17,5	4970,3	306,3	1233,8	17,1	0,4	0,18
20	75,0	20,9	5625,0	436,8	1567,5	19,1	1,8	3,39
$\sum$	1469,3	367,9	108274,1	6852,8	27173,1	–	–	21,62

Определение модели линейной связи. Проверяем возможность использования линейной функции.

$\bar{y}_0 = \frac{367{,}9}{20} = 18{,}4$ млн руб.; $S^2_{\delta y} = 3{,}32$ млн руб.^{2}; $S_y{}^2 = 4{,}26$ млн руб.^{2};

$$\eta = \sqrt{\frac{3{,}32}{4{,}26}} = 0{,}88; \qquad \left|\eta^2 - r^2\right| = \left|0{,}88^2 - 0{,}86^2\right| = 0{,}04.$$

Так как $\left|\eta^2 - r^2\right| < 0{,}1$, применение линейной функции считается возможным. Модель линейной связи $\tilde{y} = a + bx$. Коэффициенты уравнения регрессии определяем, используя данные табл. 5.6.

$$b = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2} = 0{,}44; \qquad a = \bar{y} - b\bar{x} = 18{,}4 - 0{,}44 \cdot 73{,}5 = -13{,}94.$$

Получили следующую модель связи (уравнение регрессии):

$$\tilde{y} = -13{,}94 + 0{,}44x.$$

Средняя квадратическая ошибка уравнения

$$S_e = \sqrt{\frac{\sum\left(y - \tilde{y}\right)^2}{n - g}} = \sqrt{\frac{21{,}62}{20 - 2}} = 1{,}10 \text{ млн руб.}$$

Значения $\tilde{y}$, рассчитанные по уравнению регрессии, представлены в табл. 5.6.

$$\frac{S_e}{\bar{y}} \cdot 100\% = \frac{1{,}10}{18{,}4} \cdot 100\% = 6\%.$$

Полученное отношение меньше 10%, поэтому полученная модель достаточно хорошо отображает взаимосвязь двух признаков и может быть использована в практической работе.

Вопросы для самоподготовки

1. Дайте определение статистической и функциональной связи.
2. Что называют корреляционной связью?
3. Перечислите причины возникновения корреляционной связи между признаками.
4. Какие задачи решает корреляционно-регрессионный анализ?
5. В чем заключается суть метода наименьших квадратов?
6. Практическое значение парной линейной корреляции.
7. Что называют уравнением регрессии?
8. Дайте определение коэффициента корреляции.
9. Перечислите основные этапы изучения корреляционной зависимости. Какие задачи решаются на каждом этапе?

6. МНОГОФАКТОРНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

6.1. Полный факторный эксперимент

6.1.1. Общие сведения

В практике научных исследований параметр оптимизации обычно зависит от нескольких факторов. Многофакторные эксперименты проводятся для построения линейных полиномиальных моделей. Вид полинома задается заранее, а его параметры определяются по экспериментальным данным. Широкое распространение полиномиальных моделей объясняется тем, что исследуемую функцию многих переменных $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ в ограниченной области эксперимента обычно можно разложить в ряд Тейлора.

Например, функция двух переменных $f(x_1, x_2)$, разложенная в ряд Тейлора в окрестности центра плана $x_1 = 0; \quad x_2 = 0$, имеет вид

$$f(x_1, x_2) = f_0 + \left[\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} x_2\right] +$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} x_1^2 + 2\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} x_1 x_2 + \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} x_2^2\right] + \delta,$$

где δ – слагаемые третьего и более высокого порядка.

Введя обозначения $f(x_1, x_2) = y$; $f_0 = \beta_0$;

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_u} = \beta_u, \ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_u^2} = \beta_{uu} \ (u = 1, 2); \ \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = \beta_{12},$$

получим

$$y = \beta_0 + \sum_{u=1}^{2} \beta_u x_u + \sum_{u=1}^{2} \beta_{uu} x_u^2 + \beta_{12} x_1 x_2 + \delta \,. \tag{6.1}$$

В практических задачах всегда можно ограничиться полиномами, включающими первые степени переменных x_u и их различные произведения или первые и вторые степени переменных и крайне редко – более высокие степени. Если переменная в модели имеет степень $p-1$, то в эксперименте она должна принимать не менее p значений или уровней.

Полный факторный эксперимент (ПФЭ) – это эксперимент, в котором реализуются все возможные, неповторяющиеся комбинации уровней факторов.

Число опытов в ПФЭ определяется в соответствии с (1.6). Обычно встречаются планы эксперимента типа 2^k (два уровня варьирования факторов), реже 3^k и очень редко при $p > 3$ в связи с резким ростом числа независимых опытов (табл. 6.1).

Таблица 6.1

Число опытов $N = p^k$

p \ k	2	3	4
2	4	8	16
3	9	27	81
4	16	64	256

ПФЭ, в котором каждый фактор принимает только два значения (уровня), применяется для отыскания параметров полиномиальных моделей без учета квадратов факторов. Теоретическое уравнение такой модели в общем случае имеет вид

$$y = \beta_0 + \sum_{u=1}^{k} \beta_u x_u + \sum_{u \neq j}^{k} \beta_{uj} x_u x_j + \sum_{u \neq j \neq q}^{k} \beta_{ujq} x_u x_j x_q + \ldots + \beta_{uj\ldots k} x_u x_j \ldots x_k , \quad (6.2)$$

где β_0 – свободный член; $\beta_u, \beta_{uj}, \beta_{ujq}$ – коэффициенты, учитывающие линейное влияние на отклик, взаимодействия факторов первого, второго и т.д. порядков. Последнее слагаемое учитывает влияние на отклик произведения всех факторов.

По данным эксперимента могут быть определены только оценки β-коэффициентов, которые являются неслучайными величинами или константами. Для отыскания несмещенных и состоятельных оценок β-коэффициентов применяется регрессионный анализ, в основе которого лежит метод наименьших квадратов. В соответствии с моделью (6.2) уравнение регрессии имеет вид

$$\widetilde{y} = b_0 + \sum_{u=1}^{k} b_u x_u + \sum_{u \neq j}^{k} b_{uj} x_u x_j + \sum_{u \neq j \neq q}^{k} b_{ujq} x_u x_j x_q + \ldots + b_{uj\ldots k} x_u x_j \ldots x_k . \quad (6.3)$$

Этапы планирования и реализации ПФЭ:

– выбор параметров оптимизации и уровней их варьирования;

– кодирование факторов;

– составление матрицы планирования эксперимента;

– рандомизация опытов;

– реализация плана эксперимента;

– проверка однородности дисперсий параллельных опытов, воспроизводимости результатов;

– расчет коэффициентов уравнения регрессии, их ошибок и значимости;

– проверка адекватности модели.

6.1.2. Кодирование факторов

Кодирование – это перевод натуральных значений уровней факторов в кодовые безразмерные величины с целью построения стандартной матрицы эксперимента.

Для факторов с непрерывной областью определения кодирование осуществляют по формуле

$$X_u = \frac{x_u - x_{u0}}{\Delta x_u}, \tag{6.4}$$

где X_u – кодовое значение u-го фактора; x_u – натуральное текущее значение u-го фактора; x_{u0} – начальный (нулевой) уровень фактора; Δx_u – интервал варьирования u-го фактора.

$$\Delta x_u = \frac{x_{u\,\max} - x_{u\,\min}}{2}. \tag{6.5}$$

После кодирования уровни факторов принимают значения: +1 – верхний уровень; –1 – нижний уровень; 0 – нулевой уровень. В качестве нулевого уровня принимают центр интервала, в котором предполагается проводить эксперимент. Например, результат кодирования двух факторов x_1 и x_2 можно представить табл. 6.2.

Таблица 6.2

Кодирование факторов

Факторы	x_1	X_1	x_2	X_2
Интервал варьирования	0,75	1	1	1
Верхний уровень	2,5	+1	3	+1
Нижний уровень	1	–1	1	–1
Основной уровень	1,75	0	2	0

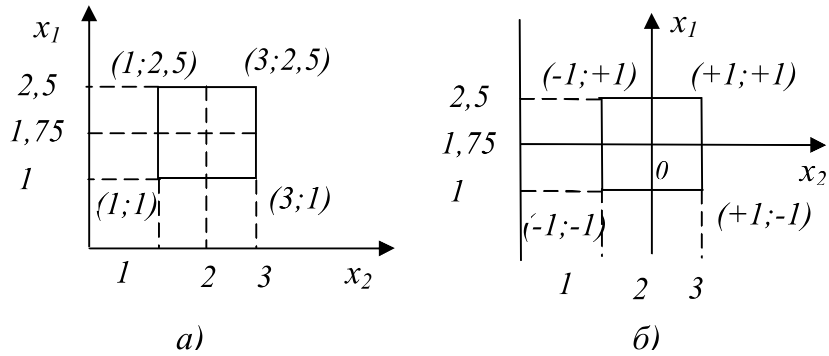

Рис. 6.1. Кодирование факторов

На рис. 6.1 представлено факторное пространство и уровни факторов до кодирования (*а*) и после кодирования (*б*).

6.1.3. Матрицы планирования эксперимента

Условия эксперимента обычно записывают в виде матриц планирования эксперимента (табл. 6.3), где строки соответствуют различным независимым опытам, а столбцы – значениям (уровням) факторов. На рис. 6.2 представлена геометрическая интерпретация ПФЭ.

Таблица 6.3

Матрица планирования эксперимента 2^2

Номер опыта	X_1	X_2	y
1	–1	–1	y_1
2	+1	–1	y_2
3	–1	+1	y_3
4	+1	+1	y_4

В общем случае планы типа 2^k геометрически представляют собой совокупность точек, расположенных в вершинах гиперкуба, размещенного в многомерном пространстве. Пространство, заключенное внутри гиперкуба, является областью планирования эксперимента.

Существует несколько способов построения матрицы планирования большой размерности. Один из них основан на чередовании знаков: в первом столбце знаки меняются поочередно, во втором – через два, в третьем – через четыре и т.д.

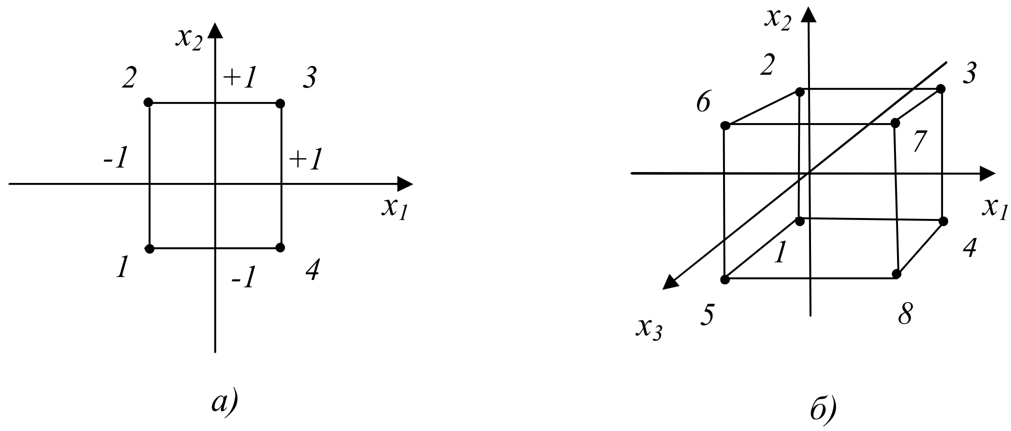

Рис. 6.2. Геометрическая интерпретация ПФЭ:
а – в двухмерном пространстве (N=2^2); *б* – в трехмерном пространстве (N=2^3)

В табл. 6.4 представлены матрицы ПФЭ ($2^2;2^3;2^4$), построенные по данному способу. Вместо единиц с соответствующими знаками указаны только знаки. Такое обозначение возможно для ПФЭ, построенного на двух уровнях факторов.

Таблица 6.4

Матрица планирования ПФЭ

Номер опыта	X_1	X_2	X_3	X_4
1	–	–	–	–
2	+	–	–	–
3	–	+	–	–
4	+	+	–	–
5	–	–	+	–
6	+	–	+	–
7	–	+	+	–
8	+	+	+	–
9	–	–	–	+
10	+	–	–	+
11	–	+	–	+
12	+	+	–	+
13	–	–	+	+
14	+	–	+	+
15	–	+	+	+
16	+	+	+	+

ПФЭ относится к числу планов, которые являются наиболее эффективными при построении линейных моделей. Эффективность достигается за счет следующих свойств:

– симметричности относительно центра эксперимента. Алгебраическая сумма значений каждого из столбцов матрицы равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{N} X_{ui} = 0, \qquad (6.6)$$

где u=1,2,3, ...,k – номер фактора; i – номер опыта; N – число опытов;

– условия нормировки. Сумма квадратов элементов каждого столбца матрицы равна числу опытов:

$$\sum_{i=1}^{N} X_{ui}{}^2 = N. \qquad (6.7)$$

Это является следствием того, что значения факторов в матрице задаются равными +1 и –1;

– ортогональности. Сумма почленных произведений двух столбцов матрицы равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{N} X_{ui} X_{qi} = 0, \quad u \neq q; \qquad (6.8)$$

– ротатабельности. Экспериментальные точки в матрице планирования располагаются так, что точность предсказания параметра оптимизации одинакова на равных расстояниях от центра плана и не зависит от направления.

6.1.4. Рандомизация опытов

Чтобы исключить влияние систематических погрешностей, вызванных внешними условиями, применяется метод рандомизации (*random* – случайный), который основан на принципе перевода систематических погрешностей в случайные. Уменьшение систематической погрешности достигается при изменении случайным образом методики и условий проведения опытов.

Например, если в плане эксперимента 2^3 предполагается каждое значение параметра оптимизации y определить по двум параллельным опытам, то всего необходимо 16 опытов. Для определения порядка проведения опытов можно воспользоваться таблицей случайных чисел (прил. 7). Выбранную случайным образом последовательность опытов не рекомендуется нарушать.

6.1.5. Проведение эксперимента

При проведении эксперимента для каждого принятого сочетания факторов измеряют значения параметра оптимизации. Следует учитывать, что результаты каждого опыта являются случайными величинами из-за погрешности измерений значений факторов, самого параметра оптимизации, влияния неучтенных факторов. Поэтому если воспроизвести несколько раз опыт при одних и тех же значениях факторов, то каждый раз значение параметра оптимизации будет разным. Обычно стараются при каждом сочетании значений факторов (в каждой точке) провести несколько повторных опытов, которые называются параллельными (дублированными). Дублирование позволяет проверить воспроизводимость эксперимента.

6.1.6. Проверка однородности дисперсии параллельных опытов, воспроизводимости эксперимента

Проверка однородности дисперсии параллельных опытов проводится с целью подтверждения нормального закона распределения ошибок отдельных опытов. В противном случае нельзя приступить к регрессионному анализу – расчету коэффициентов регрессии, проверке их значимости и проверке адекватности математической модели экспериментальных данных.

Проверку однородности при одинаковом числе параллельных опытов проводят с помощью критерия Кохрена (G-критерий). Проверка состоит в следующем:

– определяют дисперсию параллельных опытов

$$S_i^2 = \frac{1}{r-1}\sum_{l=1}^{r}\left(y_{il} - \bar{y}_i\right)^2 , \tag{6.9}$$

где $i = 1,2,\ldots,N$; r – число параллельных опытов, при однократных измерениях принимают $r = 2$;

– вычисляют отношение максимальной дисперсии к сумме всех дисперсий (критерий Кохрена):

$$G = \frac{S_{\max}^2}{\sum_{i=1}^{N} S_i^2} ; \tag{6.10}$$

– определяют числа степеней свободы $d.f_1 = r-1$ и $d.f_2 = N$;

– выбирают уровень значимости;

– находят по таблицам критическое отклонение G_T (прил. 6);

– сравнивают величины G и G_T. Если $G \le G_T$, то дисперсия однородна.

Если эта проверка дала отрицательный результат, то полученный эмпирический материал использовать для аппроксимации функции не рекомендуется. Следует повторить эксперимент, увеличив при этом число повторений для каждого опыта. В случае однородности дисперсий параллельных опытов рассчитывают дисперсию воспроизводимости и ошибку всего эксперимента.

Дисперсию всего эксперимента [дисперсию параметра оптимизации $S^2(y)$] получают в результате усреднения дисперсий всех опытов. Эта же дисперсия характеризует и воспроизводимость эксперимента, $S^2(y) = S^2_{воспр}$.

$$S^2(y) = \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{r}\left(y_{il} - \bar{y}_i\right)^2}{N(r-1)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} S_i^2 \qquad (i = 1,2,\ldots,N;\, l = 1,2,\ldots,r). \qquad (6.11)$$

Формулой (6.11) можно пользоваться в случаях, когда число параллельных опытов одинаково во всей матрице. На практике часто приходится сталкиваться со случаями, когда число повторных опытов различно. Это происходит вследствие отброса грубых наблюдений, неуверенности экспериментатора в правильности некоторых результатов. Тогда пользуются средневзвешенным значением дисперсии, взятым с учетом числа степеней свободы:

$$S^2(y) = \frac{\sum_{i=1}^{N} f_i S_i^2}{\sum_{i=1}^{N} f_i}, \qquad (6.12)$$

где f_i – число степеней свободы в i-м опыте, $f_i = r_i - 1$.

Ошибка всего эксперимента

$$S(y) = \sqrt{S^2(y)}. \qquad (6.13)$$

6.1.7. Расчет коэффициентов регрессии, проверка их значимости

Значения коэффициентов регрессии b_u и b_{uj} позволяют оценить степень влияния факторов и их взаимодействий на параметр оптимизации. Чем больше числовое значение коэффициента, тем большее влияние оказывает фактор. Если коэффициент имеет знак «+», то с увеличением значения фактора параметр оптимизации увеличивается, а если «–» – уменьшается. Величина коэффициента соответствует вкладу данного фактора в величину параметра оптимизации при переходе значения фактора с нулевого уровня на верхний или нижний. Иногда оценивают линейный (главный) эффект фактора при переходе его значения с нижнего на верхний уровень. Численно он равен удвоенному коэффициенту полиномиальной модели $2b_u$.

$$b_u = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_{ui} y_i}{N} \quad (u = 0,1,2,\ldots,k). \tag{6.14}$$

Если уравнение регрессии имеет вид

$$\tilde{y} = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2, \tag{6.15}$$

для подсчета коэффициента b_1 используют столбец X_1, а для b_2 – X_2.

Если уравнение (6.15) справедливо, то оно верно и для средних арифметических значений переменных $\bar{y} = b_0 + b_1 \bar{X}_1 + b_2 \bar{X}_2$. В силу свойства симметрии $\bar{X}_1 = \bar{X}_2 = 0 \rightarrow \bar{y} = b_0$, b_0 – среднее арифметическое значение параметра оптимизации.

Чтобы привести процедуру расчета коэффициентов в соответствие с формулой (6.14), в матрицу планирования вводят столбец фиктивной переменной X_0, которая принимает во всех опытах значение +1 (табл. 6.5).

Таблица 6.5

Матрица планирования ПФЭ 2^2

Номер опыта	X_0	X_1	X_2	y
1	+	–	–	y_1
2	+	+	–	y_2
3	+	–	+	y_3
4	+	+	+	y_4

$$\begin{aligned} b_1 &= [(-1)y_1 + (+1)y_2 + (-1)y_3 + (+1)y_4]/4; \\ b_2 &= [(-1)y_1 + (-1)y_2 + (+1)y_3 + (+1)y_4]/4; \\ b_0 &= [(+1)y_1 + (+1)y_2 + (+1)y_3 + (+1)y_4]/4. \end{aligned} \tag{6.16}$$

Если есть основания считать, что модель нелинейна, то ее следует усложнить. Один из часто встречающихся видов нелинейности связан с тем, что эффект одного фактора зависит от уровня, на котором находится другой фактор. В этом случае говорят, что существует эффект взаимодействия двух факторов. ПФЭ позволяет количественно оценить эффект взаимодействия. Для этого необходимо, пользуясь правилом перемножения столбцов, получить столбец произведения двух факторов (табл. 6.6).

Модель для такого плана имеет вид

$$\tilde{y} = b_0 X_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_{12} X_1 X_2;$$
$$b_{12} = [(+1)y_1 + (-1)y_2 + (-1)y_3 + (+1)y_4]/4. \quad (6.17)$$

Таблица 6.6

Матрица планирования ПФЭ 2^2 с учетом взаимодействия факторов

Номер опыта	X_0	X_1	X_2	X_1X_2	y
1	+	–	–	+	y_1
2	+	+	–	–	y_2
3	+	–	+	–	y_3
4	+	+	+	+	y_4

В ПФЭ встречаются различные уровни взаимодействия факторов. В табл. 6.7 представлены такие взаимодействия.

Таблица 6.7

Матрица планирования ПФЭ 2^3 с учетом взаимодействия факторов

Номер опыта	X_0	X_1	X_2	X_3	X_1X_2	X_1X_3	X_2X_3	$X_1X_2X_3$	y
1	+	–	–	–	+	+	+	–	y_1
2	+	+	–	–	–	–	+	+	y_2
3	+	–	+	–	–	+	–	+	y_3
4	+	+	+	–	+	–	–	–	y_4
5	+	–	–	+	+	–	–	+	y_5
6	+	+	–	+	–	+	–	–	y_6
7	+	–	+	+	–	–	+	–	y_7
8	+	+	+	+	+	+	+	+	y_8

Произведения X_1X_2, X_1X_3, X_2X_3 представляют эффект взаимодействия первого порядка, $X_1X_2X_3$ – второго.

Чтобы найти число возможных взаимодействий некоторого порядка, можно воспользоваться обычной формулой числа сочетаний

$$C_k^m = \frac{k!}{m!(k-m)!}, \quad (6.18)$$

где k – число факторов; m – число элементов во взаимодействии. Так, для плана 2^4 число взаимодействий первого порядка равно 6: $C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = 6$.

Проверка значимости коэффициентов регрессии проводится с целью упрощения уравнения регрессии путем исключения статистически незначимых коэффициентов. Проверку можно осуществлять двумя способами: по t-критерию Стьюдента или путем построения доверительного интервала. Для ПФЭ ошибки всех коэффициентов уравнения регрессии одинаковы $S_{b_0} = S_{b_u} = S_{b_{uj}}$, доверительные интервалы для всех коэффициентов равны.

Расчет ошибок коэффициентов производится по формуле

$$S_b = \frac{S(y)}{\sqrt{Nr}}. \quad (6.19)$$

Коэффициент регрессий считается значимым, если он по абсолютной величине больше величины доверительного интервала $|b_u| > 2\Delta b$.

Величина доверительного интервала рассчитывается, как правило, при помощи критерия Стьюдента.

$$\Delta b = \pm t_T \cdot S_b. \quad (6.20)$$

Кроме того, проверять значимость коэффициентов можно по t-критерию следующим образом:

– находят ошибки определения коэффициентов по формуле (6.19);

– определяют отношения

$$t_u = \frac{|b_u|}{S(b)}; \quad (6.21)$$

– находят число степеней свободы $d.f = N(r-1)$, выбирают уровень значимости α;

– по таблице находят критическое значение t_T;

– если рассчитанное значение отношения больше критического $t_u > t_T$, то коэффициент b_u признается статистически значимым, в противном случае – незначимым.

Незначимость коэффициентов может быть обусловлена рядом причин:

– фактор, соответствующий незначимому коэффициенту, не влияет на функцию отклика;

– имеет место большая ошибка;

– выбран малый шаг варьирования независимой переменной;

– экстремум функции по переменной находится вблизи центра планирования $b_u \approx \dfrac{df(0,0,0,\ldots,0)}{dX_u}$.

Если какой-либо коэффициент незначим, он отбрасывается без пересчета всех остальных коэффициентов. Прежде чем исключить коэффициент, необходимо проанализировать причины, вызвавшие незначимость коэффициента.

6.1.8. Проверка адекватности модели

Данная проверка проводится с целью доказательства пригодности полученного уравнения регрессии для описания экспериментальных данных с заданной точностью. Для этого оценивают отклонения вычисленных по уравнениям регрессии значений функции оптимизации $\tilde{y}$ от экспериментально установленных $\bar{y}$. Для оценки отклонений используют F-критерий Фишера.

Проверку адекватности математической модели выполняют в несколько этапов:

– находят дисперсию адекватности:

$$S_{ад}^2 = \frac{1}{N-g}\sum_{i=1}^{N} r_i\left(\bar{y}_i - \tilde{y}_i\right)^2, \tag{6.22}$$

где r_i – число параллельных опытов в i-й строчке матрицы планирования; $\bar{y}_i$ – среднее арифметическое функции отклика из r_i параллельных опытов; $\tilde{y}_i$ – значение функции отклика, предсказанное по уравнению в i-м опыте; g – число значимых коэффициентов в уравнении регрессии; N – число независимых опытов.

Если все опыты повторяются r раз, то формула (6.22) будет иметь вид

$$S_{ад}^2 = \frac{r}{N-g}\sum_{i=1}^{N}\left(\bar{y}_i - \tilde{y}_i\right)^2; \tag{6.23}$$

– находят значения F-критерия Фишера (дисперсионное отношение):

$$F = \frac{S_{ад}^2}{S_{восп}^2} = \frac{S_{ад}^2}{S^2(y)}; \tag{6.24}$$

– определяют числа степеней свободы: $d.f_1 = N-g$ и $d.f_2 = N(r-1)$; выбирают уровень значимости α;

– по значениям $d.f_1$; $d.f_2$; α находят критическое значение F_T. Если $F \le F_T$, то математическое описание функции отклика уравнением регрессии считается адекватным.

Если математическая модель неадекватна данным эксперимента, то необходимо перейти к более сложной форме уравнения регрессии или уменьшить интервал варьирования факторов в эксперименте. Например, если неадекватна линейная модель, то следует ее дополнить, введя коэффициенты, соответствующие эффектам взаимодействия.

6.2. Дробный факторный эксперимент

6.2.1. Общие сведения

В случае двухуровневого k-факторного эксперимента на основе опытов в N точках факторного пространства можно найти $N = 2^k$ коэффициентов уравнения регрессии. Если число факторов $k \geq 4$, эффекты взаимодействия высокого порядка становятся статистически незначимыми, т.е. влияние сомножителей $X_1 X_2 \ldots X_k$ на отклик y взаимно компенсируется. Практика эксперимента позволяет априорно считать, что в уравнении регрессии с большим числом факторов коэффициенты высоких порядков взаимодействия равны нулю. Следовательно, при большом числе факторов можно строить такие планы эксперимента, которые позволяют определять линейные эффекты факторов, эффекты их парных и иногда тройных взаимодействий. Уменьшение количества определяемых коэффициентов регрессии позволяет сократить затраты времени и средств на проведение эксперимента и обработку его данных. Количество опытных точек в таких экспериментах должно быть чуть больше или равно количеству подлежащих определению коэффициентов регрессии b. Этому положению удовлетворяют части (реплики) ПФЭ 2^k, кратные 2^p, где p – целое положительное число.

Такие эксперименты называются **дробными факторными экспериментами** (ДФЭ) 2^{k-p}. Количество опытных точек в ДФЭ 2^{k-p} в 2^p раз меньше, чем в ПФЭ 2^k. Так как ДФЭ 2^{k-p} – часть ПФЭ 2^k, то ДФЭ называют также **дробными репликами** полного факторного эксперимента. Например, ДФЭ, образующий половину ПФЭ 2^k, обозначается 2^{k-1} и называется полурепликой ПФЭ 2^k; ДФЭ 2^{k-2} содержит $2^k/2^2 = 2^k/4$ опытных точек и называется 1/4 репликой ПФЭ 2^k и т.д.

6.2.2. Планирование дробных факторных экспериментов

Рассмотрим построение плана ДФЭ 2^{3-1}. В ДФЭ 2^{3-1} план состоит из четырех опытных точек $N = 2^{3-1} = 2^2 = 4$. Ядром плана является ПФЭ 2^2, на основе которого можно построить уравнение регрессии $\tilde{y} = b_0 X_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_{12} X_1 X_2$.

Если взаимодействие факторов $X_1 X_2$ статистически незначимо, то нет необходимости определять коэффициент b_{12} и в матрице ПФЭ 2^2 столбец произведения $X_1 X_2$ окажется лишним. Этот столбец используют для построения плана ДФЭ 2^{3-1}, заменяя $X_3 = X_1 X_2$, т.е. в процессе эксперимента варьируют X_3 по закону изменения произведения $X_1 X_2$ (табл. 6.8).

Таблица 6.8

Матрица планирования ДФЭ 2^{3-1}

Номер опыта	X_0	X_1	X_2	$X_3=X_1X_2$	y
1	+	–	–	+	y_1
2	+	+	–	–	y_2
3	+	–	+	–	y_3
4	+	+	+	+	y_4

Другой план ДФЭ 2^{3-1} можно получить, если фактор X_3 ввести с помощью того же произведения, взятого с обратным знаком (табл. 6.9).

Таблица 6.9

Матрица планирования ДФЭ 2^{3-1}

Номер опыта	X_0	X_1	X_2	$X_3=-X_1X_2$	y
1	+	–	–	–	y_1
2	+	+	–	+	y_2
3	+	–	+	+	y_3
4	+	+	+	–	y_4

Планы, представленные табл. 6.8 и 6.9 обладают свойствами симметрии, нормировки и ортогональности. В зависимости от условий испытаний выбирают один из этих планов, так как каждый из них соответствует различным точкам факторного пространства, в которых должны проводиться независимые опыты. Оба плана позволяют построить линейное уравнение регрессии

$$y = b_0 X_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3, \qquad (6.25)$$

которое содержит четыре неизвестных b-коэффициента. Рассмотренные планы характерны тем, что в них содержится наибольшее возможное количество факторов. На основе плана, содержащего четыре строки, нельзя определить больше четырех коэффициентов – свободный член b_0 и три линейных коэффициента регрессии b_1, b_2, b_3.

План, в котором количество переменных на единицу меньше количества строк или опытных точек, называется **насыщенным**.

Рассмотрим построение дробных реплик на основе ПФЭ 2^3. Планы, ядром которых является ПФЭ 2^3, содержат восемь строк или восемь наборов переменных, при которых определяются значения отклика. На основе ПФЭ 2^3 могут быть построены следующие дробные реплики: ДФЭ 2^{4-1} – полуреплика ПФЭ 2^4; ДФЭ 2^{5-2} – 1/4 реплика ПФЭ 2^5; ДФЭ 2^{6-3} – 1/8 реплика ПФЭ 2^6; ДФЭ 2^{7-4} – 1/16 реплика ПФЭ 2^7. План ДФЭ 2^{7-4} является насыщенным, так как число факторов на единицу меньше числа строк.

На основе плана ПФЭ 2^3 можно построить уравнение регрессии

$$\begin{aligned}\tilde{y} = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 + b_{12} X_1 X_2 + b_{13} X_1 X_3 + \\ + b_{23} X_2 X_3 + b_{123} X_1 X_2 X_3, \qquad (6.26)\end{aligned}$$

которое содержит три парных (первого порядка) и одно тройное (второго порядка) взаимодействий. Если какое-либо взаимодействие является статистически незначимым, можно построить полуреплику ДФЭ 2^{4-1}. Если незначимы два взаимодействия, можно построить 1/4 реплику ПФЭ 2^5 или ДФЭ 2^{5-2} и т.д.

Построим, например, 1/4 реплику для случая, когда незначимыми являются коэффициенты b_{13} и b_{123}. Два дополнительных фактора X_4, X_5 можно ввести с помощью соотношений

$$X_4 = X_1 X_3, X_5 = X_1 X_2 X_3, \qquad (6.27)$$

или

$$X_4 = -X_1 X_3, X_5 = X_1 X_2 X_3, \qquad (6.28)$$

или

$$X_4 = X_1 X_3, X_5 = -X_1 X_2 X_3, \qquad (6.29)$$

или

$$X_4 = -X_1 X_3, X_5 = -X_1 X_2 X_3, \qquad (6.30)$$

которые называются **генерирующими соотношениями** или **генераторами**. Составим план ДФЭ 2^{5-2}, когда генераторами являются

$X_4 = -X_1 X_3, X_5 = X_1 X_2 X_3$ (табл. 6.10). Такой план в пятифакторном пространстве выделяет восемь точек, в которых должен измеряться отклик.

Таблица 6.10

Матрица планирования ДФЭ 2^{5-2}

Номер опыта	X_0	X_1	X_2	X_3	$X_4 =$ $= -X_1X_3$	$X_5 =$ $= X_1X_2X_3$	y
1	+	–	–	–	–	–	y_1
2	+	+	–	–	+	+	y_2
3	+	–	+	–	–	+	y_3
4	+	+	+	–	+	–	y_4
5	+	–	–	+	+	+	y_5
6	+	+	–	+	–	–	y_6
7	+	–	+	+	+	–	y_7
8	+	+	+	+	–	+	y_8

Дробные факторные эксперименты позволяют экономить время, но при таком планировании имеет место нежелательный эффект смешивания оценок β-коэффициентов.

При вычислении b-коэффициентов по данным многофакторного эксперимента иногда получают не оценки отдельных коэффициентов, а оценки различных их комбинаций. Например, величина b_0 является оценкой не только β_0 модели (6.2), но и коэффициентов при квадратах факторов $\beta_{11}, \beta_{22}, \ldots, \beta_{kk}$, которые в уравнение (6.2) не входят, но в действительности могут иметь место. Если все коэффициенты β_{uu} $(u = 1, 2, \ldots, k)$, равны нулю, то b_0 является оценкой β_0. Это положение записывается символом $b_0 \to \beta_0$.

Если некоторые значения β_{uu} отличны от нуля, то b_0 оценивает β_0 и все отличные от нуля β_{uu}:

$$b_0 \to \beta_0 + \sum_{u=1}^{k} \beta_{uu} . \qquad (6.31)$$

Рассмотрим явление смешивания оценок в ДФЭ 2^{3-1}. Для анализа явления смешивания оценок составим структурную матрицу, в которой учитываются все взаимодействия (табл. 6.11).

Из табл. 6.11 видно, что $X_0 = -X_1 X_2 X_3$; $X_1 = -X_2 X_3$; $X_2 = -X_1 X_3$; $X_3 = -X_1 X_2$. Следовательно, b-коэффициенты уравнения (6.25) представляют оценки разности коэффициентов регрессии:

$$b_0 \to \beta_0 - \beta_{123};\ \ b_1 \to \beta_1 - \beta_{23};\ \ b_2 \to \beta_2 - \beta_{13};\ \ b_3 \to \beta_3 - \beta_{12}. \quad (6.32)$$

Таблица 6.11

Структурная матрица для плана ДФЭ 2^{3-1}

Номер опыта	X_0	X_1	X_2	X_3	X_1X_2	X_1X_3	X_2X_3	$X_1X_2X_3$
1	+	–	–	–	+	+	+	–
2	+	+	–	+	–	+	–	–
3	+	–	+	+	–	–	+	–
4	+	+	+	–	+	–	–	–

Рассмотренная процедура анализа смешивания оценок при большом числе факторов $(k > 3)$ оказывается слишком громоздкой. Анализ смешивания значительно облегчается, если использовать генерирующее соотношение и ввести понятие **определяющего контраста**.

Для плана ДФЭ 2^{3-1} генератор $X_3 = -X_1X_2$ дает определяющий контраст (ОК)

$$1 = X_3^2 = -X_1X_2X_3. \quad (6.33)$$

Умножая последовательно обе части ОК $1 = -X_1X_2X_3$ на X_0, X_1, X_2, X_3, находим эквивалентности $X_0 = -X_1X_2X_3$; $X_1 = -X_2X_3$; $X_2 = -X_1X_3$; $X_3 = -X_1X_2$, из которых следуют символические выражения (6.32). Аналогично проводится анализ смешивания оценок и в общих случаях. Рассмотрим смешивание оценок в ДФЭ 2^{5-2}, где используются генераторы $X_4 = -X_1X_3$; $X_5 = X_1X_2X_3$.

При наличии двух и более генераторов определяют **обобщающий определяющий контраст** (ООК)

$$1 = 1_1 = 1_2 = 1_1 1_2;\ 1_1 = X_4^2 = -X_1X_3X_4;\ 1_2 = X_5^2 = X_1X_2X_3X_5.$$

Обобщающий ОК в данном случае имеет вид

$$1 = -X_1X_3X_4 = X_1X_2X_3X_5 = -X_2X_4X_5. \quad (6.34)$$

Далее анализ смешивания оценок ведется на основе ООК (6.34). Рассмотрим, например, какие эффекты смешиваются в коэффициенте b_1. Для этого все части (6.34) умножим на X_1, получим

$$X_1 = -X_3X_4 = X_2X_3X_5 = -X_1X_2X_4X_5.$$

Следовательно, коэффициент b_1 является оценкой суммы

$$b_1 \to \beta_1 - \beta_{34} + \beta_{235} - \beta_{1245}.$$

Рассмотренный анализ проводится для того, чтобы не допустить нежелательных смешиваний. В частности, к большим искажениям может привести смешивание линейных эффектов и парных взаимодействий, так как эти коэффициенты во многих случаях имеют один и тот же порядок. Желательно выбирать такие генераторы, в которых линейные эффекты смешиваются со взаимодействиями высоких порядков. Задача выбора подходящих генераторов не формализована и обычно решается перебором различных вариантов.

Обработка результатов ДФЭ аналогична обработке результатов ПФЭ.

6.3. Пример применения планов первого порядка

Пусть необходимо исследовать влияние параметров процесса сушки керамического порошка (шликера) на его влажность. Остаточная влажность шликера после сушки должна находиться в определенных пределах, отклонение от которых приводит к ухудшению качества керамических изделий. На основании результатов предыдущих исследований оказалось, что наиболее тесную связь с влажностью имеет температура отходящих при сушке газов, причем при увеличении влажности температура снижается, а при уменьшении влажности температура повышается. Поэтому в качестве результативного признака выбрана температура отходящих при сушке газов. Варьируемыми факторами приняты: расход шликера *m*, расход газа *v*, давление в сушилке *p* (табл. 6.12).

Таблица 6.12

Выбор уровней факторов, кодирование факторов

Уровень варьируемых факторов	Кодовое обозначение	*m*, т/ч	*v*, м^3/ч	*p*, МПа
		X_1	X_2	X_3
Нижний уровень	–1	1,25	0,76	0,13
Верхний уровень	+1	1,79	1,24	0,15
Основной уровень	0	1,52	1,00	0,14
Интервал варьирования	Δx_i	0,27	0,24	0,01

Для оценки влияния указанных факторов и математического описания процесса используем модель первого порядка

$$\tilde{y} = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 + b_{12}X_1X_2 + b_{13}X_1X_3 + \\ + b_{23}X_2X_3 + b_{123}X_1X_2X_3 . \qquad (6.35)$$

Матрица планирования ПФЭ 2^3 с учетом взаимодействия факторов представлена табл. 6.7. Для определения температуры отходящих при сушке газов планируется провести три параллельных опыта в каждой строке матрицы ПФЭ, всего 24. Рандомизацию опытов проводим с помощью таблицы случайных чисел (см. прил. 7). Например, начиная со второго столбца таблицы, записываем числа с 1 до 24, отбрасывая больше 24 и повторяющиеся, тогда таблица проведения опытов имеет вид (табл. 6.13).

Таблица 6.13

Порядок проведения опытов

Номер опыта по матрице планирования	1	2	3	4	5	6	7	8
Случайный порядок реализации опытов	24	19	4	9	5	21	7	8
	10	15	2	23	12	14	13	16
	22	20	1	3	17	6	11	18

Результаты испытаний, проведенных в соответствии с матрицей планирования и данными табл. 6.13, представлены в табл. 6.14.

Таблица 6.14

Результаты испытаний

Номер опыта	Температура, °С					S_i^2	$(\bar{y}_i - \tilde{y}_i)^2$
	y_{i1}	y_{i2}	y_{i3}	$\bar{y}_i$	$\tilde{y}_i$		
1	332	327	366	341,7	357,6	450,3	253,3
2	665	674	693	677,3	661,4	204,3	253,3
3	825	886	895	868,7	872,3	1450,3	13,4
4	777	725	832	778,0	774,3	2863,0	13,4
5	1076	1088	1029	1064,3	1068,0	972,3	13,4
6	1190	1183	1136	1169,7	1166,0	862,3	13,4
7	1289	1236	1271	1265,3	1281,3	726,3	253,3
8	993	991	996	993,3	977,4	6,3	253,3

Дисперсию параллельных опытов определяем по формуле (6.9). Однородность дисперсии проверяем с помощью критерия Кохрена (6.10)

$$G = \frac{S_{\max}^2}{\sum_{i=1}^{n} S_i^2} = \frac{2863{,}0}{7535{,}3} = 0{,}38\,.$$

При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ и числах степеней свободы $d.f_1 = 2$; $d.f_2 = 8$ табличное значение критерия $G_T = 0{,}5157$ (см. прил. 6).

Расчетное значение критерия меньше табличного, следовательно, дисперсии параллельных опытов однородны, что является подтверждением нормального закона распределения ошибок отдельных опытов.

Дисперсия всего эксперимента (6.11)

$$S^2(y) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} S_i^2 = 941{,}9.$$

Вычисляем коэффициенты уравнения (6.35)

$$b_0 = \bar{y}_0 = \frac{\sum \bar{y}_i}{N} = 895;$$

$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_{1i}\bar{y}_i}{N} =$$

$$= \frac{-341{,}7 + 677{,}3 - 868{,}7 + 778{,}0 - 1064{,}3 + 1169{,}7 - 1265{,}3 + 993{,}3}{8} = 10$$

и т.д.

После расчета всех коэффициентов уравнение (6.35) принимает вид

$$\tilde{y} = 895 + 10X_1 + 82X_2 + 228X_3 - 100X_{12} - 51X_{13} - 75X_{23} + 6X_{123}.$$

Ошибка определения коэффициентов

$$S_b = \frac{S(y)}{\sqrt{Nr}} = \frac{30{,}7}{\sqrt{8 \cdot 3}} = 6{,}3.$$

Для выявления значимости коэффициентов уравнения регрессии строим доверительный интервал шириной

$$2\Delta b = t_T S_b = 1{,}746 \cdot 6{,}3 = 22.$$

Табличное значение t-критерия Стьюдента определяем для уровня значимости $\alpha = 0{,}05$ и числа степеней свободы $d.f = N(r-1) = 8 \cdot 2 = 16$.

Коэффициенты b_1 и b_{123} оказались статистически незначимыми, поэтому уравнение регрессии имеет вид

$$\tilde{y} = 895 + 82X_2 + 228X_3 - 100X_{12} - 51X_{13} - 75X_{23}. \qquad (6.36)$$

Расчетные значения $\tilde{y}$ приведены в табл. 6.14. Адекватность полученной модели определяем с помощью критерия Фишера (6.24).

Дисперсия адекватности (6.23)

$$S^2_{ад} = \frac{3}{8-6}\sum_{i=1}^{N}\left(\overline{y}_i - \widetilde{y}_i\right)^2 = 1600{,}7\,;\; F = \frac{S^2_{ад}}{S^2(y)} = \frac{1600{,}7}{941{,}9} = 1{,}70\,.$$

Для $d.f_1 = 8-6 = 2$; $d.f_2 = 8(3-1) = 16$ и $\alpha = 0{,}05$ критическое значение $F_T = 3{,}64$. Так как $F \le F_T$, то уравнение (6.36) адекватно описывает функцию отклика.

На основании полученных результатов и анализа уравнения (6.36) можно сделать следующие выводы:

– расход шликера в указанных пределах сам по себе не влияет на температуру отходящих при сушке газов, следовательно, и на влажность шликера;

– с увеличением расхода газа и давления в сушилке температура отходящих газов повышается, влажность – уменьшается (т.к. $b_2 > 0$ и $b_3 > 0$), причем наибольшее влияние оказывает величина давления в сушилке;

– наряду с линейными эффектами значимыми оказались также эффекты взаимодействия X_1X_2, X_1X_3, X_2X_3, которые приводят к уменьшению температуры отходящих газов.

Вопросы для самоподготовки

1. Как зависит число опытов от вида принимаемой математической модели?
2. Чем можно объяснить широкое распространение полиномиальных моделей?
3. Дайте определение полного факторного эксперимента.
4. Что характеризуют β-коэффициенты?
5. Перечислите этапы планирования и реализации полного факторного эксперимента.
6. Что называют кодированием факторов? Зачем его проводят?
7. Геометрическое представление планов типа 2^k.
8. Как происходит формирования матрицы планирования экспериментов? Постройте матрицу планирования для планов $2^2; 2^3; 2^4$.
9. Свойства матрицы планирования полного факторного эксперимента.
10. Что называют рандомизацией опытов? Зачем ее проводят?
11. Какие опыты называют параллельными?

12. Как и для чего проводится проверка однородности дисперсии параллельных опытов?

13. Что означает понятие воспроизводимости эксперимента?

14. Как оценить ошибку эксперимента?

15. Какой метод применяется при расчете коэффициентов уравнения регрессии? Запишите формулу расчета b-коэффициентов.

16. Что называют взаимодействием факторов и как оно учитывается при планировании полного факторного эксперимента?

17. Что называют взаимодействием первого, второго, третьего и т.д. порядка? Как определяется число возможных взаимодействий факторов?

18. Способы проверки значимости b-коэффициентов.

19. Чем может быть обусловлена незначимость коэффициентов уравнения регрессии?

20. Как и для чего проводится проверка адекватности уравнения регрессии?

21. Что называют дробным факторным экспериментом?

22. Дайте определение дробной реплики полного факторного эксперимента.

23. Порядок планирования дробного факторного эксперимента.

24. Какие планы называют насыщенными?

25. Явление смешивания оценок β-коэффициентов в дробном факторном эксперименте.

26. Что называют генерирующим соотношением и определяющим контрастом?

7. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТРОЙСТВ АВТОМАТИКИ

Исследование технических объектов обычно связано с их математическим описанием, которое позволяет выбрать структуру и параметры устройства на стадии разработки, а также организовать наиболее эффективные режимы функционирования в процессе эксплуатации.

Для ряда устройств построению эмпирической модели предшествует получение теоретической модели. Сравнение результатов эксперимента с теоретической зависимостью позволяет объяснить смысл изучаемого явления и показать преимущества эксперимента.

В качестве примера рассмотрим усилитель с положительной и отрицательной обратными связями. Схема усилителя собрана на интегральной микросхеме серии К140УД6 (рис.7.1). Входной сигнал U_{BX} подается на инвертирующий вход. Отрицательная обратная связь создается с помощью сопротивлений R_1 и R_2. Сопротивления R_3, R_4 образуют положительную обратную связь, которая при определенных соотношениях между сопротивлениями повышает коэффициент усиления по напряжению схемы

$$K_U = U_{ВЫХ} / U_{BX} . \qquad (7.1)$$

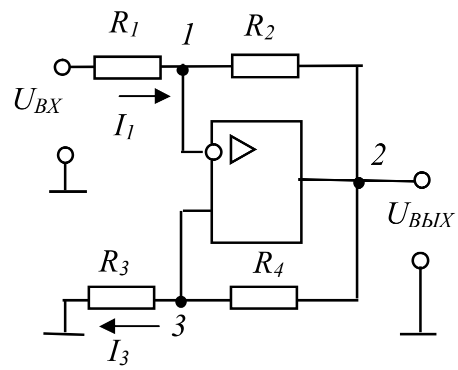

Рис. 7.1. Усилитель с отрицательной и положительной обратными связями

Задача исследования состоит в получении и анализе коэффициента усиления K_U как функции сопротивлений отрицательной и положительной обратных связей. Необходимо также сравнить теоретическую и эмпирическую зависимости K_U от сопротивлений R_1, R_2, R_3, R_4.

При исследовании подобного устройства следует учитывать, что в зависимости от параметров отрицательной и положительной обратных связей коэффициент усиления K_U изменяется в широких пределах, а при некоторых значениях сопротивлений схема может оказаться неработоспособной.

Для решения поставленной задачи исследования получим теоретическую и эмпирическую модели усилителя, а затем сравним их.

7.1. Теоретическая модель усилителя

Для схемы, собранной на операционном усилителе, при выводе зависимости $K_U = f(R_1, R_2, R_3, R_4)$ принимаются следующие допущения: коэффициент усиления в разомкнутом состоянии и его входное сопротивление бесконечно велики. Следовательно, потенциалы в точках *1, 3* (см. рис. 7.1) одинаковы:

$$\varphi_1 = \varphi_3, \tag{7.2}$$

а входной ток усилителя равен нулю.

На основании закона Ома можем записать уравнения

$$\varphi_1 = U_{ВХ} - I_1 R_1; \tag{7.3}$$

$$\varphi_3 = I_3 R_3. \tag{7.4}$$

Токи I_1, I_3 также определяются на основе закона Ома:

$$I_1 = (U_{ВХ} - U_{ВЫХ})/(R_1 + R_2); \tag{7.5}$$

$$I_3 = U_{ВЫХ}/(R_3 + R_4). \tag{7.6}$$

Подставляя в уравнения (7.3), (7.4) выражения для токов (7.5), (7.6), с учетом соотношения (7.2) получаем уравнение, связывающее выходное и входное напряжения:

$$U_{ВЫХ} - \frac{R_1}{R_1 + R_2}(U_{ВХ} - U_{ВЫХ}) = \frac{R_3}{R_3 + R_4} U_{ВЫХ}. \tag{7.7}$$

После преобразования соотношения (7.7) получим формулу для коэффициента усиления:

$$K_U = \frac{U_{ВЫХ}}{U_{ВХ}} = \frac{1 + R_3/R_4}{(R_3/R_4) - (R_1/R_2)}. \tag{7.8}$$

Выражение (7.8) является общим, так как из него могут быть получены известные соотношения коэффициентов усиления по напряжению для инвертирующего и неинвертирующего усилителей. При $R_4 = \infty$ (разомкнута положительная обратная связь) находим коэффициент усиления для инвертирующего усилителя:

$$K_U^- = -R_2/R_1; \tag{7.9}$$

при $R_2 = \infty$ (разомкнута отрицательная обратная связь) получаем коэффициент усиления для неинвертирующего усилителя:

$$K_U^+ = 1 + R_4/R_3\,. \tag{7.10}$$

Усилитель устойчиво работает при отрицательных значениях K_U, т.е. условие устойчивой работы определяется неравенством

$$R_1/R_2 > R_3/R_4\,. \tag{7.11}$$

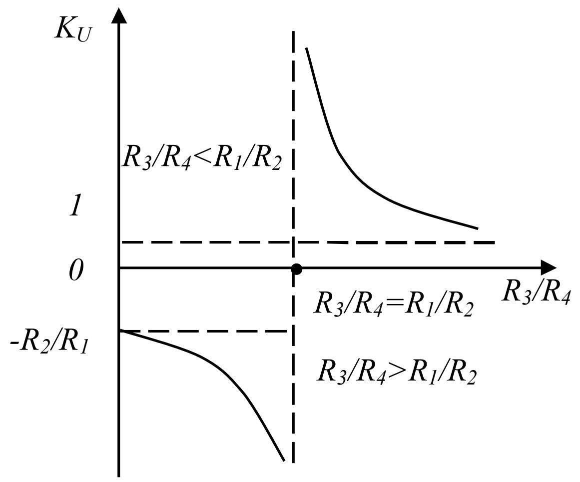

Рис.7.2. Зависимость коэффициента усиления по напряжению от параметров схемы

Для повышения коэффициента усиления K_U желательны малые значения знаменателя формулы (7.8), но при этом необходимо учитывать, что под действием дестабилизирующих факторов или стандартных отклонений параметров сопротивлений может нарушиться неравенство (7.11). На рис. 7.2 показана зависимость K_U от отношений R_3/R_4 при $R_1/R_2 = \mathrm{const}$.

Коэффициент усиления при

$$R_1/R_2 = R_3/R_4 \tag{7.12}$$

принимает неопределенное значение $(\pm\infty)$, т.е. имеет место разрыв функции. В области, где $K_U < 0$, с уменьшением отношения R_3/R_4 абсолютная величина K_U уменьшается и при $R_3/R_4 = 0$ модуль достигает наименьшего значения, определяемого выражением (7.9). При $R_3/R_4 > R_1/R_2$ усилитель неработоспособен. Поэтому область исследования задается неравенством (7.11).

7.2. Эмпирическая модель усилителя

В качестве выходной величины (отклика) примем коэффициент усиления по напряжению, в качестве факторов – сопротивления отрицательной и положительной обратных связей R_1, R_2, R_3, R_4. Из других возможных факторов на коэффициент усиления K_U может оказывать влияние напряжение питания $E = \pm 15$ B. Предварительный однофакторный эксперимент показал, что при отклонениях напряжения питания на $\pm 10\%$ от номинального значения коэффициент усиления практически не изменяется.

Целью эксперимента является построение экспериментальной зависимости $K_U = f(R_1, R_2, R_3, R_4)$. Получение такой зависимости диктуется тем, что при построении теоретической зависимости (7.8) принималось допущение об идеальности операционного усилителя К140УД6, на котором собран усилитель напряжения.

По результатам экспериментального исследования можно оценить, на сколько реальный коэффициент усиления K_U отличается от теоретического и в каких пределах он будет изменяться при отклонении факторов R_1, R_2, R_3, R_4 от их номинальных значений.

В процессе эксперимента коэффициент усиления определяется как отношение выходного и входного напряжений по формуле (7.2). Оба напряжения измеряются комбинированным цифровым прибором Щ4310. Согласно паспортным данным основная относительная погрешность δ_0 измерения постоянного напряжения определяется в процентах выражением

$$\delta_0 = \pm\left[0{,}5 + 0{,}5\left(\frac{U_N}{U_X} - 1\right)\right], \tag{7.13}$$

где U_N – предел измерения; U_X – измеренное значение.

Кроме основной, имеет место дополнительная погрешность, обусловленная отклонениями температуры и напряжения питания от номинальных значений. Дополнительная погрешность используемого прибора согласно паспортным данным может составлять

$$\delta_Д = 1{,}5\delta_0. \tag{7.14}$$

Таким образом, общая погрешность средства измерения

$$\delta = \delta_0 + \delta_Д. \tag{7.15}$$

Входное сопротивление R_{BX} прибора при измеряемых напряжениях 2 мВ – 20 В $R_{BX} \geq 100$ МОм. Входное напряжение постоянного тока $U_{BX} = 13$ мВ снимается с источника ВСП-50. Величины варьируемых сопротивлений устанавливаются с помощью измерительных магазинов сопротивления Р33 с погрешностью (%)

$$\delta_R = \pm\left[0{,}2 + 6 \cdot 10^{-6}\left(\frac{R_N}{R_X} - 1\right)\right], \tag{7.16}$$

где R_N – наибольшее значение сопротивления магазина (100кОм); R_X – номинальное значение включенного сопротивления.

Выбор интервалов варьирования и кодирование факторов. Интервалы варьирования факторов определяются в предварительном эксперименте из условия существенного (на 30 – 40%) изменения отклика – коэффициента усиления. Заданное изменение отклика имеет место при изменении сопротивлений примерно на 10% от номинального значения. В качестве номиналов сопротивлений приняты их значения, соответствующие $K_U = -92{,}5$. Номинальные значения (основные уровни) факторов и интервалы их варьирования представлены в табл. 7.1.

Таблица 7.1

Условия эксперимента

Уровень варьируемых факторов	Кодовое обозначение	R_1, кОм	R_2, кОм	R_3, кОм	R_4, кОм
		X_1	X_2	X_3	X_4
Нижний уровень	–1	9,5	470	9	1000
Верхний уровень	+1	10,5	530	11	1200
Основной уровень	0	10	500	10	1100
Интервал варьирования	ΔX_u	0,5	30	1	100

План и результаты эксперимента. В предварительном эксперименте выяснено, что взаимодействие факторов $X_1X_3X_4$, т.е. коэффициент b_{134}, является статистически незначимым. Поэтому в качестве плана эксперимента можно принять план ДФЭ 2^{4-1} с генерирующим соотношением $X_2 = -X_1X_3X_4$. При этом определяющий контраст имеет вид $1 = -X_1X_2X_3X_4$. Такой контраст обеспечивает смешивание линейных эффектов с эффектами тройных взаимодействий и парных взаимодействий между собой. Так как тройные взаимодействия обычно статистически незначимы, то принимаемый ДФЭ 2^{4-1} следует считать допустимым. План и результаты измерения отклика $|K_u| = y = U_{ВЫХ}/U_{ВХ}$ представлены в табл. 7.2.

Обработка результатов ДФЭ 2^{4-1}. Результаты эксперимента, т.е. значения коэффициента усиления, получены делением выходного напряжения (показания вольтметра) на входное напряжение $U_{ВХ} = 13$ мВ. Повторные измерения дают тот же результат, поэтому в каждой строке плана проводится одно измерение отклика. Дисперсию воспроизводимости в таком случае следует определять по метрологическим характеристикам средства измерения. Основную и дополнительную погрешности измерения вольтметра Щ4310 определяем по формулам (7.13) – (7.15). В эксперименте выходное напряжение измерялось на пределе $U_N = 2$ В и составляло $U_{ВЫХ} \approx 1 \div 1{,}5$ В. Следовательно, основная относительная погрешность прибора $\delta_0 = \pm 1\%$, дополнительная $\delta_Д = 1{,}5\delta_0 = \pm 1{,}5\%$, общая погрешность $\delta = 2{,}5\%$.

Таблица 7.2

План и результаты ДФЭ 2^{4-1}

Номер опыта	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_1X_3	X_2X_3	X_3X_4	y	$\tilde{y}$	$y-\tilde{y}$
1	+	–	+	–	–	+	–	+	110,0	110,7	-0,7
2	+	+	–	–	–	–	+	+	73,8	74,1	-0,3
3	+	–	–	+	–	–	–	–	107,6	107,7	-0,1
4	+	+	+	+	–	+	+	–	112,3	11,5	0,8
5	+	–	–	–	+	+	+	–	77,7	76,5	1,2
6	+	+	+	–	+	–	–	–	80,0	80,3	-0,3
7	+	–	+	+	+	–	+	+	113,8	113,9	-0,1
8	+	+	–	+	+	+	–	+	76,5	77,3	-0,8
9	–	0	0	0	0	0	0	0	91,5	94,0	-2,5

Абсолютная погрешность измерения $\Delta U = \delta U_X / 100\%$, где U_X – максимальное значение выходного напряжения. В нашем случае $\Delta U = \pm 0{,}04$ В. Для доверительной вероятности $P_Д = 0{,}95$ величина доверительного интервала $|\Delta U| = 2S_U$, где S_U – ошибка воспроизводимости результата измерения выходного напряжения. Отсюда $S_U = 0{,}02$ В.

Коэффициент усиления определяется косвенным методом, поэтому среднее квадратическое отклонение результата измерения – ошибка эксперимента $S(y)$ – вычисляется по формуле

$$S(y) = K_U^0 \frac{S_U}{U_{ВЫХ}^0} = \frac{S_U}{U_{ВХ}} \qquad (7.17)$$

и составляет $S(y) \approx 1{,}5$.

Значения коэффициентов уравнения регрессии

$$\tilde{y} = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 + b_4X_4 + \\ + b_{13}X_1X_3 + +b_{23}X_2X_3 + b_{34}X_3X_4 \qquad (7.18)$$

вычисляются по формуле (6.14). Расчеты дают следующие результаты:

$$b_0 = 94;\quad b_1 = -8{,}2;\quad b_2 = 10{,}1;\quad b_3 = 8{,}6;\quad b_4 = -7{,}0;$$

$$b_{13} = 0{,}15;\quad b_{23} = 0{,}44;\quad b_{34} = -0{,}44.$$

Ошибка определения коэффициентов b_u вычисляется по формуле (6.19) и составляет

$$S_b = S(y)\big/\sqrt{N} = 1{,}5\big/\sqrt{8} \approx 0{,}5\,.$$

Для выявления значимости коэффициентов уравнения регрессии строим доверительный интервал шириной

$$2\Delta b = t_T S_b = 1{,}86 \cdot 0{,}5 = 0{,}93\,.$$

Табличное значение *t*-критерия Стьюдента определяем для уровня значимости $\alpha = 0{,}05$ и числа степеней свободы $d.f = N = 8$.

Коэффициенты, характеризующие взаимодействие факторов, оказались статистически незначимыми, поэтому уравнение регрессии имеет вид

$$\tilde{y} = 94 - 8{,}2X_1 + 10{,}1X_2 + 8{,}6X_3 - 7X_4\,. \qquad (7.19)$$

Из уравнения (7.19) видно, что коэффициент усиления убывает с увеличением сопротивлений R_1, R_4 и возрастает с увеличением R_2, R_3, что согласуется с теоретической формулой (7.8).

Проверим адекватность полученной математической модели (7.19) результатам эксперимента. Расчетные значения $\tilde{y}$ и разности $y - \tilde{y}$ приведены в табл. 7.2. Дисперсия адекватности (6.23)

$$S^2_{ад} = \frac{1}{8-4}\sum_{i=1}^{N}\left(\bar{y}_i - \tilde{y}_i\right)^2 = 0{,}85;$$

дисперсия воспроизводимости

$$S^2(y) = 1{,}5^2 = 2{,}25;$$

т.к. числовое значение дисперсии воспроизводимости больше числового значения дисперсии адекватности, расчетное значение критерия Фишера определяется по формуле

$$F = \frac{S^2(y)}{S^2_{ад}} = \frac{2{,}25}{0{,}85} = 2{,}647\,.$$

Для $d.f_1 = 8 - 4 = 4$; $d.f_2 = 8$ и $\alpha = 0{,}05$ критическое значение $F_T = 3{,}838$. Так как $F \le F_T$, то уравнение (7.19) адекватно описывает функцию отклика.

По полученной модели могут быть вычислены коэффициенты влияния (чувствительности) факторов на коэффициент усиления и определены числовые характеристики K_U как случайной величины в зависимости от разброса сопротивлений резисторов. Для этого в уравнении (7.19) необходимо перейти от кодированных факторов к физическим переменным. Тогда

$$\tilde{y} = 94 - 8{,}2\frac{R_1 - R_1^0}{\Delta R_1} + 10{,}1\frac{R_2 - R_2^0}{\Delta R_2} + 8{,}6\frac{R_3 - R_3^0}{\Delta R_3} - 7\frac{R_4 - R_4^0}{\Delta R_4}, \qquad (7.20)$$

где R_u^0 – основные уровни (номиналы) сопротивлений; ΔR_u – их интервалы варьирования.

Подставляя числовые значения R_u^0 и ΔR_u в уравнение (7.20), получим

$$\tilde{y} = 80{,}7 - 1640 \cdot 10^{-5} R_1 + 33{,}7 \cdot 10^{-5} R_2 + 860 \cdot 10^{-5} R_3 - 7 \cdot 10^{-5} R_4, \quad (7.21)$$

или в общем виде

$$\tilde{y} = a_0 + a_1 R_1 + a_2 R_2 + a_3 R_3 + a_4 R_4. \qquad (7.22)$$

В последнем уравнении a-коэффициенты в отличие от b-коэффициентов уравнения (7.19) являются размерными величинами (Ом$^{-1}$).

Из уравнения (7.21) видно, что наибольшее влияние на коэффициент усиления оказывают сопротивления R_1, R_3. Практический интерес представляют относительные коэффициенты влияния или чувствительности коэффициента усиления к изменению сопротивлений R_1, R_2, R_3, R_4, которые вычисляются по формуле

$$B_u = \left(\frac{\Delta\tilde{y}}{\tilde{y}_0}\right) \Big/ \left(\frac{\Delta R_u}{R_u^0}\right) = \frac{a_u}{\tilde{y}_0} R_u^0 \quad (u = 1, 2, 3, 4).$$

Для рассматриваемого примера $|B_1| \approx |B_2| = 2$; $|B_3| \approx |B_4| = 1$. По уравнению модели можно исследовать параметрическую надежность и строить допуск на выходной параметр – коэффициент усиления по напряжению. Эмпирическая модель больше соответствует реальной действительности, но выводы на основе такой модели справедливы только в области эксперимента, задаваемой интервалами варьирования факторов.

Библиографический список

1. Основы планирования научно-исследовательского эксперимента/ М. Аугамбаев, А.З. Иванов, Ю.И. Терехов; под ред. Г.М. Рудакова. – Ташкент: Укитувчи, 2004. – 336 с.

2. *Рогов В.А., Поздняк Г.Г.* Методика и практика технических экспериментов: учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений /В.А. Рогов, Г.Г. Поздняк. – М.: Издательский центр «Академия», 2005. – 288 с.

3. Исследование устройств и систем автоматики методом планирования эксперимента/ А.Е. Егоров, Г.Н. Азаров, А.В. Коваль; под ред. В.Г. Воронова. – Харьков: Вища шк., 1986. – 240 с.

Приложение 1

Ординаты нормального распределения

$$p(t) = \left(\sqrt{2\pi}\right)^{-1} \exp\left(-t^2/2\right)$$

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3988	0,3987	0,3986	0,3984	0,3982	0,3979	0,3976	0,3973
0,1	0,3969	0,3965	0,3960	0,3955	0,3950	0,3944	0,3938	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3189	0,3885	0,3876	0,3866	0,3856	0,3846	0,3836	0,3825
0,3	0,3813	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3711	0,3697
0,4	0,3682	0,3667	0,3652	0,3637	0,3621	0,3605	0,3588	0,3572	0,3655	0,3538
0,5	0,3520	0,3502	0,3484	0,3466	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3371	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3291	0,3271	0,3250	0,3229	0,3208	0,3187	0,3165	0,3144
0,7	0,3122	0,3100	0,3078	0,3056	0,3033	0,3011	0,2988	0,2965	0,2943	0,2920
0,8	0,2896	0,2873	0,2850	0,2826	0,2803	0,2779	0,2756	0,2732	0,2708	0,2684
0,9	0,2660	0,2636	0,2612	0,2588	0,2564	0,2540	0,2516	0,2492	0,2468	0,2443
1,0	0,2419	0,2395	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2178	0,2154	0,2130	0,2106	0,2083	0,2059	0,2035	0,2012	0,1988	0,1965
1,2	0,1941	0,1918	0,1895	0,1874	0,1849	0,1826	0,1803	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1713	0,1691	0,1689	0,1647	0,1625	0,1603	0,1582	0,1560	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1455	0,1435	0,1414	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1314
1,5	0,1295	0,1275	0,1256	0,1237	0,1218	0,1200	0,1181	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1091	0,1074	0,1056	0,1036	0,1022	0,1005	0,0989	0,0972	0,0956
1,7	0,0940	0,0924	0,0908	0,0893	0,0878	0,0862	0,0847	0,0832	0,0818	0,0804
1,8	0,0789	0,0775	0,0761	0,0747	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0615	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0450
2,1	0,0439	0,0430	0,0421	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0370	0,0363
2,2	0,0365	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0296	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0271	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0240	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0188	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0135	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0059	0,0058	0,0056	0,0054	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0041	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,001	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001

Приложение 2

Значения критерия Пирсона (χ^2 - критерия)

Число степеней свободы *d.f.*	Уровень значимости α					
	0,25	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005
1	1,323	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879
2	2,773	4,605	5,991	7,378	9,210	10,597
3	4,108	6,251	7,815	9,348	11,345	12,838
4	5,385	7,779	9,488	11,143	13,277	14,860
5	6,626	9,236	11,071	12,833	15,086	16,750
6	7,841	10,645	12,592	14,449	16,812	18,548
7	9,037	12,017	14,067	16,013	18,475	20,278
8	10,219	13,362	15,507	17,535	20,090	21,955
9	11,389	14,684	16,919	19,023	21,666	23,589
10	12,549	15,987	18,307	20,483	23,209	25,188
11	13,701	17,275	19,675	21,920	24,725	26,757
12	14,845	18,549	21,026	23,337	26,217	28,299
13	15,984	19,812	22,362	24,736	27,688	29,819
14	17,117	21,064	23,685	26,119	29,141	31,319
15	18,245	22,307	24,996	27,488	30,578	32,801
16	19,369	23,542	26,296	28,845	32,000	34,267
17	20,489	24,769	27,587	30,191	33,409	35,718
18	21,605	25,989	28,869	31,526	34,805	37,156
19	22,718	27,204	30,144	32,852	36,191	38,582
20	23,828	28,412	31,410	34,170	37,566	39,997
21	24,935	29,615	32,671	35,479	38,932	41,401
22	26,039	30,813	33,924	36,781	40,289	42,796
23	27,141	32,007	35,172	38,076	41,638	44,181
24	28,241	33,196	36,415	39,364	42,980	45,559
25	29,339	34,382	37,652	40,646	44,314	46,928
26	30,435	35,563	38,885	41,923	45,642	48,290
27	31,528	36,741	40,113	43,194	46,963	49,645
28	32,620	37,916	41,337	44,461	48,278	50,993
29	33,711	39,087	42,557	45,722	49,588	52,336
30	34,800	40,256	43,773	46,979	50,892	53,672
40	45,616	51,805	55,758	59,342	63,691	66,766
50	56,334	63,167	67,505	71,420	76,154	79,490
60	66,981	74,397	79,082	83,298	88,379	91,952
70	77,577	85,527	90,531	95,023	104,43	104,22
80	88,130	96,578	101,88	106,63	112,33	116,32
90	98,650	107,57	113,15	118,14	124,12	128,30
100	109,14	118,50	124,34	129,56	135,81	140,17

Приложение 3

Интеграл вероятностей

$$\boldsymbol{\Phi(t)=\left(\sqrt{2\pi}\right)^{-1}\cdot\int_{-t}^{t}\exp\left(-t^2/2\right)dt}$$

Определяет вероятность попадания случайной величины t, подчиненной нормальному закону, в симметричный интервал $[-t;\ t]$.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0080	0,0159	0,0239	0,0319	0,0399	0,0478	0,0558	0,0638	0,0717
0,1	0,0797	0,0876	0,0955	0,1034	0,1113	0,1192	0,1271	0,1350	0,1428	0,1507
0,2	0,1585	0,1663	0,1741	0,1819	0,1897	0,1974	0,2051	0,2128	0,2205	0,2282
0,3	0,2358	0,2434	0,2510	0,2586	0,2661	0,2737	0,2812	0,2886	0,2960	0,3035
0,4	0,3108	0,3182	0,3255	0,3328	0,3401	0,3473	0,3545	0,3616	0,3688	0,3759
0,5	0,3829	0,3900	0,3969	0,4039	0,4108	0,4177	0,4245	0,4313	0,4381	0,4448
0,6	0,4515	0,4581	0,4647	0,4713	0,4778	0,4843	0,4908	0,4971	0,5035	0,5098
0,7	0,5161	0,5223	0,5285	0,5346	0,5407	0,5468	0,5527	0,5587	0,5646	0,5705
0,8	0,5763	0,5821	0,5878	0,5935	0,5991	0,6047	0,6102	0,6157	0,6211	0,6265
0,9	0,6319	0,6372	0,6424	0,6476	0,6528	0,6579	0,6629	0,6680	0,6729	0,6778
1,0	0,6827	0,6875	0,6923	0,6970	0,7017	0,7063	0,7109	0,7154	0,7199	0,7243
1,1	0,7287	0,7330	0,7373	0,7415	0,7457	0,7499	0,7539	0,7580	0,7620	0,7660
1,2	0,7699	0,7737	0,7775	0,7813	0,7850	0,7887	0,7923	0,7959	0,7994	0,8030
1,3	0,8064	0,8098	0,8132	0,8165	0,8197	0,8230	0,8262	0,8293	0,8324	0,8355
1,4	0,8385	0,8415	0,8444	0,8473	0,8501	0,8529	0,8557	0,8584	0,8611	0,8638
1,5	0,8664	0,8689	0,8715	0,8740	0,8764	0,8789	0,8812	0,8836	0,8859	0,8882
1,6	0,8904	0,8926	0,8948	0,8969	0,8990	0,9011	0,9031	0,9051	0,9070	0,9090
1,7	0,9109	0,9127	0,9146	0,9164	0,9178	0,9199	0,9216	0,9233	0,9249	0,9266
1,8	0,9281	0,9297	0,9312	0,9328	0,9342	0,9357	0,9371	0,9385	0,9399	0,9412
1,9	0,9426	0,9439	0,9451	0,9464	0,9476	0,9488	0,9500	0,9512	0,9523	0,9534
2,0	0,9545	0,9556	0,9566	0,9576	0,9586	0,9596	0,9606	0,9616	0,9625	0,9634
2,1	0,9643	0,9651	0,9660	0,9668	0,9676	0,9684	0,9692	0,9700	0,9707	0,9715
2,2	0,9722	0,9729	0,9736	0,9742	0,9749	0,9756	0,9762	0,9768	0,9774	0,9780
2,3	0,9786	0,9791	0,9797	0,9802	0,9807	0,9812	0,9817	0,9822	0,9827	0,9832
2,4	0,9836	0,9840	0,9845	0,9849	0,9853	0,9857	0,9861	0,9865	0,9869	0,9872
2,5	0,9876	0,9879	0,9883	0,9886	0,9890	0,9892	0,9895	0,9898	0,9901	0,9904
2,6	0,9907	0,9910	0,9912	0,9915	0,9917	0,9920	0,9922	0,9924	0,9926	0,9928
2,7	0,9931	0,9933	0,9935	0,9937	0,9939	0,9940	0,9942	0,9944	0,9946	0,9947
2,8	0,9949	0,9950	0,9952	0,9954	0,9955	0,9956	0,9958	0,9959	0,9960	0,9962
2,9	0,9963	0,9964	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972
3,0	0,9973	0,9974	0,9975	0,9976	0,9976	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980

Приложение 4

Значения критерия Стьюдента (*t*-критерия)

Число степеней свободы *d.f.*	Уровень значимости α					
	0,3	0,2	0,1	0,05	0,01	0,001
1	0,727	1,376	3,078	6,314	31,82	318,3
2	0,617	1,061	1,886	2,920	6,965	22,33
3	0,584	0,978	1,638	2,353	4,541	10,22
4	0,569	0,941	1,533	2,132	3,747	7,173
5	0,559	0,920	1,476	2,015	3,365	5,894
6	0,553	0,906	1,440	1,943	3,143	5,208
7	0,549	0,896	1,415	1,895	2,998	4,785
8	0,546	0,889	1,397	1,860	2,896	4,501
9	0,543	0,883	1,383	1,833	2,821	4,297
10	0,542	0,879	1,372	1,812	2,764	4,144
11	0,540	0,876	1,363	1,796	2,718	4,025
12	0,539	0,873	1,356	1,782	2,681	3,930
13	0,538	0,870	1,350	1,771	2,650	3,852
14	0,537	0,868	1,345	1,761	2,624	3,787
15	0,536	0,866	1,341	1,753	2,602	3,733
16	0,535	0,865	1,337	1,746	2,583	3,686
17	0,534	0,863	1,333	1,740	2,567	3,646
18	0,534	0,862	1,330	1,734	2,552	3,610
19	0,533	0,861	1,328	1,729	2,539	3,579
20	0,533	0,860	1,325	1,725	2,528	3,552
21	0,532	0,859	1,323	1,721	2,518	3,527
22	0,532	0,858	1,321	1,717	2,508	3,505
23	0,532	0,858	1,319	1,714	2,500	3,485
24	0,531	0,857	1,318	1,711	2,492	3,467
25	0,531	0,856	1,316	1,708	2,485	3,450
26	0,531	0,856	1,315	1,706	2,479	3,435
27	0,531	0,855	1,314	1,703	2,473	3,421
28	0,530	0,855	1,313	1,701	2,467	3,408
29	0,530	0,854	1,311	1,699	2,462	3,396
30	0,530	0,854	1,310	1,697	2,457	3,385
40	0,529	0,851	1,303	1,984	2,423	3,307
50	0,528	0,849	1,299	1,676	2,403	3,261
60	0,527	0,848	1,296	1,671	2,390	3,232
80	0,527	0,846	1,292	1,664	2,374	3,195
100	0,526	0,845	1,290	1,660	2,365	3,174
200	0,525	0,843	1,286	1,653	2,345	3,131
500	0,525	0,842	1,283	1,648	2,334	3,107
∞	0,524	0,842	1,282	1,645	2,326	3,090

Приложение 5

Значения критерия Фишера (*F*- критерия)

Значения приведены для уровня значимости $\alpha = 0{,}05$.

$d.f_2$	$d.f_1$									
	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	238,9	243,9	249,0	254,3
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,45	19,50
3	10,13	9,557	9,277	9,117	9,013	8,941	8,845	8,744	8,638	8,526
4	7,709	6,944	6,591	6,388	6,256	6,163	6,041	5,912	5,774	5,628
5	6,608	5,786	5,409	5,192	5,050	4,950	4,818	4,678	4,527	4,365
6	5,987	5,143	4,757	4,534	4,387	4,284	4,147	4,000	3,841	3,669
7	5,591	4,737	4,347	4,120	3,972	3,866	3,726	3,575	3,410	3,230
8	5,318	4,459	4,066	3,838	3,688	3,581	3,438	3,284	3,115	2,928
9	5,117	4,256	3,863	3,633	3,482	3,374	3,230	3,073	2,900	2,707
10	4,965	4,103	3,708	3,478	3,326	3,217	3,072	2,913	2,737	2,538
11	4,844	3,982	3,587	3,357	3,204	3,095	2,948	2,788	2,609	2,404
12	4,747	3,885	3,490	3,259	3,106	2,996	2,849	2,687	2,505	2,296
13	4,667	3,806	3,411	3,197	3,025	2,915	2,767	2,604	2,420	2,206
14	4,600	3,739	3,344	3,112	2,958	2,848	2,699	2,534	2,349	2,131
15	4,543	3,682	3,287	3,056	2,901	2,790	2,641	2,475	2,288	2,066
16	4,494	3,634	3,239	3,007	2,852	2,741	22,591	2,425	2,235	2,010
17	4,451	3,592	3,197	2,965	2,810	2,699	2,548	2,381	2,190	1,960
18	4,414	3,555	3,160	2,928	2,773	2,661	2,510	2,342	2,150	1,917
19	4,381	3,522	3,127	2,895	2,740	2,628	2,477	2,308	2,114	1,878
20	4,351	3,493	3,098	2,866	2,711	2,599	2,447	2,278	2,082	1,843
21	4,325	3,467	3,077	2,840	2,685	2,573	2,420	2,250	2,054	1,811
22	4,301	3,443	3,049	2,817	2,661	2,549	2,397	2,226	2,028	1,783
23	4,279	3,422	3,028	2,796	2,640	2,528	2,375	2,204	2,005	1,757
24	4,260	3,403	3,009	2,777	2,621	2,508	2,355	2,183	1,984	1,733
25	4,242	3,385	2,991	2,759	2,603	2,490	2,337	2,165	1,964	1,711
26	4,225	3,369	2,975	2,743	2,587	2,474	2,321	2,148	1,946	1,691
27	4,210	3,354	2,960	2,728	2,572	2,459	2,305	2,132	1,930	1,672
28	4,196	3,340	2,947	2,714	2,558	2,445	2,291	2,118	1,915	1,654
29	4,183	3,328	2,934	2,701	2,545	2,432	2,278	2,104	1,901	1,638
30	4,171	3,316	2,922	2,690	2,534	2,421	2,266	2,092	1,887	1,622
40	4,085	3,232	2,839	2,606	2,449	2,336	2,180	2,003	1,793	1,509
60	4,001	3,150	2,758	2,525	2,368	2,254	2,097	1,917	1,700	1,389
120	3,920	3,072	2,680	2,447	2,290	2,175	2,016	1,834	1,608	1,254
∞	3,841	2,996	2,605	2,372	2,214	2,098	1,938	1,752	1,517	1,000

Приложение 6

Значение критерия Кохрена (G-критерия)

Значения приведены для уровня значимости $\alpha = 0{,}05$.

$d.f_2$	$d.f_1$							
	1	2	3	4	5	6	7	8
2	0,9985	0,9750	0,9392	0,9057	0,8772	0,8534	0,8332	0,8159
3	0,9669	0,8709	0,7977	0,7457	0,7771	0,6771	0,6530	0,6333
4	0,9065	0,7679	0,7841	0,6287	0,5895	0,5598	0,5365	0,5175
5	0,8412	0,6838	0,5981	0,5441	0,5665	0,4783	0,4564	0,4387
6	0,7808	0,6161	0,5321	0,4803	0,4447	0,4184	0,3980	0,3817
7	0,7271	0,5612	0,4800	0,4307	0,3974	0,3726	0,3535	0,3384
8	0,6798	0,5157	0,4377	0,3910	0,3595	0,3362	0,3185	0,3040
9	0,6385	0,4775	0,4027	0,3584	0,3286	0,3067	0,2901	0,2768
10	0,6020	0,4450	0,3733	0,3311	0,3029	0,2823	0,2666	0,2541
12	0,5410	0,3924	0,3264	0,2880	0,2624	0,2439	0,2299	0,2187

Приложение 7

Фрагмент таблицы случайных чисел

56	66	25	32	38	64	70	26	27	67	77	40	04	34	63	98	99	89	31	16	12	90	50	28	96
88	40	52	02	29	82	69	34	50	21	74	00	91	27	52	98	72	03	45	65	30	89	71	45	91
87	63	88	23	62	51	07	69	59	02	89	49	14	98	53	41	92	36	07	76	85	37	84	37	47
32	25	21	15	08	82	34	57	57	35	22	03	33	48	84	37	37	29	38	37	89	76	25	09	69
44	61	88	23	13	01	59	47	64	04	99	59	96	20	30	87	31	33	69	45	58	48	00	83	48
94	44	08	67	79	41	61	41	15	60	11	88	83	24	82	24	07	78	61	89	42	58	88	22	16
13	24	40	09	00	65	46	38	61	12	90	62	41	11	59	85	18	42	61	29	88	76	04	21	80
78	27	84	05	99	85	75	67	80	05	57	05	71	70	31	31	99	99	06	96	53	99	25	13	63
42	39	30	02	34	99	46	68	45	15	19	74	15	50	17	44	80	19	86	38	40	45	82	13	44
04	52	43	96	38	13	83	80	72	34	20	84	56	19	49	59	14	85	42	99	71	16	34	33	79
82	85	77	30	16	69	32	46	46	30	84	20	68	72	98	94	62	63	59	44	00	89	06	15	87
38	48	84	88	24	58	46	48	60	06	90	08	83	83	98	40	90	88	25	26	85	74	55	80	85
91	19	05	68	22	58	04	63	21	16	23	38	25	43	32	98	94	65	35	35	16	91	07	12	43
54	81	87	21	31	40	46	17	62	63	99	71	14	12	64	51	68	50	60	78	22	69	51	98	37
65	43	75	12	91	20	36	25	57	92	33	65	95	48	75	00	06	65	25	90	16	29	34	14	43
49	98	71	31	80	59	57	32	43	07	85	06	64	75	27	29	17	06	11	30	78	70	97	87	21
03	98	68	89	39	71	87	32	14	99	42	10	25	37	30	08	27	75	43	97	54	20	69	93	50
56	04	21	34	92	89	81	52	15	12	84	11	12	66	87	48	21	06	86	08	35	39	52	28	09
48	09	36	95	20	82	95	36	53	89	92	68	50	88	17	37	92	02	23	43	63	24	69	80	90
23	97	10	96	57	74	07	95	26	44	93	08	43	30	41	86	45	74	33	78	84	33	38	76	73
43	97	55	45	98	35	68	45	96	80	46	36	99	96	33	60	20	73	30	79	17	19	03	47	28
40	05	08	50	79	89	58	19	86	48	27	98	99	24	08	94	19	15	81	29	82	14	35	88	03
66	97	10	69	02	25	36	43	71	76	00	67	56	12	69	07	89	55	63	31	50	72	20	33	36
15	62	38	72	92	03	76	09	30	75	77	80	04	24	54	67	60	10	79	26	21	60	03	48	14
77	21	15	14	47	55	24	22	20	55	36	93	67	69	37	72	22	43	46	32	56	15	75	25	12
18	87	05	09	96	46	14	72	41	46	12	67	46	72	08	59	06	17	49	12	73	28	23	59	48
08	58	53	63	13	07	04	48	71	39	07	46	96	40	20	86	79	11	81	74	11	15	23	17	45
16	07	79	57	61	42	19	68	15	12	60	21	59	12	07	04	99	88	22	39	75	16	69	13	84

Учебное издание

Ирина Анатольевна Реброва

ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

Учебное пособие

* * *

Редактор И.Г. Кузнецова

* * *

Подписано к печати 10.02.2010
Формат $60 \times 90\ ^1/_{16}$. Бумага писчая
Оперативный способ печати
Гарнитура Times New Roman
Усл. п .л. 6,75, уч.-изд. л. 4,8
Тираж 100 экз. Заказ № ____
Цена договорная

Издательство СибАДИ
644099, г. Омск, ул. П. Некрасова, 10

Отпечатано в подразделении ОП издательства СибАДИ
644099, г. Омск, ул. П. Некрасова, 10