

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА
ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ

Г. Д. Гефан, Н. К. Ширяева

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЭКСПЕРИМЕНТА

Учебное пособие

ИРКУТСК 2017

УДК 519.2
ББК 22.171
Г 45

Рекомендовано к изданию редакционным советом ИрГУПС

Рецензенты:

Р. Х. Ахатов, канд. техн. наук, доцент, директор института авиационного машиностроения и транспорта ИРНТУ;

Е. Д. Молчанова, канд. техн. наук, доцент, завкафедрой «Управление качеством и инженерная графика» ИрГУПС

Гефан Г. Д., Ширяева Н. К.

Г 45 Основы теории эксперимента : учеб. пособие / Г. Д. Гефан, Н. К. Ширяева. – Иркутск : ИрГУПС, 2017. – 136 с.

В учебном пособии изложены методы, модели и приемы, позволяющие планировать эксперименты, проводить обработку и анализ их результатов. Теоретический материал сопровождается большим количеством примеров и задач с решениями.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки 27.04.02 «Управление качеством».

УДК 519.2
ББК 22.171

© Гефан Г. Д., Ширяева Н. К., 2017
© Иркутский государственный университет
путей сообщения, 2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Тема 1. Некоторые сведения из теории случайных погрешностей и математической статистики	6
1.1. Эксперимент. Измерение	6
1.2. Погрешности измерений и их классификация.....	6
1.3. Погрешности как случайные величины.....	8
1.4. Нормальный закон распределения случайных погрешностей	9
1.5. Доверительный интервал для оценки погрешности однократного измерения	12
1.6. Доверительный интервал для оценки погрешности серии измерений при известном σ	13
1.7. Доверительный интервал для оценки погрешности серии измерений при неизвестном σ	14
1.8. Планирование числа измерений	15
1.9. Исключение грубых промахов	16
<i>Примеры выполнения заданий на компьютере: математическая обработка экспериментальных данных, оценка погрешностей</i>	<i>18</i>
Тема 2. Сравнение эмпирических распределений с помощью проверки статистических гипотез	21
2.1. Статистические гипотезы. Принципы проверки гипотез....	21
2.2. Сравнение средних.....	23
2.3. Ранговый критерий Уилкоксона.....	25
2.4. Критерий согласия Пирсона.....	28
<i>Примеры выполнения заданий на компьютере: проверка статистических гипотез как метод обработки экспериментальных данных</i>	<i>30</i>
Тема 3. Сравнение дисперсий. Дисперсионный анализ	33
3.1. Сравнение выборочной дисперсии с известной дисперсией генеральной совокупности	33
3.2. Сравнение двух выборочных дисперсий	34
3.3. Понятие о дисперсионном анализе. Виды дисперсии	36
3.4. Гипотеза о значимости фактора. Число степеней свободы вариации. Критерий Фишера	39
3.5. Двухфакторный дисперсионный анализ	40
<i>Примеры выполнения заданий на компьютере: дисперсионный анализ экспериментальных данных</i>	<i>44</i>
Тема 4. Корреляционный анализ	50
4.1. Корреляционная связь. Краткие сведения из теории корреляции	50

4.2. Двумерная нормальная случайная величина	53
4.3. Парный корреляционный анализ числовых данных	55
4.4. Нелинейная корреляция	58
4.5. Множественная корреляция	59
4.6. Корреляция между нечисловыми случайными величинами	60
4.7. Коэффициент автокорреляции. Корреляционная функция	61
<i>Примеры выполнения заданий на компьютере: корреляционный анализ экспериментальных данных</i>	<i>65</i>
Тема 5. Аппроксимация зависимостей	68
5.1. Основные подходы к задаче аппроксимации зависимостей	68
5.2. Интерполяционный многочлен Лагранжа	70
5.3. Конечные разности и интерполяционные формулы Ньютона	72
5.4. Краткие сведения о методе наименьших квадратов и парном регрессионном анализе	74
5.5. Адекватность модели.....	75
5.6. Множественный регрессионный анализ	76
5.7. Регрессионный анализ при наличии нелинейных зависимостей ...	78
<i>Примеры выполнения заданий на компьютере: аппроксимация зависимостей по данным измерений</i>	<i>79</i>
Тема 6. Планирование эксперимента	83
6.1. Основные понятия	83
6.2. Требования к параметрам эксперимента	85
6.3. Основы планирования многофакторного эксперимента	86
6.4. Планы первого порядка. Полный факторный эксперимент	88
6.5. Составление матрицы планирования полного факторного эксперимента	90
6.6. Порядок постановки полного факторного эксперимента	92
6.7. Проверка воспроизводимости опытов	95
6.8. Расчет оценок коэффициентов регрессионного уравнения	96
6.9. Обработка результатов полного факторного эксперимента. Проверка значимости коэффициентов регрессии	99
6.10. Проверка уравнения регрессии на адекватность.....	100
<i>Примеры выполнения заданий на компьютере: полный факторный эксперимент</i>	<i>106</i>
Тема 7. Дробный факторный эксперимент	110
7.1. Основные понятия и определения	110
7.2. Построение плана дробного факторного эксперимента	112
7.3. Обоснование выбора генерирующих соотношений	119
7.4. Выбор дробности реплик	121
<i>Примеры выполнения заданий на компьютере: дробный факторный эксперимент</i>	<i>124</i>
Библиографический список.....	126
Приложения.....	127

ПРЕДИСЛОВИЕ

Дисциплина «Основы теории эксперимента» является составной частью магистерской программы «Управление качеством». Как и в любой другой прикладной области, в вопросах управления качеством чрезвычайно важным требованием к специалисту является умение сформулировать цели исследования, правильно спланировать и реализовать эксперимент, обработать и проанализировать полученные результаты, используя доступный математический аппарат.

Цель дисциплины «Основы теории эксперимента» – формирование представлений о методах, моделях и приёмах, позволяющих планировать эксперименты, проводить обработку и анализ их результатов.

Необходимыми условиями для освоения дисциплины «Основы теории эксперимента» являются знания фундаментальных положений дисциплин «Математика», «Информатика», «Вероятностные методы и основы моделирования» (дисциплины бакалавриата). Необходимые умения: применять основные приёмы статистического метода; работать со сложными таблицами; знать возможности табличного процессора Excel в области обработки экспериментальных данных.

Отдельные разделы дисциплины в соответствии с положением о непрерывной научно-исследовательской подготовке студентов могут использоваться во всех последующих профилирующих дисциплинах данного направления, а также при написании выпускной магистерской работы.

Процесс освоения «Основ теории эксперимента» направлен на формирование следующих компетенций:

- способность формулировать цели и задачи исследования, выявлять приоритеты решения задач, выбирать и создавать критерии оценки.
- способность применять современные методы исследования, оценивать и представлять результаты выполненной работы.

Самостоятельная работа включает в себя подготовку к практическим занятиям и лабораторным работам, выполнение домашних заданий, подготовку к текущему контролю (защита лабораторных работ и тестирование), подготовку к экзамену.

Основные разделы дисциплины: теория погрешностей, математическая обработка экспериментальных данных, проверка статистических гипотез, дисперсионный, корреляционный и регрессионный анализ экспериментальных данных, планирование полного факторного и дробного факторного экспериментов.

Тема 1. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Классификация ошибок измерений. Абсолютная и относительная погрешность. Нормальное распределение погрешностей. Доверительные интервалы для оценки погрешности. Планирование числа измерений. Исключение грубых промахов.

1.1. Эксперимент. Измерение

Слово «эксперимент» переводится как «опыт» и обозначает один из главных научных методов исследования, при котором изучаемое явление воспроизводится в естественных или искусственных условиях, контролируемых и/или управляемых лицом, проводящим данное исследование. Обычно считается, что эксперимент подразумевает активное взаимодействие с изучаемым объектом (в отличие от *пассивного наблюдения*). Чаще всего целью эксперимента является установление причинных связей между явлениями. С этой целью исследователь-экспериментатор:

- воспроизводит изучаемое явление;
- изменяет условия протекания процессов, в том числе может попеременно исключать отдельные факторы;
- осуществляет математическую обработку и анализ результатов.

Одной из основных операций при проведении эксперимента является *измерение*. Пусть результатом отдельного (однократного) измерения некоторой величины является значение x_i . Тогда результатом многократных измерений является среднее значение

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i, \quad (1.1)$$

где n – число измерений (причём измерения считаются многократными уже при $n > 4$). Значение \bar{x} мы будем называть *действительным значением* измеряемой величины. Конечно, действительное значение \bar{x} в общем случае отличается от *истинного* (обычно неизвестного нам) *значения* величины, однако мы считаем, что для поставленной измерительной задачи оно может его заменить.

1.2. Погрешности измерений и их классификация

Погрешность измерений Δx есть отклонение полученного опытным путем значения x_i от истинного значения a или (чаще) действительного значения \bar{x} , которое, как уже сказано выше, заменяет неизвестное истинное значение величины:

$$\Delta x = x_i - \bar{x}. \quad (1.2)$$

Классификация погрешностей может быть проведена по различным признакам. Рассмотрим наиболее употребительные из классификаций.

1. **По форме представления** погрешность бывает *абсолютной* Δx (1.2) и *относительной* δ_x , которая, в свою очередь, определяется как отношение абсолютной погрешности к действительному (среднему) значению \bar{x} :

$$\delta_x = \Delta x / \bar{x}. \quad (1.3)$$

Формулы (1.2) и (1.3) характеризуют погрешность отдельного измерения. Как обобщающие характеристики ряда n наблюдений используются *средняя арифметическая погрешность*

$$|\overline{\Delta x}| = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}| \quad (1.4)$$

и *среднеквадратическая погрешность*

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \quad (1.5)$$

В математической статистике последняя величина называется *исправленным выборочным среднеквадратическим отклонением* (СКО), поскольку рассчитывается по так называемой *исправленной дисперсии* s^2 :

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{n}{n-1} D}, \quad (1.6)$$

где

$$D = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (1.7)$$

«неисправленная» дисперсия, являющаяся смещённой оценкой генеральной дисперсии. Величина s/\bar{x} называется *коэффициентом вариации*.

2. **По причинам появления (по происхождению)** погрешности делят на методические, инструментальные и субъективные.

3. **По связи с измеряемой величиной** погрешности подразделяют на *аддитивные* и *мультипликативные*. Первые не зависят от значения измеряемой величины (классический пример – смещение «нуля» измерительного прибора). Вторые связаны с измеряемой величиной некоторой зависимостью, например, растут вместе с ней.

4. **По характеру изменения измеряемой величины** выделяют погрешности статические и динамические. В первом случае предполагается,

что измеряемая величина не изменяется в процессе измерения (установившийся режим). Во втором случае это условие не выполняется.

5. **По характеру проявления** выделяют три вида погрешностей: систематические, случайные и грубые. *Систематическая* погрешность – это стабильное завышение или занижение измеряемой величины, сохраняющееся при её повторных измерениях. *Случайная* погрешность изменяется случайным образом при многократных измерениях величины в одних и тех же условиях (математическое ожидание случайной погрешности равно нулю). *Грубая* погрешность (грубый промах) есть разновидность случайной погрешности, проявляющейся в отдельных измерениях и существенно отличающейся от остальных погрешностей в этом ряду измерений.

Для теории измерений одной из главных задач является анализ случайных погрешностей.

1.3. Погрешности как случайные величины

Анализируя случайные погрешности $\Delta x = x_i - \bar{x}$, ($i = \overline{1, n}$), можно заметить, что при достаточно большом числе измерений n проявляются следующие закономерности, открытые ещё Галилеем:

- 1) чем больше отклонение (по модулю), тем реже оно встречается;
- 2) положительные и отрицательные отклонения встречаются приблизительно одинаково часто.

Кроме того, можно и теоретически, и практически убедиться, что среднее отклонение равно нулю:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0. \quad (1.8)$$

(Не путать с формулой (1.4), где суммируются не сами отклонения, а их модули!).

В теории вероятностей для описания поведения случайных величин (а случайная погрешность – это типичный пример случайной величины) введено понятие закона распределения. Если говорить о *непрерывной* случайной величине X , то закон её распределения можно характеризовать с помощью двух тесно связанных между собой функций – функции распределения $F(x)$ и плотности распределения вероятностей $f(x)$:

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx, \quad (1.9)$$

$$f(x) = F'(x), \quad (1.10)$$

где символ $P(\dots)$ обозначает вероятность события, описываемого выражением в скобках. Вероятность попадания непрерывной случайной величины на интервал выражается как

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx. \quad (1.11)$$

Наиболее известными и популярными числовыми характеристиками случайной величины являются математическое ожидание

$$M(X) = \int_a^b xf(x)dx \quad (1.12)$$

и дисперсия

$$D(X) = \int_a^b [x - M(X)]^2 f(x)dx. \quad (1.13)$$

Формулы записаны для случая непрерывной случайной величины.

На практике теоретический закон распределения нам обычно неизвестен. Поэтому числовые характеристики оцениваются с помощью эмпирических (опытных) распределений. Если под случайной величиной X понимать *результат измерения некоторой величины*, то оценкой $M(X)$

служит среднее значение $\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i$ (1.1), которое мы принимаем за действительное значение величины, а оценкой $D(X)$ – выборочная дисперсия D

(1.7) или исправленная дисперсия s^2 (1.6). Если же под X понимать *случайную погрешность измерения*, т. е. случайное отклонение от действительного значения величины, то $M(X)$ оказывается равным нулю (сравните с формулой (1.8)), а $D(X)$ по-прежнему будет оцениваться формулой (1.7). Это является следствием свойств математического ожидания и дисперсии:

$$M(X - C) = M(X) - C,$$

$$D(X - C) = D(X),$$

где в качестве константы C , выступает \bar{x} .

1.4. Нормальный закон распределения случайных погрешностей

Случайные погрешности чаще всего подчиняются нормальному закону распределения. Плотность распределения вероятностей нормально распределённой случайной величины определяется формулой

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad (1.14)$$

где a и σ – параметры распределения, являющиеся математическим ожиданием и среднеквадратическим отклонением (СКО) случайной величины соответственно: $M(X) = a$; $D(X) = \sigma^2$.

Функция (1.14) определена для любых значений аргумента x . График функции симметричен относительно линии $x = a$; в точке $x = a$ функция имеет максимум. При $x = a \pm \sigma$ имеются перегибы графика. При $x \rightarrow \pm\infty$ $f(x)$ асимптотически приближается к нулю.

Пример 1.1. На рис. 1.1 изображены три нормальные кривые со следующими параметрами: 1) $a = 2, \sigma = 1$; 2) $a = 1, \sigma = 1$; 3) $a = 2, \sigma = 2$.

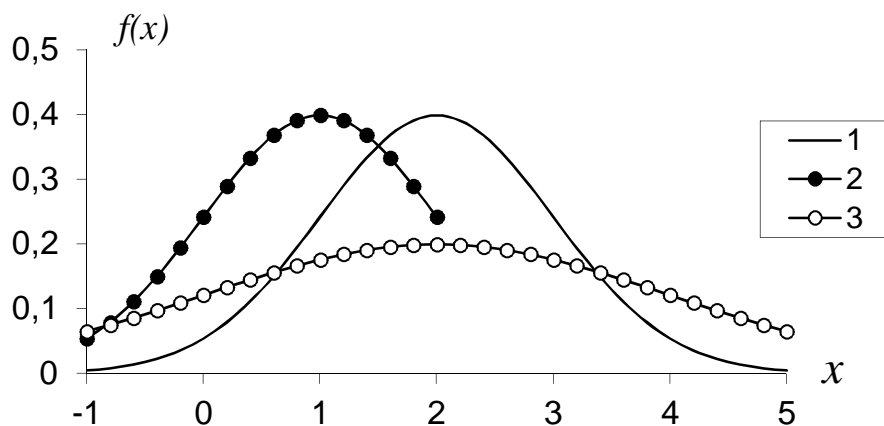


Рис. 1.1. Нормальные кривые

При уменьшении параметра a кривая, не изменяя формы, смещается влево, при увеличении – вправо. С ростом σ максимальное значение $f(x)$ снижается, кривая становится более полой.

Площадь фигуры, заключённой между любой нормальной кривой и осью абсцисс, в силу выполнения условия нормировки, стремится к 1.

Для нормальной случайной величины X вероятность попадания в заданный интервал (α, β) равна

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right), \quad (1.15)$$

где $\Phi(t)$ – интегральная функция Лапласа:

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(z) dz, \quad \varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}. \quad (1.16)$$

Значения функций $\varphi(z)$ и $\Phi(t)$ помещены в приложениях 1 и 2. Подынтегральная функция $\varphi(z)$ (прил. 1), которую часто называют функцией Гаус-

σa , есть не что иное, как функция плотности нормального распределения (1.14) при $a = 0$ и $\sigma = 1$ – положительная, чётная, быстро убывающая с ростом модуля z . Функция Лапласа $\Phi(t)$ – нечётная, график проходит через начало координат, при $t \rightarrow \pm\infty$ значения функции асимптотически приближаются к $\pm 1/2$.

Вероятность попадания нормальной случайной величины X в симметричный относительно математического ожидания интервал полуширины d равна

$$P(|X - a| < d) = 2\Phi\left(\frac{d}{\sigma}\right). \quad (1.17)$$

Так, например,

$$P(|X - a| < 3\sigma) = 2\Phi(3) = 0.9973.$$

Последняя формула показывает, что вероятность попадания случайной величины в данный интервал всего лишь на 0.0027 меньше единицы. Таким образом, выход случайной величины за пределы указанного интервала почти невозможен (правило трёх сигма).

Почему же наиболее распространенным представлением распределения случайных погрешностей является именно нормальное распределение? Можно сказать, что это является следствием действия *центральной предельной теоремы*, суть которой состоит в следующем: случайная величина, являющаяся суммой достаточно большого числа взаимно независимых случайных величин, каждая из которых мало влияет на всю сумму, имеет распределение, близкое к нормальному. Действительно, погрешность измерения возникает как результат суммарного воздействия большого числа взаимно независимых факторов и потому является случайной величиной, удовлетворяющей условиям центральной предельной теоремы.

В дальнейшем будем полагать, что результаты измерения некоторой величины с истинным значением a распределены по нормальному закону с плотностью распределения вероятностей (1.14), однако, т. к. значение a нам неизвестно, будем заменять его действительным значением \bar{x} :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}, \quad (1.18)$$

Учитывая, что $\Delta x = x - \bar{x}$ есть абсолютная погрешность, и обозначая $f(\Delta x + \bar{x})$ как $g(\Delta x)$, получаем нормальный закон распределения случайных погрешностей в виде

$$g(\Delta x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\Delta x)^2}{2\sigma^2}}. \quad (1.19)$$

1.5. Доверительный интервал для оценки погрешности однократного измерения

Из теории вероятностей следует, что вероятность попадания в интервал $(-d, d)$ для нормально распределенной случайной погрешности Δx равна

$$P(|\Delta x| < d) = 2\Phi(d/\sigma), \quad (1.20)$$

где $\Phi(t)$ – функция Лапласа (1.16). В данном случае под погрешностью мы подразумеваем отклонение получаемого опытным путём значения не от действительного значения \bar{x} , а от истинного значения a :

$$\Delta x = x - a.$$

Величина $Y = \Delta x/\sigma$ также является нормальной с нулевым математическим ожиданием, но для неё $\sigma(Y) = 1$. Нормальную случайную величину с такими характеристиками называют *стандартной*. Для неё равенство (1.20) принимает вид

$$P\left(\left|\frac{\Delta x}{\sigma}\right| < t\right) = 2\Phi(t)$$

или

$$P(|\Delta x| < t\sigma) = 2\Phi(t) = \gamma,$$

где γ – задаваемое нами значение доверительной вероятности (надёжности). Итак, для оценки погрешности при однократном измерении получаем доверительный интервал

$$-t\sigma < \Delta x < t\sigma, \quad (1.21)$$

где t есть аргумент функции Лапласа при её значении, равном $\gamma/2$.

Пример 1.2. Известно, что генеральное СКО для случайной погрешности измерения массы равно $\sigma = 1$ мг. Построить доверительный интервал для погрешности однократного измерения массы с надёжностью $\gamma = 0.95$.

$\Phi(t) = \gamma/2 = 0.475$. По таблице из приложения 2 получаем $t = 1.96$. Следовательно, с вероятностью 0.95 погрешность однократного измерения, выраженная в мг, окажется в интервале $-1.96 < \Delta x < 1.96$.

Пример 1.3. Известно генеральное СКО σ для случайной погрешности измерения. Какова надёжность интервальной оценки, при которой $-3\sigma < \Delta x < 3\sigma$.

В данном случае $t = 3$, $\Phi(t) = \gamma/2 = 0.9973$. Полученный результат соответствует приведённому выше правилу трёх сигма.

1.6. Доверительный интервал для оценки погрешности серии измерений при известном σ

Проведена серия n измерений одной и той же величины, данные усреднены, получено действительное значение \bar{x} . Как оценить погрешность этого результата $\Delta\bar{x} = \bar{x} - a$? Разумеется, истинное значение величины (a) неизвестно.

Введём новую случайную величину:

$$Y = \frac{\Delta\bar{x}}{\sigma(\Delta\bar{x})},$$

которая имеет нормальное распределение, причём $M(Y) = 0$, $\sigma(Y) = 1$. Для неё вероятность попадания в симметричный интервал равна

$$P(|Y| < t) = 2\Phi(t)$$

или

$$P(|\Delta\bar{x}| < t\sigma(\Delta\bar{x})) = 2\Phi(t).$$

При этом $\sigma(\Delta\bar{x}) = \sigma(\bar{x})$. В теории вероятностей существует следующая теорема: среднее арифметическое n независимых одинаково распределённых случайных величин имеет среднеквадратическое отклонение в \sqrt{n} раз меньшее, чем сама случайная величина, т. е.

$$\sigma(\Delta\bar{x}) = \sigma/\sqrt{n}.$$

Поэтому

$$P(|\Delta\bar{x}| < t\sigma/\sqrt{n}) = 2\Phi(t) = \gamma,$$

где γ – задаваемое нами значение доверительной вероятности (надёжности). Итак, для оценки $\Delta\bar{x}$ получаем доверительный интервал

$$-\frac{t\sigma}{\sqrt{n}} < \Delta\bar{x} < \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}, \quad (1.22)$$

где t определяется выбранной надёжностью оценки тем же способом, что и в пункте 1.5.

Пример 1.4. Известно, что генеральное СКО для случайной погрешности измерения массы равно $\sigma = 1$ мг. Построить доверительный интер-

вал для погрешности определения действительного значения массы \bar{x} в серии 25 измерений с надёжностью $\gamma = 0.95$.

В соответствии с формулой (1.22), найденное в примере 1.2 значение $t\sigma = 1.96$ должно быть уменьшено в $\sqrt{25} = 5$ раз. Поэтому с вероятностью 0.95 погрешность определения среднего значения массы по серии из 25 измерений, выраженная в мг, окажется в интервале $-0.392 < \Delta\bar{x} < 0.392$.

1.7. Доверительный интервал для оценки погрешности серии измерений при неизвестном σ

Очевидно, при неизвестном значении параметра нормального распределения σ можно заменить эту величину исправленным среднеквадратическим отклонением $s = \sqrt{s^2}$ (1.5). Вспомним, однако, что получение доверительного интервала для оценки $\Delta\bar{x}$ было основано на том, что случайная величина

$$Y = \frac{\Delta\bar{x}}{\sigma(\Delta\bar{x})} = \frac{\Delta\bar{x}\sqrt{n}}{\sigma}$$

является стандартной нормальной величиной. Заменяя σ на s , получаем случайную величину

$$T = \frac{\Delta\bar{x}\sqrt{n}}{s},$$

которая уже не подчиняется нормальному закону распределения. Виной тому – величина, стоящая в знаменателе, сама (в отличие от σ) являющаяся случайной и имеющая распределение, зависящее от n .

Случайная величина T подчиняется распределению, которое принято называть распределением Стьюдента. При $n \rightarrow \infty$ оно совпадает с нормальным, а при $n > 30$ (большая выборка) отличается от него несущественно.

Из условия

$$P(|T| < t) = \gamma \quad \text{или} \quad P(|\Delta\bar{x}| < ts/\sqrt{n}) = \gamma$$

можно с помощью специальной таблицы, составленной на основе распределения Стьюдента, определить значение $t = t(\gamma, n)$. В результате имеем доверительный интервал

$$-\frac{t(\gamma, n)s}{\sqrt{n}} < \Delta\bar{x} < \frac{t(\gamma, n)s}{\sqrt{n}}. \quad (1.23)$$

Величину $t(\gamma, n)$ будем называть коэффициентом Стьюдента. Таблица значений $t(\gamma, n)$ помещена в прил. 3.

Пример 1.5. Проведено 9 измерений некоторой величины с неизвестной среднеквадратической погрешностью σ . Они дали следующие результаты: 21, 19, 18, 24, 18, 17, 21, 22, 20. С надёжностью 0.95 построить доверительные интервалы для погрешности измерений и для самой измеряемой величины.

Найдём действительное значение $\bar{x} = (21 + \dots + 20)/9 = 20$. Поскольку генеральное СКО σ неизвестно, найдём выборочное (исправленное) СКО:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{8} (1^2 + (-1)^2 \dots + 0^2)} = 2.236.$$

Получаем: $\frac{t(\gamma, n)s}{\sqrt{n}} = \frac{2.31 \times 2.236}{3} = 1.72$. Итак, по формуле (1.23) для по-

грешности с вероятностью 0.95 будет выполняться $-1.72 < \Delta \bar{x} < 1.72$, а для самой измеряемой величины $20 - 1.72 < a < 20 + 1.72$, т. е. $18.28 < a < 21.72$.

1.8. Планирование числа измерений

Пусть допустимые границы погрешности $\Delta \bar{x}$ при заданной надёжности γ известны заранее. Также известно СКО случайной погрешности измерения σ . Формула (1.22) показывает, что доверительные границы погрешности $\Delta \bar{x}$ могут быть сближены увеличением числа измерений n .

Выражая n из уравнения $|\Delta \bar{x}|_{\max} = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$, получаем

$$n_{\min} = \left(\frac{t\sigma}{|\Delta \bar{x}|_{\max}} \right)^2, \quad (1.24)$$

где t связано с надёжностью γ через функцию Лапласа.

Пример 1.6. Известно, что СКО случайной погрешности измерения $\sigma = 0.2$. Сколько измерений необходимо произвести для того, чтобы с надёжностью $\gamma = 0.95$ погрешность определения \bar{x} не превышала 0.05?

$$n > \frac{1.96^2 \cdot 0.2^2}{0.05^2} \approx 61.$$

Необоснованное наращивание числа измерений ведёт к дополнительным затратам времени и труда, а иногда и к материальным потерям. Поэтому в каждом конкретном случае приходится делать выбор между качеством оценки и затратами на неё. Например, если бы в примере 1.6 мы

установили пределом погрешности не 0.05, а 0.01, то необходимое число измерений возросло бы в 25 раз! Фактически придерживаются следующего правила: уменьшают случайную погрешность путём увеличения числа измерений лишь до тех пор, пока она не станет в несколько раз меньше *систематической погрешности* измерительного прибора. Дальнейшее снижение случайной погрешности лишено смысла.

Если СКО случайной погрешности измерения σ неизвестно, то следует воспользоваться формулой (1.23). В результате для минимального числа измерений получим

$$n_{\min} = \left(\frac{t(\gamma, n) s}{|\Delta \bar{x}|_{\max}} \right)^2. \quad (1.25)$$

Следует учесть, что в формуле (1.25) коэффициент Стьюдента $t(\gamma, n)$ сам зависит от n . Поэтому n_{\min} придётся находить подбором, используя таблицу (прил. 3).

Пример 1.7. Установлен предел погрешности измерений $|\Delta \bar{x}|_{\max} = 0.1$ при надёжности $\gamma = 0.95$. Исправленное СКО составило $s = 0.2$. Сколько измерений необходимо произвести для определения \bar{x} ?

Согласно (1.25) n_{\min} в данном случае должно превышать $t^2(\gamma, n)$ не менее чем в 4 раза. Для $\gamma = 0.95$ имеем табл. 1.1:

Таблица 1.1

n	5	6	7	8	9	10	11	12
$t(\gamma, n)$	2.78	2.57	2.45	2.37	2.31	2.26	2.23	2.20
$4t^2(\gamma, n)$ – значение правой части формулы (1.25)	11.12	10.28	9.80	9.48	9.24	9.04	8.92	8.80

Видно, что требуемое условие выполняется при $n \geq 10$, т. е. $n_{\min} = 10$.

1.9. Исключение грубых промахов

Результаты измерений, содержащие грубые ошибки (промахи), часто бывают хорошо заметны и легко выявляются. Тем не менее, в сомнительных случаях следует применять статистические методы.

Самый простой и грубый способ, который можно применить при нормальном распределении погрешностей (что, как правило, имеет место) с известным или надёжно оцененным СКО σ , основан на правиле трёх

сигма. Если измеренное значение x_i выходит из интервала $|x_i - \bar{x}| < 3\sigma$, то оно связано с какими-то грубыми ошибками и, скорее всего, не должно приниматься во внимание.

Рассмотрим несколько более тонкий и сложный способ. Для его реализации необходимо совершить следующие действия:

1. Вычисляются \bar{x} и СКО s по всему ряду измерений, включая проверяемые на промах.

2. Выбирается x_{np} – проверяемое на промах значение, как удовлетворяющее условию $\Delta x = |x_{np} - \bar{x}| = \max \{ |x_i - \bar{x}|, i = 1, n \}$.

3. Вычисляется $v_{np} = \Delta x / s$ и его значение сравнивается с $v_{кр}(\gamma, n)$, взятым из табл. 1.2 (далее приведён фрагмент этой таблицы для $\gamma = 0.95$).

4. Если $v_{np} > v_{кр}(\gamma, n)$, то проверяемое значение исключается из ряда, вычисляются новые \bar{x} и s .

5. Выбирается следующее максимальное по абсолютному значению отклонение и действия 3 и 4 повторяются.

Таблица 1.2

n	3	4	5	6	7	8	10	15	20	30	35	40	50	100	200
$v_{кр}$	1.41	1.69	1.87	2.0	2.09	2.17	2.29	2.49	2.62	2.79	2.85	2.90	2.99	3.23	3.46

Пример 1.8. В результате серии измерений получены $\bar{x} = 10.4$ и $s = 2.1$. Среди измерений есть $x_{np} = 4.2$, проверяемое на промах.

По правилу трёх сигма результаты измерений должны быть сосредоточены в интервале 10.4 ± 6.3 , т. е. от 4.1 до 16.7. Следовательно, подозреваемое измерение дало «критический» результат, и неясно, нужно ли исключить его из ряда измерений. Вычислив значение $v_{np} = \Delta x / s = 6.2 / 2.1 = 2.95$ и сравнив его с приведённой таблицей, приходим к следующему выводу: если число измерений в серии было 50 или более, то значение $x_{np} = 4.2$ является достаточно вероятным результатом и может быть оставлено в ряду измерений. Если же число измерений в серии было 40 или менее, то x_{np} , скорее всего, является результатом грубого промаха и должно быть исключено.

**Примеры выполнения заданий на компьютере:
математическая обработка экспериментальных данных,
оценка погрешностей**

Таблица 1.3

Номер измерения i	x_i
1	12.18
2	11.93
3	12.77
4	12.32
5	12.25
6	12.30
7	12.07
8	11.81
9	13.91
10	12.75
11	12.53
12	11.37
13	13.23
14	12.04
15	12.36
16	12.16
17	15.70
18	12.61
19	12.55
20	13.40
21	11.05

Задание. По данным эксперимента составлена таблица результатов $n = 21$ измерений некоторой величины (табл. 1.3).

1. Найти среднее арифметическое измеренных значений.

2. Найти среднеквадратическую погрешность при $n = 21$ измерении.

3. Проверить максимально отклонённый результат на промах. При необходимости отбраковать промах.

4. Найти уточнённые результаты вычисления среднего арифметического и среднеквадратической погрешности после отбраковки промаха.

5. Повторять пункты 3 и 4, пока промахи не будут отбракованы.

6. Найти погрешность вычисления среднего арифметического в серии измерений при известном среднеквадратическом отклонении нормального распределения случайных погрешностей $\sigma = 0.85$.

7. Найти доверительный интервал среднего значения в серии измерений при неизвестном среднеквадратическом отклонении нормального распределения случайных погрешностей σ (воспользовавшись таблицей коэффициентов Стьюдента при

заданной надёжности $\gamma = 0.95$).

8. Найти относительную погрешность результата серии измерений.

9. Известно, что систематическая погрешность измерения составляет 0.5. Выбрать оптимальное число измерений из условия, чтобы случайная погрешность была меньше систематической погрешности в 2.5 раза (с надёжностью $\gamma = 0.95$). Считать, что СКО случайных погрешностей σ не известно.

Инструкция по выполнению задания

1. Среднее арифметическое измеренных значений \bar{x} , называемое действительным значением измеряемой величины, находится по формуле (1.1). При работе в Excel можно использовать функции СУММ или СРЗНАЧ. Результат: $\bar{x} = 12.538$.

2. Среднеквадратическая погрешность находится по формуле (1.5). При работе в Excel можно использовать функцию СТАНДОТКЛОН. Результат: $s = 0.965$.

3. По правилу трёх сигма результаты измерений должны быть сосредоточены в интервале $12.538 \pm 3 \times 0.965$, т. е. от 9.64 до 15.43. Похоже, что в 17-м измерении имел место грубый промах. Примем $x_{np} = 15.70$. Тогда

$$v_{np} = \Delta x / s = |x_{np} - \bar{x}| / s = 3.39.$$

Для наиболее близкого к 21 числа измерений в таблице $v_{кр}(\gamma, n)$ имеем

$$v_{кр}(0.95, 20) = 2.62.$$

Так как $v_{np} > v_{кр}(\gamma, n)$, измерение признаётся промахом, его результат следует исключить.

4. После исключения промаха $\bar{x} = 12.380$, $s = 0.655$.

5. Теперь максимально отклонённый от нового среднего значения результат содержится в 9-м измерении. Примем $x_{np} = 13.91$. Тогда

$$v_{np} = \Delta x / s = |x_{np} - \bar{x}| / s = 2.34;$$

$$v_{кр}(0.95, 20) = 2.62.$$

Так как $v_{np} > v_{кр}(\gamma, n)$, измерение не является промахом. Грубые ошибки измерений отбракованы.

Для поиска максимально отклонённого от среднего значения результата в Excel можно использовать функцию МАКС.

6. При известном $\sigma = 0.85$ с надёжностью $\gamma = 0.95$ имеем

$$\frac{t\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1.96 \times 0.85}{\sqrt{20}} = 0.373, -0.373 < \Delta \bar{x} < 0.373.$$

Для поиска этой величины в Excel можно использовать функцию ДОВЕРИТ. При этом под параметром «Альфа» подразумевается значение $1 - \gamma$.

7. При неизвестном σ с надёжностью $\gamma = 0.95$ имеем

$$\frac{t(\gamma, n)s}{\sqrt{n}} = \frac{2.09 \times 0.655}{\sqrt{20}} = 0.306; -0.306 < \Delta \bar{x} < 0.306;$$

$$12.07 < \bar{x} < 12.69.$$

Коэффициент Стьюдента в Excel можно найти с помощью функции СТЬЮДРАСПОБР. При этом под параметром «Вероятность» подразумевается значение $1 - \gamma$, «Число степеней свободы» задаётся как $n - 1$.

Комментарий к пунктам 6 и 7. Доверительные границы погрешности измерений при неизвестном σ обычно расширяются по сравнению со случаем, когда σ известно. Это естественно, поскольку неопределённость какого-либо параметра должна негативно сказываться на точности оценок. Формальная причина состоит в том, что $t(\gamma, n) > t \equiv t(\gamma, \infty)$ (в нашем случае $2.09 > 1.96$). Однако среднеквадратическая погрешность s , найденная по выборке, может оказаться как больше, так и меньше (в нашем случае – значительно меньше) генерального СКО σ . Этим и объясняется некоторая «нетипичность» полученного нами результата по доверительным границам погрешности.

8. Относительная погрешность результата серии измерений находится как $\delta_{\bar{x}} = \Delta \bar{x} / \bar{x} = 0.306 / 12.38 = 0.025$ (2.5 %).

9. Согласно условию, надо установить предел случайной погрешности $|\Delta \bar{x}|_{\max} = 0.2$. При неизвестном σ пользуемся формулой (1.25).

Поскольку по сравнению с пунктом 7 погрешность должна быть уменьшена, нас будут интересовать значения $n > 20$. Для этой области значений n при $\gamma = 0.95$ $t^2(\gamma, n) \approx 2$. Следовательно, правая часть формулы (1.25)

$$\left(\frac{t(\gamma, n) s}{|\Delta \bar{x}|_{\max}} \right)^2 \approx (0.655 / 0.2)^2 t^2(\gamma, n) = 10.73 t^2(\gamma, n)$$

имеет значения около 40–45. Составьте таблицу коэффициентов Стьюдента и соответствующих значений правой части формулы (1.25) для n от 35 до 60, пользуясь прил. 3. Станет очевидно, что можно принять $n_{\min} \approx 45$.

Контрольные вопросы

1. В чём различие действительного и истинного значений измеряемой величины?
2. Дайте определение абсолютной и относительной погрешности отдельного измерения.
3. По каким признакам классифицируются погрешности?
4. Почему случайные погрешности, как правило, подчиняются нормальному закону распределения?
5. Как ведёт себя погрешность определения действительного (среднего арифметического) значения измеряемой величины с ростом числа измерений?
6. Как ведёт себя погрешность определения действительного (среднего арифметического) значения измеряемой величины с ростом требуемой надёжности (доверительной вероятности)?
7. Как определить оптимальное число измерений?
8. Как исключить грубые промахи в результатах эксперимента?

Тема 2. СРАВНЕНИЕ ЭМПИРИЧЕСКИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОВЕРКИ СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

Принципы проверки статистических гипотез. Гипотезы о средних. Параметрические и непараметрические критерии проверки гипотез. Критерии Уилкоксона и Пирсона.

2.1. Статистические гипотезы. Принципы проверки гипотез

Термин «гипотеза» является одним из ключевых в теории эксперимента. Считается, что научную гипотезу или доказывают, делая её установленным фактом, или опровергают, переводя её в разряд ложных утверждений. Однако со *статистическими гипотезами* дело обстоит несколько сложнее. Методы математической статистики могут служить средством проверки тех предположений, которые выдвигает исследователь при анализе результатов эксперимента. Но сделанные при этом выводы и заключения не являются «приговором», а носят *вероятностный* характер, поскольку основываются на выборочных данных.

Статистическими гипотезами называются утверждения о виде или характеристиках распределений количественных признаков в генеральных совокупностях, выдвигаемые и проверяемые на основе обработки выборочных данных. Выдвинутая гипотеза H_0 называется *нулевой* или *основной*, а противоречащая ей H_1 – *альтернативной* или *конкурирующей*.

При принятии или отклонении гипотезы возможны 4 различные ситуации. Проанализируем их, пользуясь понятием условной вероятности:

1. *Ошибка 1-го рода*: отклонена правильная гипотеза. Вероятность такого исхода равна $P(H_1|H_0) = \alpha$.

2. *Ошибка 2-го рода*: принята неправильная гипотеза. Вероятность такого исхода $P(H_0|H_1) = \beta$.

3. Принята правильная гипотеза: $P(H_0|H_0) = 1 - \alpha$.

4. Отклонена неправильная гипотеза: $P(H_1|H_1) = 1 - \beta$.

Пример 2.1. Сделана большая партия деталей. Производитель предполагает, что разброс значений (дисперсия) контролируемого количественного признака соответствует паспортным данным того устройства, на котором изготовлены детали. Основная гипотеза имеет вид $H_0: D(X) = D_0$ при конкурирующей гипотезе $H_1: D(X) > D_0$ ($D(X)$ – генеральная дисперсия). Выборочное обследование деталей либо подтверждает, либо опровергает основную гипотезу. Ошибка 1-го рода будет заключаться в том, что хорошая партия деталей окажется забракованной («риск производителя»). Ошибка 2-го рода будет состоять в том, что плохая партия деталей будет признана годной («риск потребителя»).

Если объём выборки жёстко ограничен, то вероятность ошибки одного рода можно снизить только ценой роста вероятности ошибки другого рода. В примере 2.1 проверяется выборка деталей, после чего вся партия принимается или бракуется. Если мы требуем очень строгого соответствия выборки известным требованиям, то снижаем вероятность ошибки 2-го рода β (т. е. маловероятно, что плохая партия будет признана годной). Но при этом повышается риск ошибки 1-го рода (α), т. к. возрастает вероятность забраковать хорошую в целом партию из-за неудачной выборки.

При проверке гипотезы прежде всего задаются вероятностью совершения ошибки 1-го рода α , которая называется *уровнем значимости* гипотезы. Обычно уровень значимости принимают равным 0.05, 0.01 или 0.001.

Статистическим критерием или *проверочной статистикой* называется случайная величина K

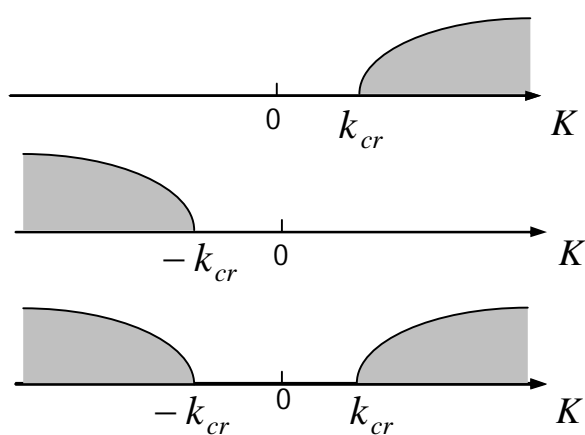


Рис. 2.1

с известным законом распределения вероятностей, служащая для проверки нулевой гипотезы. Вся область значений K делится на *критическую область*, где H_0 отвергается, и *область принятия гипотезы*, где отвергать гипотезу H_0 нет оснований. Названные области отделяются друг от друга критическими точками k_{cr} .

Существует 3 вида критических областей: правосторонняя, левосторонняя и двусторонняя (рис. 2.1). Если допустить, что основная гипотеза верна, то вероятность попадания критерия в критическую область есть вероятность ошибки 1-го рода α . Из этого условия и исходят при отыскании критических точек. Вид критической области зависит от конкурирующей гипотезы. Для правосторонней критической области

$$P(K > k_{cr}) = \alpha;$$

для левосторонней критической области

$$P(K < -k_{cr}) = \alpha;$$

для симметричной двусторонней критической области

$$P(K < -k_{cr}) = P(K > k_{cr}) = \frac{\alpha}{2}.$$

Сам критерий для заданного уровня значимости α выбирается так, чтобы вероятность ошибки 2-го рода β была минимальной. Вероятность

отклонения неправильной основной гипотезы $(1 - \beta)$ называется *мощностью критерия*. Из всех возможных критериев с заданным уровнем значимости α выбирается наиболее мощный.

Статистические критерии можно разделить на параметрические и непараметрические. *Параметрические* критерии включают в расчет параметры вероятностного распределения случайной величины (средние и дисперсии). Сравнение средних будет рассмотрено в п. 2.2, сравнение дисперсий – в п. 3.1. *Непараметрические* критерии не привязаны к конкретным параметрам распределения, а включают в расчёт распределение целиком, оперируя рангами или частотами. Некоторые из этих критериев (Уилкоксона и Пирсона) будут рассмотрены в пп. 2.3 и 2.4.

2.2. Сравнение средних

Пусть имеется два ряда измерений одной и той же величины с объёмами выборок n_1 и n_2 . По каждому ряду определена средняя (\bar{x}_1 и \bar{x}_2). Предположим вначале, что для каждого ряда известна генеральная дисперсия погрешности измерений ($\sigma^2(x_1)$ и $\sigma^2(x_2)$). (Позже потребуются выборочные исправленные дисперсии $s^2(x_1)$ и $s^2(x_2)$). Есть основания предположить, что истинные значения измеряемой величины в этих двух сериях a_1 и a_2 равны друг другу, т. е. нулевая гипотеза имеет вид $H_0 : a_1 = a_2$ при конкурирующей гипотезе $H_1 : a_1 \neq a_2$.

В качестве проверочной статистики рассмотрим величину

$$Z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sigma(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}, \quad (2.1)$$

имеющую нормальное распределение с $M(Z) = 0$, $\sigma(Z) = 1$. Для таких величин, как мы видели ранее (п. 1.6)

$$P(|Z| < z) = 2\Phi(z) = \gamma. \quad (2.2)$$

В данном случае γ – это вероятность попадания статистики Z в область принятия гипотезы. Если вероятность отклонения гипотезы равна α (уровень значимости гипотезы), то вероятность принятия гипотезы равна $\gamma = 1 - \alpha$. При $H_1 : a_1 \neq a_2$ критическая область является двусторонней. Правая критическая точка z_{cr} определяется из условия $\Phi(z_{cr}) = (1 - \alpha) / 2$.

Вернёмся к выражению для статистики Z . Из свойств дисперсии и среднего арифметического следует

$$\sigma(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = \sqrt{\sigma^2(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)} = \sqrt{\sigma^2(\bar{x}_1) + \sigma^2(\bar{x}_2)} = \sqrt{\frac{\sigma^2(x_1)}{n_1} + \frac{\sigma^2(x_2)}{n_2}}.$$

Итак,

$$Z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma^2(x_1)}{n_1} + \frac{\sigma^2(x_2)}{n_2}}}. \quad (2.3)$$

Рост (по модулю) значения случайной величины Z снижает «шансы» основной гипотезы. Очевидно, этому могут способствовать следующие факторы: (а) сильное различие выборочных средних \bar{x}_1 и \bar{x}_2 ; (б) слабое рассеивание признаков; (в) большие объёмы выборок.

Получили следующее правило проверки основной гипотезы $H_0: a_1 = a_2$ при конкурирующей гипотезе $H_1: a_1 \neq a_2$ (при известных генеральных дисперсиях и уровне значимости α). Находим правую границу двусторонней критической области из условия $\Phi(z_{cr}) = (1 - \alpha)/2$. При $|Z| < z_{cr}$ нет оснований отклонить основную гипотезу; в противном случае H_0 отвергается.

Сформулированному правилу можно найти простую и логичную интерпретацию, записав его в виде

$$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| < \sigma(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \cdot z_{cr} \Rightarrow H_0, \text{ иначе } H_1, \quad (2.4)$$

т. е. если разность средних меньше, чем доверительные границы определения этой разности, то она (разность) незначима. (Сравните, например, с формулой (1.21) для доверительных границ погрешности однократного наблюдения).

В случаях, когда по результатам эксперимента или в силу априорной информации необходимо в качестве конкурирующей гипотезы рассмотреть $H_1: a_1 > a_2$ или $H_1: a_1 < a_2$, переходят к односторонней критической области. Нетрудно догадаться, что в первом случае граница правосторонней области z_{cr} , а во втором случае граница левосторонней области ($-z_{cr}$) будут находиться из условия $\Phi(z_{cr}) = \frac{1}{2} - \alpha$.

Если нам неизвестны генеральные дисперсии погрешности измерений $\sigma^2(x_1)$ и $\sigma^2(x_2)$, то необходимо будет использовать выборочные исправленные дисперсии $s^2(x_1)$ и $s^2(x_2)$. При этом придётся перейти к критерию Стьюдента. Однако, если оба ряда измерений достаточно велики, то можно просто принять $\sigma^2(x_1) \approx s^2(x_1)$, $\sigma^2(x_2) \approx s^2(x_2)$.

Пример 2.2. Контроль стабильности некоторой физической величины осуществляют регулярно каждую неделю. В двух сериях, по 100 измерений в каждой, получены следующие результаты: $\bar{x}_1 = 36$, $\bar{x}_2 = 38$. При этом дис-

персии составили $s^2(x_1) = 12$ и $s^2(x_2) = 13$. Таким образом, наблюдается некоторое увеличение среднего значения со временем. Являются ли эти изменения проявлением случайности или они отражают влияние неконтролируемого фактора? Уровень значимости принять равным $\alpha = 0.02$.

Проверим основную гипотезу $H_0 : a_1 = a_2$ при конкурирующей гипотезе $H_1 : a_1 \neq a_2$ на уровне значимости $\alpha = 0.02$. Имеем

$$Z = \frac{36 - 38}{\sqrt{12/100 + 13/100}} = -4;$$

$\Phi(z_{cr}) = 0.49$; $z_{cr} = 2.33$; $|Z| > z_{cr}$ – нулевая гипотеза отвергается. Изменение среднего значения во времени является значимым.

2.3. Ранговый критерий Уилкоксона

Нерешённым для нас остаётся вопрос сравнения средних для двух рядов измерений случайной величины, распределённой произвольно (т. е. необязательно нормально), тем более, когда эти ряды короткие. В этом случае можно применить ранговый критерий Уилкоксона. Мы рассмотрим использование этого критерия на примерах.

Пример 2.3. Даны результаты двух серий измерений:

$$x_1 = \{3, 4, 6, 10, 13, 17\}; \quad x_2 = \{1, 2, 5, 7, 16, 20, 22\}.$$

Условимся считать, что если только длины серий не одинаковы, то в качестве первой серии всегда рассматривается серия меньшей длины ($n_1 < n_2$). Объединим результаты обеих серий в один вариационный ряд и пронумеруем их в порядке возрастания:

Результат измерения	1	2	3	4	5	6	7	10	13	16	17	20	22
Порядковый номер (ранг)	1	2	<u>3</u>	<u>4</u>	5	<u>6</u>	7	<u>8</u>	<u>9</u>	10	<u>11</u>	12	13

В таблице подчёркнуты те номера, которые соответствуют измерениям из первой серии. Теперь вычислим наблюдаемое значение проверочной статистики – сумму рангов (порядковых номеров) измерений из первой серии:

$$W = \sum_{i=1}^{n_1} r_i; \tag{2.5}$$

$$W = 3 + 4 + 6 + 8 + 9 + 11 = 41.$$

Теперь обратимся к таблице в прил. 6. Зададим уровень значимости гипотезы $\alpha = 0.01$. Будем считать, что конкурирующая гипотеза состоит в неравенстве средних ($H_1 : a_1 \neq a_2$), что соответствует двухсто-

ронней критической области. В нашем случае $n_1 = 6$, $n_2 = 7$. Для перечисленных условий таблица даёт следующие критические значения статистики W : $w_{cr}(\text{нижн.}) = 24$, $w_{cr}(\text{верхн.}) = 60$. Если $w_{cr}(\text{нижн.}) < W < w_{cr}(\text{верхн.})$, то нет оснований отклонить гипотезу о равенстве средних значений в двух сериях измерений. В нашем случае дело обстоит именно так.

Рассмотрим теперь случай, когда критическая область односторонняя. Согласно таблице, в этом случае $w_{cr}(\text{нижн.}) = 25$, $w_{cr}(\text{верхн.}) = 59$. Если альтернативная гипотеза имеет вид $H_1: a_1 < a_2$, то нулевая гипотеза отклоняется при $W < w_{cr}(\text{нижн.})$. Если альтернативная гипотеза имеет вид $H_1: a_1 > a_2$, то нулевая гипотеза отклоняется при $W > w_{cr}(\text{верхн.})$. Ни то, ни другое в нашем случае не выполняется. Значит, и при односторонней критической области нет оснований отклонить гипотезу о равенстве средних значений в двух сериях измерений.

Замечание 1. Если несколько измерений дали один и тот же результат, то в общем вариационном ряде надо приписать им один и тот же ранг, равный среднему арифметическому порядковых номеров совпадающих между собой результатов измерений.

Замечание 2. Если ряды имеют одинаковую длину ($n_1 = n_2$), то в качестве первого ряда можно брать любой из них. На результате проверки гипотезы это не скажется.

Легко заметить, что в таблице (см. прил. 6) помещены критические значения статистики W только для $n_1 \leq 10$, $n_2 \leq 10$. При больших объемах выборок статистика W является (в соответствии с центральной предельной теоремой) приближенно нормально распределенной, причем ее математическое ожидание и СКО определяются следующими формулами:

$$M(W) = \frac{n_1(n_1 + n_2 + 1)}{2}; \quad (2.6)$$

$$\sigma(W) = \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}}. \quad (2.7)$$

Таким образом, статистика

$$Z = \frac{W - M(W)}{\sigma(W)} \quad (2.8)$$

является нормированной нормальной величиной. Поэтому, по аналогии с (2.5), правило проверки основной гипотезы $H_0: a_1 = a_2$ имеем в следующем виде:

$$|W - M(W)| < \sigma(W) \cdot z_{cr} \Rightarrow H_0, \text{ иначе } H_1. \quad (2.9)$$

При $H_1 : a_1 \neq a_2$ правая граница двусторонней критической области находится из условия $\Phi(z_{cr}) = (1 - \alpha)/2$. При $H_1 : a_1 > a_2$ или $H_1 : a_1 < a_2$, переходят к односторонней критической области. В первом случае граница правосторонней области z_{cr} , а во втором случае граница левосторонней области $(-z_{cr})$ находится из условия $\Phi(z_{cr}) = \frac{1}{2} - \alpha$.

Пример 2.4. Качество двух технологий характеризуется значением некоторого показателя, измеренного по 10 раз для каждой технологии: первая технология $x_1 = \{22, 34, 52, 62, 30, 40, 64, 84, 56, 59\}$; вторая технология $x_2 = \{52, 71, 76, 54, 67, 83, 66, 90, 77, 84\}$. Используя критерий Уилкоксона, при уровне значимости 0.05 проверить нулевую гипотезу об одинаковом качестве обеих технологий, приняв в качестве конкурирующей гипотезы: качество второй технологии выше.

Объединим результаты обеих серий в один вариационный ряд и пронумеруем их в порядке возрастания (определим ранги):

22	30	34	40	52	52	54	56	59	62	64	66	67	71	76	77	83	84	84	90
<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>5.5</u>	5,5	7	<u>8</u>	<u>9</u>	<u>10</u>	<u>11</u>	12	13	14	15	16	17	<u>18.5</u>	18,5	20

Во второй строке подчёркнуты те номера, которые соответствуют измерениям из первой серии. Вычислим наблюдаемое значение проверочной статистики – сумму рангов (порядковых номеров) измерений из первой серии:

$$W = 1 + 2 + 3 + 4 + 5.5 + 8 + 9 + 10 + 11 + 18.5; \quad W = 72.$$

Обратимся к таблице в прил. 6. Для уровня значимости гипотезы $\alpha = 0.05$ в случае, если критическая область односторонняя, $w_{cr}(\text{нижн.}) = 82$, $w_{cr}(\text{верхн.}) = 128$. Альтернативная гипотеза имеет вид $H_1 : a_1 < a_2$, нулевая гипотеза отклоняется при $W < w_{cr}(\text{нижн.})$. Итак, качество второй технологии значимо выше, чем качество первой технологии.

Попробуем решить ту же задачу, полагая, что объём выборок достаточно велик. По формулам (2.6) и (2.7) получаем

$$M(W) = \frac{10 \cdot 21}{2} = 105, \sigma(W) = \sqrt{\frac{10 \cdot 10 \cdot 21}{12}} = 13.23.$$

Критическая область левосторонняя, $\Phi(z_{cr}) = \frac{1}{2} - 0.05 = 0.45$, $z_{cr} = 1.64$.

$$W - M(W) = -33; \quad \sigma(W) \cdot (-z_{cr}) = -21.7;$$

$$W - M(W) < \sigma(W) \cdot (-z_{cr}) \Rightarrow H_1.$$

Наконец, вернёмся к способу сравнения средних, изложенному в п. 2.2. Рассчитаем выборочные средние $\bar{x}_1 = 50.3$ и $\bar{x}_2 = 72$ и исправленные дисперсии, приняв их за генеральные дисперсии: $\sigma^2(x_1) \approx s^2(x_1) = 315.6$, $\sigma^2(x_2) \approx s^2(x_2) = 141.6$. Вычисляем статистику Z (2.3):

$$Z = \frac{50.3 - 72}{\sqrt{\frac{315.6}{10} + \frac{141.6}{10}}} = -3.2.$$

Критическая область левосторонняя, $\Phi(z_{cr}) = \frac{1}{2} - 0.05 = 0.45$, $z_{cr} = 1.64$. Тогда

$$Z < -z_{cr} \Rightarrow H_1.$$

Итак, все использованные способы дали одинаковый результат: качество второй технологии выше, чем качество первой технологии.

2.4. Критерий согласия Пирсона

Еще один непараметрический метод сравнения двух эмпирических распределений произвольного вида базируется на вычислении случайной величины χ^2 (хи-квадрат). При этом, практически, равенство или неравенство распределений трактуется как однородность или неоднородность выборок.

Исходные ряды измерений x_{1i} , $i = \overline{1, n_1}$, и x_{2j} , $j = \overline{1, n_2}$ разбивают на интервалы, одинаковые для обоих рядов. Подсчитывается число элементов каждого ряда, попадающих в u -й интервал, n_{1u} и n_{2u} , $u = \overline{1, k}$, k – число интервалов. Для наглядности представим результаты группировки в следующем виде:

Интервалы	Ряды измерений		Суммы по интервалам
	1	2	
1	n_{11}	n_{21}	m_1
2	n_{12}	n_{22}	m_2
...
u	n_{1u}	n_{2u}	m_u
...
l	n_{1l}	n_{2l}	m_l
Суммы по рядам	n_1	n_2	n

В математической статистике критерий χ^2 используется для сравнения эмпирического распределения с предполагаемым теоретическим. В этом случае проверяемая статистика задаётся в виде

$$\chi^2 = \sum_{u=1}^k \frac{(n_u - n'_u)^2}{n'_u}, \quad (2.10)$$

где n_u – эмпирическая частота попадания в u -й интервал, а n'_u – теоретическая частота, определяемая, как теоретическая вероятность попадания в соответствующий интервал, умноженная на объём выборки. При сравнении двух эмпирических распределений (что более актуально именно для теории эксперимента) проверочная статистика имеет вид

$$\chi^2 = n_1 n_2 \sum_{u=1}^k \frac{1}{n_{1u} + n_{2u}} \left(\frac{n_{1u}}{n_1} - \frac{n_{2u}}{n_2} \right)^2. \quad (2.11)$$

Критическая точка $\chi_{cr}^2(\alpha, k-1)$ находится в специальной таблице, входом в которую являются уровень значимости α и число степеней свободы $k-1$ (прил. 5). Если $\chi^2 > \chi_{cr}^2(\alpha, k-1)$, то гипотеза об однородности выборок отвергается (критическая область – правосторонняя). Необходимо подчеркнуть, что этот критерий может быть использован лишь при достаточно больших объемах выборок, по крайней мере, при $n > 50$.

Пример 2.5. С целью изучения прочности некоторого изделия исследованы две группы образцов, для каждого из которых определён предел прочности на разрыв. Весь интервал значений (от $38 \cdot 10^7$ до $62 \cdot 10^7$ Н/м²) разбит на 6 интервалов равной длины, и определены частоты попадания в каждый интервал:

Интервалы	Ряды измерений		Суммы по интервалам
	1	2	
1 (38–42)	1	2	3
2 (42–46)	9	7	16
3 (46–50)	13	18	31
4 (50–54)	17	15	32
5 (54–58)	8	6	14
6 (58–62)	2	2	4
Суммы по рядам	50	50	100

Используя критерий Пирсона, при уровне значимости гипотезы 0.05 проверить однородность двух рядов измерений.

По формуле (2.11) получаем значение $\chi^2 = 1.8$. Находим $\chi_{cr}^2(0.05, 5) = 11.07$ в прил. 5. Гипотеза об однородности выборок принимается. В двух рядах измерений представлены выборочные значения из одной и той же генеральной совокупности.

**Примеры выполнения заданий на компьютере:
проверка статистических гипотез как метод обработки
экспериментальных данных**

Задание 1. Производительность труда двух смен завода характеризуется выборками объемов $n_1 = 8$ и $n_2 = 10$:

$$x_1 = \{19.68, 15.17, 20.54, 10.12, 22.69, 18.07, 22.65, 18.27\};$$

$$x_2 = \{23.22, 23.04, 22.44, 20.64, 17.67, 19.47, 19.27, 15.29, 16.4, 17.45\}.$$

Различными способами проверить гипотезу (с уровнем значимости $\alpha = 0.05$) о том, что средняя производительность двух смен одинакова при конкурирующей гипотезе: средняя производительность смен различается. Для этого произвести следующие действия.

1. Рассчитать средние \bar{x}_1 и \bar{x}_2 и, пользуясь информацией о генеральных дисперсиях $\sigma^2(x_1) = 4$ и $\sigma^2(x_2) = 3$, сопоставить значение проверяемой статистики $|Z|$ (2.3) с критическим значением z_{cr} . Сделать вывод о принятии гипотезы.

2. Считая, что информация о генеральных дисперсиях $\sigma^2(x_1)$ и $\sigma^2(x_2)$ отсутствует, заменить их выборочными исправленными дисперсиями $s^2(x_1)$ и $s^2(x_2)$ и проделать то же, что в п. 1.

3. Использовать ранговый критерий Уилкоксона, определив критические значения по таблице (прил. б). Проверить гипотезу об однородности выборок (о равенстве средних).

4. Полагая, что объём выборок достаточно велик и проверочная статистика Уилкоксона подчинена нормальному распределению, определить числовые характеристики W (2.6), (2.7) и проверить гипотезу об однородности выборок.

Инструкция по выполнению задания 1

1. Средние \bar{x}_1 и \bar{x}_2 в Excel можно найти с помощью функции СРЗНАЧ, для вычисления модуля служит функция ABS. Критическое значение z_{cr} находится в таблице значений функции Лапласа (прил. 2) при задании $\Phi(z_{cr}) = (1 - \alpha)/2$, если критическая область двусторонняя.

2. Исправленные дисперсии $s^2(x_1)$ и $s^2(x_2)$ в Excel можно найти с помощью функции ДИСП.

3. При объединении двух выборок заполните два столбца данных: в первом столбце – номер выборки (1 или 2), во втором – результат наблюдения. Затем с помощью СОРТИРОВКА (меню «Данные») упорядочьте данные в этих двух столбцах по возрастанию чисел второго столбца (ре-

зультат наблюдения). Третий столбец заполните рангами – натуральными числами от 1 до $n_1 + n_2$ (в данном случае – до 18). Сумму рангов наблюдений, относящихся к первой (меньшего объёма) выборке, найдите с помощью функции СУММЕСЛИ, указав в ней в качестве диапазона массив номеров выборки (1-й столбец), в качестве условия – число 1 (номер выборки, для которой вычисляется сумма рангов), в качестве диапазона суммирования – массив рангов (3-й столбец).

4. После вычисления $M(W)$ (2.6) и $\sigma(W)$ (2.7) проверьте выполнение условия (2.9). При этом z_{cr} будет иметь то же значение, что и в п. 1. Совпадают ли результаты применения всех четырёх использованных методик?

Задание 2. Имеется 2 ряда измерений ($n_1 = 50$ и $n_2 = 55$):

x_1 :						x_2 :					
29.4	31.8	28.5	35.9	30.6		35.1	25.9	27.8	33.1	29.9	27.4
25.5	29.6	32.5	28.0	28.3		28.0	26.4	27.0	32.0	33.9	31.6
28.4	28.5	27.1	28.4	29.0		27.9	33.4	29.1	30.0	34.0	35.1
32.7	28.2	26.7	31.4	30.1		26.7	24.4	29.0	26.9	25.8	24.5
29.3	30.5	30.4	34.5	29.3		25.9	29.9	34.7	31.1	26.8	29.8
32.9	30.4	29.4	28.2	32.9		33.8	30.4	33.8	24.0	27.9	
29.3	24.3	30.3	29.3	29.5		31.5	31.6	28.6	24.8	28.9	
24.5	32.6	31.8	29.0	30.6		34.8	33.4	32.7	25.8	32.1	
30.9	30.6	25.9	31.2	32.8		34.1	27.0	30.5	25	28.7	
29.6	30.6	32.4	29.0	31.7		24.1	27.6	28.2	28.3	31.9	

С помощью критерия Пирсона при уровне значимости $\alpha = 0.05$ проверить гипотезу об однородности выборок.

Инструкция по выполнению задания 2

Введите исходные данные в 2 столбца. Формула Стерджесса рекомендует выбирать число интервалов k одинаковой длины в зависимости от объёма выборки n как

$$k = 1 + 3.332 \lg n.$$

В нашем случае выборки имеют объёмы 50 и 60, поэтому следует ввести 7 интервалов. Заметив, что данные измерений не выходят за границы интервала 24.0–35.9, и поделив размах вариаций $R = x_{\max} - x_{\min}$ на 7, получаем длину каждого частичного интервала 1.7. Следовательно, можно ввести следующие интервалы: 24.0–25.7, 25.7–27.4, 27.4–29.1, 29.1–30.8, 30.8–32.5, 32.5–34.2, 34.2–35.9.

Для нахождения частотных распределений используйте функцию ЧАСТОТА. У этой функции два аргумента: массив данных (здесь поясне-

ний не требуется) и массив интервалов (это верхние границы частичных интервалов). Значение попадает в некоторый интервал, если оно меньше или равно верхней границе этого интервала и больше верхней границы предыдущего интервала. Формулу для этой функции необходимо вводить как формулу массива. После введения аргументов нажмите клавишу F2 (режим Правка), а затем нажмите клавиши CTRL+SHIFT+ENTER. Если формула не будет введена как формула массива, отобразится только одно значение.

Остаётся рассчитать значение статистики χ^2 и сравнить его с критическим значением $\chi_{cr}^2(\alpha, k-1)$, после чего принять или отвергнуть гипотезу об однородности выборок.

Постройте также гистограммы относительных частот двух выборок. Они должны выглядеть, как на рис. 2.2.

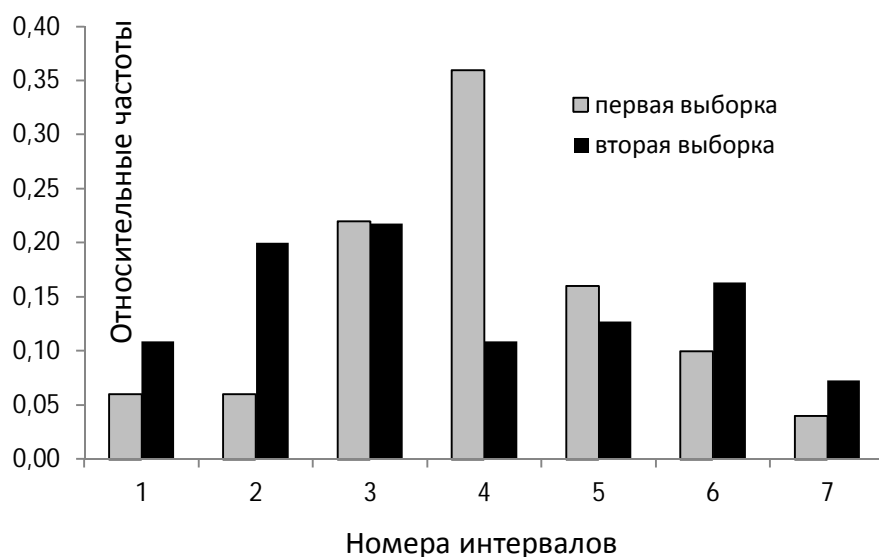


Рис. 2.2. К сравнению эмпирических распределений с помощью критерия Пирсона

Контрольные вопросы

1. Почему выводы на основании проверки статистических гипотез носят вероятностный характер?
2. Что такое уровень значимости гипотезы?
3. В чём различие параметрических и непараметрических критериев проверки гипотез?
4. Как связан вид критической области с конкурирующей гипотезой?
5. В чём идея критерия Уилкоксона?
6. В чём идея критерия Пирсона?
7. Сформулируйте выводы по выполнению заданий лабораторной работы.

Тема 3. СРАВНЕНИЕ ДИСПЕРСИЙ. ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

Гипотезы о дисперсиях. Методология дисперсионного анализа. Однофакторный и двухфакторный дисперсионный анализ экспериментальных данных.

3.1. Сравнение выборочной дисперсии с известной дисперсией генеральной совокупности

Такая постановка задачи уже приводилась выше в качестве примера статистической гипотезы (пример 2.1). Ещё раз поясним, что такая ситуация может возникнуть, если при проведении измерений хорошо отработанным методом с известной характеристикой точности (СКО) σ_0 были внесены некоторые изменения в условия измерения.

Основная гипотеза имеет вид $H_0 : \sigma^2(x_1) = \sigma_0^2$, где под x_1 понимается некоторый набор измерений. Мы рассмотрим два случая конкурирующей гипотезы: $H_1 : \sigma^2(x_1) > \sigma_0^2$ и $H_1 : \sigma^2(x_1) < \sigma_0^2$. В первом случае мы подозреваем, что в результате внесения изменений в условия измерений точность могла ухудшиться, а во втором – наоборот, улучшиться.

Проверочную статистику задаём в виде

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2(x_1)}{\sigma_0^2}. \quad (3.1)$$

При $H_1 : \sigma^2(x_1) > \sigma_0^2$ критическая область – правосторонняя. Находим критическую точку $\chi_{cr}^2(\alpha, n-1)$. Если $\chi^2 > \chi_{cr}^2$, то H_0 отвергается (точность измерений ухудшилась). В противном случае нет оснований отклонить H_0 .

При $H_1 : \sigma^2(x_1) < \sigma_0^2$ критическая область – левосторонняя. Находим критическую точку $\chi_{cr}^2(1-\alpha, n-1)$. Если $\chi^2 < \chi_{cr}^2$, то H_0 отвергается (точность измерений улучшилась). В противном случае нет оснований отклонить H_0 .

Пример 3.1. По результатам 17 измерений в новых условиях найдена исправленная выборочная дисперсия $s^2(x_1) = 0.24$, тогда как ранее считалось, что точность измерений можно характеризовать величиной $\sigma_0^2 = 0.18$. Требуется при уровне значимости 0.05 проверить нулевую гипотезу $H_0 : \sigma^2(x_1) = \sigma_0^2$, приняв в качестве конкурирующей гипотезы $H_1 : \sigma^2(x_1) > \sigma_0^2$. (Возникло подозрение, что точность измерений ухудшилась).

По формуле (3.1) находим

$$\chi^2 = \frac{16 \times 0.24}{0.18} = 21.33.$$

По таблице (прил. 4) $\chi_{cr}^2(0.05; 16) = 26.5$. Т. к. $\chi^2 < \chi_{cr}^2$, нет оснований отклонить H_0 . Точность измерений не ухудшилась.

3.2. Сравнение двух выборочных дисперсий

Предположим, что имеется 2 измерительных устройства, служащих одной и той же цели, или, скажем, два станка, изготавливающих один и тот же вид деталей. Погрешность измерения (или погрешность изготовления деталей по определённому контролируемому размеру) имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием (иначе говоря, систематическая погрешность отсутствует). Требуется проверить, является ли точность двух измерительных устройств (точность работы двух станков) одинаковой.

Поясним ситуацию. Отсутствие систематической погрешности означает, что *в среднем*, по результату многих опытов, оба измерительных устройства (или оба станка) работают верно. Из этого, конечно, вовсе не следует, что устройства (станки) работают абсолютно точно в каждом отдельном случае, поскольку всегда имеют место случайные ошибки (рассеивание). Мерой рассеивания служит дисперсия. Поэтому необходимо проверить гипотезу о равенстве генеральных дисперсий:

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2.$$

Извлекаем из совокупностей выборки x_1 и x_2 объёма n_1 и n_2 соответственно. По ним рассчитываем исправленные дисперсии $s^2(x_1)$ и $s^2(x_2)$. Договоримся ввести нумерацию совокупностей так, чтобы выполнялось $s^2(x_1) > s^2(x_2)$. В качестве проверяемой статистики выбираем величину

$$F = \frac{s^2(x_1)}{s^2(x_2)}. \quad (3.2)$$

Распределение, которому подчинена случайная величина F , называется распределением Фишера–Снедекора со степенями свободы $k_1 = n_1 - 1$ и $k_2 = n_2 - 1$.

Критические точки распределения Фишера–Снедекора могут быть найдены по специальной таблице (прил. 7), входом в которую являются уровень значимости гипотезы α и числа k_1 и k_2 . Конкурирующая гипотеза может быть задана либо в виде $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$, либо в виде $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$. В

первом случае мы имеем правостороннюю критическую область и условие $P(F > F_{cr}) = \alpha$. Поэтому, критическую точку следует искать как $F_{cr}(\alpha, k_1, k_2)$. Во втором случае получаем двустороннюю критическую область, для которой $P(F > F_{cr}) = \alpha/2$, и следовательно, правая критическая точка определяется как $F_{cr}(\alpha/2, k_1, k_2)$. Ясно, что чем сильнее различаются исправленные выборочные дисперсии, тем меньше шансов, что нулевая гипотеза будет принята.

Итак, правила проверки основной гипотезы $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ при уровне значимости α таковы.

Для конкурирующей гипотезы $H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ находим границу $F_{cr}(\alpha, k_1, k_2)$ правосторонней критической области. При $F < F_{cr}$ нет оснований отклонить основную гипотезу; в противном случае H_0 отвергается.

Для конкурирующей гипотезы $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ находим правую границу двусторонней критической области как $F_{cr}(\alpha/2, k_1, k_2)$. При $F < F_{cr}$ нет оснований отклонить основную гипотезу; в противном случае H_0 отвергается.

Пример 3.2. Требуется сравнить точность работы двух станков по выборкам значений контролируемого размера детали. Выборка с 1-го станка: 8.1, 7.8, 8.0, 8.2, 8.1, 8.1, 7.9, 7.8. Выборка со 2-го станка: 7.9, 7.7, 8.3, 8.5, 8.0. Можно ли при уровне значимости $\alpha = 0.01$ считать точность станков одинаковой, если принять в качестве конкурирующей гипотезы: дисперсия для 2-го станка выше, чем для 1-го?

Расчёты показывают, что исправленная дисперсия для второй выборки, действительно, выше, чем для первой. Поэтому изменяем нумерацию выборок на противоположную и записываем: $s^2(x_2) = 0.023$, $s^2(x_1) = 0.102$, откуда $F \approx 4.4$. В таблице критических точек находим $F_{cr}(0.01, 4, 7) = 7.85$. Поскольку $F < F_{cr}$, нет оснований отклонить нулевую гипотезу об одинаковой точности станков.

Результат может удивить: ведь опыт показал более чем четырёхкратное различие выборочных дисперсий, но гипотеза о равенстве генеральных дисперсий не отвергнута! Всё объяснимо. Во-первых, свою роль сыграли низкие объёмы выборок. (Убедитесь с помощью таблицы, что с увеличением объёмов критическая область расширяется). Во-вторых, необходимо помнить, что задача решена для определённого уровня значимости гипотезы. Увеличение уровня значимости α означает переход к более жёсткой проверке нулевой гипотезы и снижает её «шансы». Действительно, при $\alpha = 0.05$ получаем $F_{cr}(0.05, 4, 7) = 4.12$, и следовательно, для этого уровня значимости гипотеза должна быть отклонена.

Пример 3.3. По двум рядам измерений одинакового объёма ($n = 12$), выполненных двумя приборами, найдены $s^2(x_2) = 5.7$, $s^2(x_1) = 3.9$. При уровне значимости 0.02 проверить гипотезу $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ при $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

В этом случае критическая область двусторонняя,

$$F_{cr}(\alpha/2, k_1, k_2) = F_{cr}(0.01, 11, 11) = 4.46,$$

тогда как наблюдаемое значение критерия равно 1.46. Так как $F < F_{cr}$, нет оснований отвергнуть гипотезу о равенстве генеральных дисперсий. Точность измерения у двух приборов значимо не различается.

3.3. Понятие о дисперсионном анализе. Виды дисперсии

Дисперсионный анализ разработан выдающимся английским статистиком и биологом Р. Фишером для анализа результатов экспериментальных исследований. Отдавая дань тому факту, что одной из основных областей приложения статистической теории для Фишера было исследование урожайности сельскохозяйственных культур, рассмотрим основы дисперсионного анализа на примере именно из этой области.

Пусть имеется m сортов помидоров. Для проверки их урожайности было высажено по несколько кустов каждого сорта, и весь урожай с каждого куста зарегистрирован. Требуется оценить влияние фактора сортности на урожайность, отделив его от влияния других, случайных факторов, таких как индивидуальные (но не сортовые!) различия между отдельными саженцами, вариации почвы, освещённости, влажности и т. п.

Сначала рассмотрим очевидный, но, как окажется, далеко не простой путь к решению подобных задач. Можно для каждого сорта оценить средний урожай с одного куста и сравнить между собой эти выборочные средние. В принципе, такая задача решалась нами в п. 2.2. Сложность, однако, состоит в том, что теперь мы должны сравнить не две, а m средних. Для этого придётся сопоставлять средние *парно*, но тогда при пяти (к примеру) сортах помидоров придётся проверить $C_5^2 = 10$ (десять!) гипотез о равенстве генеральных средних. И если ни одна из них не будет отвергнута, то влияние фактора будет признано незначительным.

Иную схему решения подобной проблемы разработал Фишер. Идея заключалась в том, чтобы проверять гипотезу о влиянии некоторого фактора, анализируя характеристики вариации (различные виды дисперсии). Такой подход и получил название дисперсионного анализа.

Пусть $k = 1, 2, \dots, m$ – номер сорта помидоров (в общем случае пользуются термином «уровень фактора»); n_k – число наблюдаемых кустов сорта k ; $n = \sum_{k=1}^m n_k$ – общее число наблюдаемых кустов; x_{ki} – вес урожая, снятого с i -го куста k -го сорта.

Групповая средняя будет представлять собой средний урожай для кустов k -го сорта:

$$\bar{x}_k = \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} x_{ki} . \quad (3.3)$$

Общая средняя есть средний урожай по всем наблюдаемым кустам:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^{n_k} x_{ki} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m n_k \bar{x}_k . \quad (3.4)$$

Теперь перейдем к характеристикам вариации. Используемое ниже сокращение SS соответствует английскому выражению Sum of Squares (сумма квадратов).

Полная вариация и полная дисперсия

$$SST = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^{n_k} (x_{ki} - \bar{x})^2 , \sigma^2(x) = \frac{1}{n} SST \quad (3.5)$$

характеризуют всю вариацию признака, вызванную как известными, так и неизвестными (случайными) факторами.

Межгрупповая вариация и межгрупповая дисперсия

$$SSA = \sum_{k=1}^m (\bar{x}_k - \bar{x})^2 n_k , \sigma_A^2 = \frac{1}{n} SSA \quad (3.6)$$

характеризуют рассеивание групповых средних относительно общей средней. В нашем случае именно эти величины будут показывать, насколько сильно различается урожайность отдельных сортов, т. е. насколько существенное влияние оказывает фактор A . Поэтому можно называть эти величины *факторной вариацией и факторной дисперсией*.

Остаточная вариация и остаточная дисперсия

$$SSR = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^{n_k} (x_{ki} - \bar{x}_k)^2 , \sigma_R^2 = \frac{1}{n} SSR \quad (3.7)$$

характеризуют рассеивание отдельных измерений относительно «своих» групповых средних. Влияние фактора сорта здесь исключено, осталось только влияние случайных (неучтенных) факторов.

Замечание. Остаточная дисперсия – это средневзвешенное значение для так называемых групповых (внутренних) дисперсий:

$$\sigma^2(x_k) = \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} (x_{ki} - \bar{x}_k)^2; \quad \sigma_R^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m \sigma^2(x_k) n_k. \quad (3.8)$$

Найдём сумму межгрупповой (факторной) дисперсии и остаточной дисперсии:

$$\begin{aligned} \sigma_A^2 + \sigma_R^2 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m (\bar{x}_k^2 n_k - 2\bar{x}_k \bar{x} n_k + \bar{x}^2 n_k) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^{n_k} (x_{ki}^2 - 2x_{ki} \bar{x}_k + \bar{x}_k^2) = \\ &= \frac{\sum_{k=1}^m \bar{x}_k^2 n_k}{n} - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2 + \bar{x}^2 - \frac{2 \sum_{k=1}^m \bar{x}_k \sum_{i=1}^{n_k} x_{ki}}{n} + \frac{\sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^{n_k} x_{ki}^2}{n} = \bar{x}^2 - \bar{x}^2 = \sigma^2. \end{aligned}$$

Итак,

$$\sigma^2 = \sigma_A^2 + \sigma_R^2, \quad SST = SSA + SSR. \quad (3.9)$$

Полученное равенство имеет важный теоретический и практический смысл. Полная вариация (и полная дисперсия) количественного признака может быть разложена на два слагаемых. Первое из них соответствует той части, которая вызвана влиянием выбранного фактора. Другое слагаемое есть характеристика вариации, обусловленной всеми остальными факторами, которые не уточняются и полагаются случайными. Величина

$$0 \leq \eta^2 \equiv \frac{SSA}{SST} \leq 1 \quad (3.10)$$

называется *коэффициентом детерминации* и показывает, какую долю вариации обеспечивает исследуемый фактор.

Пример 3.4. В табл. 3.1 помещены данные о весе урожая (кг), собранного с 20 кустов помидоров (по 4 куста каждого из 5 исследуемых сортов). Требуется установить влияние фактора сортности на урожайность.

Таблица 3.1

№ наблюдения (куста)	Уровни фактора и названия сортов				
	1	2	3	4	5
	«алёна»	«бычье сердце»	«карлсон»	«слива»	«чёрный принц»
1	1.8	2.1	1.8	1.6	1.9
2	2.1	2.3	1.6	1.8	2.4
3	1.8	2.4	1.9	1.3	2.2
4	1.9	2.6	2.1	1.5	2.3

Результаты расчётов групповых средних и дисперсий представим в виде табл. 3.2.

Таблица 3.2

Характеристики	Уровни фактора (k)				
	1	2	3	4	5
\bar{x}_k	1.9	2.35	1.85	1.55	2.2
$\sigma^2(x_k)$	0.015	0.0325	0.0325	0.0325	0.035

Общая средняя $\bar{x} = 1.97$. Равенство $\sigma^2 = \sigma_A^2 + \sigma_R^2$ выполняется: общая дисперсия $\sigma^2 = 0.1081$, факторная дисперсия $\sigma_A^2 = 0.0786$, остаточная дисперсия $\sigma_R^2 = 0.0295$. Коэффициент детерминации $\eta^2 \approx 0.727$. Это означает, что 72.7 % вариации можно объяснить наличием разных сортов растений, а остальные 27.3 % обусловлены влиянием других факторов.

Замечание. Одним их исходных положений дисперсионного анализа является равенство дисперсий в сравниваемых генеральных совокупностях, относящихся к разным уровням фактора. Строго говоря, для сравнения трёх и более дисперсий применяется так называемый критерий Кохрена. Упрощённый подход может состоять в сравнении максимальной и минимальной дисперсий по критерию Фишера. Так, в примере 3.4 отношение максимальной и минимальной дисперсий составляет 2.33 (число степеней свободы в данном случае одинаково). При этом $F_{cr}(0.05, 3, 3) = 9.28$, так что даже крайние групповые дисперсии не имеют значимого различия и предпосылка дисперсионного анализа выполнена.

3.4. Гипотеза о значимости фактора. Число степеней свободы вариации. Критерий Фишера

Результат, полученный при рассмотрении примера 3.4, достаточно убедительно свидетельствует о том, что фактор сортности существенно влияет на урожайность. Заметьте также, что средний урожай с одного куста «бычьего сердца» примерно в 1.5 раза превышает аналогичный показатель для «сливы», что, конечно, трудно объяснить случайностью. Впрочем, такие оценки «на глазок» в статистике чреватые ошибками. К тому же, картина вовсе не всегда бывает столь определённой, как в рассмотренном примере. Поэтому необходимо сформулировать правила проверки статистической гипотезы о значимости (вернее – незначимости) фактора.

В дисперсионном анализе такой критерий строится на соотношении факторной и остаточной дисперсий. Мы уже использовали при сравнении дисперсий критерий Фишера (3.2). Этим же путём мы пойдём и сейчас. Однако сначала необходимо решить вопрос о числе степеней свободы вариации. Полная вариация (3.5) имеет $n - 1$ степень свободы, а средний квадрат отклонения (Mean Square) в расчёте на одну степень свободы равен

$$MST = \frac{SST}{n-1} = s^2(x) = \frac{n}{n-1} \sigma^2(x). \quad (3.11)$$

Факторная вариация (3.6) имеет $m-1$ степень свободы, и, соответственно:

$$MSA = \frac{SSA}{m-1} = s_A^2 = \frac{n}{m-1} \sigma_A^2. \quad (3.12)$$

Наконец, остаточная вариация (3.7) имеет $n-m$ степеней свободы, и, соответственно:

$$MSR = \frac{SSR}{n-m} = s_R^2 = \frac{n}{n-m} \sigma_R^2. \quad (3.13)$$

Число степеней свободы вариации, как и сама вариация, подчиняется правилу разложения на «факторную» и «остаточную» части:

$$n-1 = m-1 + (n-m). \quad (3.14)$$

Для проверки гипотезы о незначительности влияния некоторого фактора A в качестве статистического критерия рассматривается отношение факторной и остаточной вариаций, вычисленных с учётом числа степеней свободы:

$$F = \frac{MSA}{MSR}. \quad (3.15)$$

Наблюдаемое значение дисперсионного отношения сравнивается с границей правосторонней критической области $F_{cr}(\alpha, m-1, n-m)$. При $F < F_{cr}$ нет оснований отклонить нулевую гипотезу, а это означает, что влияние фактора A следует признать незначительным.

Пример 3.4 (окончание).

$s_A^2 = \frac{20}{5-1} \times \sigma_A^2 = 0.393$, $s_R^2 = \frac{20}{20-5} \sigma_R^2 \approx 0.03933$, $F = s_A^2 / s_R^2 \approx 9.99$, $F_{cr}(0.05, 4, 15) = 3.06$. $F > F_{cr}$, нулевая гипотеза отклоняется. Сортность помидоров значительно влияет на их урожайность.

3.5. Двухфакторный дисперсионный анализ

Пусть целью эксперимента является выявление зависимости x от двух факторов A и B . Напомним, что при однофакторном дисперсионном анализе нам на каждом уровне фактора A пришлось проводить повторные измерения, чтобы найти групповые дисперсии. Для случая двух факторов традиционный подход требует проведения повторных экспериментов при всех возможных сочетаниях уровней факторов. Если фактор A задается на уровнях A_k ($k = \overline{1, m}$), а фактор B – на уровнях B_i ($i = \overline{1, l}$), и при каждом сочетании уровней проводится одинаковое число опытов N , то общее число опытов $n = mlN$ оказывается весьма большим. Упрощение состоит в

том, чтобы использовать повторные измерения на каждом уровне фактора A одновременно и для оценки влияния фактора B . Тогда $n = ml$. План такого эксперимента будет выглядеть следующим образом:

Уровни фактора B	Уровни фактора A				
	A_1	...	A_k	...	A_m
B_1	x_{11}	...	x_{k1}	...	x_{m1}
...
B_i	x_{1i}	...	x_{ki}	...	x_{mi}
...
B_l	x_{1l}	...	x_{kl}	...	x_{ml}

Итак, мы рассматриваем две схемы проведения двухфакторного дисперсионного анализа.

1. Двухфакторный дисперсионный анализ без повторений (упрощённый подход). В этом случае каждой паре уровней факторов $A_k B_i$ соответствует одно измерение x_{ki} , общее число измерений равно $n = ml$. Вводим групповые средние по столбцам и по строкам:

$$\bar{x}_k = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l x_{ki}, \quad \bar{x}_i = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m x_{ki}. \quad (3.16)$$

Находим общую среднюю

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^l x_{ki}. \quad (3.17)$$

Вычисляем вариации:

– полную (связанную со всеми факторами, в том числе неучтёнными)

$$SST = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^l (x_{ki} - \bar{x})^2; \quad (3.18)$$

– связанную с фактором A

$$SSA = l \sum_{k=1}^m (\bar{x}_k - \bar{x})^2; \quad (3.19)$$

– связанную с фактором B

$$SSB = m \sum_{i=1}^l (\bar{x}_i - \bar{x})^2; \quad (3.20)$$

– связанную с неучтёнными факторами (остаточную)

$$SSR = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^l (x_{ki} - \bar{x}_k - \bar{x}_i + \bar{x})^2. \quad (3.21)$$

Выполняется правило разложения как для самих вариаций

$$SST = SSA + SSB + SSR, \quad (3.22)$$

так и для их числа степеней свободы

$$ml - 1 = (m - 1) + (l - 1) + (m - 1)(l - 1). \quad (3.23)$$

Для проверки гипотез о значимости факторов рассчитываются вариации на одну степень свободы:

$$MSA = \frac{1}{m - 1} SSA; \quad MSB = \frac{1}{l - 1} SSB; \quad MSR = \frac{1}{(m - 1)(l - 1)} SSR. \quad (3.24)$$

Для заданного уровня значимости α :

- фактор A признаётся значимым, если $MSA/MSR > F_{cr}(\alpha, m - 1, (m - 1)(l - 1))$;
- фактор B признаётся значимым, если $MSB/MSR > F_{cr}(\alpha, l - 1, (m - 1)(l - 1))$.

2. Двухфакторный дисперсионный анализ с повторениями («традиционный» подход). В этом случае каждой паре уровней факторов $A_k B_i$ соответствует N измерений $x_{ki}^{(1)}, x_{ki}^{(2)}, \dots, x_{ki}^{(N)}$, общее число измерений равно $n = mlN$. Находим среднюю для каждой пары уровней факторов:

$$\bar{x}_{ki} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_{ki}^{(j)}. \quad (3.25)$$

Вводим групповые средние по столбцам и по строкам:

$$\bar{x}_k = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l \bar{x}_{ki}, \quad \bar{x}_i = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \bar{x}_{ki}. \quad (3.26)$$

Находим общую среднюю

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^l \bar{x}_{ki}. \quad (3.27)$$

Вычисляем вариации:

- полную (связанную со всеми факторами, в том числе неучтёнными)

$$SST = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^l (x_{ki}^{(j)} - \bar{x})^2; \quad (3.28)$$

- связанную с фактором A

$$SSA = lN \sum_{k=1}^m (\bar{x}_k - \bar{x})^2; \quad (3.29)$$

– связанную с фактором B

$$SSB = mN \sum_{i=1}^l (\bar{x}_i - \bar{x})^2 ; \quad (3.30)$$

– отражающую взаимодействие факторов A и B

$$SSAB = N \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^l (\bar{x}_{ki} - \bar{x}_k - \bar{x}_i + \bar{x})^2 , \quad (3.31)$$

– связанную с неучтёнными факторами (остаточную)

$$SSR = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^l (x_{ki}^{(j)} - \bar{x}_{ki})^2 . \quad (3.32)$$

Выполняется правило разложения как для самих вариаций

$$SST = SSA + SSB + SSAB + SSR, \quad (3.33)$$

так и для их числа степеней свободы:

$$Nml - 1 = (m - 1) + (l - 1) + (m - 1)(l - 1) + ml(N - 1). \quad (3.34)$$

Для проверки гипотез о значимости факторов рассчитываются вариации на одну степень свободы:

$$MSA = \frac{1}{m - 1} SSA ; MSB = \frac{1}{l - 1} SSB ; \quad (3.35)$$

$$MSAB = \frac{1}{(m - 1)(l - 1)} SSAB ; MSR = \frac{1}{ml(N - 1)} SSR.$$

Для заданного уровня значимости α :

– фактор A признаётся значимым, если

$$MSA/MSR > F_{cr}(\alpha, m - 1, ml(N - 1));$$

– фактор B признаётся значимым, если

$$MSB/MSR > F_{cr}(\alpha, l - 1, ml(N - 1));$$

– взаимодействие факторов признаётся значимым, если

$$MSAB/MSR > F_{cr}(\alpha, (m - 1)(l - 1), ml(N - 1)).$$

Примеры применения двухфакторного дисперсионного анализа будут рассмотрены далее.

Примеры выполнения заданий на компьютере: дисперсионный анализ экспериментальных данных

Задание 1. Предположим, что вы руководитель компании, производящей тросы из синтетических волокон. Тросы изготавливаются из волокон, поставляемых четырьмя разными поставщиками. Основной характеристикой троса является его прочность. Необходимо убедиться, что волокна, поставляемые разными поставщиками, обладают одинаковой прочностью. Для этого следует разработать схему эксперимента, в ходе которого измеряется прочность тросов, сделанных из волокон разных поставщиков.

Из волокон каждого поставщика сделано по пять тросов. Группы разделены по поставщикам – A_1, A_2, A_3, A_4 . Прочность волокон измеряется с помощью специального устройства, испытывающего тросы на разрыв. Результаты эксперимента (предел прочности на разрыв), представлены следующим образом:

	поставщики			
	A_1	A_2	A_3	A_4
	18.5	26.3	20.6	25.4
	24.0	25.3	25.2	19.9
	17.2	24.0	20.8	22.6
	19.9	21.2	24.7	17.5
	18.0	24.5	22.9	20.4

Инструкция по выполнению задания 1

В Excel в надстройке *Анализ данных* есть специальный режим **Одномерный дисперсионный анализ**. Однако для того, чтобы лучше понять суть метода, имеет смысл выполнить хотя бы несколько расчётов без использования этого средства.

1. С помощью функции СРЗНАЧ найдите групповые средние (3.3) и общую среднюю (3.4). Поместите их в дополнительной строке.

2. Для расчёта полной вариации SST можно предварительно сделать табличку, в каждой клетке которой вычисляется разность между результатом измерения и общей средней, а затем применить функцию СУММКВ. Другой способ состоит в обращении к функции ДИСПР. Результат (смещённая оценка $\sigma^2(x)$ генеральной дисперсии) должен быть умножен на общее число измерений $n = 20$.

3. Аналогичными способами может быть вычислена межгрупповая вариация SSA (3.6). Отличие лишь в присутствии дополнительного множителя $n_k = 5$ и в том, что вместо результатов отдельных измерений в расчёте будут фигурировать групповые средние \bar{x}_k .

4. Расчёт остаточной вариации SSR (3.7) чуть более сложен, поскольку придётся суммировать вариации (или дисперсии), вычисленные отдельно по каждой группе.

5. Число степеней свободы составляет: для $SST n-1=19$, для $SSA m-1=3$, для $SSR n-m=16$. С учётом этого вычисляются средние квадраты на одну степень свободы MST, MSA, MSR (3.11–3.13).

6. Находим значение статистики Фишера $F = \frac{MSA}{MSR}$.

7. Для нахождения критического значения $F_{cr}(0.05, 3, 16)$ можно воспользоваться прил. 7 или функцией $FPACПОБР$.

8. Убедившись, что гипотеза о незначимости фактора «Поставщик» для прочности троса должна быть отвергнута, вычисляем коэффициент детерминации (3.10).

Решение закончено. Результаты проанализируем после применения второго, гораздо более простого способа.

Пройдём по меню Данные → Анализ данных, выберем строку **Однофакторный дисперсионный анализ** и заполним открывшееся окно (рис. 3.1).

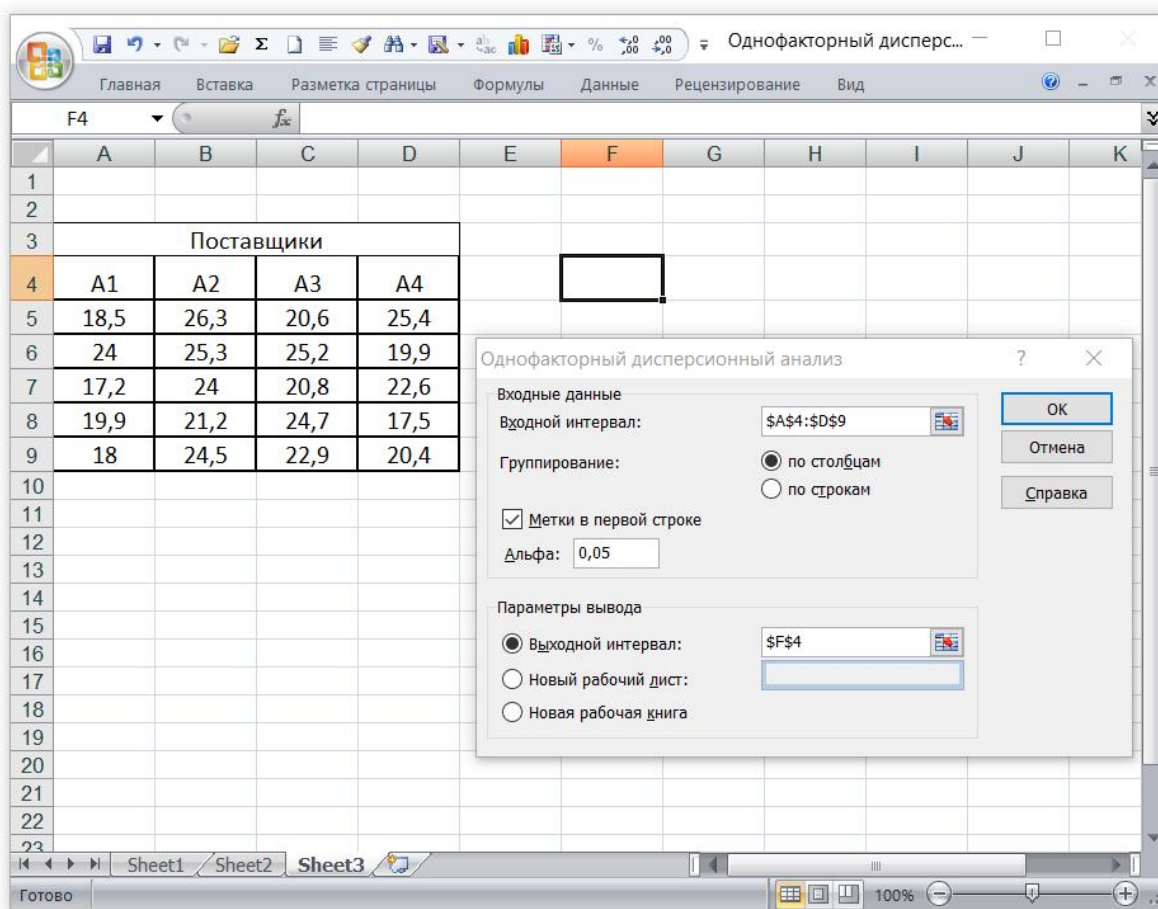


Рис. 3.1. Однофакторный дисперсионный анализ (исходные данные)

После нажатия на ОК появляются результаты, показанные на рис. 3.2.

Группы	Счет	Сумма	Среднее	Дисперсия
A1	5	97,6	19,52	7,237
A2	5	121,3	24,26	3,683
A3	5	114,2	22,84	4,553
A4	5	105,8	21,16	8,903

Источник вариации	SS	df	MS	F	P-Значе.	F критическое
Между группами	63,2855	3	21,09517	3,461629	0,0414	3,238872
Внутри групп	97,504	16	6,094			
Итого	160,7895	19				

Рис. 3.2. Однофакторный дисперсионный анализ (результаты)

Анализ результатов. Необходимо иметь в виду, что значения в столбце «Дисперсия» на рис. 3.2 – это исправленные дисперсии (их в Excel можно найти с помощью функции ДИСП, а не ДИСПР). Все остальные результаты не должны отличаться от того, что можно получить «вручную» в соответствии с описанием в пп. 1–8. Итак, поскольку значение статистики Фишера превышает критическое значение ($3.46 > 3.23$), гипотеза о незначимости влияния фактора «Поставщик» на среднее значение предела прочности троса отвергается. Значение коэффициента детерминации (3.10)

$$\eta^2 \equiv \frac{SSA}{SST} = \frac{63.2855}{160.7895} = 0.394$$

показывает, что этот фактор определяет вариацию прочности троса на 39.4 %. Остальные 60.6 % вариации прочности троса определяются прочими, неучтёнными факторами.

Задание 2. Данное задание следует рассматривать как усложнение предыдущего. На фабрике используется два вида станков для изготовления тросов. Во-первых, снова необходимо убедиться, что все поставляемые волокна обладают одинаковой прочностью. Можно ли утверждать, что тросы, изготовленные на станке 1-го типа, так же прочны, как и тросы, произведенные на станках второго типа? Существует ли разница между прочностью тросов, изготовленных из синтетических волокон разных поставщиков на разных станках? Чтобы ответить на эти вопросы, следует разработать схему эксперимента, в ходе которого измеряется прочность тросов, сделанных из синтетических волокон разных поставщиков на разных станках.

В дополнение к данным задания 1, которые теперь считаются относящимися к станку 2-го типа, имеются данные, относящиеся к станку 1-го типа, представленные в следующем виде:

	поставщики			
	A_1	A_2	A_3	A_4
	20.6	22.6	27.7	21.5
	18.0	24.6	18.6	20.0
	19.0	19.6	20.8	21.1
	21.3	23.8	25.1	23.9
	13.2	27.1	17.7	16.0

Инструкция по выполнению задания 2

Обсудим, как можно произвести расчёты без использования надстройки «Анализ данных». Теперь кроме 4 уровней фактора A у нас есть 2 уровня фактора B (станки двух типов). При каждом сочетании факторов – 5 измерений. Итак, $m=4$, $l=2$, $N=5$, $n=40$. Кратко перечисляем основные шаги, поскольку они выполняются аналогично тем действиям, что были описаны в инструкции к заданию 1:

1. Рассчитываем средние \bar{x}_{ki} (3.25) при каждом сочетании уровней факторов.

2. Вычисляем групповые средние (3.26) и общую среднюю (3.27).

3. Вычисляем SST (3.28).

4. Находим SSA (3.19) и SSB (3.20).

5. Находим $SSAB$ (3.31). Это новый элемент вычислений по сравнению с заданием 1, но он требует лишь использования функций СРЗНАЧ и СУММ.

6. Для расчёта SSR (3.32) имеет смысл подготовить табличку, в которой каждый элемент представляет собой разность между результатом конкретного измерения и средним значением, вычисленным по 5 измерениям, относящимся к данному сочетанию уровней факторов, а затем использовать функцию СУММКВ.

7. Число степеней свободы составляет: для $SSTn-1=39$, для $SSA m-1=3$, для $SSB l-1=1$, для $SSAB(m-1)(l-1)=3$, для $SSRml(N-1)=32$. С учётом этого вычисляются средние квадраты на одну степень свободы $MST, MSA, MSB, MSAB, MSR$ (3.35).

8. Находим значение статистик $F_A = \frac{MSA}{MSR}$, $F_B = \frac{MSB}{MSR}$, $F_{AB} = \frac{MSAB}{MSR}$ и критические значения $F_{Acr}(0.05, 3, 32)$, $F_{Bcr}(0.05, 1, 32)$, $F_{ABcr}(0.05, 3, 32)$. Делаем выводы о значимости влияния каждого фактора в отдельности и влияния, обусловленного взаимодействием факторов.

Теперь рассмотрим решение данного задания с помощью надстройки **Анализ данных**, а затем проанализируем результаты. Пройдём по меню Данные → Анализ данных, выберем строку **Двухфакторный дисперсионный анализ (с повторениями)** и заполним открывшееся окно (рис. 3.3).

После нажатия на ОК появляются результаты, показанные на рис. 3.4. Проанализируем их. Сначала следует проверить, существует ли взаимодействие между факторами A (поставщиками) и B (типами станка). Если эффект взаимодействия является значительным, дальнейший анализ ограничивается лишь оценкой этого эффекта. С другой стороны, если эффект взаимодействия незначителен, необходимо сосредоточиться на главных эффектах – потенциальных различиях между поставщиками (фактор A) и типами станков (фактор B).

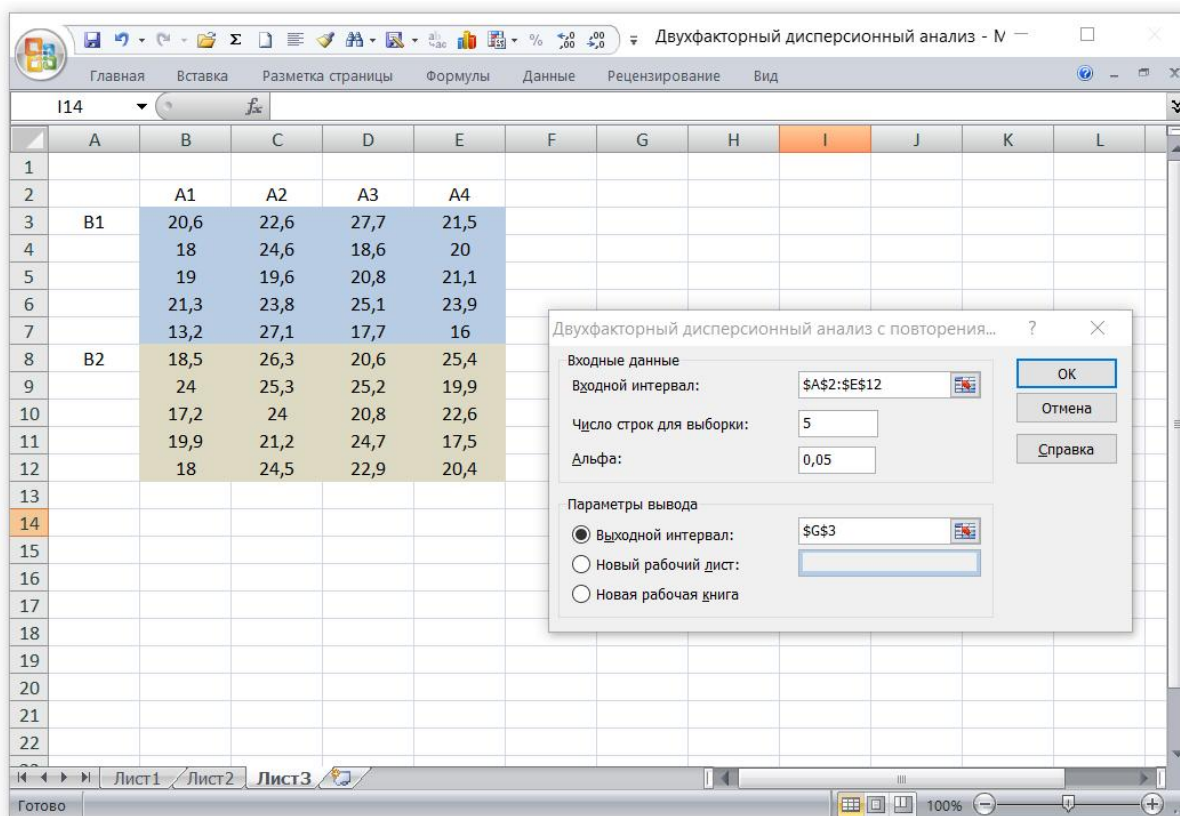


Рис. 3.3. Двухфакторный дисперсионный анализ (исходные данные)

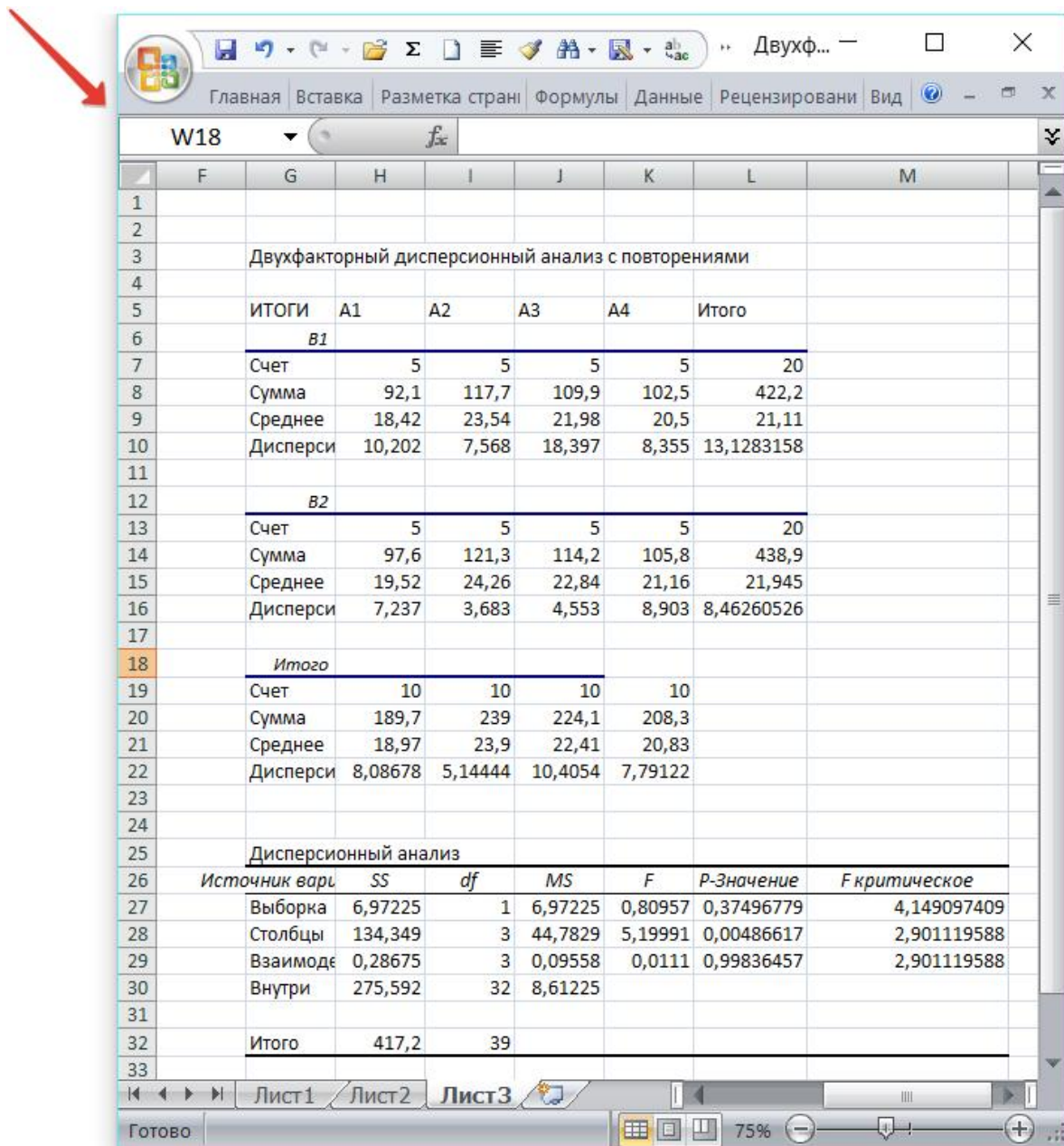


Рис. 3.4. Двухфакторный дисперсионный анализ (результаты)

Чтобы определить наличие эффекта взаимодействия при заданном уровне значимости (0.05), применяется следующий критерий: нулевая гипотеза об отсутствии эффекта взаимодействия отклоняется, если вычисленное значение F_{AB} (см. рис. 3.4, таблица *Дисперсионный анализ*, строка *Взаимодействие*, столбец *F*) больше критического значения F_{Acr} (рис. 3.4, строка *Взаимодействие*, столбец *F-критическое*). Поскольку $F = 0.01 < 2.90$, гипотеза не отклоняется. Следовательно, у нас недостаточно оснований утверждать, что факторы поставщика и станка взаимодействуют друг с другом. Теперь необходимо проанализировать главные эффекты.

Фактору A соответствует строка *Столбцы*, фактору B – строка *Выборка*. Поскольку $F_A = 5.20 > F_{Acr} = 2.90$, можно утверждать, что между прочностью тросов, произведенных из волокна, приобретенного у разных поставщиков, существует значимая разница. В то же время $F_B = 0.81 < F_{Bcr} = 4.15$. Следовательно, у нас недостаточно оснований утверждать, что между прочностью тросов, произведенных на разных станках, существует значимая разница.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте основную идею дисперсионного анализа.
2. Какие виды средних, вариаций и дисперсий вводятся в дисперсионном анализе?
3. Какое равенство для дисперсий выполняется в дисперсионном анализе?
4. Как определяется коэффициент детерминации и что он показывает?
5. Критерий Фишера и его использование в дисперсионном анализе.
6. Охарактеризуйте две схемы двухфакторного дисперсионного анализа (упрощенный и традиционный подходы).

Тема 4. КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ

Методология корреляционного анализа. Нелинейная корреляция. Множественная корреляция. Корреляция нечисловых данных. Коэффициент автокорреляции и корреляционная функция.

4.1. Корреляционная связь. Краткие сведения из теории корреляции

Иногда зависимости между величинами (например, физическими) достаточно точно описываются определёнными, строгими законами. Например, из кинематики известно, что тело, брошенное вертикально вверх с поверхности Земли со скоростью v_0 , должно подняться на высоту $H = v_0^2 / 2g$, где $g = 9.81 \text{ м/с}^2$ – ускорение силы тяжести. Однако, проделав этот опыт, мы вряд ли получим результат, в точности соответствующий записанной формуле. Дело в том, что она не вполне отвечает реальным условиям. Во-первых, мы не учитываем неоднородности поля силы тяжести в разных точках земной поверхности. Во-вторых, существует сопротивление воздуха, которое будет приводить к некоторому снижению точки максимального подъёма. Сила сопротивления воздуха зависит от скорости движения и от формы тела, а также от плотности воздуха. Всё это сильно усложняет задачу. И всё же все перечисленные факторы могут быть учте-

ны. Зависимость станет намного более сложной, но каждому определённо-му значению v_0 (при постоянных параметрах, характеризующих силу тяжести и силу трения) будет соответствовать определённое значение H .

Если величины x и y связаны так, что каждому значению x соответствует одно определённое значение y , то говорят, что имеет место функциональная зависимость $y = f(x)$.

Однако на практике часто приходится сталкиваться с задачами, где две величины связаны друг с другом, но связь эта такова, что одному значению количественного признака X могут соответствовать различные значения другого признака Y , которые заранее нельзя предсказать в точности. Это позволяет говорить о наличии *совместной вариации* количественных признаков.

Пример 4.1. Существует зависимость предела прочности стали от содержания в ней углерода. Однако в силу того, что на регистрируемую величину прочности влияет не только содержание углерода в стали, но также ряд других факторов (содержание марганца и кремния, изменение технологии изготовления, погрешность измерения и пр.), одному значению содержания углерода практически соответствует ряд значений прочности.

Корреляционной связью называется вероятностная или статистическая зависимость, не имеющая строгого функционального характера.

В некоторых случаях корреляционная связь допускает чисто теоретическое исследование, поскольку возможно построение совместного закона распределения случайных величин. Применяемая при этом *теория корреляции* случайных величин является разделом теории вероятностей. В других случаях (в частности, в приведённом ранее примере о прочности стали) исследование корреляционной связи должно основываться на данных наблюдений поведения количественных признаков (т. е. на статистических данных). Такое исследование называют *корреляционным анализом*.

Приведём краткие необходимые сведения из теории корреляции. Если результат опыта описывается не одной, а несколькими случайными величинами, зависящими друг от друга, то говорят о *системе случайных величин*. Пусть дискретная случайная величина X может принимать значения x_i , $i = \overline{1, k}$, дискретная случайная величина Y – значения y_j , $j = \overline{1, m}$. Известны также вероятности, с которыми система принимает определённые состояния: $p_{ij} = p(x_i, y_j)$.

Можно ввести *законы распределения составляющих системы*

$$P(X = x_i) = \sum_j p_{ij}; \quad P(Y = y_j) = \sum_i p_{ij}$$

и условные законы распределения составляющих

$$P(X = x_i | Y = y_j) = p_{ij} / P(Y = y_j);$$

$$P(Y = y_j | X = x_i) = p_{ij} / P(X = x_i).$$

Важным является понятие *условного математического ожидания* – это математическое ожидание одной случайной величины (Y) при условии, что другая случайная величина (X) принимает определённое значение (x_i):

$$M(Y|X = x_i) = \sum_j y_j P(Y = y_j | X = x_i). \quad (4.1)$$

Если $M(Y|X = x) = \varphi(x)$, то $\varphi(x)$ называется функцией регрессии Y по X . Функция регрессии устанавливает форму корреляционной связи двух случайных величин. В частности, она может оказаться линейной. (Не путайте линейную корреляцию с линейной зависимостью величин! Последнее означало бы присутствие функциональной, а не корреляционной связи между X и Y).

Форма корреляционной связи (линейная или нелинейная) не даёт нам информации о том, насколько тесно связаны между собой случайные величины, в какой степени две случайные величины варьируются совместно, т. е. коррелируются, и в какой варьируются независимо друг от друга.

В качестве «измерителя» тесноты связи двух величин логично предложить такой показатель, который принимает нулевое значение при полном отсутствии зависимости между X и Y . *Корреляционным моментом* (или *ковариацией*, т. е. совместной вариацией) случайных величин X и Y называется математическое ожидание произведения их отклонений:

$$\mu(X, Y) = M\{[X - M(X)][Y - M(Y)]\}$$

или

$$\mu(X, Y) = M(XY) - M(X)M(Y),$$

что (как и требовалось) равно нулю для независимых случайных величин. Если $\mu(X, Y) \neq 0$, то случайные величины называются коррелированными. Коррелированные величины зависимы (обратное не всегда верно).

Корреляционный момент имеет размерность, равную произведению размерностей случайных величин. *Коэффициентом линейной корреляции* называется безразмерная величина

$$r(X, Y) = \frac{\mu(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{M(XY) - M(X)M(Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}. \quad (4.2)$$

Если между двумя случайными величинами существует линейная зависимость (её можно рассматривать как предельно тесную корреляцию!),

то модуль коэффициента корреляции равен единице. Область значений коэффициента корреляции $|r(X, Y)| \leq 1$.

4.2. Двумерная нормальная случайная величина

Рассмотрим теперь систему непрерывных случайных величин (X, Y) . Плотностью вероятности системы (X, Y) называется величина

$$f(x, y) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{P(x \leq X \leq x + \Delta x, y \leq Y \leq y + \Delta y)}{\Delta x \Delta y}.$$

Законы распределения составляющих находятся как

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy; \quad f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx.$$

Для независимых случайных величин $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$.

Функция регрессии Y по X имеет вид

$$M(Y|X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y \psi(y|x) dy, \quad \text{где } \psi(y|x) = f(x, y) / f_1(x). \quad (4.3)$$

Двумерной нормальной случайной величиной называется система (X, Y) , имеющая плотность вероятности

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}\sigma_1\sigma_2} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-r^2)} \left[\left(\frac{x-a_1}{\sigma_1} \right)^2 - 2r \left(\frac{x-a_1}{\sigma_1} \right) \left(\frac{y-a_2}{\sigma_2} \right) + \left(\frac{y-a_2}{\sigma_2} \right)^2 \right] \right\}.$$

Функция $f(x, y)$ имеет 5 параметров: $a_1, a_2, \sigma_1, \sigma_2, r$. Путём несложных, но громоздких выкладок, которые мы не приводим, можно получить

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1;$$

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_1^2}}; \quad f_2(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(y-a_2)^2}{2\sigma_2^2}};$$

$$\frac{M[(X - a_1)(Y - a_2)]}{\sigma_1\sigma_2} = r.$$

При $r = 0$ $f_1(x)f_2(y) = f(x, y)$.

Таким образом, получаем:

- функция $f(x, y)$ всегда удовлетворяет условию нормировки;
- X и Y – нормальные случайные величины, причём

$$M(X) = a_1, \quad M(Y) = a_2, \quad \sigma(X) = \sigma_1, \quad \sigma(Y) = \sigma_2;$$

- параметр r имеет смысл коэффициента корреляции системы;
- для системы нормальных случайных величин некоррелированность тождественна независимости (в общем случае это не так).

График функции плотности представляет собой поверхность, вершина которой находится в точке (a_1, a_2) , а крутизна «склонов» зависит от σ_1 и σ_2 . Линиями уровня являются так называемые эллипсы рассеивания:

$$\left(\frac{x-a_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2r\left(\frac{x-a_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-a_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y-a_2}{\sigma_2}\right)^2 = const.$$

Если случайные величины не коррелированы ($r=0$), то оси эллипсов ориентированы вдоль осей координат. Если при этом $\sigma_1 = \sigma_2$, эллипсы превращаются в окружности.

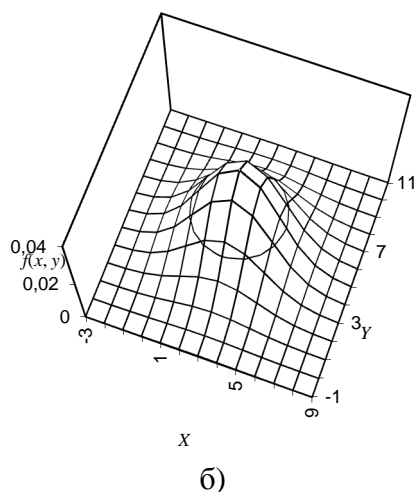
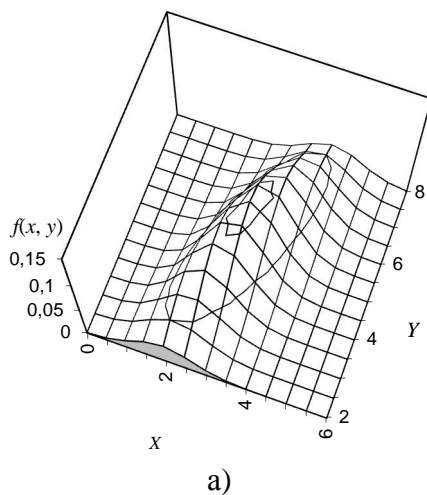


Рис. 4.1

На рис. 4.1 построены трёхмерные графики плотности вероятности для двух нормальных систем. На рис. 4.1, а показано распределение двумерной случайной величины с параметрами:

$$a_1 = 3; \quad a_2 = 5; \quad \sigma_1 = 1; \quad \sigma_2 = 2; \quad r = 0.7.$$

Оси эллипсов рассеивания повернуты относительно осей координат на некоторый угол. Область наиболее вероятных состояний системы вытянута так, что большим значениям X соответствуют большие же значения Y (ведь коэффициент корреляции положителен!).

На рис. 4.1, б изображено распределение нормальной системы с параметрами:

$$a_1 = 3; \quad a_2 = 5; \quad \sigma_1 = 2; \quad \sigma_2 = 2; \quad r = 0.$$

Функции регрессии двумерной нормальной величины (как Y по X , так и X по Y) линейны:

$$M(Y|X = x) = a_2 + r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - a_1);$$

$$M(X|Y = y) = a_1 + r \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (y - a_2).$$

При $r = \pm 1$ между величинами должна быть функциональная линейная связь. Действительно, в этом случае оба уравнения регрессии превращаются в одно:

$$y = a_2 \pm (\sigma_y / \sigma_x)(x - a_1) \quad \text{и} \quad x = a_1 \pm (\sigma_x / \sigma_y)(y - a_2).$$

4.3. Парный корреляционный анализ числовых данных

Существует две версии корреляционного анализа. Первая относится к случаю, когда исходные данные группируются в корреляционной таблице. Сначала вводятся интервалы значений X и Y . Отличие от обычного (одномерного) статистического распределения будет состоять в том, что данные группируются не просто в интервалах значений X и Y , а в некоторых прямоугольниках на плоскости XOY . Для этого достаточно на график результатов наблюдений (диаграмму рассеивания) нанести сетку и подсчитать число точек, попадающих в ячейки этой сетки (это будут частоты n_{ij}). Далее, в качестве вариантов X и Y берутся середины соответствующих интервалов. Тогда X будет принимать значения $x_i, i = \overline{1, k}$; Y – значения $y_j, j = \overline{1, m}$. Величина $\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m n_{ij} = n$ есть полное количество наблюдений (объём парной выборочной совокупности). Просуммируем частоты по столбцам и по строкам корреляционной таблицы:

$$n_{xi} = \sum_{j=1}^m n_{ij}, \quad n_{yj} = \sum_{i=1}^k n_{ij}. \quad (4.4)$$

Тогда можно найти средние значения величин

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_{xi} x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m n_{yj} y_j, \quad (4.5)$$

а также условное среднее значение Y при любом заданном значении X :

$$\bar{y}(x_i) = \frac{1}{n_{xi}} \sum_{j=1}^m n_{ij} y_j, \quad i = 1, \dots, k. \quad (4.6)$$

Условное среднее значение является статистическим аналогом (и оценкой) условного математического ожидания, формулы (4.1) и (4.3). Табличная функция $\bar{y}(x_i), i = 1, \dots, k$, называется *эмпирической функцией регрессии*.

Выборочный коэффициент линейной корреляции вычисляется как

$$r_{xy} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \bar{y}}{\sigma_x \sigma_y}, \quad (4.7)$$

где σ_x, σ_y – выборочные среднеквадратические отклонения, сравните с формулой (4.2). В случае, когда данные сгруппированы в виде корреляционной таблицы, расчётные формулы будут выглядеть следующим образом:

$$\overline{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m x_i y_j n_{ij}; \quad \sigma_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 n_{xi}; \quad \sigma_y^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m (y_j - \bar{y})^2 n_{yj}.$$

Как и коэффициент корреляции случайных величин (4.2), выборочный коэффициент корреляции может принимать значения в пределах от -1 до 1 . Если количественные признаки тесно коррелированы (т. е. близки к линейной функциональной зависимости), то $r_{xy} \approx \pm 1$. Однако из того, что $r_{xy} \neq 0$, ещё нельзя заключить, что не равен нулю и генеральный коэффициент корреляции $r(X, Y)$. Следовательно, встаёт вопрос о значимости выборочного коэффициента корреляции r_{xy} . Фактически, мы должны проверить, можно ли считать величины X и Y коррелированными на основании результата $r_{xy} \neq 0$, или же отклонение r_{xy} от нуля незначимо и случайно.

Пусть получены данные парных наблюдений величин X и Y , совместное распределение которых в генеральной совокупности нормально. Вычислен выборочный коэффициент корреляции $r_{xy} \neq 0$. Нулевая и конкурирующая гипотезы имеют вид $H_0 : r(X, Y) = 0$; $H_1 : r(X, Y) \neq 0$. В качестве проверяемой статистики используется случайная величина

$$T_r = r_{xy} \sqrt{\frac{n-2}{1-r_{xy}^2}}, \quad (4.8)$$

подчиняющаяся распределению Стьюдента. Строится двусторонняя критическая область. Правая критическая точка $t_{2,cr}(\alpha, k)$, где $k = n - 2$, может быть найдена в таблице (прил. 5). Если при заданном уровне значимости $|T_r| < t_{2,cr}(\alpha, k)$, то нет оснований отклонить нулевую гипотезу (корреляции нет); в противном случае H_0 отвергается (корреляция присутствует).

Составление корреляционной таблицы в некоторых случаях полезно, но не обязательно (особенно при использовании компьютера). Если данные не сгруппированы, а представлены в виде перечня, то для вычисления коэффициента корреляции (4.7) следует воспользоваться формулами:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; & \bar{y} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i; & \overline{xy} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i; \\ \sigma_x^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\bar{x})^2; & \sigma_y^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 - (\bar{y})^2. \end{aligned}$$

Такой расчёт более точен, чем при использовании корреляционной таблицы, поскольку в качестве вариантов X и Y берутся их реальные значения.

Пример 4.2. Имеются результаты 30 парных измерений двух величин (табл. 4.1).

Таблица 4.1

Номер измерения	X	Y	Номер измерения	X	Y	Номер измерения	X	Y	Номер измерения	X	Y	Номер измерения	X	Y
1	26	77	7	19	68	13	64	32	19	72	42	25	25	68
2	57	34	8	26	67	14	98	34	20	30	78	26	44	76
3	36	59	9	48	58	15	12	78	21	18	67	27	38	57
4	87	25	10	33	79	16	45	78	22	25	57	28	52	38
5	44	56	11	87	16	17	5	89	23	23	68	29	25	65
6	35	72	12	57	55	18	48	35	24	78	31	30	37	73

Для составления корреляционной таблицы разобьём интервалы возможных значений как X , так и Y на частичные интервалы 0–20, 20–40, 40–60, 60–80, 80–100, и в качестве вариантов возьмём середины этих интервалов. После подсчёта частот получим корреляционную табл. 4.2.

Таблица 4.2

Y	X					n_y
	10	30	50	70	90	
10	–	–	–	–	1	1
30	–	–	3	2	2	7
50	–	3	3	1	–	7
70	3	9	2	–	–	14
90	1	–	–	–	–	1
n_x	4	12	8	3	3	$n = 30$
$\bar{y}(x_i)$	75	65	47.5	36.67	23.33	–

По формулам (4.4)–(4.6) нетрудно найти частоты n_x и n_y , средние $\bar{x} = 42.67$, $\bar{y} = 54.67$ и эмпирическую функцию регрессии $\bar{y}(x_i)$. Если по значениям, указанным в последней строке таблицы, построить график эмпирической функции регрессии, то он будет близок к прямой. Приводим также другие вычисленные показатели:

$$\overline{xy} = 1980; \sigma_x^2 = 519.56; \sigma_y^2 = 364.89; r_{xy} = -0.809.$$

Работая с несгруппированными данными, получим несколько иные значения:

$$\bar{x} = 43.13; \bar{y} = 57.73; \overline{xy} = 2120.5; \sigma_x^2 = 531.05; \sigma_y^2 = 360.93; r_{xy} = -0.844.$$

4.4. Нелинейная корреляция

Строго говоря, использование коэффициента корреляции в качестве меры связи оправдано только тогда, когда совместное распределение пары (X, Y) близко к нормальному (мы видели в п. 4.2, что корреляция в этом случае линейна). Но даже при функциональной (но нелинейной!) связи коэффициент линейной корреляции может оказаться близким к нулю. Следует найти иную, более общую характеристику тесноты связи, не зависящую от формы корреляции.

Поставим перед собой следующий вопрос: какая часть вариации признака Y определяется вариацией признака X , и какая – другими факторами? Подобная постановка вопроса знакома нам по дисперсионному анализу (тема 3). Отличие заключено лишь в том, что там оценивалось влияние качественного фактора, имеющего несколько условных уровней, а здесь мы ставим в соответствие значениям результативного признака Y значения факторного количественного признака X ($x_i, i = 1, 2, \dots, k$). В качестве групп теперь выступают интервалы значений X и столбцы корреляционной таблицы. Следовательно, кроме общей дисперсии Y

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m (y_j - \bar{y})^2 n_{yj} \quad (4.9)$$

можно записать межгрупповую дисперсию

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (\bar{y}_i - \bar{y})^2 n_{xi}, \quad (4.10)$$

которая характеризует рассеивание групповых средних относительно общей средней ($\bar{y}_i = \bar{y}(x_i)$ – значения эмпирической функции регрессии). Сравните с формулами (3.5) и (3.6). Именно эта величина показывает ту часть вариации Y , которая определяется вариацией X . Доля этой части в общей вариации признака Y есть известный нам коэффициент детерминации (3.10):

$$\eta_{y|x}^2 = \sigma_y^2 / \sigma_y^2. \quad (4.11)$$

Квадратный корень из коэффициента детерминации ($\eta_{y|x} = \sqrt{\eta_{y|x}^2}$) называется *корреляционным отношением*. Эта величина изменяется от 0 до 1, причём $\eta_{y|x} = 0$ в отсутствие корреляции, и $\eta_{y|x} = 1$ при любой функциональной зависимости Y от X . Во всех случаях $\eta_{y|x} \geq |r_{xy}|$, причём равенство имеет место только при $|r_{xy}| = 1$ (точная линейная зависимость).

Вернёмся к данным примера 4.1. В дополнение к полученному ранее значению $\sigma_y^2 = 364.89$ по формулам (4.10), (4.11) получим $\sigma_{y|y}^2 = 242.11$, $\eta_{y|x}^2 = 0.664$, откуда $\eta_{y|x} = 0.815$. Поскольку значение корреляционного отношения лишь чуть-чуть выше модуля коэффициента линейной корреляции, рассчитанного для сгруппированных данных, можно сделать вывод о том, что корреляция близка к линейной.

4.5. Множественная корреляция

Если исследуемая величина Y связана с несколькими количественными факторами X_1, X_2, \dots, X_k , то можно составить корреляционную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1k} & r_{1y} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2k} & r_{2y} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{y1} & r_{y2} & \dots & r_{yk} & r_{yy} \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

в которой для упрощения записи использованы обозначения $r_{ij} \equiv r_{x_i, x_j}$, $r_{iy} \equiv r_{x_i, y}$. Матрица A является симметрической, поскольку для парных коэффициентов корреляции выполняется $r_{ij} = r_{ji}$, $r_{iy} \equiv r_{yi}$. Кроме того, все диагональные элементы матрицы равны 1. Теснота связи величины Y со всей совокупностью факторов X_1, X_2, \dots, X_k описывается коэффициентом множественной корреляции

$$R = \sqrt{1 - \frac{D}{D_{yy}}}, \quad (4.13)$$

где $D = \det A$, а D_{yy} – минор, полученный исключением из матрицы последней строки и последнего столбца.

Пример 4.3. Корреляционная матрица имеет следующий вид:

	X_1	X_2	X_3	Y
X_1	1	0.3	-0.4	0.7
X_2	0.3	1	0.5	0.2
X_3	-0.4	0.5	1	-0.1
Y	0.7	0.2	-0.1	1

Найдём коэффициент множественной корреляции. Определитель корреляционной матрицы $D = \det A = 0.162$, минор $D_{yy} = 0.38$. Следовательно, по формуле (4.13) $R = 0.757$.

4.6. Корреляция между нечисловыми случайными величинами

Часто в практических задачах приходится иметь дело с величинами, которые характеризуются качественными признаками. Правда, эти признаки могут быть выражены в некоторой цифровой шкале (экзаменационная оценка, разряд, ранг и т. п.), позволяющей ранжировать объекты, но качественный характер этих признаков остается.

Рассмотрим *ранговый коэффициент корреляции Спирмена*. Пусть имеется совокупность однородных объектов (явлений, изделий, лиц и т. п.). Каждый элемент этой совокупности характеризуется двумя качественными признаками: A и B . Задача заключается в том, чтобы оценить тесноту корреляционных связей между этими признаками.

Расположим все элементы в виде ряда, упорядоченного по признаку A (условимся, что этот порядок будет соответствовать «убыванию качества»). Пронумеруем все элементы по $i = \overline{1, n}$. Эти номера будем считать рангами по признаку A , обозначим их через x_i . Очевидно, что $x_i = i$. Построим теперь из тех же элементов ряд по признаку B (снова по «убыванию качества»). Присвоим им ранги y_i . Здесь y обозначает место элемента в ряду по признаку B , а индекс $i = \overline{1, n}$ по-прежнему есть порядковый номер элемента в ряду по признаку A . В общем случае $y_i \neq x_i$, хотя отдельные значения могут и совпадать.

Теперь можно рассчитать коэффициент корреляции по формуле (4.7). Фактически, этот коэффициент будет описывать тесноту корреляции рангов. Для проверки значимости коэффициента ранговой корреляции можно также использовать критерий (4.8).

Пример 4.4. Специалисты двух заводов проранжировали 11 факторов, влияющих на ход технологического процесса:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
y_i	1	2	3	5	4	9	8	11	6	7	10

Найти коэффициент корреляции Спирмена. Достаточно ли согласуются мнения специалистов двух заводов? Проверить гипотезу о значимости коэффициента корреляции при уровне значимости 0.01.

Результаты расчётов: $r_{xy} = 0.818$, $T_r = 4.27$, $t_{2,cr}(0.01, 9) = 3.25$. Так как $|T_r| > t_{2,cr}$, коэффициент корреляции Спирмена значим, мнения специалистов достаточно хорошо согласуются.

Вообще, расчёт коэффициента корреляции вручную довольно громоздок, но для коэффициента корреляции Спирмена существует простая формула, выведенная из свойств рангов x_i и y_i :

$$r_{xy} = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}{n(n^2 - 1)}. \quad (4.14)$$

Действительно, для условий примера 4.3 получаем

$$r_{xy} = 1 - \frac{6(1+1+9+1+9+9+9+1)}{11 \cdot 120} = 1 - \frac{240}{11 \cdot 120} = \frac{9}{11} = 0.818.$$

4.7. Коэффициент автокорреляции. Корреляционная функция

Коэффициент корреляции используется для исследования связей не только между двумя (или более) рядами разных величин, но и внутри одного временного (или пространственного) ряда. Такие ряды обычно рассматриваются как выборочные реализации *случайных процессов*. Понятие «случайный процесс» является обобщением понятия «случайная величина». Если некоторая физическая величина является функцией времени $X(t)$ ($-\infty < t < \infty$) и в любой момент времени сохраняет свойства случайной величины, то такая функция называется случайным процессом.

Природа случайного процесса может быть различной. Например, пусть многократно измеряется физическая величина, истинное значение которой остается неизменным. Вследствие неизбежных погрешностей результаты отдельных измерений отличаются друг от друга. При этом связь между отдельными значениями отсутствует. Расположение элементов в ряду не играет роли. Не изменяя свойств выборки, ее можно преобразовать, например, в вариационный ряд.

Однако часто предметом изучения является изменчивость истинного значения физической величины во времени. Возьмем, например, ленту самописца с записью температуры, давления и т. п. Во многих реальных ситуациях можно будет легко убедиться, что последовательные значения измеряемой величины не являются совершенно независимыми. Большие изменения, имеющие характер тенденции, происходят не мгновенно, а постепенно. Часто можно заметить подобие циклических колебаний. Наконец, всегда имеются небольшие случайные колебания. Очевидно, что в таком временном ряду, отражающем случайный процесс, место каждого от-

дельного результата играет большую роль, а произвольная перестановка элементов становится недопустимой.

Случайные процессы разнообразны и сложны. Если вероятностные характеристики процесса не меняются со временем, то такой процесс называют *стационарным*. В частности, среднее значение \bar{x} не имеет тренда (тенденции к изменению), и постоянной во времени остаётся дисперсия. Это означает, что их можно оценивать на любом достаточно большом интервале времени. Крайним проявлением случайного процесса является «белый шум», когда отсутствует ещё и всякая связь между последовательными значениями. В этом случае понятия «случайный процесс» и «случайная величина» сближаются. Другой крайней формой случайного процесса является *периодический* процесс, когда через интервал времени Δt функция полностью повторяется: $X(t + \Delta t) = X(t)$.

Рассмотрим некоторую реализацию случайного процесса – временной ряд физической величины. Временной ряд может быть непрерывным – $x(t)$ на интервале T , или дискретным – $x_i, i = \overline{1, n}$, где n – длина ряда. При цифровой обработке на компьютере любой непрерывный ряд преобразуют в дискретный, выбирая шаг дискретизации по времени, т. е. интервал между соседними отсчетами $\Delta = t_{i+1} - t_i = \text{const}$. Будем искать связь между элементами ряда, сдвинутыми (смещёнными) на временной интервал τ . Его называют также *временем запаздывания*. Для простоты далее будем считать, что τ – это просто сдвиг порядкового номера. Таким образом, если имеется временной ряд x_1, x_2, \dots, x_n , то речь идёт о взаимозависимости двух рядов, представленных в следующем виде:

Исходный ряд	x_1	x_2	...	x_τ	$x_{\tau+1}$	$x_{\tau+2}$...	x_n
Ряд, запаздывающий на τ	–	–	...	–	x_1	x_2	...	$x_{n-\tau}$

В качестве меры тесноты линейной связи между элементами ряда, сдвинутыми друг относительно друга на τ , используют обычный коэффициент парной корреляции (4.7). Парная выборка, необходимая для вычисления этого коэффициента, формируется так: элементу $x_{\tau+1}$ соответствует элемент x_1 , элементу $x_{\tau+2}$ – элемент x_2, \dots , элементу x_n – элемент $x_{n-\tau}$. При этом первые τ элементов ряда остаются «без пары». Коэффициент корреляции, вычисляемый по такой парной выборке, мы будем называть *коэффициентом автокорреляции порядка τ* и обозначать через r_τ . Следуя общей формуле (4.7) для коэффициента парной корреляции, мы должны написать

$$r_\tau = \frac{1}{n - \tau} \frac{\sum_{i=1}^{n-\tau} (x_i - \bar{x}_{\langle 1, n-\tau \rangle}) (x_{\tau+i} - \bar{x}_{\langle \tau+1, n \rangle})}{\sigma_{x_{\langle 1, n-\tau \rangle}} \sigma_{x_{\langle \tau+1, n \rangle}}} \quad (4.15)$$

или

$$r_\tau = \frac{\frac{1}{n-\tau} \sum_{i=1}^{n-\tau} x_i x_{\tau+i} - \bar{x}_{\langle \tau+1, n \rangle} \bar{x}_{\langle 1, n-\tau \rangle}}{\sigma_{x\langle 1, n-\tau \rangle} \sigma_{x\langle \tau+1, n \rangle}}. \quad (4.16)$$

Здесь в угловых скобках записаны интервалы, по которым производится усреднение при вычислении \bar{x} и σ_x .

Для стационарного ряда среднее значение и дисперсия сохраняются во времени, и поэтому можно вычислять их по всему интервалу $\langle 1, n \rangle$. Учитывая, что $\sigma_x^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$, вместо (4.16) получаем

$$r_\tau = \frac{\frac{1}{n-\tau} \sum_{i=1}^{n-\tau} x_i x_{\tau+i} - \bar{x}^2}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}. \quad (4.17)$$

Для анализа временных рядов применяется *корреляционная функция*, которая (для ряда с дискретным временем) представляет собой просто совокупность коэффициентов автокорреляции при разных $\tau \geq 0$. Обычно τ задаётся до $n/3$ или $n/4$. Из формул (4.15)–(4.17) легко видеть, что $r_0 = 1$, т. к. числитель и знаменатель дроби представляют собой одну и ту же дисперсию. Таким образом, по сути, корреляционная функция – это новый временной ряд, гораздо более короткий и, как правило, более сглаженный.

Отметим основные закономерности в поведении корреляционных функций:

1. Для «белого шума» все r_τ близки к нулю.
2. Для ряда, содержащего тенденцию и не имеющего циклической составляющей, наибольшим (не считая $r_0 = 1$) является r_1 . С ростом τ происходит снижение r_τ .
3. Для ряда, имеющего значимую циклическую составляющую, наибольшим (или, по крайней мере, локально максимальным) является r_T , где T соответствует периоду колебаний.
4. Если исходный ряд близок к гармонической функции, то и его корреляционная функция будет иметь вид, близкий к гармоническому.

Пример 4.5. Как известно, солнечная активность, описываемая так называемым индексом $F_{10.7}$, изменяется квазипериодически в 11-летнем цикле. На рис. 4.2 приведены данные по среднегодовому уровню солнечной активности (индекс $F_{10.7}$, умноженный на 10) за 53 года (с 1948 по 2000 гг. включительно).

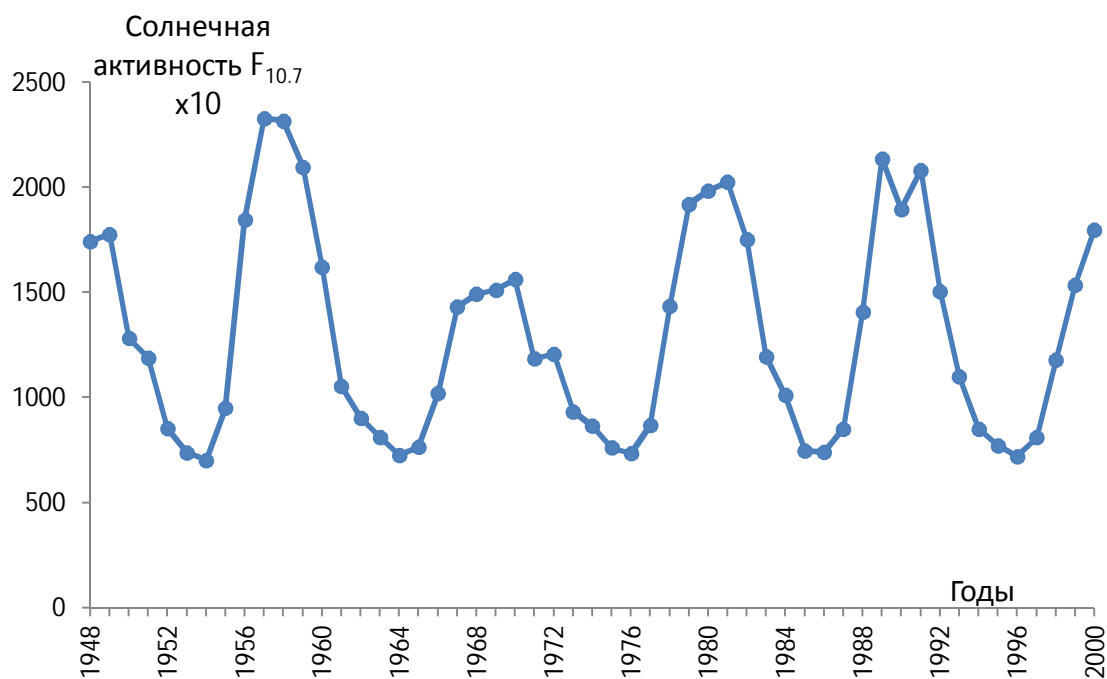


Рис. 4.2. Среднегодовой уровень солнечной активности в 1948–2000 гг.

На рис. 4.3 показана соответствующая автокорреляционная функция, вычисленная двумя способами: по формуле (4.16) – кривая (1), и по формуле (4.17) – кривая (2). Обе кривые (как и исходный график на рис. 4.2) демонстрируют квазипериодический характер временного ряда. Некоторое расхождение в оценке периода колебаний, по-видимому, объясняется тем, что условие стационарности ряда не вполне выполняется.

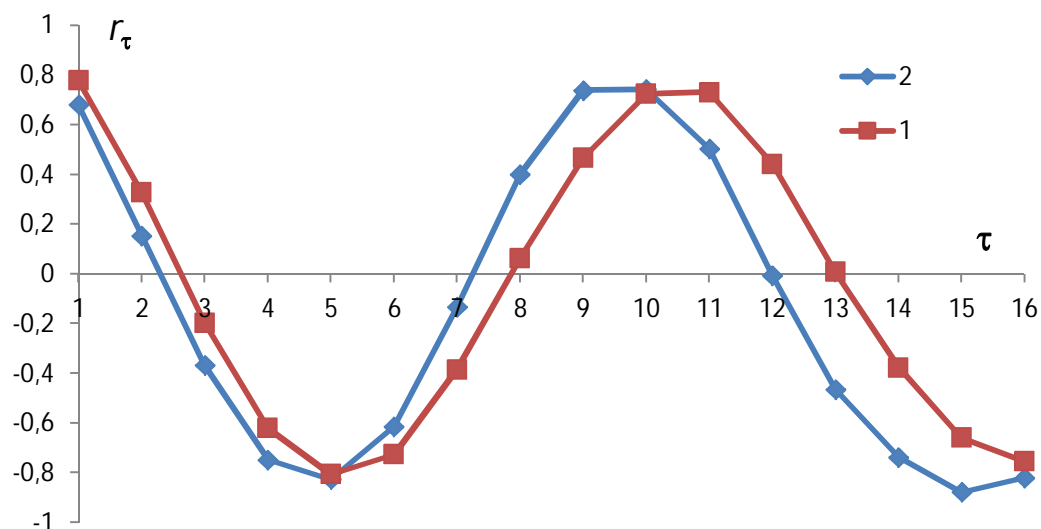


Рис. 4.3. Автокорреляционная функция для временного ряда солнечной активности

Примеры выполнения заданий на компьютере: корреляционный анализ экспериментальных данных

Задание 1. Реализовать в Excel решение примера 4.2, включая дополнение в п. 4.4.

Инструкция по выполнению задания 1

По исходным данным построить диаграмму рассеивания. Заполнить корреляционную таблицу. Частоты n_x , n_y получить с помощью функции СУММ, средние значения переменных и значения эмпирической функции регрессии вычислить по формулам (4.5) и (4.6). Убедиться, что график этой функции близок к прямой линии. По формулам (4.9) и (4.10) вычислить общую и межгрупповую дисперсии Y , по формуле (4.11) – коэффициент детерминации и корреляционное отношение.

Вычислить значения \bar{x}_y и r_{xy} по корреляционной таблице (это достаточно громоздко). О чём говорит тот факт, что корреляционное отношение лишь чуть-чуть больше коэффициента линейной корреляции?

Другой способ вычисления коэффициента детерминации состоит в использовании надстройки *Анализ данных* (режим *Однофакторный дисперсионный анализ*). Этот инструмент был изучен в теме 3. Сначала надо «распаковать» корреляционную таблицу, придав ей следующий вид:

10	30	50	70	90
70	50	30	30	10
70	50	30	30	30
70	50	30	50	30
90	70	50	–	–
–	70	50	–	–
–	70	50	–	–
–	70	70	–	–
–	70	70	–	–
–	70	–	–	–
–	70	–	–	–
–	70	–	–	–
–	70	–	–	–

П о я с н е н и е: значения переменной X , стоящие в верхней строке, рассматриваются как уровни фактора; значение Y вводится в количестве, соответствующем частоте n_{ij} .

После этого, обратившись к надстройке *Анализ данных*, получим таблицу, знакомую нам по теме 3. Отношение межгрупповой вариации к общей вариации даёт значение коэффициента детерминации. Оно должно совпасть со значением, вычисленным первым способом.

Задание 2. Имеются результаты 30 парных измерений двух величин:

Номер измерения	X	Y	Номер измерения	X	Y	Номер измерения	X	Y
1	26	77	11	87	16	21	18	67
2	57	34	12	57	55	22	25	57
3	36	59	13	64	32	23	23	68
4	87	25	14	98	34	24	78	31
5	44	56	15	12	78	25	25	68
6	35	72	16	45	78	26	44	76
7	19	68	17	5	89	27	38	57
8	26	67	18	48	35	28	52	38
9	48	58	19	72	42	29	25	65
10	33	79	20	30	78	30	37	73

Для составления корреляционной таблицы ввести частичные интервалы возможных значений по X: 0–2, 2–4, 4–6, 6–8, 8–10; по Y: 10–16, 16–22, 22–28, 28–34, 34–40; в качестве вариантов взять середины этих интервалов. Выполнить те же действия, что и в задании 1. Почему корреляционное отношение оказалось значительно больше коэффициента линейной корреляции? Имеет ли в данном случае смысл вычисление этого коэффициента?

Задание 3. Имеются результаты одновременных измерений величины Y и трёх влияющих на неё факторов – X_1 , X_2 , X_3 :

X_1	X_2	X_3	Y
4.9	3.0	1.5	9.2
5.3	3.1	2.5	8.6
4.6	3.4	0.9	10.4
5.3	2.9	2.2	8.0
4.8	3.0	1.5	8.5
5.3	3.1	2.7	8.6
4.7	3.5	1.1	10.2
5.3	2.9	2.8	7.9
5.3	2.8	2.9	7.2
5.3	3.2	2.0	9.6
5.3	3.4	2.2	9.7
5.3	3.3	1.6	9.8
4.9	3.5	1.4	10.5
5.5	2.8	2.4	8.2
4.9	2.9	2.2	7.9
5.3	2.7	2.5	7.7
5.4	2.8	2.9	7.8
5.3	3.0	2.3	8.1
5.0	3.2	2.1	8.9
5.0	2.6	2.5	6.8

Найти корреляционную матрицу, вычислить коэффициент множественной корреляции.

Инструкция по выполнению задания 3

Для отыскания корреляционной матрицы следует воспользоваться функцией КОРРЕЛ или надстройкой *Анализ данных* (режим *Корреляция*). Затем можно вычислить коэффициент множественной корреляции по формуле (4.13). Для отыскания определителей воспользуйтесь функцией МОПРЕД. Перед обращением к этой функции все ячейки матрицы должны быть заполнены (матрица является симметрической).

Задание 4. Решить в Excel пример 4.3 двумя способами: с помощью функции КОРРЕЛ и по формуле (4.14).

Задание 5. Имеются данные по среднегодовой солнечной активности за 1948–2000 гг. (пример 4.4):

Год	F10.7	Год	F10.7	Год	F10.7	Год	F10.7	Год	F10.7
1948	1744	1959	2097	1970	1562	1981	2026	1992	1507
1949	1778	1960	1621	1971	1185	1982	1753	1993	1099
1950	1282	1961	1054	1972	1208	1983	1196	1994	852
1951	1189	1962	904	1973	934	1984	1011	1995	772
1952	854	1963	812	1974	865	1985	747	1996	720
1953	739	1964	726	1975	761	1986	741	1997	810
1954	702	1965	764	1976	734	1987	852	1998	1179
1955	950	1966	1021	1977	869	1988	1409	1999	1537
1956	1846	1967	1432	1978	1436	1989	2137	2000	1798
1957	2327	1968	1493	1979	1920	1990	1896		
1958	2317	1969	1512	1980	1985	1991	2082		

Рассчитать значения корреляционной функции для запаздывания τ от 1 до 16.

Инструкция по выполнению задания 5

Расположить результаты наблюдений в одном столбце. Пусть, например, в ячейку В2 помещено значение 1744, в ячейку В3 – значение 1778 и т. д. В ячейку С3 поместить формулу = В2 и применить автозаполнение вниз до выравнивания с последней ячейкой столбца В. Последним числом в столбце С будет 1 537. Теперь следует применить функцию КОРРЕЛ к двум полученным массивам. Во втором массиве верхняя ячейка пуста, поэтому и ячейка В2 при расчёте коэффициента корреляции будет игнорироваться. Полученное значение (0.7785) – коэффициент автокорреляции 1-го порядка. Аналогичным образом выполните расчёт коэффициен-

тов автокорреляции более высоких порядков. Постройте диаграммы (рис. 4.2 и рис. 4.3, кривая 1).

Контрольные вопросы

1. В чём различие между корреляционной и функциональной связью?
2. Каким свойством обладают функции регрессии двумерной нормальной величины?
3. Как связаны между собой коэффициент линейной корреляции и корреляционное отношение?
4. В чём особенности оценивания корреляции нечисловых случайных величин?
5. Объясните смысл термина «автокорреляция».
6. Каковы основные закономерности в поведении автокорреляционных функций?

Тема 5. АППРОКСИМАЦИЯ ЗАВИСИМОСТЕЙ

Интерполяционный и регрессионный подходы. Адекватность модели регрессии. Множественный регрессионный анализ. Нелинейные модели.

5.1. Основные подходы к задаче аппроксимации зависимостей

Одной из важнейших задач, возникающих в процессе эксперимента и при исследовании его результатов, является задача предсказания значений некоторой измеряемой величины в зависимости от значений другой величины (или величин). Для простоты сначала будем полагать, что в результате эксперимента получены следующие значения:

x	x_0	x_1	x_2	\dots	x_n
$y = f(x)$	y_0	y_1	y_2	\dots	y_n

Выбранные значения аргумента x называются узлами. В общем случае узлы не являются равноотстоящими. При проведении вычислительных работ обычно возникает необходимость «сгущать» эти значения, т. е. вычислять функцию для значений аргумента, не совпадающих с теми, которые попали в таблицу. Эта проблема решается путем замены функции $f(x)$, для которой обычно неизвестно аналитическое выражение, некоторой функцией $F(x)$, имеющей сравнительно несложный аналитический вид, и которая в некотором смысле близка к $f(x)$. Приближённое исполь-

зование вместо функции $f(x)$ более простой функции $F(x)$ называется *аппроксимацией*.

Близости этих функций добиваются введением в аппроксимирующую функцию $F(x)$ свободных параметров, оптимальные значения которых предстоит подобрать. Критерии близости аппроксимирующей функции $F(x)$ к неизвестной функции $f(x)$ могут быть самые различные. Мы рассмотрим два наиболее известных подхода.

Первый подход состоит в том, чтобы подобрать такую функцию $F(x)$, которая имела бы в узлах таблицы те же самые значения, что и табличная функция $f(x)$. Разумеется, при этом $F(x)$ должна быть как можно более простой, например, иметь вид полинома минимально возможной степени.

В дальнейшем, имея аппроксимирующую функцию $F(x)$, можно будет находить по ней приближённо значения функции $f(x)$ при значениях аргумента x , не совпадающих с узловыми, но содержащихся на промежутке (x_0, x_n) , т. е. лежащих *между* узлами. Такое действие называется *интерполированием*. Если же аппроксимирующую функцию вычисляют для точек, расположенных *вне* промежутка (x_0, x_n) , то говорят об *экстраполировании*.

Однако такой подход имеет некоторые недостатки. Во-первых, измерения исследуемой величины y и факторов, на неё влияющих, выполняются с неизбежными погрешностями. Во-вторых, всегда имеется также влияние на величину y неконтролируемых факторов. Эти обстоятельства проявляются, например, в том, что при одинаковых или очень близких значениях x наблюдаемые значения y могут существенно различаться. Иначе говоря, результаты эксперимента не являются детерминированными, они могут иметь значительную случайную составляющую. Вследствие этого бессмысленно, а часто и просто невозможно, искать зависимость, в точности отражающую все экспериментальные данные. Задача заключается в том, чтобы выделить и описать функциональную составляющую общей стохастической связи между переменными. При ограниченных рядах измерений такие зависимости носят лишь приближенный оценочный характер. Их называют уравнениями регрессии. В этом суть второго (регрессионного) подхода к аппроксимации зависимостей.

При использовании регрессионного подхода решение разбивается на два этапа. Прежде всего, следует выбрать вид функции, т. е. класс уравнений связи между анализируемыми переменными. Следующий этап состоит в том, чтобы для выбранной функции найти параметры, при которых она наилучшим образом аппроксимирует результаты эксперимента. Решение осуществляется методом наименьших квадратов (МНК).

Перейдём к более подробному рассмотрению описанных подходов.

если среди значений аргумента нет одинаковых. Следовательно, система имеет единственное решение, выражающееся через формулы Крамера:

$$a_0 = \frac{\Delta_0}{\Delta}, \quad a_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \dots, \quad a_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

где каждый из определителей Δ_m ($m = 0, 1, \dots, n$) включает в себя столбец значений функции y_j ($j = 0, 1, \dots, n$). Практическое использование этих выражений затруднительно, поскольку предполагает вычисление определителей n -го порядка. Представим интерполяционный многочлен в другой форме:

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^n y_j Q_j(x).$$

По условию, в узлах интерполяции $L_n(x_i) = y_i$. Поэтому функция $Q_j(x)$ должна удовлетворять требованию:

$$Q_j(x_i) = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j, \\ 1, & \text{если } i = j. \end{cases}$$

Подходящей функцией является

$$Q_j(x) = \frac{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n (x - x_k)}{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n (x_j - x_k)},$$

поскольку в точке $x = x_j$ числитель и знаменатель тождественны и не равны нулю, а в остальных узлах интерполяции числитель (в отличие от знаменателя) содержит нулевой множитель. Окончательно получаем выражение, называемое интерполяционным многочленом Лагранжа:

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^n y_j \frac{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n (x - x_k)}{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n (x_j - x_k)}. \quad (5.1)$$

Пример 5.1. Найдём интерполяционный многочлен Лагранжа (рис. 5.1) для функции, заданной таблично:

x	0	1	2	5
y	0	3	0	15

$$\begin{aligned}
 F(x) = L_3(x) &= 0 + 3 \frac{x(x-2)(x-5)}{1(1-2)(1-5)} + 0 + 15 \frac{x(x-1)(x-2)}{5(5-1)(5-2)} = \\
 &= \frac{3x(x-2)(x-5)}{4} + \frac{x(x-1)(x-2)}{4} = \\
 &= \frac{1}{4} x(x-2)(3x-15+x-1) = x(x-2)(x-4) = 8x - 6x^2 + x^3. \\
 F(x) &= 8x - 6x^2 + x^3.
 \end{aligned}$$

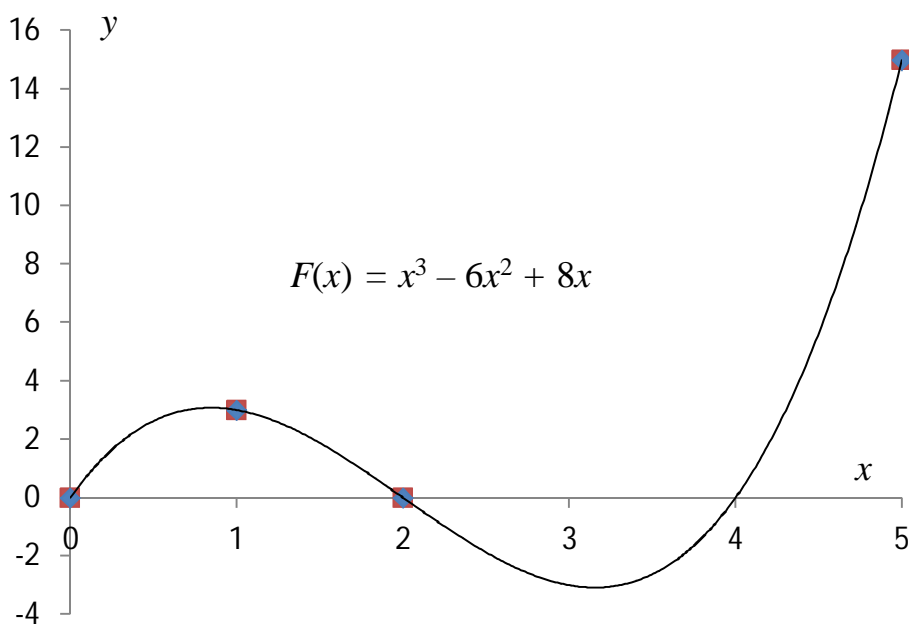


Рис. 5.1. Аппроксимация с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа

5.3. Конечные разности и интерполяционные формулы Ньютона

Перейдём к случаю равноотстоящих узлов интерполяции, когда $x_i = x_0 + ih$, $h = \text{const}$ ($i = 0, 1, \dots, n$).

Конечной разностью 1-го порядка называется разность между значениями функции в соседних узлах интерполяции ($i = 0, 1, \dots, n-1$): $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$.

Конечная разность 2-го порядка есть разность соседних конечных разностей 1-го порядка ($i = 0, 1, \dots, n-2$): $\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$.

Общий вид конечной разности n -го порядка: $\Delta^n y = \Delta(\Delta^{n-1} y)$.

Выразим конечные разности 2-го и 3-го порядков через значения функции в узлах интерполяции:

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = y_{i+2} - y_{i+1} - y_{i+1} + y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i; \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} \Delta^3 y_i &= \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i = y_{i+3} - 2y_{i+2} + y_{i+1} - (y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i) = \\ &= y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i. \end{aligned}$$

Линейной интерполяцией называется определение промежуточного значения функции $y(x_i < x < x_{i+1})$ по двум её известным значениям $y(x_i)$ и $y(x_{i+1})$ в предположении, что дугу функции на участке (x_i, x_{i+1}) можно заменить хордой. Получим формулу для линейной интерполяции, используя многочлен Лагранжа и вводя $h = x_{i+1} - x_i$, $t = x - x_i$, $q = t/h$:

$$\begin{aligned} F(x) = L_1(x) &= y_i \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + y_{i+1} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} = y_i \frac{h-t}{h} + (y_i + \Delta y_i) \frac{t}{h}, \text{ т. е.} \\ F(x) &= y_i + \Delta y_i q. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Квадратичной интерполяцией называется определение промежуточного значения функции $y(x)$ по трём её известным значениям $y(x_i)$, $y(x_{i+1})$ и $y(x_{i+2})$ в предположении, что дугу функции на участке (x_i, x_{i+2}) можно заменить параболой 2-го порядка.

Вводя $h = x_{i+1} - x_i = x_{i+2} - x_{i+1}$, $t = x - x_i$, $q = t/h$ и учитывая, что $y_{i+2} = \Delta^2 y_i + 2y_{i+1} - y_i = \Delta^2 y_i + 2\Delta y_i + y_i$, получаем

$$\begin{aligned} F(x) &= L_2(x) = \\ &= y_i \frac{(t-h)(t-2h)}{2h^2} + (y_i + \Delta y_i) \frac{t(t-2h)}{(-h^2)} + (y_i + 2\Delta y_i + \Delta^2 y_i) \frac{t(t-2h)}{2h^2}, \\ F(x) &= y_i + \Delta y_i q + \Delta^2 y_i \frac{q(q-1)}{2}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Формулы (5.3) и (5.4), называемые *интерполяционными формулами Ньютона*, тождественны многочленам Лагранжа соответствующего порядка.

Пример 5.2. По результатам эксперимента, в котором величина x изменялась с постоянным шагом, получены следующие значения:

x	0	2	4	6
y	1	4	2	8

Требуется найти промежуточное значение y при $x = 3$ с помощью линейной интерполяции; квадратичной интерполяции.

Здесь $x_1 = 2$, $h = 2$, $t = 3 - 2 = 1$, $q = 1/2$, $y_1 = 4$, $y_2 = 2$, $y_3 = 8$.

Конечные разности $\Delta y_1 = y_2 - y_1 = -2$ и (5.2) $\Delta^2 y_1 = y_3 - 2y_2 + y_1 = 8$.

По формуле (5.3) $F(3) = y_1 + \Delta y_1 q = 4 - 2 \times 0.5 = 3$.

По формуле (5.4)

$$F(3) = y_1 + \Delta y_1 q + \Delta^2 y_1 \frac{q(q-1)}{2} = 4 - 2 \times 0.5 - 8 \times 0.5 \times 0.5 / 2 = 2.$$

Замечание. Точка $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ никакого влияния на результаты в данном случае не оказывает.

5.4. Краткие сведения о методе наименьших квадратов и парном регрессионном анализе

Как было отмечено выше, в практике обработки экспериментальных данных могут быть ситуации, когда применение лагранжевой аппроксимации не оправдано или в принципе невозможно. В этих условиях требуется проводить аппроксимирующую кривую, которая не обязательно проходит через узловые точки, но в то же время отражает исследуемую зависимость и сглаживает возможные выбросы, возникшие из-за погрешности эксперимента.

На основе предварительного анализа экспериментальных данных и, возможно, с учётом самой природы изучаемой зависимости мы можем сделать предположение о некоторой линии связи $\bar{y}_x = f(x, \beta)$, где под \bar{y}_x подразумевается среднее значение величины Y , соответствующее значению $X = x$, а под β – совокупность варьируемых параметров. Например, если визуально убедиться в том, что эмпирическая картина рассеивания свидетельствует о линейной форме корреляции и допустить, что в генеральной совокупности признаки X и Y имеют совместное нормальное распределение (в огромном числе случаев такое допущение оправдано), то в качестве линии связи можно выбрать прямую $\bar{y}_x = ax + b$.

В других случаях линия регрессии ищется в виде параболы, гиперболы или экспоненты. В качестве меры несоответствия функции $\bar{y}_x = f(x, \beta)$ набору наблюдений берут сумму квадратов отклонений

$$S(\beta) = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i, \beta))^2.$$

В частности, прямой линией регрессии наилучшим образом будет служить такая линия, для которой функция

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2$$

имеет наименьшее значение. Найденные из этого условия значения a^* и b^* обеспечат минимальные отличия значений функции $\bar{y}_x(x_i) = a^* x_i + b^*$ от экспериментальных значений y_i . Решение этой задачи методами математического анализа приводит к формулам

$$a^* = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{x^2 - (\bar{x})^2}, \quad b^* = \frac{\overline{yx^2} - \bar{x}\overline{xy}}{x^2 - (\bar{x})^2} = \bar{y} - a^* \bar{x}. \quad (5.5)$$

Сравнивая формулы для выборочных коэффициентов корреляции (4.7) и регрессии (5.5), нетрудно убедиться, что

$$a^* = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\sigma_x^2} = \frac{\sigma_y}{\sigma_x} r_{xy},$$

а уравнение регрессии $\bar{y}_x = a^* x + b^*$ может быть переписано в виде

$$\bar{y}_x - \bar{y} = \frac{\sigma_y}{\sigma_x} r_{xy} (x - \bar{x}). \quad (5.6)$$

5.5. Адекватность модели

Насколько хорошо независимая переменная X предсказывает значения зависимой переменной Y ? Рассмотрим подход к оцениванию качества регрессии, основанный на методе дисперсионного анализа. Ранее, в п. 3.3, этот метод использовался для оценки влияния качественного фактора, имеющего несколько условных уровней (смысловых значений). Коэффициент детерминации показывал, за какую долю вариации отвечает исследуемый фактор. Далее, в п. 4.4, с помощью дисперсионного анализа мы находили часть вариации одного количественного признака, обусловленную вариацией другого количественного признака. Для этого мы использовали данные, сгруппированные в виде корреляционной таблицы. Коэффициент детерминации достигал единицы при любой функциональной зависимости (в этом случае в каждом столбце корреляционной таблицы имеется только одна ненулевая клетка). Только при точной линейной зависимости корень квадратный из коэффициента детерминации равнялся модулю коэффициента линейной корреляции.

Теперь нам предстоит применить дисперсионный анализ к модели парной линейной регрессии.

Общая дисперсия значений Y относительно выборочной средней арифметической \bar{y} равна

$$D = \frac{1}{n} \sum (y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{n} \sum (y_i - \bar{y}_x + \bar{y}_x - \bar{y})^2 =$$

$$= \frac{1}{n} \sum (y_i - \bar{y}_x)^2 + \frac{1}{n} \sum (\bar{y}_x - \bar{y})^2 + \frac{2}{n} \sum (y_i - \bar{y}_x)(\bar{y}_x - \bar{y}).$$

Доказывается, что последнее из трёх слагаемых равно нулю. Таким образом, в формуле для общей дисперсии остаётся два слагаемых, из которых первое описывает рассеивание наблюдаемых значений Y относительно линии регрессии, а второе – вариацию Y , объясняемую вариацией X (аналог межгрупповой дисперсии).

Умножая эту формулу на n , получим (сравните с (3.9))

$$SST = SSR + SSE, \quad (5.7)$$

где $SST = \sum (y_i - \bar{y})^2$ – полная сумма квадратов;

$SSE = \sum (\bar{y}_x - \bar{y})^2$ – сумма квадратов, объясняемая регрессией;

$SSR = \sum (y_i - \bar{y}_x)^2$ – остаточная сумма квадратов (сумма квадратов остатков регрессии).

Коэффициентом детерминации регрессионной модели называется величина

$$R^2 = SSE/SST. \quad (5.8)$$

В силу определения, $0 \leq R^2 \leq 1$. Идеальный случай $R^2 = 1$ означает, что результаты всех наблюдений лежат на линии регрессии, а все остатки регрессии равны нулю.

Коэффициент детерминации парной линейной модели регрессии связан с коэффициентом линейной корреляции:

$$R^2 = \frac{\sum (\bar{y}_x - \bar{y})^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2} = \frac{\sum (a^*)^2 (x_i - \bar{x})^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2} = (a^*)^2 \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} = r_{xy}^2,$$

т. е. коэффициент детерминации равен квадрату коэффициента корреляции (сравните с п. 4.4, где коэффициент детерминации определялся по корреляционной таблице без каких-либо предположений о форме связи).

5.6. Множественный регрессионный анализ

Представим теперь, что величина Y зависит не от одного, а от многих факторов, что обычно и имеет место. Предположим также, что мы можем выбрать переменные X_1, X_2, \dots, X_k так, чтобы зависимость Y от них была

близка к линейной (в следующем пункте обсуждаются некоторые способы такой линеаризации). Задача множественного линейного регрессионного анализа состоит в оценивании регрессии уравнением

$$\bar{y}_{x_1, x_2, \dots, x_k} = a_1^* x_1 + a_2^* x_2 + \dots + a_k^* x_k + b^*. \quad (5.9)$$

Звёздочка, как и прежде, обозначает оценку соответствующего коэффициента методом наименьших квадратов. Для решения этой задачи обычно пользуются компьютерными программами (например, надстройка «Анализ данных» или функция ЛИНЕЙН в Excel).

Качество регрессии оценивается коэффициентом детерминации

$$R^2 = \frac{SSE}{SST} = \frac{\sum (\bar{y}_{x_1, x_2, \dots, x_k} - \bar{y})^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2}. \quad (5.10)$$

Заметим, что эта величина может быть определена не только для линейной, но и для любой другой модели. В случае линейной модели регрессии квадратный корень из коэффициента детерминации является коэффициентом множественной корреляции: $\sqrt{R^2} = R$ (см. п. 4.5).

Для проверки адекватности модели регрессии используется так называемая F -статистика:

$$F = \frac{SSE}{m} : \frac{SSR}{n - m - 1} = \frac{R^2(n - m - 1)}{(1 - R^2)m}, \quad (5.11)$$

где m – число параметров при переменных x (в линейной модели совпадает с числом переменных в правой части уравнения). При заданном α (уровне значимости гипотезы) F -статистика сравнивается с критической точкой распределения Фишера $F_{cr}(\alpha, m, n - m - 1)$ (прил. 7). Если $F > F_{cr}$, то модель регрессии признаётся адекватной.

Пример 5.3. При оценивании линейной модели регрессии с тремя независимыми переменными по результатам 20 измерений выяснилось, что $SSE = 48.4$ (сумма квадратов, объясняемая регрессией), а $SSR = 5.6$ (остаточная сумма квадратов). Найти коэффициент детерминации R^2 , коэффициент множественной корреляции R , оценить адекватность модели при уровне значимости $\alpha = 0.05$.

$$R^2 = SSE / SST = SSE / (SSE + SSR) = 0.896; R = \sqrt{R^2} = 0.947;$$

$$F = 46.1, F_{cr}(0.05, 3, 16) = 3.24.$$

$$F > F_{cr}, \text{ модель адекватна.}$$

При включении в модель дополнительной независимой переменной коэффициент детерминации не может снизиться. Однако его рост может

оказаться совершенно незначительным. Это происходит в тех случаях, когда новая независимая переменная слабо связана с моделируемой величиной Y , либо, напротив, тесно связана с какой-либо из старых независимых переменных.

5.7. Регрессионный анализ при наличии нелинейных зависимостей

Линейный регрессионный анализ, как мы знаем, строится на предположении, что исследуемая зависимость имеет вид, близкий к функции

$$Y = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_k X_k + b.$$

Величины Y, X_1, X_2, \dots, X_k являются переменными; их выборочные значения известны. Величины a_1, a_2, \dots, a_k, b являются параметрами, истинные значения которых неизвестны и должны быть оценены.

Записанная функция линейна как по переменным, так и по параметрам.

Допустим, что истинное соотношение близко к функции вида

$$Y = a_1 e^{-X_1} + a_2 X_2 + a_3 X_3^2 + b.$$

Данная функция является нелинейной по переменным, но линейной по параметрам. Если ввести новые переменные

$$U_1 = e^{-X_1}, \quad U_2 = X_2, \quad U_3 = X_3^2,$$

то соотношение станет линейным и по параметрам, и по переменным:

$$Y = a_1 U_1 + a_2 U_2 + a_3 U_3 + b.$$

Таким образом, нелинейность по переменным не является препятствием для применения линейного регрессионного анализа.

Рассмотрим более сложный случай. Пусть истинное соотношение близко к функции вида

$$Y = b X_1^{a_1} X_2^{a_2} e^{a_3 X_3},$$

т. е. является нелинейным как по переменным, так и по параметрам. Можно ли оценить параметры, применяя линейный регрессионный анализ?

Прологарифмируем обе части заданного соотношения. (Вообще, основание логарифма может быть любым, но для определённости мы будем пользоваться натуральными логарифмами). Получаем

$$\ln Y = \ln b + a_1 \ln X_1 + a_2 \ln X_2 + a_3 X_3.$$

Если ввести обозначения $Z = \ln Y$, $c = \ln b$, $U = \ln X_1$, $V = \ln X_2$, $W = X_3$, то соотношение становится линейным как по новой переменной, так и по новым параметрам: $Z = a_1 U + a_2 V + a_3 W + c$. Оценив эти параметры, можно вернуться к нелинейному соотношению и записать выборочное уравнение регрессии в виде

$$\bar{y}_{x_1, x_2, x_3} = e^{c^*} x_1^{a_1^*} x_2^{a_2^*} e^{a_3^* x_3}.$$

Существуют и ситуации, когда исходное нелинейное соотношение линеаризовать не удаётся и необходимо использовать нелинейную модель регрессии. Общий подход по-прежнему может основываться на принципе минимизации суммы квадратов отклонений. Если решить эту проблему аналитически не получается, то можно перебрать возможные значения параметров, пока не будет найден оптимальный вариант.

Примеры выполнения заданий на компьютере: аппроксимация зависимостей по данным измерений

Задание 1. В примере 4.1 найден интерполяционный многочлен Лагранжа по данным 4 измерений: $F(x) = L_3(x) = 8x - 6x^2 + x^3$. Требуется прийти к тому же результату посредством регрессионного анализа.

Инструкция по выполнению задания 1

1. По исходным данным примера 4.1 постройте диаграмму рассеивания (*точечная диаграмма*). Выведите на диаграмме линию регрессии (кубическая парабола) и её уравнение. Для этого щёлкните правой кнопкой мыши на любой из точек графика (точечной диаграммы) и выберите **Добавить линию тренда**. В окне **Параметры линии тренда** выберите **Полиномиальная, Степень 3**, поставьте галочки в окошках **Показывать уравнение на диаграмме** и **Поместить на диаграмму величину достоверности аппроксимации (R^2)**. Закрыв окно, вы увидите, что на диаграмме появилась кривая, прошедшая через все 4 точки, её уравнение (возможно, с некоторой пренебрежимо малой погрешностью) и величина коэффициента детерминации $R^2 = 1$. (В качестве объяснения посмотрите формулу (5.8) и описание под ней).

2. Другой способ заключается в линеаризации модели $Y = a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 + b$ путём введения новых переменных $U = X^2$ и $V = X^3$. Сформируйте новую таблицу, поместив в первый столбец значения Y , в последующие столбцы – значения X , U и V . Обратитесь к функции ЛИНЕЙН, которая имеет вид

ЛИНЕЙН (массив $\{y_i\}$, $i = \overline{1, n}$; массив $\{x_{ji}\}$, $j = \overline{1, k}$, $i = \overline{1, n}$); A ; B).

Первый аргумент – диапазон, содержащий значения Y ; второй аргумент – диапазон, содержащий значения независимых переменных; A – логическое значение, которое указывает на наличие (1) или отсутствие (0) свободного члена в уравнении; B – логическое значение, которое указывает, выводить ли дополнительную статистику по регрессионному анализу (1) или нет (0).

В случае изучения множественной регрессии выделяется диапазон размером 5 на $k+1$, где k – число независимых переменных. Во второе окно вводится диапазон значений объясняющих переменных. Регрессионная статистика будет выводиться в следующем порядке:

a_k^*	a_{k-1}^*	...	a_2^*	a_1^*	b^*
s_{a_k}	$s_{a_{k-1}}$	–	s_{a_2}	s_{a_1}	s_b
R^2	s	–	–	–	–
F -статистика	$n-1-k$	–	–	–	–
SSE	SSR	–	–	–	–

Здесь s – стандартная ошибка оценки Y , а во второй строке представлены так называемые стандартные отклонения коэффициентов регрессии. Эти показатели мы не используем, а остальные величины, представленные в таблице, обозначены так же, как в тексте данного пособия.

Если дополнительная регрессионная статистика требуется, выделим в электронной таблице диапазон ячеек размером 5 на 4 (5 строк, 4 столбца). Вызовем функцию ЛИНЕЙН. Введём аргументы и щёлкнем по ОК. В левой верхней ячейке выделенной области появится первый элемент итоговой таблицы. Чтобы раскрыть всю таблицу, нажмём на клавишу F2, а затем – на комбинацию клавиш <CTRL> + <SHIFT> + <ENTER>.

Коэффициенты регрессии, появившиеся в 1-й строке таблицы, не должны отличаться от уже известных нам значений (оценка свободного члена, возможно, будет содержать пренебрежимо малую погрешность). Постарайтесь самостоятельно объяснить значения остальных показателей.

Задание 2. Является продолжением задания 3 (тема 4), в котором изучалась множественная корреляция, и был найден соответствующий коэффициент. Теперь по тем же данным построим модель регрессии с тремя независимыми переменными.

Инструкция по выполнению задания 2

Снова обратимся к функции ЛИНЕЙН. Результат будет представлен в следующем виде:

-0,89144	2,832728	1,005391	-3,25573
0,19837	0,30429	0,356699	1,672071
0,957746	0,239896	#Н/Д	#Н/Д
120,8868	16	#Н/Д	#Н/Д
20,8712	0,920804	#Н/Д	#Н/Д

Таким образом, мы получили уравнение регрессии

$$\bar{y}_{x_1, x_2, x_3} = 1,005x_1 + 2,833x_2 - 0,891x_3 - 3,256$$

с коэффициентом детерминации $R^2 = 0.958$, который должен быть равен квадрату коэффициента множественной корреляции R , полученного при выполнении задания 3 (тема 4). Самостоятельно оцените адекватность модели с помощью F-критерия.

Задание 3. Имеется таблица экспериментальных данных, полученных в 20 опытах (табл. 5.1).

Таблица 5.1

1. Произвольно предположив, что зависимость Y от X_1 и X_2 можно аппроксимировать формулой

$$Y = a_1 X_1 + a_2 X_2 + b,$$

найти оценки параметров линейной регрессии и записать её уравнение в виде $\bar{y}_{x_1, x_2} = a_1^* x_1 + a_2^* x_2 + b^*$.

2. После анализа физической природы изучаемой зависимости возникло предположение, что более удачной аппроксимацией может служить показательно-степенная функция

$$Y = b X_1^{a_1} e^{a_2 X_2},$$

которую можно линеаризовать логарифмированием:

$$\ln Y = \ln b + a_1 \ln X_1 + a_2 X_2;$$

$$Z = \ln Y, \quad c = \ln b, \quad U = \ln X_1, \quad V = X_2;$$

$$Z = a_1 U + a_2 V + c.$$

Найти с помощью линейного регрессионного анализа оценки a_1^* , a_2^* , c^* и записать выборочное уравнение регрессии в виде

Y	X ₁	X ₂
0.51	0.60	0.28
0.02	0.15	0.94
1.95	0.76	0.12
0.65	0.47	0.29
1.21	0.80	0.69
2.06	0.78	0.22
1.67	0.75	0.26
0.02	0.11	0.20
0.24	0.48	0.88
2.82	1.00	0.44
1.14	0.67	0.56
0.77	0.56	0.29
0.02	0.15	0.99
2.33	0.99	0.45
1.61	0.80	0.19
0.02	0.11	0.75
0.32	0.36	0.01
1.27	0.95	0.93
0.28	0.66	0.97
0.74	0.92	0.71

$$\bar{y}_{x_1, x_2} = e^{c^*} x_1^{a_1^*} e^{a_2^* x_2}.$$

3. Сравнить коэффициенты детерминации двух полученных моделей регрессии.

4. Для каждой модели сравнить реальные результаты всех 20 измерений Y с модельными предсказаниями \bar{y}_{x_1, x_2} , рассчитав среднюю абсолютную и среднюю относительную ошибки предсказания:

$$\bar{\Delta} = \frac{1}{n} \sum_i |y_i - \bar{y}_{x_1, x_2}|;$$

$$\bar{\delta} = \frac{1}{n} \sum_i \left| \frac{y_i - \bar{y}_{x_1, x_2}}{y_i} \right|.$$

Инструкция по выполнению задания 3

Для оценивания параметров регрессии нужно воспользоваться функцией ЛИНЕЙН. При этом в п. 2 работать с новыми переменными Z, U, V .

Контрольные вопросы

1. Охарактеризуйте особенности двух подходов (интерполяционного и регрессионного) к аппроксимации зависимостей.

2. В задании 1 попробуйте в окне **Параметры линии тренда** выбрать **Полиномиальная, Степень 2**, а затем **Степень 4**. Как вы можете объяснить снижение коэффициента детерминации в первом случае и отсутствие всяких изменений во втором?

3. Как проверяется адекватность регрессионной модели?

4. Может ли при включении в модель дополнительной независимой переменной снизиться коэффициент детерминации?

5. Классифицируйте различные типы нелинейности моделируемых зависимостей с точки зрения регрессионного анализа.

6. Придумайте собственный пример перехода от нелинейной модели с одной независимой переменной к линейной модели с несколькими независимыми переменными.

Тема 6. ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

Требования к параметрам эксперимента. Планы первого порядка. Полный факторный эксперимент. Составление матрицы планирования. Проверка однородности дисперсий. Расчет оценок коэффициентов регрессионного уравнения, проверка их значимости, проверка на адекватность полученного уравнения регрессии.

6.1. Основные понятия

Измеряемые переменные величины, принимающие в некоторый момент времени определенные значения и влияющие на объект исследования, будем называть *факторами эксперимента*. Выбор факторов эксперимента является весьма существенным, от него зависит насколько успешно и качественно будет решена поставленная задача.

Ранее мы рассматривали *пассивный* эксперимент, при котором значения факторов в каждом опыте регистрируются исследователем, но не задаются. Математическая статистика использовалась нами только при обработке результатов эксперимента, но не на стадии его постановки. Теперь мы переходим к рассмотрению активного эксперимента, в котором исследователь по своему усмотрению может изменять условия его проведения, т. е. значения факторов. Математическая статистика в этом случае используется уже на стадии постановки и планирования эксперимента.

Теория планирования эксперимента началась с работ знаменитого английского ученого Р. Фишера в 30-е гг. XX столетия. Именно он доказал целесообразность использования статистических методов в проблеме поиска оптимальных условий проведения эксперимента. Свои методы он использовал для решения агробιοлогических задач. В дальнейшем это направление было развито в 50-е гг. в США Дж. Боксом и его сотрудниками. Российские ученые тоже внесли большой вклад в развитие теории эксперимента, предложив ряд новых методов, а инженеры-исследователи все шире применяют эти методы на практике.

Проведение активного эксперимента зачастую требует больших материальных затрат. Поэтому важной задачей является получение необходимых сведений при минимальном числе опытов. Решением этой проблемы занимается *математическая теория планирования эксперимента*, под которой мы будем понимать науку о способах составления экономичных экспериментальных планов, одновременно позволяющих извлекать наибольшее количество информации об объекте исследования, о способах проведения эксперимента, о способах обработки экспериментальных данных и их использования для оптимизации производственных процессов, а также инженерных расчетов.

Задача планирования эксперимента – это задача выбора числа и условий проведения опытов, методов математической обработки их результатов и принятия решений.

В общем случае она позволяет ответить на следующие вопросы:

- как спланировать эксперимент, обеспечивающий при требуемой точности результатов минимальные затраты времени и средств;
- как обработать результаты, чтобы извлечь из них максимум информации об исследуемом объекте;
- какие выводы можно сделать по результатам эксперимента и какова достоверность этих выводов.

Проблемы, для решения которых может использоваться планирование эксперимента, чрезвычайно разнообразны. Это поиск оптимальных условий, построение интерполяционных формул, выбор существенных факторов, оценка и уточнение констант теоретических моделей (например, кинетических), выбор наиболее приемлемых из некоторого множества гипотез о механизме явлений, исследование диаграмм состав-свойство и т. д.

При планировании эксперимента исследуемый объект представляется «черным ящиком» (рис. 6.1), на который воздействуют *факторы* x_1, x_2, \dots, x_n , называемые еще управляющими входными (независимыми) переменными.

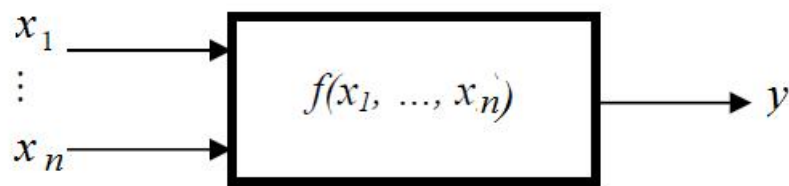


Рис. 6.1. Модель «черного ящика»

Факторы определяют состояние объекта. Каждый фактор x_i ($i = 1, \dots, n$) может принимать определенное количество значений, называемых *уровнями факторов*. Множество возможных уровней фактора x_i называется *областью его определения*. Эти области могут быть непрерывными и дискретными, ограниченными и неограниченными. Многомерное *факторное пространство* – это пространство, координаты которого соответствуют рассматриваемым факторам. Размерность факторного пространства равна числу факторов. Так, например, при двух факторах факторное пространство представляет собой *факторную плоскость*.

Для проведения активного эксперимента необходимо иметь возможность воздействовать на поведение факторов: либо поддерживать их на заданном уровне, либо изменять по программе.

Стрелка справа на рис. 6.1 указывает на выходную (зависимую) переменную y , которую принято называть *откликом*.

Зависимость отклика от рассматриваемых факторов называется *функцией отклика*. Геометрическое представление функции отклика в факторном пространстве называют *поверхностью отклика*.

6.2. Требования к параметрам эксперимента

При планировании эксперимента значениям факторов присваиваются определенные уровни, т. е. факторы принимаются дискретными. В практических задачах области определения факторов имеют ограничения, которые носят либо принципиальный, либо технический характер.

Факторы могут быть *количественными и качественными*.

Примерами количественных факторов являются температура, давление, концентрация и т. п. Их уровням соответствует числовая шкала.

Применение катализаторов, конструкции аппаратов, способы лечения, методики преподавания и т. п. являются примерами качественных факторов. Если используются качественные факторы, то при планировании эксперимента каждому их уровню должно быть присвоено какое-либо число, т. е. производится кодирование. Порядок уровней здесь произволен, но после кодирования он фиксируется.

К факторам в активном эксперименте предъявляются определенные требования:

1. Факторы должны быть управляемыми. Это значит, что возможна установка заданных значений и поддержание их постоянными в процессе опыта. Например, экспериментальная установка находится на открытой площадке. Здесь температурой воздуха мы не можем управлять, ее можно только контролировать, и потому при выполнении опытов температуру мы не можем рассматривать как фактор активного эксперимента.

2. Точность замеров факторов должна быть как можно более высокой.

3. Чтобы точно определить фактор, нужно указать последовательность действий, с помощью которых устанавливаются его конкретные значения. Так, например, если фактором является температура, влажность или давление в некоторой установке, то необходимо указать, в какой точке и с помощью какого прибора этот параметр измеряется.

4. Факторы должны непосредственно воздействовать на объект исследования.

5. Важно выбирать в качестве факторов только те, которые можно изменять, не затрагивая другие факторы. При этом уровень любого фактора должен устанавливаться независимо от уровней остальных (независимость факторов).

6. При планировании эксперимента одновременно изменяют несколько факторов, поэтому необходимо, чтобы все факторы были совместимы. Совместимость факторов означает, что все их комбинации осуще-

ствимы, безопасны и их взаимное влияние не будет нарушать процесс функционирования объекта.

Для построения эффективной математической модели целесообразно провести предварительный анализ значимости факторов (степени влияния на функцию), их ранжирование и исключить малозначащие факторы.

Выходные переменные – это реакции (отклики) на воздействие факторов. *Отклик* зависит от специфики исследования. Он может быть экономическим (прибыль, рентабельность), технологическим (выход, надежность), психологическим, статистическим и т. д. Однако могут встречаться и отклики, характеризующиеся качественными признаками. В этом случае возможно применение *рангового* подхода. Ранговый параметр имеет дискретную ограниченную область определения. В простейшем случае область содержит два значения (да, нет; хорошо, плохо и т. п.). Это может соответствовать, например, годной продукции и браку. Еще один пример рангового подхода – оценка на экзамене, когда одним числом оценивается сложный комплекс полученных сведений о знаниях студента. (Отметим, что применение рангового подхода, при котором рангами считались порядковые номера членов вариационного ряда, рассматривался в п. 2.3).

Укажем два требования, предъявляемых к объекту исследования, которые нужно учитывать при планировании эксперимента. Прежде всего существенно, воспроизводятся ли на объекте в одних и тех же условиях результаты эксперимента. Выберем некоторые уровни для всех факторов и в этих условиях проведем эксперимент. Затем повторим его несколько раз через неравные промежутки времени и сравним значения функции отклика. Разброс этих значений характеризует воспроизводимость результатов. Если он не превышает некоторой заранее заданной величины (наших требований к точности эксперимента), то объект удовлетворяет требованию воспроизводимости результатов, а если превышает, то не удовлетворяет этому требованию.

Вторым требованием к объекту исследования является его управляемость, т. е. возможность активного вмешательства в процесс выбора в каждом опыте тех уровней факторов, которые в данный момент интересуют исследователя.

6.3. Основы планирования многофакторного эксперимента

Среди основных методов планирования, применяемых на разных этапах исследования, используют:

- планирование отсеивающего эксперимента, основное назначение которого – выделение из всей совокупности факторов группы существенных факторов, подлежащих дальнейшему детальному изучению;
- планирование эксперимента для дисперсионного анализа, т. е. составление планов для объектов с качественными факторами;

- планирование регрессионного эксперимента, позволяющего получать регрессионные модели (полиномиальные и иные);
- планирование экстремального эксперимента, в котором главная задача – экспериментальная оптимизация объекта исследования;
- планирование при изучении динамических процессов и т. д.

Целью планирования эксперимента, как правило, является получение математической модели исследуемого объекта или процесса.

Если на объект действует много факторов, механизм которых неизвестен, то для математического описания поверхности отклика обычно используют полиномиальные математические модели

$$y = \beta_0 + \sum_{i=1}^n \beta_i x_i + \sum_{i,j=1}^n \beta_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n \beta_{ii} x_i^2 + \dots, \quad (6.1)$$

где x_i, x_j – факторы ($i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n; i \neq j$);

$$\beta_i = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right); \quad \beta_{ij} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right); \quad \beta_{ii} = \left(\frac{\partial^2 f}{2 \partial x_i^2} \right) - \text{коэффициенты.}$$

На практике по результатам эксперимента производится обработка данных по методу наименьших квадратов (тема 5). Этот метод позволяет найти оценки b коэффициентов β , и полином (6.1) заменяется уравнением вида

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_{ii} x_i^2 + \dots, \quad (6.2)$$

которое является регрессионной моделью (моделью регрессионного анализа). В этом выражении \hat{y} означает модельное, т. е. рассчитываемое по уравнению модели, значение выхода.

В регрессионной модели члены второй степени характеризуют кривизну поверхности отклика. На практике чаще всего стремятся ограничиться линейной моделью.

План эксперимента – это информация, определяющая число, условия и порядок проведения опытов. Область возможных комбинаций факторов называется *областью возможных (допустимых) планов эксперимента*.

Планы учитывают как особенности структуры регрессионных моделей, так и требования их эффективности с позиций повышения точности получаемых моделей и снижения затрат на проведение эксперимента.

Будем называть *состоянием* какую-либо возможную комбинацию значений факторов эксперимента. Чтобы узнать число различных состояний и, следовательно, число различных опытов, достаточно число уровней

факторов p (если оно для всех факторов одинаково) возвести в степень числа факторов k . Итак, число различных опытов равно p^k .

На первый взгляд простая система с шестью факторами на четырех уровнях имеет $4^6 = 4096$ состояний, а для десяти факторов на четырех уровнях их уже свыше миллиона! В этих условиях провести все возможные опыты практически невозможно, перебор слишком велик. Тогда возникает вопрос, сколько и каких опытов нужно включить в эксперимент, чтобы решить поставленную задачу? Здесь-то и приходит на помощь планирование эксперимента.

Под *планами первого порядка* понимают такие планы, которые позволяют провести эксперимент для отыскания уравнения регрессии, содержащего только первые степени факторов и их произведения:

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n b_{ij} x_i x_j + \sum_{\substack{i,j,u=1 \\ i \neq j \neq u}}^n b_{iju} x_i x_j x_u + \dots \quad (6.3)$$

Планы второго порядка позволяют провести эксперимент для отыскания уравнения регрессии, содержащего и вторые степени факторов:

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{i=1}^n b_{ii} x_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n b_{ij} x_i x_j + \dots \quad (6.4)$$

В инженерной практике при планировании экспериментов используются, в основном, планы первого и второго порядков. Планы более высоких порядков используются редко.

6.4. Планы первого порядка. Полный факторный эксперимент

Предположим, что изучается влияние ряда факторов z_i ($i = 1, \dots, k$) на некоторую величину y . Для этого проводятся эксперименты по определенному плану, который позволяет реализовать все возможные комбинации факторов.

Для каждого фактора необходимо указать интервал его изменения. Для этого устанавливаются ориентировочные значения факторов $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{i0}, \dots, x_{k0}$, которые принимаются за *основной* (нулевой) уровень.

Интервалом варьирования факторов называется некоторое число (в общем случае разное для каждого фактора), прибавление которого к основному уровню дает *верхний*, а вычитание – *нижний* пределы. Интервал варьирования должен быть больше погрешности измерения уровня фактора (ограничение снизу), а верхний и нижний уровни фактора не должны выходить за область его допустимых значений (ограничение сверху). Для упрощения записи условий эксперимента и обработки экспериментальных

данных масштабы по осям выбираются так, чтобы верхний уровень составлял +1, нижний –1, а основной – 0.

В теории планирования экспериментов показано, что минимально необходимое число уровней факторов на единицу больше порядка уравнения.

Таким образом, при использовании планов первого порядка достаточно каждый фактор рассматривать лишь на двух фиксированных уровнях (верхнем и нижнем). Число всех экспериментов (опытов) в этом случае будет равно $n = 2^k$, где k – количество изучаемых факторов. Постановка опытов по такому плану называется *полным факторным экспериментом типа 2^k* (ПФЭ 2^k). Иными словами, *полный факторный эксперимент* – это эксперимент, реализующий все возможные неповторяющиеся комбинации уровней независимых факторов.

В зависимости от объема априорной информации в математическую модель включают не все, а лишь некоторые взаимодействия первого порядка, иногда – взаимодействия второго порядка и очень редко – взаимодействия третьего и более высокого порядков. Связано это с тем, что учет всех взаимодействий приводит к громоздким расчетам.

Значения факторов, которые имеют реальный физический смысл, приводятся к одному масштабу. Это достигается путем *кодирования переменных*.

Обозначим нижний уровень фактора z_i через z_i^- , а верхний уровень – через z_i^+ (т. е. $z_i \in [z_i^-, z_i^+]$, $i=1, \dots, k$). Тогда новые кодированные переменные x_i будут определяться через z_i по формуле

$$x_i = \frac{z_i - z_i^0}{\lambda_i}, \quad (6.5)$$

где z_i^0 называют центром плана, λ_i – интервалом варьирования. Эти величины находят с помощью соотношений

$$z_i^0 = \frac{z_i^+ + z_i^-}{2}, \quad \lambda_i = \frac{z_i^+ - z_i^-}{2}.$$

При таком кодировании все новые переменные будут принимать значения от –1 до +1, т. е. $x_i \in [-1, +1]$, $i=1, \dots, k$. При этом значения новых переменных на нижнем уровне будут равны –1, а на верхнем – +1.

Линейное уравнение регрессии относительно новых переменных имеет следующий вид:

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_k x_k. \quad (6.6)$$

Если требуется изучить влияние парных взаимодействий различных факторов, то уравнение регрессии записывают в виде

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_kx_k + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + \dots + b_{k-1,k}x_{k-1}x_k \quad (6.7)$$

Если надо учесть взаимодействия более высоких порядков, то вводятся дополнительные слагаемые.

6.5. Составление матрицы планирования полного факторного эксперимента

Условия эксперимента (все сочетания уровней факторов) можно записать в виде таблицы, где строки соответствуют различным опытам, а столбцы – значениям факторов. Будем называть такие таблицы *матрицами (репликами) планирования эксперимента*. Матрица планирования ПФЭ 2^2 показана в табл. 6.1, а матрица планирования ПФЭ 2^3 в табл. 6.2.

Таблица 6.1

№ опыта	Факторы	
	x_1	x_2
1	-1	-1
2	+1	-1
3	-1	+1
4	+1	+1

Таблица 6.2

№ опыта	Факторы			№ опыта	Факторы		
	x_1	x_2	x_3		x_1	x_2	x_3
1	-1	-1	-1	5	-1	-1	+1
2	+1	-1	-1	6	+1	-1	+1
3	-1	+1	-1	7	-1	+1	+1
4	+1	+1	-1	8	+1	+1	+1

Геометрической интерпретацией ПФЭ 2^2 является квадрат в факторной плоскости (рис. 6.2, а), а ПФЭ 2^3 – куб (рис. 6.2, б).

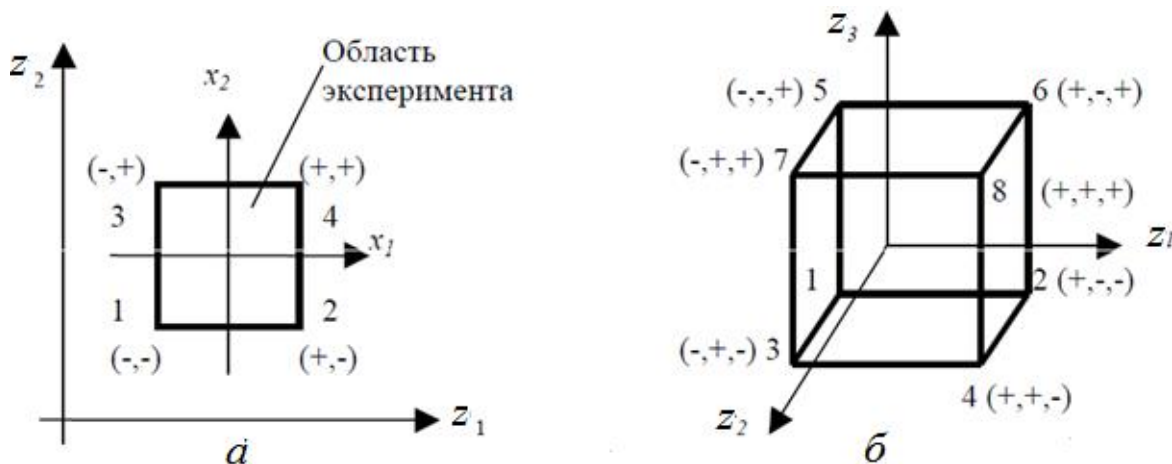


Рис. 6.2. Геометрическая интерпретация ПФЭ

Здесь оси нормированных координат x_1 и x_2 проходят через точку пересечения основных уровней факторов, и масштаб их осей выбран так, чтобы интервал варьирования равнялся 1. Тогда условия проведения опытов в матрице планирования эксперимента будут соответствовать вершинами квадрата, центром которого является основной уровень. Если $n > 3$,

то фигуру, задающую в многомерном пространстве область эксперимента, называют *гиперкубом*.

Каждый столбец в матрице планирования называют вектор-столбцом, а каждую строку – вектор-строкой.

Запись матрицы планирования, особенно для многих факторов, громоздка. Для ее сокращения удобно ввести условные буквенные обозначения строк. Это делается следующим образом. Порядковый номер фактора ставится в соответствие строчной букве латинского алфавита: $x_1 \rightarrow a$, $x_2 \rightarrow b$, ... и т. д. Если теперь для строки матрицы планирования выписать латинские буквы только для факторов, находящихся на верхних уровнях, то условия опыта будут заданы однозначно. Опыт со всеми факторами на нижних уровнях условимся обозначать (1). Теперь вместо полной записи матрицы планирования 2^2 (табл. 6.1) можно пользоваться только буквенными обозначениями: (1), a , b , ab (оба фактора на нижнем уровне, только первый фактор на верхнем уровне, только второй фактор на верхнем уровне, оба фактора на верхнем уровне). Аналогично можно показать, что матрице планирования полного факторного эксперимента 2^3 (табл. 6.2) соответствует буквенная запись: (1), a , b , ab , c , ac , bc , abc .

Если для двух факторов все возможные комбинации уровней легко найти прямым перебором (или просто запомнить), то с ростом числа факторов возникает необходимость в некотором приеме построения матриц, основанном на переходе от матриц меньшей размерности к матрицам большей размерности.

Рассмотрим первый приём. При добавлении нового фактора каждая комбинация уровней исходного плана встречается дважды: в сочетании с нижним и верхним уровнями нового фактора. Отсюда естественно появляется прием: записать исходный план для одного уровня нового фактора, а затем повторить его для другого уровня. Этот прием распространяется на построение матриц любой размерности.

Второй прием основан на правиле чередования знаков. В первом столбце знаки меняются поочередно, во втором столбце они чередуются через два, в третьем – через 4, в четвертом – через 8 и т. д. по степеням двойки.

Оба приема легко проследить на примере матрицы планирования 2^3 (табл. 6.2).

Поскольку значения уровней факторов по модулю всегда равны единице, то часто в матрице планирования записывают только знак уровня (т. е. «+» вместо «1» и «-» вместо «-1»).

Матрица ПФЭ обладает рядом свойств:

- 1) *симметричность* плана относительно центра эксперимента, т. е. сумма значений уровней любого фактора (столбца) равна 0:

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 0;$$

- 2) *нормированность* плана (сумма квадратов элементов любого столбца равна числу опытов n):

$$\sum_{i=1}^n x_{ij}^2 = n;$$

- 3) *ортogonalность* плана (сумма произведений элементов любых двух различных столбцов должно быть равна нулю):

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} \cdot x_{ip} = 0. \quad (6.8)$$

6.6. Порядок постановки полного факторного эксперимента

Влияние факторов на отклик может зависеть от уровня, на котором находится другой фактор, или от сочетания уровней нескольких факторов. Если априорно неизвестно, что такой зависимости между факторами нет, то строят развернутую матрицу планирования, учитывающую не только факторы, но и их взаимодействия. При этом знаки в столбцах для взаимодействий получают перемножением знаков взаимодействующих факторов. Такое правило позволяет гарантировать, что мы не пропустили ни одного возможного сочетания факторов в опытах, и в то же время не будет повторений одинаковых сочетаний. Очень важно, что при добавлении столбцов эффектов взаимодействий все рассмотренные свойства матриц планирования сохраняются.

Рассмотрим подробно построение плана ПФЭ 2^2 .

Для плана ПФЭ 2^2 число факторов равно двум, и число уровней фиксирования факторов также 2. Значения кодированных факторов выбираются в виде +1 и -1. Полное число возможных сочетаний значений 2 факторов (число опытов, а значит и число строк плана) $n = 2^2 = 4$.

Покажем, что планы первого порядка не пригодны для построения регрессионного уравнения, содержащего квадраты факторов.

Попробуем составить план для уравнения:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2.$$

Число членов уравнения здесь равно 6. План ПФЭ 2^2 для этого уравнения представляется в виде табл. 6.3.

Таблица 6.3

№ эксперимента	0	1	2	3	4	5	–
	x_0	x_1	x_2	$x_3 = x_1x_2$	$x_4 = x_1^2$	$x_5 = x_2^2$	y
1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	y_1
2	+1	+1	-1	-1	+1	+1	y_2
3	+1	-1	+1	-1	+1	+1	y_3
4	+1	+1	+1	+1	+1	+1	y_4

В данную матрицу введен дополнительный вектор-столбец фиктивной переменной x_0 , которая принимает во всех опытах значение +1. Эта переменная вводится для придания единообразия формулам для вычисления коэффициентов регрессионного уравнения (см. далее) и носит вспомогательный характер. Столбцы, залитые серым цветом, образуют план эксперимента, остальные столбцы при проведении экспериментов не участвуют и носят вспомогательный характер.

Посмотрев внимательно на полученную матрицу, мы видим, что различных столбцов в таблице получилось лишь четыре. Столбцы, соответствующие квадратам факторов, неотличимы от столбца x_0 . Следовательно, мы не сможем по данному плану определить отдельно коэффициенты при квадратах факторов. Поэтому планы ПФЭ 2^k и называют планами первого порядка.

Таким образом, в матрице планирования эксперимента число различных столбцов равняется числу различных сочетаний факторов, т. е. числу строк плана и, соответственно, числу опытов n . Заметим, что это общий результат для плана ПФЭ 2^k , т. е. с помощью планов ПФЭ 2^k можно определить все коэффициенты линейного полинома со всеми возможными сочетаниями факторов, включая коэффициенты, отражающие максимальное взаимодействие факторов. Для построения регрессионных уравнений, включающих квадраты факторов, используют более сложные планы второго порядка, рассмотрение которых выходит за рамки данного пособия.

План ПФЭ 2^k называется *насыщенным*, если число коэффициентов уравнения регрессии равно числу опытов n , и *ненасыщенным*, при выборе уравнения, число коэффициентов которого меньше n .

Для плана ПФЭ 2^3 число факторов $n = 3$. Выполняется $n = 2^3 = 8$ опытов. Уравнение может содержать до восьми членов. Таким образом, формируется план из восьми строк и восьми столбцов. План составляется аналогично плану ПФЭ 2^2 . Пример развернутой матрицы планирования для ПФЭ 2^3 приведен в табл. 6.4.

Все факторы, влияющие на исследуемые параметры объекта, предусмотреть, как правило, не удастся. Так, в сложных системах, зависящих от множества факторов, некоторые воздействия не могут контролироваться или управляться. Воздействие этих факторов рассматриваются как белый шум, наложенный на истинные результаты эксперимента. Чтобы отделить факторы, интересующие экспериментатора, от шумового фона, применяются специальные методы, называемые *рандомизацией эксперимента*.

Матрица планирования для обработки результатов эксперимента

№ эксперимента	Факторы				Взаимодействия				Результаты параллельных опытов			Среднее результатов
	x_0	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$	y_1	y_2	y_3	
1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	y_{11}	y_{12}	y_{13}	\bar{y}_1
2	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	y_{21}	y_{22}	y_{23}	\bar{y}_2
3	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	y_{31}	y_{32}	y_{33}	\bar{y}_3
4	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1	y_{41}	y_{42}	y_{43}	\bar{y}_4
5	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	y_{51}	y_{52}	y_{53}	\bar{y}_5
6	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1	y_{61}	y_{62}	y_{63}	\bar{y}_6
7	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	y_{71}	y_{72}	y_{73}	\bar{y}_7
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	y_{81}	y_{82}	y_{83}	\bar{y}_8

Для оценки точности эксперимента для каждой j -й точки факторного пространства (для каждого сочетания уровней факторов матрицы планирования) проводят m опытов. В результате получают значения $y_{j1}, y_{j2}, \dots, y_{jm}$ исследуемого параметра, для которых находят среднее значение

$$\bar{y}_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_{ji}. \quad (6.9)$$

При этом опыты проводят не подряд в одной точке, а обходят все точки в первой серии опытов, затем во второй и т. д. Для уменьшения влияния внешней среды и неконтролируемых факторов внутри каждой серии точки факторного пространства обходят случайным образом – рандомизируют последовательность опытов. Рандомизацию опытов можно провести с помощью генератора случайных чисел или таблицы случайных чисел.

Например, в случае постановки двух серий опытов для экспериментов 2^3 получим такие последовательности:

Первый опыт								Второй опыт							
3	6	2	5	1	7	4	8	4	1	8	5	3	2	7	6

Это означает, что в первой серии опытов первым выполняется опыт в точке факторного пространства № 3, вторым – в точке № 6 и т. д. Во второй серии первым выполняется опыт в точке № 4, вторым – в точке № 1 и т. д.

Результаты опытов в каждом j -м эксперименте ($j = 1, \dots, n$) записывают в правые столбцы матрицы планирования. Затем вычисляются средние выборочные значения полученных результатов для каждой серии опытов, относящихся к j -й точке факторного пространства (табл. 6.4).

6.7. Проверка воспроизводимости опытов

С целью оценки отклонений исследуемого параметра от его среднего значения для каждой строки матрицы планирования вычисляют исправленную дисперсию эксперимента по данным m параллельных опытов по формуле

$$s^2(y_j) = \sum_{i=1}^m \frac{(y_{ji} - \bar{y}_j)^2}{m-1}. \quad (6.10)$$

После вычисления дисперсий проверяют гипотезу их однородности по критерию Кохрена.

Среди всей совокупности рассчитанных построчных дисперсий выбирается максимальная $s^2(y_j)_{\max}$ и вычисляется отношение данной дисперсии к сумме всех построчных дисперсий, т. е. определяется расчетное значение коэффициента Кохрена

$$G_p = \frac{s^2(y_j)_{\max}}{\sum_{j=1}^n s^2(y_j)}, \quad (6.11)$$

который показывает, какую долю в общей сумме построчных дисперсий занимает максимальная из них. В случае идеальной однородности построчных дисперсий коэффициент G_p стремился бы к значению $1/n$, где n – число опытов (количество строк в матрице планирования).

Расчетное значение коэффициента Кохрена сравнивается с табличным значением G_t -критерия (прил. 8), которое выбирается из таблиц для принятого уровня значимости α и для чисел степеней свободы f_1 и f_2 (соответственно числителя и знаменателя): $f_1 = m - 1$; $f_2 = n$.

Для этого значение f_1 находится в горизонтальном заголовке таблицы (выбирается столбец), а f_2 выбирается слева в вертикальном заголовке таблицы (выбирается строка) и на пересечении получаем табличное значение G_t коэффициента Кохрена. Если выполняется условие $G_p < G_t$, то с выбранным уровнем статистической значимости α (с достоверностью $1 - \alpha$) все построчные дисперсии признаются однородными. В противном случае следует применить методику исключения резко выделяющихся величин или найти причину возникновения большой дисперсии в j -й точке факторного пространства. Затем эксперимент необходимо повторить, изменив условия его проведения (набор факторов, интервал их варьирования, точность измерительных приборов и пр.).

Если все дисперсии экспериментов однородны, то вычисляют дисперсию воспроизводимости s_y^2 , которая характеризует ошибку всего эксперимента. В случае равномерного дублирования опытов (т. е. при одина-

ковом числе наблюдений в каждом эксперименте) для расчета s_y^2 используют следующую формулу:

$$s_y^2 = \frac{1}{n \cdot (m-1)} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m (y_{ji} - \bar{y}_j)^2 = \frac{\sum_{j=1}^n s^2(y_j)}{n}, \quad (6.12)$$

где n – число экспериментов (число строк в матрице ПФЭ);
 m – число опытов (наблюдений) в каждом эксперименте;
 y_{ji} – результат отдельного i -го наблюдения в j -м эксперименте;
 \bar{y}_j – среднее выборочное значение наблюдений для j -го эксперимента, которое определяется по формуле (6.9).

6.8. Расчет оценок коэффициентов регрессионного уравнения

Расчет оценок коэффициентов уравнения регрессии производится по методу наименьших квадратов, при этом минимизируется сумма квадратов отклонений между экспериментальными значениями исследуемого параметра и значениями, вычисленными для тех же точек факторного пространства по уравнению регрессии. Благодаря предварительной стандартизации масштаба факторов и ортогональности матрицы планирования, расчет оценок коэффициентов регрессии в ПФЭ значительно упрощается

Воспользуемся свойствами ПФЭ для определения коэффициентов уравнения регрессии (6.6) методом наименьших квадратов. Не умаляя общности, выведем формулы для вычисления коэффициентов уравнения:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2.$$

Согласно методу наименьших квадратов мы должны определить

$$\Phi = \sum_{j=1}^n (y_j - \hat{y}_j)^2 \rightarrow \min_{b_i}.$$

Откуда

$$\frac{\partial \Phi}{\partial b_1} = 2 \sum_{j=1}^n (y_j - b_0 - b_1 x_{1j} - b_2 x_{2j}) x_{1j} = 0;$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial b_2} = 2 \sum_{j=1}^n (y_j - b_0 - b_1 x_{1j} - b_2 x_{2j}) x_{2j} = 0;$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial b_0} = 2 \sum_{j=1}^n (y_j - b_0 - b_1 x_{1j} - b_2 x_{2j}) = 0.$$

Раскрывая скобки, получим

$$\sum_{j=1}^n y_j x_{1j} - b_0 \sum_{j=1}^n x_{1j} - b_1 \sum_{j=1}^n x_{1j}^2 - b_2 \sum_{j=1}^n x_{1j} x_{2j} = 0;$$

$$\sum_{j=1}^n y_j x_{2j} - b_0 \sum_{j=1}^n x_{2j} - b_1 \sum_{j=1}^n x_{1j} x_{2j} - b_2 \sum_{j=1}^n x_{2j}^2 = 0;$$

$$\sum_{j=1}^n y_j - b_0 n - b_1 \sum_{j=1}^n x_{1j} - b_2 \sum_{j=1}^n x_{2j} = 0.$$

Матрица планирования ПФЭ обладает следующими свойствами:

- (симметричностью) $\sum_{j=1}^k x_{ij} = 0$;
- (нормированием) $\sum_{j=1}^k x_{ij}^2 = n$;
- (ортогональностью) $\sum_{i=1}^k x_{ji} \cdot x_{pi} = 0$.

С учетом этих свойств система примет вид

$$\sum_{j=1}^n y_j x_{1j} - b_1 n = 0;$$

$$\sum_{j=1}^n y_j x_{2j} - b_2 n = 0;$$

$$\sum_{j=1}^n y_j - b_0 n = 0.$$

Откуда и получим формулы для вычисления коэффициентов уравнения:

$$b_1 = \frac{\sum_{j=1}^n y_j x_{1j}}{n}; \quad b_2 = \frac{\sum_{j=1}^n y_j x_{2j}}{n}; \quad b_0 = \frac{\sum_{j=1}^n y_j}{n}.$$

Следовательно, любые коэффициенты уравнения регрессии (6.6) определяются скалярным произведением столбца y на соответствующий столбец x . Можно показать, что аналогичным образом определяются и коэффициенты, если в уравнении регрессии (6.7) учитываются линейные взаимодействия (двойные, тройные) и т. д.:

$$b_0 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{0j} \bar{y}_j, \quad b_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{ij} \bar{y}_j, \quad i = 1, \dots, k;$$

$$b_{r,p} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{rj} x_{pj} \bar{y}_j, \quad r < p, \quad r = 1, \dots, k, \quad p = 1, \dots, k \text{ и т. д.},$$
(6.13)

если учитываются другие взаимодействия.

Для того чтобы привести формулу для вычисления b_0 к виду, аналогичному формулам для вычисления других коэффициентов, в матрицу планирования и введен упоминавшийся ранее вектор-столбец фиктивной переменной x_0 , которая принимает во всех опытах значение +1.

Следует обратить особое внимание на то, что *все коэффициенты (как линейные, так и определяющие взаимодействия) независимы*, так как в формулы для их расчета (6.13) входят свои одноименные переменные. Поэтому *каждый коэффициент характеризует роль соответствующей переменной (или их взаимодействия) в процессе и указывает на силу влияния факторов*. Чем больше численная величина коэффициента, тем большее влияние оказывает этот фактор. Если коэффициент имеет знак плюс, то с увеличением значения фактора отклик увеличивается, а если минус – уменьшается.

В результате проведенных расчетов может получиться так, что один или несколько коэффициентов уравнения регрессии не очень большие и окажутся незначимыми. Факторы, имеющие коэффициенты, незначимо отличающиеся от нуля, могут быть выведены из состава уравнения, так как их влияние на параметры отклика будет отнесено к ошибке эксперимента. Поскольку коэффициенты независимы друг от друга (что обеспечивается ортогональностью плана), *оставшиеся коэффициенты уравнения регрессии можно не пересчитывать*. Если бы условие ортогональности не выполнялось, то после исключения каждого незначимого коэффициента возникла бы необходимость пересчитывать оценки оставшихся коэффициентов и их дисперсии. При этом могут измениться как доверительные интервалы, так и выводы относительно значимости коэффициентов.

Пример 6.1. Пусть в результате проведения экспериментов по плану ПФЭ 2^2 , т. е. при изменении двух факторов, мы получили опытные значения $y_1 = 6$, $y_2 = 3$, $y_3 = 4$, $y_4 = 7$.

Составляем план ПФЭ 2^2 :

x_0	x_1	x_2	x_1x_2	y	\tilde{y}	\hat{y}	$ y - \hat{y} $
+1	-1	-1	+1	6	4,5	6	0
+1	+1	-1	-1	3	4,5	3	0
+1	-1	+1	-1	4	5,5	4	0
+1	+1	+1	+1	7	5,5	7	0

Отметим, что в первый столбец внесены значения фиктивной переменной x_0 , которая введена для единообразия расчета коэффициентов регрессии по формулам с использованием вычислительной техники.

Вначале найдем по формулам (6.13) коэффициенты сокращенного линейного полинома вида $\tilde{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2$:

$$b_0 = \frac{1}{4}(6 + 3 + 4 + 7) = 5;$$

$$b_1 = \frac{1}{4}(-6 + 3 - 4 + 7) = 0;$$

$$b_2 = \frac{1}{4}(-6 - 3 + 4 + 7) = 0,5.$$

Полином имеет вид $\tilde{y} = 5 + 0 \cdot x_1 + 0,5 \cdot x_2$. Результаты вычислений по нему приведены в столбце \tilde{y} таблицы.

Сравнивая соответствующие значения y и \tilde{y} , видим, что между ними наблюдаются значительные расхождения. Если точность сокращенного полинома нас не удовлетворяет, то по тем же результатам опытов можно сформировать более полный полином вида $\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2$. При этом ранее определенные коэффициенты остаются без изменений. Определим коэффициент b_{12} по формулам (6.13):

$$b_{12} = \frac{1}{4}(6 - 3 - 4 + 7) = 1,5.$$

Полином будет иметь вид $\hat{y} = 5 + 0 \cdot x_1 + 0,5x_2 + 1,5x_1x_2$. По нему рассчитываем предсказанные значения отклика в точках плана (столбец \hat{y}). Поверхность, построенная по полученному полиному, проходит точно через четыре точки плана, по которым определены коэффициенты. Однако, в других точках области определения функции (например, в центре плана) предсказанные и действительные значения могут и не совпадать.

Приведенный пример показывает, что влияние факторов на выходной параметр может зависеть не только от уровня, на котором находится другой фактор, но и от сочетания уровней нескольких факторов.

6.9. Обработка результатов полного факторного эксперимента. Проверка значимости коэффициентов регрессии

Ранее мы показали, как находить коэффициенты уравнения регрессии с помощью метода наименьших квадратов по формулам (6.13).

Проверка значимости каждого коэффициента проводится независимо. Ее можно осуществлять двумя равноценными способами: проверкой по t -критерию Стьюдента или построением доверительного интервала. При использовании полного факторного эксперимента доверительные интервалы для всех коэффициентов (в том числе и эффектов взаимодействия) одинаковы.

Гипотезу о статистической значимости (отличии от нуля) коэффициентов регрессии проверим по критерию Стьюдента.

Расчетные значение t_k этого критерия определяют как частное от деления модуля коэффициента b_k на оценку его среднеквадратического отклонения $s_{коэф}$:

$$t_k = \frac{|b_k|}{s_{коэф}}.$$

Если выполняется неравенство $t_k < t_{cr}$, то считается, что найденный коэффициент b_k является статистически незначимым и его следует исключить из уравнения регрессии. Следовательно, необходимо проверить выполнение неравенства $\frac{|b_k|}{s_{коэф}} < t_{cr}$ или $|b_k| < t_{cr} \cdot s_{коэф}$.

Последнее неравенство и является искомым доверительным интервалом. Полуширину этого интервала обозначим $\Delta b = t_{cr} \cdot s_{коэф}$.

Критическую точку t_{cr} находят из таблиц критических точек распределения Стьюдента (прил. 5). Значение этой точки зависит от числа степеней свободы $n(m - 1)$, где n – число экспериментов ($n = 2^k$)..., m – число проведенных параллельных опытов с заданным уровнем значимости α для случая двусторонней критической области. Если $t_k > t_{cr}$ (или, что тоже самое, $|b_k| > \Delta b$), то коэффициент b_k значим; если $t_k < t_{cr}$, то b_k незначим, и его полагают равным нулю в уравнении регрессии.

Среднее квадратическое отклонение коэффициентов $s_{коэф}$ зависит от дисперсии воспроизводимости результатов по всем проведенным опытам s_y^2 (6.12) и вычисляется по формуле

$$s_{коэф} = \sqrt{\frac{s_y^2}{m \cdot n}}. \quad (6.14)$$

Необходимо помнить, что незначимость коэффициента может быть обусловлена и неверным выбором интервала варьирования фактора. Поэтому иногда бывает полезным расширить интервал варьирования и провести новый эксперимент.

6.10. Проверка уравнения регрессии на адекватность

Проверка на адекватность полученного уравнения регрессии со значимыми коэффициентами осуществляется с помощью критерия Фишера: если $F_{расч} < F_{табл}$, то уравнение адекватно, в противном случае – неадекватно.

Расчетное значение критерия $F_{расч}$ определяют по формуле

$$F_{расч} = \frac{s_{ост}^2}{s_y^2}, \quad (6.15)$$

где s_y^2 – дисперсия воспроизводимости, найденная по формуле (6.12),

$s_{ост}^2$ – остаточная дисперсия, которая вычисляется следующим образом:

$$s_{ocm}^2 = \frac{m}{(n-r)} \sum_{j=1}^n (\hat{y}_j - \bar{y}_j)^2, \quad (6.16)$$

где n – число экспериментов;

m – число опытов в каждом эксперименте;

r – число значимых коэффициентов в уравнении регрессии;

\hat{y}_j – значение изучаемого параметра, вычисленное по уравнению регрессии со значимыми коэффициентами для j -го эксперимента;

\bar{y}_j – среднее выборочное значение наблюдений для j -го эксперимента (формула (6.9)).

Табличное значение критерия $F_{табл}$ находят из таблиц критических точек распределения Фишера (прил. 7) по заданному уровню значимости α и по соответствующим степеням свободы $k_1 = n - r$ и $k_2 = n(m - 1)$. Степень свободы k_1 соответствует степени свободы числителя формулы (6.15) – остаточной дисперсии s_{ocm}^2 , а k_2 – степень свободы знаменателя формулы (6.15) – дисперсии воспроизводимости s_y^2 .

Как правило, вначале проверяют адекватность линейной математической модели без учёта взаимодействия факторов. Если предположение об адекватности подтверждается, то ее выбирают в качестве окончательной; если отклоняется – последовательно добавляют эффекты взаимодействия факторов.

Если в результате модель все же оказалась неадекватной, это говорит о том, что тип математической модели выбран неудачно, и при данном шумовом уровне и классе точности измерительных приборов она должна быть уточнена. Для этого следует использовать более сложные модели, например, квадратичные.

Анализ результатов предполагает интерпретацию полученной модели. Интерпретацию модели можно производить только тогда, когда она записана в кодированных переменных. Только в этом случае на коэффициенты не влияет масштаб факторов, и мы можем по величине коэффициентов судить о степени влияния того или иного фактора. Чем больше абсолютная величина коэффициента, тем больше фактор влияет на отклик (изучаемый параметр). Следовательно, можно расположить факторы по величине их влияния. Знак «плюс» у коэффициента свидетельствует о том, что с увеличением значения фактора растет величина отклика, а при знаке «минус» – убывает.

Для получения математической модели в натуральных переменных z_i в уравнение регрессии вместо x_i необходимо подставить их выраже-

ния из формулы (6.5). При переходе к натуральным переменным коэффициенты уравнения изменяются, и в этом случае пропадает возможность интерпретации влияния факторов по величинам и знакам коэффициентов. Однако, если уравнение адекватно, то с его помощью можно определять значения исследуемой величины, не проводя эксперимента и придавая факторам значения, которые должны лежать между нижним и верхним уровнем.

Пример 6.2. Для исследования влияния некоторых технологических факторов на прочность склеивания частей деталей были поставлены эксперименты по плану ПФЭ 2^3 , причем каждый эксперимент повторялся по пять раз. В качестве факторов, влияющих на прочность склеивания y (кг/см²), были выбраны следующие: z_1 – количество наносимого клея (г/см²); z_2 – время активации клеевой пленки (с); z_3 – давление прессования при склеивании (кгс/см²).

Условия проведения опытов сведены в табл. 6.5.

Таблица 6.5

Характеристика плана	z_1 (г/см ²)	z_2 (с)	z_3 (кгс/см ²)
Нулевой уровень	0,04	180	5
Интервал варьирования	0,02	120	3
Верхний уровень	0,06	300	8
Нижний уровень	0,02	60	2

Требуется построить уравнение регрессии, учитывая все взаимодействия факторов, проверить полученную модель на адекватность и произвести ее интерпретацию.

Работу выполняем в следующем порядке:

1. Кодировем переменные по формулам (6.5):

$$x_i = \frac{z_i - z_i^0}{\lambda_i},$$

где z_i^0 – центр плана (нулевой уровень), λ_i – интервал варьирования.

$$x_1 = \frac{z_1 - 0,04}{0,02}, \quad x_2 = \frac{z_2 - 180}{120}, \quad x_3 = \frac{z_3 - 5}{3}.$$

2. Строим план полного факторного эксперимента и заносим в него результаты проведенных параллельных опытов. По формуле (6.9) вычисляем средние выборочные результатов для каждого эксперимента и добавляем результаты в табл. 6.6.

Таблица 6.6

№ эксперимента	Факторы				Результаты опытов					
	x_0	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	U_{cp}
1	+1	-1	-1	-1	9,38	8,78	9,38	8,79	9,41	9,148
2	+1	+1	-1	-1	11,69	11,83	11,97	11,41	11,81	11,742
3	+1	-1	+1	-1	10,44	10,19	10,59	10,28	10,34	10,368
4	+1	+1	+1	-1	13,35	13,02	13,34	13,05	13,11	13,174
5	+1	-1	-1	+1	11,12	11,01	10,89	11,22	11,19	11,086
6	+1	+1	-1	+1	14,57	13,93	14,35	14,50	14,46	14,362
7	+1	-1	+1	+1	12,66	12,66	12,57	12,73	12,50	12,624
8	+1	+1	+1	+1	15,69	15,97	16,09	15,75	15,50	15,800

3. Вычисляем по формуле (6.10) значения построчных дисперсий и проверяем условие их однородности по критерию Кохрена:

$$s^2(y_1) = [(9,38 - 9,148)^2 + (8,78 - 9,148)^2 + (9,38 - 9,148)^2 + (8,79 - 9,148)^2 + (9,41 - 9,148)^2]/4 = 0,1100;$$

$$s^2(y_2) = [(11,69 - 11,742)^2 + (11,83 - 11,742)^2 + (11,97 - 11,742)^2 + (11,41 - 11,742)^2 + (11,81 - 11,742)^2]/4 = 0,0443.$$

Аналогично находим

$$s^2(y_3) = 0,0237; s^2(y_4) = 0,0254; s^2(y_5) = 0,0185; s^2(y_6) = 0,0647;$$

$$s^2(y_7) = 0,0080; s^2(y_8) = 0,0544.$$

Определим расчетное значение коэффициента Кохрена по формуле (6.11), для чего поделим максимальную из построчных дисперсий на их сумму:

$$G_p = 0,11/(0,1100 + 0,0443 + 0,0237 + 0,0254 + 0,0185 + 0,0647 + 0,0080 + 0,0544);$$

$$G_p = 0,3151.$$

В соответствии с таблицей коэффициентов (прил. 8) для уровня значимости $\alpha = 0,05$ и числа степеней свободы $f_1 = 5 - 1 = 4$; $f_2 = 8$, находим $G_t = 0,3910$; $G_t > G_p$, т. е. условие однородности дисперсий выполняется.

Для получения дисперсии воспроизводимости по формуле (6.12) находим сумму полученных построчных дисперсий и делим ее на количество опытов, т. е. на 8. В результате получаем $s_y^2 = 0,043628$.

4. Достраиваем матрицу планирования в кодированных переменных с учетом всех возможных взаимодействий и дополняем столбцом средних значений отклика \bar{y} (табл. 6.7).

Таблица 6.7

№ эксперимента	Факторы				Взаимодействия				у среднее	у по уравнению
	x_0	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$	\bar{y}	\hat{y}
1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	9,148	9,0545
2	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	11,742	11,7545
3	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	10,368	10,4615
4	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1	13,174	13,1615
5	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	11,086	11,1515
6	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1	14,362	14,3775
7	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	12,624	12,5585
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	15,800	15,7845

5. Вычисляем коэффициенты уравнения регрессии по формулам (6.13):

$$b_0 = (+1 \cdot 9,148 + 1 \cdot 11,742 + 1 \cdot 10,368 + 1 \cdot 13,174 + 1 \cdot 11,086 + 1 \cdot 14,362 + 1 \cdot 12,624 + 1 \cdot 15,8) / 8; \quad b_0 = 12,288;$$

$$b_1 = (-1 \cdot 9,148 + 1 \cdot 11,742 - 1 \cdot 10,368 + 1 \cdot 13,174 - 1 \cdot 11,086 + 1 \cdot 14,362 - 1 \cdot 12,624 + 1 \cdot 15,8) / 8; \quad b_1 = 1,4815;$$

$$b_2 = (-1 \cdot 9,148 - 1 \cdot 11,742 + 1 \cdot 10,368 + 1 \cdot 13,174 - 1 \cdot 11,086 - 1 \cdot 14,362 + 1 \cdot 12,624 + 1 \cdot 15,8) / 8; \quad b_2 = 0,7035.$$

Аналогично получим

$$b_3 = 1,18; \quad b_{12} = 0,014; \quad b_{13} = 0,1315; \quad b_{23} = 0,0405; \quad b_{123} = -0,039.$$

6. Найденные коэффициенты уравнения регрессии необходимо оценить на статистическую значимость. Вычислим среднее квадратическое отклонение коэффициентов $S_{\text{коэф}}$ по формуле (6.14). Для рассматриваемого примера

$$S_{\text{коэф}} = \sqrt{\frac{S_y^2}{m \cdot n}} = \sqrt{\frac{0,043628}{8 \cdot 5}} = 0,033026.$$

При выбранном уровне статистической значимости $\alpha = 0,05$ по таблицам распределения Стьюдента (прил. 5) при числе степеней свободы $f = n \cdot (m - 1) = 8 \cdot 4 = 32$ находим табличное значение критической точки

$t_{cr} = 2,04$. Следовательно, доверительный интервал будет иметь полуширину $\Delta b = t_{cr} \cdot S_{коэф} = 2,04 \cdot 0,033026 = 0,067372$.

Сравнивая все полученные коэффициенты регрессионного уравнения с найденным доверительным интервалом, видим, что коэффициенты b_{12} , b_{23} и b_{123} по абсолютной величине меньше, чем $0,067372$. Следовательно, эти коэффициенты незначимы, и их можно приравнять к нулю.

Таким образом, искомое уравнение регрессии мы получили в виде

$$\hat{y} = 12,288 + 1,4815x_1 + 0,7035x_2 + 1,18x_3 + 0,1315x_1x_3.$$

7. Проверим полученное уравнение на адекватность по критерию Фишера. Так как дисперсия воспроизводимости найдена в предыдущем пункте, то для определения расчетного значения критерия $F_{расч}$ необходимо вычислить остаточную дисперсию $S_{ост}^2$ по формуле (6.16).

Для этого найдем значения изучаемого параметра \hat{y}_j , вычисленные по уравнению регрессии со значимыми коэффициентами для каждого j -го эксперимента, и добавим эти значения в последний столбец табл. 6.7.

$$\hat{y}_1 = 12,288 + 1,4815 \cdot (-1) + 0,7035 \cdot (-1) + 1,18 \cdot (-1) + 0,1315 \cdot 1 = 9,0545;$$

$$\hat{y}_2 = 12,288 + 1,4815 \cdot 1 + 0,7035 \cdot (-1) + 1,18 \cdot (-1) + 0,1315 \cdot (-1) = 11,7545;$$

$$\hat{y}_3 = 12,288 + 1,4815 \cdot (-1) + 0,7035 \cdot 1 + 1,18 \cdot (-1) + 0,1315 \cdot 1 = 10,4615.$$

Аналогично получим

$$\hat{y}_4 = 13,1615; \hat{y}_5 = 11,1515; \hat{y}_6 = 14,3775; \hat{y}_7 = 12,5585; \hat{y}_8 = 15,7845.$$

Рассчитаем оценку дисперсии адекватности:

$$S_{ост}^2 = \frac{m}{(n-r)} \sum_{j=1}^n (\hat{y}_j - \bar{y}_j)^2 = \frac{5}{(8-5)} \cdot [(9,0545 - 9,148)^2 + (11,7545 - 11,742)^2 + (10,4615 - 10,368)^2 + (13,1615 - 13,174)^2 + (11,1515 - 11,086)^2 + (14,3775 - 14,362)^2 + (12,5585 - 12,624)^2 + (15,7845 - 15,8)^2] = 0,044763.$$

Расчетное значение критерия Фишера $F_{расч}$ определим по формуле

$$F_{расч} = \frac{s_{ост}^2}{s_y^2} = \frac{0,044763}{0,043628} = 1,026.$$

Табличное значение критерия $F_{табл}$ находим из таблиц критических точек распределения Фишера (прил. 7) при уровне значимости $\alpha = 0,05$ по соответствующим степеням свободы $f_1 = n - r = 8 - 5 = 3$ и $f_2 = n(m - 1) = 8 \cdot 4 = 32$: $F_{табл}(0,05; 3; 32) = 2,901$.

Так как $F_{расч} = 1,026 < F_{табл} = 2,901$, то полученное уравнение регрессии адекватно.

8. Проведем интерпретацию полученной модели:

$$\hat{y} = 12,288 + 1,4815x_1 + 0,7035x_2 + 1,18x_3 + 0,1315x_1x_3.$$

По уравнению видно, что наиболее сильное влияние на прочность склеивания оказывает фактор x_1 – количество наносимого клея, так как он имеет наибольший по абсолютной величине коэффициент. После него по силе влияния на отклик (прочность склеивания) идут: фактор x_3 – давление пресса при склеивании и фактор x_2 – время активации клеевой пленки. Значительно меньшее (но все же значимое) влияние оказывает парное взаимодействие x_1x_3 – сочетание количества наносимого клея и уровня давления при склеивании. Все значимые коэффициенты в уравнении положительны, следовательно, при возрастании всех факторов (в пределах исследованных интервалов изменения их значений) увеличивается прочность склеивания деталей.

9. Запишем уравнение регрессии, подставляя по формулам (6.5) вместо x_i их выражения через исходные переменные z_i :

$$\begin{aligned} \hat{y} = & 12,288 + 1,4815x_1 + 0,7035x_2 + 1,18x_3 + 0,1315x_1x_3 = 12,288 + \\ & + 1,4815 \cdot \frac{z_1 - 0,04}{0,02} + 0,7035 \cdot \frac{z_2 - 180}{120} + 1,18 \cdot \frac{z_3 - 5}{3} + 0,1315 \cdot \frac{z_1 - 0,04}{0,02} \cdot \frac{z_3 - 5}{3}. \end{aligned}$$

Преобразовав это выражение, окончательно получаем его вид в исходных переменных:

$$\hat{y} = 6,7414 + 63,1167z_1 + 0,0059z_2 + 0,3057z_3 + 1,8858z_1z_3.$$

Примеры выполнения заданий на компьютере: полный факторный эксперимент

Задание 1. Решить пример 6.2. с использованием MSExcel.

Инструкция по выполнению задания 1

Создайте на листе Excel таблицу результатов проведенных параллельных опытов (массив A2:F9 на рис. 6.3). Средние выборочные значения результатов для каждого эксперимента можно вычислить с использованием функций СУММ или СРЗНАЧ (ячейки F2:F9).

Пример 6.2

Главная Вставка Разметка страницы Формулы Данные Рецензирование

K11 f_x

	A	B	C	D	E	F	G	
1	y1	y2	y3	y4	y5	y среднее	построчные дисперсии	
2	9,38	8,78	9,38	8,79	9,41	9,148	0,1100	
3	11,69	11,83	11,97	11,41	11,81	11,742	0,0443	
4	10,44	10,19	10,59	10,28	10,34	10,368	0,0237	
5	13,35	13,02	13,34	13,05	13,11	13,174	0,0254	
6	11,12	11,01	10,89	11,22	11,19	11,086	0,0185	
7	14,57	13,93	14,35	14,5	14,46	14,362	0,0647	
8	12,66	12,66	12,57	12,73	12,5	12,624	0,0080	
9	15,69	15,97	16,09	15,75	15,5	15,8	0,0544	
10						сумма	0,3490	
11						max	0,1100	
12			значение критерия Кохрена					0,3151
13			табличное значение критерия Кохрена					0,391
14			дисперсия воспроизводимости					0,043628
15								

Рис. 6.3. результаты опытов и полученные расчеты

Значения построчных дисперсий определите, используя функцию ДИСП, и поместите в ячейках G2:G9. Расчетное значение коэффициента Кохрена можно найти, применяя функции СУММ и МАКС. Табличное значение коэффициента Кохрена определяем по таблице прил. 8 (ячейка G13). Дисперсию воспроизводимости вычислим в ячейке G14, поделив содержимое ячейки G10 на количество экспериментов, т. е. на 8.

Переносим на лист Excel табл. 6.7 (рис. 6.4, ячейки A17:I24), не заполняя пока последний столбец \hat{y} (ячейки J17:K24 будут заполнены позднее). Для вычисления коэффициентов уравнения регрессии по формулам (6.13) используем функцию СУММПРОИЗВ, результат помещаем в ячейки A27:H27. Для проверки статистической значимости полученных коэффициентов в ячейке G29 вычислим среднее квадратическое отклонение коэффициентов $S_{коэф}$ по формуле (6.14), используя функцию КОРЕНЬ. Затем по таблицам распределения Стьюдента (прил. 5) находим табличное значение критической точки $t_{cr} = 2,04$ и определяем полуширину доверительного интервала по формуле $\Delta b = t_{cr} \cdot S_{коэф}$. Результат поместим в ячейке G31. Сравним полученные коэффициенты с величиной Δb и приравняем к нулю те из них, которые оказались меньше Δb (ячейки A34:H34).

Пример 6.2.2.xlsx - Microsoft Excel											
И11											
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
16	x0	x1	x2	x3	x1 x2	x1 x3	x2 x3	x1 x2 x3	у среднее	у вычисл	(у _{ср} - у _{выч})
17	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	9,148	9,0545	0,093500
18	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	11,742	11,7545	-0,012500
19	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	10,368	10,4615	-0,093500
20	1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	13,174	13,1615	0,012500
21	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	11,086	11,1515	-0,065500
22	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	14,362	14,3775	-0,015500
23	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	12,624	12,5585	0,065500
24	1	1	1	1	1	1	1	1	15,8	15,7845	0,015500
25									остаточная дисперсия		0,044763
26	b0	b1	b2	b3	b12	b13	b23	b123			
27	12,288	1,4815	0,7035	1,18	0,014	0,1315	0,0405	-0,039			
28										Расчетное значение критерия Фишера F _{расч}	
29	среднее квадр откл коэффициентов S _{коэф}							0,0312		1,1500	
30	табличное значение критической точки t _{сг}							2,04		Табличное значение критерия Фишера F _{табл}	
31	полуширина доверит интервала Δb=S _{коэф} t _{сг}							0,0636		2,9011	
32											
33	b0	b1	b2	b3	b12	b13	b23	b123			
34	12,288	1,4815	0,7035	1,18	0	0,1315	0	0		Модель адекватна	
35											
36											

Рис. 6.4. Расчет коэффициентов уравнения регрессии и проверка адекватности модели

Проверим полученное уравнение на адекватность по критерию Фишера. В ячейках J17:J24 вычислим значения отклика \hat{y}_j . Для этого выберем функцию СУММПРОИЗВ, используя в качестве аргументов строку значимых коэффициентов уравнения регрессии (ячейки A34:H34) и строки, соответствующие каждому j -му эксперименту (с A17:H17 до A24:H24).

Для расчёта остаточной дисперсии $s_{ост}^2$ по формуле (6.16) предварительно сделаем таблицу, в каждой клетке которой вычисляется разность между средними значениями отклика, полученными при проведении экспериментов, и значениями отклика, вычисленными по уравнению регрессии со значимыми коэффициентами (ячейки K17:K24). Затем к этой таблице применим функцию СУММКВ. Результат поместим в ячейку K25. Расчетное значение критерия Фишера $F_{расч}$ определим по формуле (6.15) в ячейке J29, табличное значение критерия $F_{табл}$ находим в прил. 7 (ячейка J32).

Так как $F_{расч} = 1,026 < F_{табл} = 2,901$, то полученное уравнение регрессии адекватно.

Задание 2. Требуется исследовать влияние производственных факторов (U – опорное напряжение (z_1), I – ток потребления (z_2), T – конечная

температура нагрева (z_3) на качество производства магнитных дисков. Номинальное значение факторов: $U = 30$ В, $I = 18$ А, $T = 220$ °С.

Проведен ПФЭ 2^3 при трех сериях параллельных опытов. Условия проведения опытов сведены в табл. 6.8.

Таблица 6.8

Характеристика плана	$z_1 = U, \text{ В}$	$z_2 = I, \text{ А}$	$z_3 = T, \text{ °С}$
Нулевой уровень	30	18	220
Интервал варьирования	2	1	20
Верхний уровень	32	19	240
Нижний уровень	28	17	200

Варианты результатов проведенных 5 рандомизированных опытов приведены в прил. 9. Номер варианта соответствует номеру студента в списке группы, y_i – количественный параметр, характеризующий качество обработанной поверхности.

Порядок выполнения задания:

1. Закодировать переменные.
2. Построить матрицу планирования в кодированных переменных с учетом взаимодействий и дополнить ее столбцом средних значений отклика.
3. Вычислить все коэффициенты уравнения регрессии.
4. Проверить вычисленные коэффициенты на значимость.
5. Получить линейное уравнение регрессии без учета взаимодействий.
6. Проверить полученное уравнение на адекватность. Если модель окажется не адекватной, то усложнить ее, последовательно добавляя нелинейные взаимодействия с наибольшими коэффициентами регрессии. Коэффициенты добавлять до тех пор, пока модель не станет адекватной.
7. Провести интерпретацию полученной модели.
8. Записать уравнение регрессии в исходных переменных.

В MS Excel задание 2 выполняется аналогично заданию 1.

Контрольные вопросы

1. В чем сущность планирования эксперимента? Поясните разницу между активным и пассивным экспериментом.
2. Какие задачи решает теория планирования эксперимента?
3. Понятие фактора. Требования к факторам.
4. Как выбрать уровни варьирования факторов?
5. В чем сущность и цели стандартизации масштаба факторов?
6. Что называется полным факторным экспериментом?

7. Как составляется и какими свойствами обладает матрица планирования ПФЭ?
8. Как проверить воспроизводимость опытов? Для чего нужно расчетное значение коэффициента Кохрена и как он находится?
9. Как рассчитать оценки коэффициентов регрессионного уравнения?
10. Как проверить статистическую значимость оценок коэффициентов регрессии?
11. Что такое критерий Стьюдента и где он используется?
12. Для чего оценивают, насколько отличаются средние значения y_i выходной величины, полученной в точках факторного пространства, и значения, полученного из уравнения регрессии в тех же точках факторного пространства?
13. Как проверить адекватность полученной математической модели? Чем определяется F -критерий Фишера и как его применяют?
14. Как перейти к исходным физическим переменным?

Тема 7. ДРОБНЫЙ ФАКТОРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Построение плана дробного факторного эксперимента. Обоснование выбора генерирующих соотношений. Выбор дробности реплик.

7.1. Основные понятия и определения

При многофакторном эксперименте, особенно когда число факторов больше шести ($n > 6$), число опытов в планах ПФЭ 2^n резко увеличивается. Так при 7 факторах ПФЭ содержит уже $2^7 = 128$ опытов. Но такое количество опытов необходимо лишь в том случае, когда мы хотим учесть все комбинации взаимодействий факторов. Действительно, полное число слагаемых в таком уравнении (начиная со свободного члена и кончая слагаемым, соответствующим взаимодействию всех 7 факторов) будет равно

$$N = 1 + C_7^2 + C_7^3 + C_7^4 + C_7^5 + C_7^6 + 1 = 128.$$

Однако, если требуется определить лишь коэффициенты при самих факторах для уравнения $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_kx_k$, пренебрегая взаимодействиями, то понадобится всего лишь $1+7 = 8$ опытов; при учёте парных взаимодействий необходимое число опытов равно $1 + 7 + 21 = 29$. Таким образом, в этих случаях план ПФЭ 2^n дает явно избыточную информацию.

Конечно, эта избыточная информация не является бесполезной, результаты части «лишних» опытов можно использовать либо для получения

более точных оценок коэффициентов регрессии, либо для проверки адекватности модели. Однако необходимость проведения большого числа опытов приводит к резкому удорожанию эксперимента и значительному увеличению времени его проведения.

Если нам не требуется определение всех коэффициентов неполного квадратичного полинома, то переходят к *дробному факторному эксперименту* (ДФЭ).

Дробным факторным экспериментом называется система опытов, представляющая собой часть ПФЭ, позволяющая рассчитать коэффициенты уравнения регрессии и сократить объем экспериментальных данных.

При удалении членов из полного уравнения часть информации неизбежно теряется. Необходимо так спланировать эксперимент, чтобы при значительном сокращении числа опытов потерять информацию только о самых незначимых членах. Желательно, конечно, чтобы сокращенный эксперимент сохранял ортогональность плана. Это позволит сохранить независимость вычисления коэффициентов по формулам (6.13) и возможность не пересчитывать оставшиеся коэффициенты, если часть из них окажется незначимыми.

Разобьем ПФЭ 2^3 , приведенный в табл. 7.1, на два блока: в первый включим опыты № 2, 3, 5, 8, во второй войдут все остальные.

Таблица 7.1

№ опыта	Факторы			№ опыта	Факторы		
	x_1	x_2	x_3		x_1	x_2	x_3
1	-1	-1	-1	5	-1	-1	+1
2	+1	-1	-1	6	+1	-1	+1
3	-1	+1	-1	7	-1	+1	+1
4	+1	+1	-1	8	+1	+1	+1

Оба блока характеризуются тем, что по первым двум факторам x_1 и x_2 осуществлен полный перебор уровней, и по ним каждый блок представляет собой ПФЭ $2^{k-1} = 2^2$. Уровни третьего фактора x_3 связаны с уровнями первых двух в первом блоке соотношением

$$x_3 = +x_1 \cdot x_2, \quad (7.1)$$

а во втором – соотношением

$$x_3 = -x_1 \cdot x_2. \quad (7.2)$$

Такие блоки сохраняют свойство ортогональности.

Если мы теперь сравним один из блоков (например, первый) с расширенной матрицей ПФЭ 2^2 (табл. 7.2), то увидим, что столбец, соответствующий фактору x_3 равен столбцу взаимодействия факторов x_1x_2 .

Таблица 7. 2

№ опыта	Факторы			№ опыта	Факторы		
	x_1	x_2	x_3		x_1	x_2	x_3
1 (2)	+1	-1	-1	1	+1	-1	-1
2 (3)	-1	+1	-1	2	-1	+1	-1
3 (5)	-1	-1	+1	3	-1	-1	+1
4 (8)	+1	+1	+1	4	+1	+1	+1

В скобках указаны номера опытов первого блока из табл. 7.1. Таким образом, мы ограничились четырьмя опытами, используя в ПФЭ 2^2 столбец взаимодействия x_1x_2 в качестве плана для x_3 .

Такой сокращенный план и носит название *дробного факторного эксперимента*.

Выражения (7.1) и (7.2) называются *генерирующими соотношениями*, они и отличают один блок от другого.

Следует подчеркнуть, что формальное приравнение произведения факторов фактору, не входящему в это произведение, является основополагающей идеей метода ДФЭ.

Обычно используют планы ДФЭ 2^{k-p} , где p – показатель дробности плана ПФЭ. Такие планы строятся как дробная реплика от полного факторного эксперимента 2^k . При $p = 1$ число опытов в плане ДФЭ в два раза меньше, чем в плане ПФЭ, поэтому такие планы называют полурепликами (1/2-репликами) плана ПФЭ. Так при $p = 1$ для плана ДФЭ 2^{6-1} $n = 2^{6-1} = 32$, при $p = 2$ для плана ДФЭ 2^{6-2} $n = 2^{6-2} = 16$ и такой план называют четвертьрепликой (1/4-репликой).

7.2. Построение плана дробного факторного эксперимента

План ДФЭ строится так же, как и план ПФЭ, но с меньшим числом факторов. Оставшиеся факторы варьируются не произвольно, а так чтобы сохранялась ортогональность плана. Это обеспечивается, как было показано ранее, если оставшиеся факторы варьируются по выбранному *генерирующему соотношению*, например как произведение каких-либо факторов из первой группы.

При выборе степени дробности ДФЭ нужно учитывать, что число опытов должно быть больше числа коэффициентов регрессионного уравнения.

Процедура построения плана ДФЭ 2^{k-p} содержит следующие этапы:

1. Выбор структуры уравнения регрессии и определение степени дробности ДФЭ.

2. Выбор ведущих $l = k - p$ факторов и построение для них матрицы планирования, т. е. построение плана ПФЭ 2^l для выбранных ведущих факторов x_1, x_2, \dots, x_l .

3. Построение матрицы планирования ДФЭ 2^{k-p} .

Часть этой матрицы составляет матрица плана ПФЭ 2^l , а во вторую должны войти столбцы матрицы для остальных факторов $x_{l+1}, x_{l+2}, \dots, x_k$, количество которых равно $p = k - l$.

Столбцы матрицы, соответствующие этим факторам, определяют путем перемножения соответствующих столбцов ведущих факторов. Для этого используют *генерирующие соотношения*.

Поясним это на примере:

1. Структура уравнения регрессии при $k = 3$ имеет следующий вид:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 + b_{123}x_1x_2x_3,$$

т. е. при $k = 3$ ПФЭ должен включать 8 опытов.

Степень дробности $p = 1$, т. е. ДФЭ будет включать $n = 2^{3-1} = 4$ опыта.

2. В качестве ведущих факторов выберем x_1 и x_2 т. е. $l = k - p = 2$. Для ведущих факторов строим план ПФЭ 2^2 (столбцы залитые серым цветом) (табл. 7.3).

Таблица 7.3

№ опыта			
	x_1	x_2	$x_3 = x_1x_2$
1	-1	-1	+1
2	+1	-1	-1
3	-1	+1	-1
4	+1	+1	+1

3. Для третьего фактора выберем генерирующее соотношение в виде $x_3 = x_1x_2$. Т. е. для x_3 в матрице планирования возьмем только те значения, которые соответствуют произведению x_1x_2 .

Представим теперь, что все факторы в табл. 7.3 независимы, и добавим к ним столбцы взаимодействий (табл. 7.4).

Таблица 7.4

№ опыта	Факторы				Взаимодействия			
	x_0	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$
1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1
2	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1
3	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1
4	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1

Из полученной таблицы видно, что столбец 1 полностью соответствует столбцу 8, столбец 2 – столбцу 7, столбец 3 – столбцу 6, а столбец 4 – столбцу 5.

План является ортогональным, но в нем оказались четыре пары одинаковых столбцов. Это означает, что мы не сможем найти в чистом виде все коэффициенты неполного квадратичного полинома. В данном случае

можно отдельно определить четыре коэффициента, например, b_0, b_1, b_2, b_3 , и построить линейную модель следующего вида:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3,$$

в которой каждый коэффициент будет отражать не только влияние самого фактора x_i , но и влияние соответствующих взаимодействий (совместные влияния двух одинаковых столбцов). Это следствие того, что мы пытались определить полное количество коэффициентов (8) по недостаточному числу опытов (4). В этом случае при анализе полученной модели мы уже не сможем по величине полученного коэффициента при каком-то из линейных эффектов говорить о силе влияния на отклик именно этого отдельно взятого фактора, поскольку данный коэффициент отражает и силу влияния определенных взаимодействий факторов. Потеря данной информации будет «платой» за желание сэкономить на количестве проводимых экспериментов.

Таким образом, сокращение числа опытов приводит к получению смешанных оценок для коэффициентов. В нашем примере полученным соотношениям соответствует система смешанных оценок: β_1 смешана с β_{23} , β_2 – с β_{13} , а β_3 – с β_{12} , β_0 – с β_{123} (см. одинаковые столбцы в табл. 7.4).

Операцию смешивания оценок принято условно записывать в виде выражений

$$b_0 = \beta_0 + \beta_{123}, b_1 = \beta_1 + \beta_{23}, b_2 = \beta_2 + \beta_{13}, b_3 = \beta_3 + \beta_{12},$$

где β – математическое ожидание для соответствующего коэффициента.

При этом каждый коэффициент вычисляется, как и раньше, по формуле

$$b_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{ij} \bar{y}_j.$$

Следует заметить, что чем больше факторов, тем больше вариантов выбора генерирующих соотношений. Так, при построении плана ДФЭ 2^{4-1} мы можем для четвертого фактора, вообще говоря, произвольно, выбрать любое из парных взаимодействий, т. е. $x_4 = x_1 \cdot x_2$, $x_4 = x_1 \cdot x_3$, $x_4 = x_2 \cdot x_3$ или тройное взаимодействие $x_4 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$. Обоснование выбора генерирующих соотношений будет рассмотрено ниже. Если вводится не один, а несколько дополнительных факторов, то выбирают несколько генерирующих соотношений (для каждого дополнительного фактора свой).

Пример 7.1. (условия примера взяты из [5])

В качестве примера рассмотрим разработку математической модели гидравлического режима четырехзонной методической печи с использованием теории планирования эксперимента. При планировании опытов будем использовать методику проведения ДФЭ 2^{5-2} первого порядка.

Перед разработкой плана эксперимента на основе априорной информации были выявлены факторы, влияющие на величину давления в томильной зоне печи по отношению к атмосферному. Таких факторов 5: расходы топлива на каждую из 4 зон нагрева и угол поворота дымового клапана.

Обозначим факторы: z_1 – расход газа на томильную зону, $\text{м}^3/\text{ч}$; z_2 – расход газа во вторую сварочную зону, $\text{м}^3/\text{ч}$; z_3 – расход газа в первую сварочную зону, $\text{м}^3/\text{ч}$; z_4 – расход газа в нижнюю сварочную зону, $\text{м}^3/\text{ч}$; z_5 – положение дымового клапана, % хода (рис. 7.1).

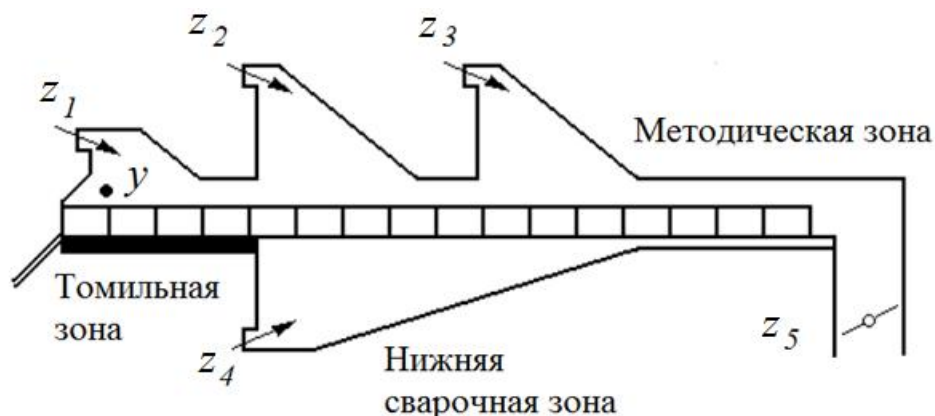


Рис. 7.1. Положение факторов (z_1, \dots, z_5) и переменной состояния (y) при проведении исследований

Уровни варьирования факторов представлены в табл. 7.5.

Таблица 7.5

Уровни факторов	Факторы				
	$z_1, \text{м}^3/\text{ч}$	$z_2, \text{м}^3/\text{ч}$	$z_3, \text{м}^3/\text{ч}$	$z_4, \text{м}^3/\text{ч}$	$z_5, \text{\% хода}$
Основной (нулевой)	5250	3900	2650	1100	74
Нижний	4000	3100	1750	700	50
Верхний	6500	4700	3500	1500	98
Интервал варьирования	1250	800	900	400	24

Проведем нормировку факторов по формулам (6.5):

$$x_i = \frac{z_i - z_i^0}{\lambda_i}, \quad (7.3)$$

где z_i^0 – центр плана (нулевой уровень), λ_i – интервал варьирования:

$$x_1 = \frac{z_1 - 5250}{1250}, \quad x_2 = \frac{z_2 - 3900}{800}, \quad x_3 = \frac{z_3 - 2650}{900}, \quad x_4 = \frac{z_4 - 1100}{400}, \quad x_5 = \frac{z_5 - 74}{24}.$$

Если теперь в полученные формулы подставить вместо z_i верхний уровень соответствующего фактора, то получим $x_i = +1$, если нижний уровень, получим $x_i = -1$.

Реализация ПФЭ в этом случае при варьировании всех факторов на двух уровнях потребовала бы постановки $2^5 = 32$ опытов.

Воспользуемся 1/4-репликой ПФЭ, т. е. ДФЭ типа 2^{5-2} , где формально 2 фактора заменены соответствующими произведениями остальных факторов $x_4 = x_1x_2$, $x_5 = x_1x_2x_3$. Это позволит сократить число опытов до $2^3 = 8$. Используя эти произведения для генерирующих соотношений, мы «пожертвовали» взаимосвязями для сокращения числа экспериментов при введении дополнительных переменных. Еще раз подчеркнем, что могли выбрать для этих дополнительных факторов и любые другие (разные) взаимодействия.

В табл. 7.6 приведены матрица планирования ДФЭ 2^3 , результаты эксперимента – значения выходных переменных (по два параллельных опыта).

Таблица 7.6

Матрица ДФЭ 2^3 с двумя параллельными опытами

Факторы						Опыт 1	Опыт 2	Среднее	Модель
x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	\bar{y}_i	\hat{y}_i
+1	+1	+1	+1	+1	+1	-0,6	-0,5	-0,55	-0,3750
+1	-1	+1	+1	-1	-1	0,1	0,5	0,30	0,2625
+1	+1	-1	+1	-1	-1	0,6	0,4	0,50	0,5375
+1	-1	-1	+1	+1	+1	-0,1	0,2	0,05	-0,1250
+1	+1	+1	-1	+1	-1	0,6	0,2	0,40	0,2250
+1	-1	+1	-1	-1	+1	-0,2	-0,2	-0,20	-0,1625
+1	+1	-1	-1	-1	+1	0,1	0,2	0,15	0,1125
+1	-1	-1	-1	+1	-1	0,3	0,3	0,30	0,4750

Для обработки результатов эксперимента используем методику, изложенную ранее в теме 6:

1. Расчет построчных средних:

$$\bar{y}_j = \frac{y_{j1} + y_{j2} + \dots + y_{jm}}{m},$$

где $m = 2$ – число параллельных опытов. Например,

$$\bar{y}_1 = \frac{(-0,6) + (-0,5)}{2} = -0,55.$$

Остальные построчные средние вычислены аналогично (см. табл. 7.6).

2. Определение построчных (выборочных) дисперсий:

$$s^2(y_j) = \frac{\sum_{i=1}^m (y_{ji} - \bar{y}_j)^2}{m-1}; \quad s^2(y_1) = \frac{(-0,6 - (-0,55))^2 + (-0,5 - (-0,55))^2}{2-1} = 0,005.$$

Аналогично, $s^2(y_2) = 0,08$; $s^2(y_3) = 0,02$; $s^2(y_4) = 0,045$;
 $s^2(y_5) = 0,08$; $s^2(y_6) = 0$; $s^2(y_7) = 0,005$; $s^2(y_8) = 0$.

Сумма построчных (выборочных) дисперсий:

$$\sum_{j=1}^8 s^2(y_j) = 0,005 + 0,08 + 0,02 + 0,045 + 0,08 + 0,005 = 0,235.$$

3. Определение однородности дисперсий по критерию Кохрена:

$$G_p = \frac{s^2(y_i)_{\max}}{\sum_{i=1}^n s^2(y_i)} = \frac{0,08}{0,235} = 0,34.$$

Далее по таблице прил. 8 находим $G_t(\alpha; f_1; f_2)$. Для $\alpha = 0,05$, $f_1 = m - 1$;
 $f_2 = n = 8$ значение $G_t(0,05; 1; 8) = 0,6798$. Поскольку $G_p < G_t$, то дисперсии однородны.

4. Определение коэффициентов в уравнении регрессии:

$$b_0 = \frac{\sum_{j=1}^n \bar{y}_j \cdot x_{0j}}{n} = \frac{-0,55 + 0,3 + 0,5 + 0,05 + 0,4 - 0,2 + 0,15 + 0,3}{8} = 0,11875;$$

$$b_1 = \frac{\sum_{j=1}^n \bar{y}_j \cdot x_{1j}}{n} = \frac{-0,55 - 0,3 + 0,5 - 0,05 + 0,4 + 0,2 + 0,15 - 0,3}{8} = 0,00625;$$

$$b_2 = \frac{\sum_{j=1}^n \bar{y}_j \cdot x_{2j}}{n} = \frac{-0,55 + 0,3 - 0,5 - 0,05 + 0,4 - 0,2 - 0,15 - 0,3}{8} = -0,13125;$$

$$b_3 = \frac{\sum_{j=1}^n \bar{y}_j \cdot x_{3j}}{n} = \frac{-0,55 + 0,3 + 0,5 + 0,05 - 0,4 + 0,2 - 0,15 - 0,3}{8} = -0,04375;$$

$$b_4 = \frac{\sum_{j=1}^n \bar{y}_j \cdot x_{4j}}{n} = \frac{-0,55 - 0,3 - 0,5 + 0,05 + 0,4 + 0,2 - 0,15 + 0,3}{8} = -0,06875;$$

$$b_5 = \frac{\sum_{j=1}^n \bar{y}_j \cdot x_{5j}}{n} = \frac{-0,55 - 0,3 - 0,5 + 0,05 - 0,4 - 0,2 + 0,15 - 0,3}{8} = -0,256.25.$$

5. Проверка значимости коэффициентов регрессии. Предварительно определим дисперсию воспроизводимости (дисперсию отклика):

$$s_y^2 = \frac{1}{n \cdot (m-1)} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m (y_{ji} - \bar{y}_j)^2 = \frac{\sum_{j=1}^n s^2(y_j)}{n} = \frac{0,235}{8} = 0,02938.$$

Дисперсия коэффициентов уравнения регрессии:

$$S_{\text{коэф}} = \sqrt{\frac{S_y^2}{m \cdot n}} = \sqrt{\frac{0,02938}{2 \cdot 8}} = 0,04285.$$

Критическую точку t_{cr} находим из таблиц распределения Стьюдента по числу степеней свободы $n(m-1) = 8 \cdot 1 = 8$ и заданному уровню значимости $\alpha = 0,05$ для случая двусторонней критической области. Теоретическое значение критерия Стьюдента $t_{cr}(0,05;8) = 2,31$.

Находим значение доверительного интервала для коэффициентов регрессии:

$$\Delta b_j = t_{cr} \cdot S_{\text{коэф}} = 2,31 \cdot 0,04285 = 0,099.$$

Из сопоставления доверительного интервала Δb_j с абсолютными значениями коэффициентов модели следует, что $|b_1| = 0,006 < 0,099$; $|b_3| = 0,044 < 0,099$ и $|b_4| = 0,069 < 0,099$. Эти коэффициенты оказались незначимы, а остальные значимы.

Таким образом, окончательное уравнение регрессии запишется в виде

$$\hat{y} = 0,119 - 0,131x_2 - 0,256x_5.$$

Результаты расчета выходных параметров по уравнению полученной модели \hat{y}_i занесены в табл. 7.6.

6. Проверка адекватности полученной модели. Предварительно определим остаточную дисперсию:

$$s_{\text{ост}}^2 = \frac{m}{(n-r)} \sum_{j=1}^n (\tilde{y}_j - \bar{y}_j)^2.$$

Здесь r – число значимых коэффициентов в уравнении регрессии. В нашем случае $m = 2$; $n = 8$; $r = 3$ и в результате имеем

$$s_{\text{ост}}^2 = \frac{2}{8-3} [(-0,55 + 0,375)^2 + (0,3 - 0,2625)^2 + (0,5 - 0,5375)^2 + (0,05 + 0,125)^2 + (0,4 - 0,225)^2 + (-0,2 + 0,1625)^2 + (0,15 - 0,1125)^2 + (0,3 - 0,475)^2] = 0,0512.$$

Расчетное значение критерия Фишера $F_{\text{расч}}$ определяют по формуле

$$F_{расч} = \frac{S_{осм}^2}{s_y^2} = \frac{0,0512}{0,02938} = 1,7427.$$

Табличное значение критерия $F_{табл}$ находим из таблиц критических точек распределения Фишера по заданному уровню значимости $\alpha = 0,05$ и по степеням свободы $k_1 = m(n - r) = 2(8 - 3) = 10$ и $k_2 = n(m - 1) = 8 \cdot 1 = 8$. Степень свободы k_1 соответствует степени свободы остаточной дисперсии $s_{осм}$, а k_2 – степень свободы дисперсии воспроизводимости s_y^2 . Тогда $F_{табл}(0,05; 10; 8) = 3,07$. Поскольку $F_{расч} < F_{табл}$, то полученная модель адекватна.

Вернемся к исходным физическим переменным по формуле (7.3). Подставим выражения

$$x_2 = \frac{z_2 - 3900}{800}, \quad x_5 = \frac{z_i - 74}{24}$$

в уравнение регрессии $\hat{y} = 0,119 - 0,131x_2 - 0,256x_5$:

$$\hat{y} = 0,119 - 0,131 \cdot \frac{z_2 - 3900}{800} - 0,256 \cdot \frac{z_i - 74}{24}.$$

После преобразований получим $\hat{y} = 1,547 - 0,00016z_2 - 0,0107z_5$.

7.3. Обоснование выбора генерирующих соотношений

Как уже было указано, при использовании дробного факторного эксперимента сокращение числа опытов приводит к получению смешанных оценок для коэффициентов. Влияние каких именно взаимодействий отражено в каждом из полученных коэффициентов? Это зависит от выбора генерирующего соотношения. Попробуем разобраться в этом на примере. Вернемся к рассмотрению табл. 7.4. В данном примере в качестве третьего фактора мы использовали соотношение $x_3 = x_1x_2$. Записав справа столбцы, отражающие взаимодействия, мы получили четыре пары одинаковых столбцов. Заметим, что при вычислении коэффициентов мы не использовали столбцы взаимодействий. Они были нам нужны только для наглядности определения смешанности коэффициентов. При увеличении числа факторов этот метод становится слишком громоздким. Для того чтобы определить, какие коэффициенты смешаны, удобно пользоваться другим методом.

В предыдущем примере подставив x_3 на место произведения x_1x_2 , мы получили генерирующее соотношение $x_3 = x_1x_2$. Умножив обе части на x_3 , получим $x_3^2 = x_1x_2x_3$. Заметим, что сомножитель $x_i^2 = 1$, так как $(+1)^2 = (-1)^2 = 1$. Следовательно,

$$x_1x_2x_3 = 1.$$

Это произведение носит название *определяющего контраста*.

Умножив поочередно определяющий контраст на x_1 , x_2 , x_3 , находим $x_1 = x_1^2 x_2 x_3 = x_2 x_3$, т. е. $x_1 = x_2 x_3$. Аналогично $x_2 = x_1 x_3$, $x_1 = x_2 x_3$, $x_3 = x_1 x_2$, а так как $x_0 = 1$, то получим $x_0 = x_1 x_2 x_3$.

Полученным соотношениям соответствует система смешанных оценок:

$$b_0 = \beta_0 + \beta_{123}, b_1 = \beta_1 + \beta_{23}, b_2 = \beta_2 + \beta_{13}, b_3 = \beta_3 + \beta_{12}.$$

Таким образом, мы получили тот же результат, что и при построении полной матрицы эксперимента и нахождении в ней одинаковых столбцов.

В зависимости от числа факторов, входящих в контраст, говорят о разрешающей способности ДФЭ. Если для ДФЭ типа 2^{4-1} в качестве генерирующего соотношения выбрано $x_4 = x_1 x_2 x_3$ (определяющий контраст соответственно будет $x_1 x_2 x_3 x_4 = 1$), то говорят, что у такого эксперимента разрешающая способность равна 4. Если выбрано генерирующее соотношение $x_4 = x_1 x_2$ и контраст $x_1 x_2 x_4 = 1$, то разрешающая способность будет равна 3.

Генерирующие соотношения с наибольшей разрешающей способностью называют *главными*.

Проведем сравнение использования различных генерирующих соотношений в задаче с четырьмя факторами. В качестве первого генерирующего соотношения возьмем $x_4 = x_1 x_2 x_3$, в качестве второго – любой из эффектов двойного взаимодействия, например, $x_4 = x_1 x_2$ (табл. 7.7).

Таблица 7.7

Планирование ДФЭ

Номер опыта	План				Генерирующие соотношения	
	x_0	x_1	x_2	x_3	$x_4 = x_1 x_2 x_3$	$x_5 = x_1 x_2$
1	+1	-1	-1	-1	-1	+1
2	+1	+1	-1	-1	+1	-1
3	+1	-1	+1	-1	+1	-1
4	+1	+1	+1	-1	-1	+1
5	+1	-1	-1	+1	+1	+1
6	+1	+1	-1	+1	-1	-1
7	+1	-1	+1	+1	-1	-1
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1

В первом случае определяющий контраст $x_4^2 = x_1 x_2 x_3 x_4 = 1$. Получим систему совместных оценок:

$$x_1 = x_2 x_3 x_4 \rightarrow b_1 \rightarrow \beta_1 + \beta_{234};$$

$$x_2 = x_1 x_3 x_4 \rightarrow b_2 \rightarrow \beta_2 + \beta_{134};$$

$$x_3 = x_1 x_2 x_4 \rightarrow b_3 \rightarrow \beta_3 + \beta_{124};$$

$$x_4 = x_1 x_2 x_3 \rightarrow b_4 \rightarrow \beta_4 + \beta_{123};$$

Во втором случае определяющий контраст выражается соотношением $x_4 = x_1 x_2$. Следовательно, $x_4^2 = x_1 x_2 x_4$ или $x_1 x_2 x_4 = 1$.

При этом получим следующую систему оценок:

$$x_1 = x_2 x_4 \rightarrow b_1 \rightarrow \beta_1 + \beta_{24};$$

$$x_2 = x_1 x_4 \rightarrow b_2 \rightarrow \beta_2 + \beta_{14};$$

$$x_3 = x_1 x_2 x_3 x_4 \rightarrow b_3 \rightarrow \beta_3 + \beta_{1234};$$

$$x_4 = x_1 x_2 \rightarrow b_4 \rightarrow \beta_4 + \beta_{12}.$$

Сравним полученные результаты.

В первом случае линейные эффекты смешаны с тройными взаимодействиями, во втором случае три коэффициента из четырех смешаны с двойными взаимодействиями. В реальных задачах эффекты тройных и выше взаимодействий близки к нулю значительно чаще, чем двойных. Значит, в данном случае предпочтительнее использовать генерирующее соотношение $x_4 = x_1 x_2 x_3$. При этом коэффициенты при линейных эффектах будут иметь большую точность.

При использовании дробной реплики с генерирующим соотношением $x_4 = x_1 x_2$ точность коэффициентов при линейных эффектах будет, скорее всего, ниже.

Таким образом, при использовании ДФЭ необходимо иметь четкое представление о разрешающей способности дробных реплик, т. е. определить заранее, какие коэффициенты являются смешанными оценками для соответствующих факторов. Тогда в зависимости от постановки задачи подбирается дробная реплика, с помощью которой можно извлечь максимальную информацию из эксперимента.

7.4. Выбор дробности реплик

Если вводится не один, а несколько дополнительных факторов, то получаем несколько генерирующих соотношений (для каждого дополнительного фактора свой). В этом случае для определения смешанности оценок используют обобщающий контраст, который строится из отдельных контрастов, а также их произведений во всевозможных сочетаниях.

Пусть, например, для ДФЭ 2^{5-2} в качестве генерирующих соотношений выбраны: $x_4 = x_1 x_2$ и $x_5 = x_1 x_2 x_3$; контрасты будут соответственно $1 = x_1 x_2 x_4$ и $1 = x_1 x_2 x_3 x_5$. Обобщающий контраст, равный их произведению, будет иметь вид

$$1 = x_1^2 x_2^2 x_3 x_4 x_5 = x_3 x_4 x_5.$$

Таким образом, имеем три составляющих:

$$1 = x_1 x_2 x_4, 1 = x_1 x_2 x_3 x_5 \text{ и } 1 = x_3 x_4 x_5.$$

Запишем их в виде одного выражения:

$$1 = x_1 x_2 x_4 = x_1 x_2 x_3 x_5 = x_3 x_4 x_5.$$

Для определения смешанности перемножаем все составляющие обобщающего контраста на соответствующие факторы:

$$\text{для } x_1: x_1 = x_2 x_4 = x_2 x_3 x_5 = x_1 x_3 x_4 x_5;$$

$$\text{для } x_2: x_2 = x_1 x_4 = x_1 x_3 x_5 = x_2 x_3 x_4 x_5;$$

$$\text{для } x_3: x_3 = x_1 x_2 x_3 x_4 = x_1 x_2 x_5 = x_4 x_5;$$

$$\text{для } x_4: x_4 = x_1 x_2 = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 = x_3 x_5;$$

$$\text{для } x_5: x_5 = x_1 x_2 x_4 x_5 = x_1 x_2 x_3 = x_3 x_4.$$

Тогда для смешанности оценок получим

$$b_1 \rightarrow \beta_1 + \beta_{24} + \beta_{235} + \beta_{1345};$$

$$b_2 \rightarrow \beta_2 + \beta_{14} + \beta_{135} + \beta_{2345};$$

$$b_3 \rightarrow \beta_3 + \beta_{1234} + \beta_{125} + \beta_{45};$$

$$b_4 \rightarrow \beta_4 + \beta_{12} + \beta_{12345} + \beta_{35};$$

$$b_5 \rightarrow \beta_5 + \beta_{1245} + \beta_{123} + \beta_{34}.$$

Видно, что коэффициенты при линейных факторах перемешиваются с коэффициентами при парных и более высоких взаимодействиях. Перемешивание с коэффициентами при парных взаимодействиях, скорее всего, не даст достаточно высокую точность рассмотренных коэффициентов. Поэтому при пяти факторах рекомендуется применение полуреплик с обоснованным выбором генерирующих соотношений. Однако при ограниченных возможностях проведения опытов применение 1/4-реплик при пяти факторах вполне оправдано.

Рассмотрим возможность применения 1/4-реплик при использовании 7 факторов. Воспользуемся 1/4-репликой 2^{7-2} , содержащей 32 опытные точки, вместо ПФЭ 2^7 , требующего 128 опытов. Такой эксперимент позволит вычислить все 29 значимых коэффициентов (свободных – 1, линейных – 7 и парных взаимодействий – 21).

Чтобы определить, какие эффекты будут перемешиваться, необходимо составить генерирующие соотношения. Пусть по первым пяти факторам x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 осуществляется полный перебор уровней. Оставшиеся два фактора будем вычислять, например, по следующим генерирующим соотношениям:

$$x_6 = x_1 x_2 x_3 x_4;$$

$$x_7 = x_1x_2x_3x_4x_5.$$

Найдем определяющие контрасты, в нашем случае их будет два:

$$1 = x_1x_2x_3x_4x_5x_7 \text{ и } 1 = x_1x_2x_3x_4x_6.$$

Если их перемножить, то получим третий контраст: $1 = x_5x_6x_7$, т. е. $1 = x_1x_2x_3x_4x_5x_7 = x_1x_2x_3x_4x_6 = x_5x_6x_7$.

Для определения смешанности перемножаем все составляющие обобщающего контраста на соответствующие факторы:

$$\text{для } x_1: \quad x_1 = x_2x_3x_4x_5x_7 = x_2x_3x_4x_6 = x_1x_5x_6x_7;$$

$$\text{для } x_2: \quad x_2 = x_1x_3x_4x_5x_7 = x_1x_3x_4x_6 = x_2x_5x_6x_7;$$

$$\text{для } x_3: \quad x_3 = x_1x_2x_4x_5x_7 = x_1x_2x_4x_6 = x_3x_5x_6x_7;$$

$$\text{для } x_4: \quad x_4 = x_1x_2x_3x_5x_7 = x_1x_2x_3x_6 = x_4x_5x_6x_7$$

и т. д.

Тогда для смешанности оценок получим

$$b_1 \rightarrow \beta_1 + \beta_{23457} + \beta_{2346} + \beta_{1567};$$

$$b_2 \rightarrow \beta_2 + \beta_{13457} + \beta_{1346} + \beta_{2567};$$

$$b_3 \rightarrow \beta_3 + \beta_{12457} + \beta_{1246} + \beta_{3567};$$

$$b_4 \rightarrow \beta_4 + \beta_{12357} + \beta_{1236} + \beta_{4567}$$

и т. д.

Видно, что коэффициенты при линейных факторах перемешиваются, в основном, с коэффициентами при высоких взаимодействиях. Также можно показать, что парные коэффициенты перемешаны с коэффициентами при более высоких взаимодействиях, например:

$$x_1x_2 = x_3x_4x_5x_7 = x_3x_4x_6 = x_1x_2x_5x_6x_7.$$

Таким образом, дробный факторный эксперимент 2^{7-2} эффективен, поэтому им можно заменить ПФЭ 2^7 .

Подводя итог, сформулируем правила проведения эксперимента для получения линейной модели (6.7). При $k = 2, 3$ и 4 следует проводить ПФЭ 2^k . При $k = 5$ и $k = 6$ эффективны дробные $1/2$ -реплики от ПФЭ 2^{k-1} , а при ограниченных возможностях проведения опытов оправдано и применение $1/4$ -реплики. При $k = 7, k = 8$ и выше эксперимент может представлять собой дробную $1/4$ -реплику от ПФЭ 2^{k-2} .

Достоинство планов ДФЭ заключается и в том, что если построенный на его основе неполный полином не удовлетворяет требованиям по точности, то план ДФЭ легко достраивается до плана ПФЭ, без потери информации о прежних опытах, с формированием более точного полинома.

При ДФЭ стандартизация масштабов факторов, порядок постановки опытов, проверка их воспроизводимости, расчет оценок коэффициентов регрессионного уравнения и проверка их статистической значимости, про-

верка адекватности полученной математической модели и переход к физическим переменным производится так же, как и при ПФЭ.

Примеры выполнения заданий на компьютере: дробный факторный эксперимент

Задание 1. Продолжим рассмотрение примера, приведенного в задании 2 темы 6 для ПФЭ. Исследуем влияние на качество поверхности магнитных дисков дополнительных факторов: скорости нагрева V и изотермической выдержки t , поставив для этой цели ДФЭ типа 2^{5-2} . Факторы z_1, z_2, z_3 остаются такими же, как в примере темы 6. Таким образом, требуется исследовать влияние производственных факторов (U – опорное напряжение (z_1), I – ток потребления (z_2), T – конечная температура нагрева (z_3), V – скорость нагрева (z_4) и t – изотермическая выдержка (z_5)) на качество производства магнитных дисков. Провести ДФЭ 2^{5-2} . Условия проведения опытов сведены в табл. 7.8.

Таблица 7.8

Характеристика плана	$z_1 = U, В$	$z_2 = I, А$	$z_3 = T, ^\circ C$	$z_4 = V, ^\circ C/c$	$z_5 = t, с$
Нулевой уровень	30	18	220	10	80
Интервал варьирования	2	1	20	3	15
Верхний уровень	32	19	240	13	95
Нижний уровень	28	17	200	7	65

Матрица планирования для обработки результатов эксперимента приведена в табл. 7.9. Столбцы x_4 и x_5 заполнить в соответствии с выбранными генерирующими соотношениями.

Таблица 7.9

№ опыта	Факторы				Результаты опытов				
	x_0	x_1	x_2	x_3	$x_4 =$	$x_5 =$	y_1	y_2	y_3
1	+1	-1	-1	-1	-	-	7,87	7,41	8,12
2	+1	+1	-1	-1	-	-	16,23	15,42	15,64
3	+1	-1	+1	-1	-	-	6,55	5,89	6,26
4	+1	+1	+1	-1	-	-	8,49	9,21	8,79
5	+1	-1	-1	+1	-	-	20,16	19,84	20,59
6	+1	+1	-1	+1	-	-	28,34	27,59	28,16
7	+1	-1	+1	+1	-	-	8,85	8,20	9,64
8	+1	+1	+1	+1	-	-	24,19	23,56	23,04

Примечание: y – количественный параметр, характеризующий качество обработанной поверхности.

Порядок выполнения задания:

1. Перейти к стандартизированному масштабу факторов. В матрице планирования эксперимента дополнить столбцы для x_4 и x_5 в соответствии с выбранными генерирующими соотношениями.

2. Записать обобщающий контраст плана и систему смешанности коэффициентов.

3. Проверить воспроизводимость опытов.

4. Рассчитать оценки коэффициентов регрессионного уравнения.

5. Проверить статистическую значимость коэффициентов регрессии.

6. Проверить адекватность полученной линейной математической модели.

7. Записать полученную математическую модель исследуемого объекта в нормированных и физических переменных и сделать вывод.

Инструкция по выполнению задания в MS Excel

Первые два пункта задания выполнить в тетради. Остальные пункты выполнить в MS Excel аналогично заданию 1 в теме 6.

Контрольные вопросы

1. В чем сущность ДФЭ, какие математические модели он позволяет исследовать?

2. Как составляется и какими свойствами обладает матрица планирования ДФЭ?

3. Что такое генерирующие соотношения, и из каких соображений они выбираются?

4. Что такое определяющий контраст плана и что такое обобщающий контраст?

5. Что такое смешанность оценок коэффициентов регрессии и как ее найти?

6. Каков порядок постановки опытов при ДФЭ?

7. Свойства генерирующих соотношений.

8. Как с помощью генерирующих соотношений построить ДФЭ 2^{k-1} ?

9. Проведите сравнительный анализ ПФЭ и ДФЭ.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Воробьев А. Л.* Планирование и организация эксперимента в управлении качеством / А. Л. Воробьев, И. И. Любимов, Д. А. Косых. – Оренбург : ОГУ, 2014. – 344 с.
2. *Гефан Г. Д.* Основы математической статистики : учеб. пособие / Г. Д. Гефан. – Иркутск : ИрГУПС, 2011. – 72 с.
3. *Гефан Г. Д.* Вероятность, случайные процессы, математическая статистика : компьютерный лаб. практикум / Г. Д. Гефан, Н. К. Ширяева. – Иркутск : ИрГУПС, 2013. – 132 с.
4. *Гефан Г. Д.* Статистический метод и основы его применения : учеб. пособие / Г. Д. Гефан. – Иркутск : ИрГУПС, 2003. – 208 с.
5. Основы теории и техники физического моделирования и эксперимента : учеб. пособие [Электронный ресурс] / Н. Ц. Гатапова, А. Н. Колиух, Н. В. Орлова, А. Ю. Орлов. – Тамбов, 2014. – 77 с.
6. *Сидняев Н. И.* Теория планирования эксперимента и анализ статистических данных : учеб. пособие для магистров / Н. И. Сидняев. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Юрайт, 2014. – 495 с.
7. *Шкляр В. Н.* Планирование эксперимента и обработка результатов: конспект лекций для магистров по направлению «Автоматизация и управление в технических системах» / В. Н. Шкляр. – Томск : ТПУ, 2010. – 90 с.
8. *Щурин К. В.* Методика и практика планирования и организации эксперимента : практикум / К. В. Щурин, Д. А. Косых. – Оренбург : ОГУ, 2012. – 185 с.

Таблица значений функции Гаусса

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

z	$\varphi(z)$	z	$\varphi(z)$	z	$\varphi(z)$
0.00	0.39894	1.00	0.24197	2.00	0.05399
0.02	0.39886	1.02	0.23713	2.02	0.05186
0.04	0.39862	1.04	0.23230	2.04	0.04980
0.06	0.39822	1.06	0.22747	2.06	0.04780
0.08	0.39767	1.08	0.22265	2.08	0.04586
0.10	0.39695	1.10	0.21785	2.10	0.04398
0.12	0.39608	1.12	0.21307	2.12	0.04217
0.14	0.39505	1.14	0.20831	2.14	0.04041
0.16	0.39387	1.16	0.20357	2.16	0.03871
0.18	0.39253	1.18	0.19886	2.18	0.03706
0.20	0.39104	1.20	0.19419	2.20	0.03547
0.22	0.38940	1.22	0.18954	2.22	0.03394
0.24	0.38762	1.24	0.18494	2.24	0.03246
0.26	0.38568	1.26	0.18037	2.26	0.03103
0.28	0.38361	1.28	0.17585	2.28	0.02965
0.30	0.38139	1.30	0.17137	2.30	0.02833
0.32	0.37903	1.32	0.16694	2.32	0.02705
0.34	0.37654	1.34	0.16256	2.34	0.02582
0.36	0.37391	1.36	0.15822	2.36	0.02463
0.38	0.37115	1.38	0.15395	2.38	0.02349
0.40	0.36827	1.40	0.14973	2.40	0.02239
0.42	0.36526	1.42	0.14556	2.42	0.02134
0.44	0.36213	1.44	0.14146	2.44	0.02033
0.46	0.35889	1.46	0.13742	2.46	0.01936
0.48	0.35553	1.48	0.13344	2.48	0.01842
0.50	0.35207	1.50	0.12952	2.53	0.01625
0.52	0.34849	1.52	0.12566	2.58	0.01431
0.54	0.34482	1.54	0.12188	2.63	0.01256
0.56	0.34105	1.56	0.11816	2.68	0.01100
0.58	0.33718	1.58	0.11450	2.73	0.00961
0.60	0.33322	1.60	0.11092	2.78	0.00837
0.62	0.32918	1.62	0.10741	2.83	0.00727
0.64	0.32506	1.64	0.10396	2.88	0.00631
0.66	0.32086	1.66	0.10059	2.93	0.00545
0.68	0.31659	1.68	0.09728	2.98	0.00470
0.70	0.31225	1.70	0.09405	3.03	0.00405
0.72	0.30785	1.72	0.09089	3.08	0.00348
0.74	0.30339	1.74	0.08780	3.13	0.00298
0.76	0.29887	1.76	0.08478	3.18	0.00254
0.78	0.29431	1.78	0.08183	3.23	0.00216
0.80	0.28969	1.80	0.07895	3.28	0.00184
0.82	0.28504	1.82	0.07614	3.38	0.00132
0.84	0.28034	1.84	0.07341	3.48	0.00094
0.86	0.27562	1.86	0.07074	3.58	0.00066
0.88	0.27086	1.88	0.06814	3.68	0.00046
0.90	0.26609	1.90	0.06562	3.78	0.00031
0.92	0.26129	1.92	0.06316	3.88	0.00021
0.94	0.25647	1.94	0.06077	3.98	0.00014
0.96	0.25164	1.96	0.05844	4.20	0.00006
0.98	0.24681	1.98	0.05618	5.00	0.00000

Таблица значений функции Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.02	0.00798	0.78	0.28230	1.54	0.43822	2.30	0.48928
0.04	0.01595	0.80	0.28814	1.56	0.44062	2.32	0.48983
0.06	0.02392	0.82	0.29389	1.58	0.44295	2.34	0.49036
0.08	0.03188	0.84	0.29955	1.60	0.44520	2.36	0.49086
0.10	0.03983	0.86	0.30511	1.62	0.44738	2.38	0.49134
0.12	0.04776	0.88	0.31057	1.64	0.44950	2.40	0.49180
0.14	0.05567	0.90	0.31594	1.66	0.45154	2.42	0.49224
0.16	0.06356	0.92	0.32121	1.68	0.45352	2.44	0.49266
0.18	0.07142	0.94	0.32639	1.70	0.45543	2.46	0.49305
0.20	0.07926	0.96	0.33147	1.72	0.45728	2.48	0.49343
0.22	0.08706	0.98	0.33646	1.74	0.45907	2.50	0.49379
0.24	0.09483	1.00	0.34134	1.76	0.46080	2.55	0.49461
0.26	0.10257	1.02	0.34614	1.78	0.46246	2.60	0.49534
0.28	0.11026	1.04	0.35083	1.80	0.46407	2.65	0.49598
0.30	0.11791	1.06	0.35543	1.82	0.46562	2.70	0.49653
0.32	0.12552	1.08	0.35993	1.84	0.46712	2.75	0.49702
0.34	0.13307	1.10	0.36433	1.86	0.46856	2.80	0.49744
0.36	0.14058	1.12	0.36864	1.88	0.46995	2.85	0.49781
0.38	0.14803	1.14	0.37286	1.90	0.47128	2.90	0.49813
0.40	0.15542	1.16	0.37698	1.92	0.47257	2.95	0.49841
0.42	0.16276	1.18	0.38100	1.94	0.47381	3.00	0.49865
0.44	0.17003	1.20	0.38493	1.96	0.47500	3.05	0.49886
0.46	0.17724	1.22	0.38877	1.98	0.47615	3.10	0.49903
0.48	0.18439	1.24	0.39251	2.00	0.47725	3.15	0.49918
0.50	0.19146	1.26	0.39617	2.02	0.47831	3.20	0.49931
0.52	0.19847	1.28	0.39973	2.04	0.47932	3.25	0.49942
0.54	0.20540	1.30	0.40320	2.06	0.48030	3.30	0.49952
0.56	0.21226	1.32	0.40658	2.08	0.48124	3.40	0.49966
0.58	0.21904	1.34	0.40988	2.10	0.48214	3.50	0.49977
0.60	0.22575	1.36	0.41308	2.12	0.48300	3.60	0.49984
0.62	0.23237	1.38	0.41621	2.14	0.48382	3.70	0.49989
0.64	0.23891	1.40	0.41924	2.16	0.48461	3.80	0.49993
0.66	0.24537	1.42	0.42220	2.18	0.48537	3.90	0.49995
0.68	0.25175	1.44	0.42507	2.20	0.48610	4.00	0.49997
0.70	0.25804	1.46	0.42785	2.22	0.48679	4.20	0.49999
0.72	0.26424	1.48	0.43056	2.24	0.48745	4.40	0.49999
0.74	0.27035	1.50	0.43319	2.26	0.48809	4.70	0.49999
0.76	0.27637	1.52	0.43574	2.28	0.48870	5.00	0.50000

Коэффициенты Стьюдента $t(\gamma, n)$

Объём выборки n	Надёжность оценки γ		
	0,95	0,99	0,999
5	2.78	4.60	8.61
6	2.57	4.03	6.86
7	2.45	3.71	5.96
8	2.37	3.50	5.41
9	2.31	3.36	5.04
10	2.26	3.25	4.78
11	2.23	3.17	4.59
12	2.20	3.11	4.44
13	2.18	3.06	4.32
14	2.16	3.01	4.22
15	2.15	2.98	4.14
16	2.13	2.95	4.07
17	2.12	2.92	4.02
18	2.11	2.90	3.97
19	2.10	2.88	3.92
20	2.09	2.86	3.88
25	2.06	2.80	3.75
30	2.05	2.76	3.66
35	2.03	2.72	3.60
40	2.02	2.71	3.56
45	2.02	2.69	3.53
50	2.01	2.68	3.50
60	2.00	2.66	3.46
70	2.00	2.65	3.44
80	1.99	2.64	3.42
90	1.99	2.63	3.40
100	1.98	2.63	3.39
120	1.98	2.62	3.37
∞	1.96	2.58	3.29

Критические точки распределения χ^2

Число степеней свободы s	Уровень значимости α		
	0.05	0.01	0.001
1	3.84	6.63	10.83
2	5.99	9.21	13.82
3	7.81	11.34	16.27
4	9.49	13.28	18.47
5	11.07	15.09	20.52
6	12.59	16.81	22.46
7	14.07	18.48	24.32
8	15.51	20.09	26.13
9	16.92	21.67	27.88
10	18.31	23.21	29.59
11	19.68	24.73	31.26
12	21.03	26.22	32.91
13	22.36	27.69	34.53
14	23.68	29.14	36.12
15	25.00	30.58	37.70
16	26.30	32.00	39.25
17	27.59	33.41	40.79
18	28.87	34.81	42.31
19	30.14	36.19	43.82
20	31.41	37.57	45.32
21	32.67	38.93	46.80
22	33.92	40.29	48.27
23	35.17	41.64	49.73
24	36.42	42.98	51.18
25	37.65	44.31	52.62
26	38.89	45.64	54.05
27	40.11	46.96	55.48
28	41.34	48.28	56.89
29	42.56	49.59	58.30
30	43.77	50.89	59.70

Критические точки распределения Стьюдента

Число степеней свободы k	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)					
	0.10	0.05	0.02	0.01	0.002	0.001
1	6.31	12.70	31.82	63.70	318.30	631.00
2	2.92	4.30	6.97	9.92	22.33	31.60
3	2.35	3.18	4.54	5.84	10.22	12.90
4	2.13	2.78	3.75	4.60	7.17	8.61
5	2.01	2.57	3.37	4.03	5.89	6.86
6	1.94	2.45	3.14	3.71	5.21	5.96
7	1.89	2.36	3.00	3.50	4.79	5.40
8	1.86	2.31	2.90	3.36	4.50	5.04
9	1.83	2.26	2.82	3.25	4.30	4.78
10	1.81	2.23	2.76	3.17	4.14	4.59
11	1.80	2.20	2.72	3.11	4.03	4.44
12	1.78	2.18	2.68	3.05	3.93	4.32
13	1.77	2.16	2.65	3.01	3.85	4.22
14	1.76	2.14	2.62	2.98	3.79	4.17
15	1.75	2.13	2.60	2.95	3.73	4.07
16	1.75	2.12	2.58	2.92	3.69	4.01
17	1.74	2.11	2.57	2.90	3.65	3.96
18	1.73	2.10	2.55	2.88	3.61	3.92
19	1.73	2.09	2.54	2.86	3.58	3.88
20	1.73	2.09	2.53	2.85	3.55	3.85
25	1.71	2.06	2.49	2.79	3.45	3.72
30	1.70	2.04	2.46	2.75	3.39	3.65
40	1.68	2.02	2.42	2.70	3.31	3.55
60	1.67	2.00	2.39	2.66	3.23	3.46
120	1.66	1.98	2.36	2.62	3.17	3.37
∞	1.64	1.96	2.33	2.58	3.09	3.29
	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
	Уровень значимости α (односторонняя критическая область)					

**Нижние и верхние критические значения
рангового критерия Уилкоксона W**

n_2	α		n_1						
	Одно- сторонний	Дву- сторонний	4	5	6	7	8	9	10
4	0,05	0,10	11; 25						
	0,025	0,05	10; 26						
	0,01	0,02	—; —						
	0,005	0,01	—; —						
5	0,05	0,10	12; 28	19; 36					
	0,025	0,05	11; 29	17; 38					
	0,01	0,02	10; 30	16; 39					
	0,005	0,01	—; —	15; 40					
6	0,05	0,10	13; 31	20; 40	28; 50				
	0,025	0,05	12; 32	18; 42	26; 52				
	0,01	0,02	11; 33	17; 43	24; 54				
	0,005	0,01	10; 34	16; 44	23; 55				
7	0,05	0,10	14; 34	21; 44	29; 55	39; 66			
	0,025	0,05	13; 35	20; 45	27; 57	36; 69			
	0,01	0,02	11; 37	18; 47	25; 59	34; 71			
	0,005	0,01	10; 38	16; 49	24; 60	32; 73			
8	0,05	0,10	15; 37	23; 47	31; 59	41; 71	51; 85		
	0,025	0,05	14; 38	21; 49	29; 61	38; 74	49; 87		
	0,01	0,02	12; 40	19; 51	27; 63	35; 77	45; 91		
	0,005	0,01	11; 41	15; 53	25; 65	34; 78	43; 93		
9	0,05	0,10	16; 40	24; 51	33; 63	43; 76	54; 90	66; 105	
	0,025	0,05	14; 42	22; 53	31; 65	40; 79	51; 93	62; 109	
	0,01	0,02	13; 43	20; 55	28; 68	37; 82	49; 97	59; 112	
	0,005	0,01	11; 45	18; 57	26; 70	35; 84	45; 99	56; 115	
10	0,05	0,10	17; 43	26; 54	35; 67	45; 81	56; 96	69; 111	82; 128
	0,025	0,05	15; 45	23; 57	32; 70	42; 84	53; 99	65; 115	78; 132
	0,01	0,02	13; 47	21; 59	29; 73	39; 87	49; 103	61; 119	74; 136
	0,005	0,01	12; 48	19; 61	27; 75	37; 89	47; 105	58; 122	71; 139

Критические точки распределения Фишера–Снедекора $F_{cr}(\alpha, k_x, k_y)$ Уровень значимости $\alpha = 0.01$

$k_y \backslash k_x$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	4052	4999	5403	5625	5764	5889	5928	5981	6022	6056	6082
2	98.49	99.01	90.17	99.25	99.33	99.30	99.34	99.36	99.36	99.40	99.41
3	34.12	30.81	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.34	27.23	27.13
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.54	14.45
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.45	10.27	10.15	10.05	9.96
6	13.74	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.79
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	7.00	6.84	6.71	6.62	6.54
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.19	6.03	5.91	5.82	5.74
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.62	5.47	5.35	5.26	5.18
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.21	5.06	4.95	4.85	4.78
11	9.86	7.20	6.22	5.67	5.32	5.07	4.88	4.74	4.63	4.54	4.46
12	9.33	6.92	5.95	5.41	5.06	4.82	4.65	4.50	4.39	4.30	4.22
13	9.07	6.70	5.74	5.20	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	4.02
14	8.86	6.51	5.56	5.03	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.86
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.73
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.61
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.52

Уровень значимости $\alpha = 0.05$

$k_y \backslash k_x$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.36	19.37	19.38	19.39	19.40
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.88	8.84	8.81	8.78	8.76
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.93
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.78	4.74	4.70
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.03
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.63	3.60
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.34	3.31
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.13	3.10
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.97	2.94
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.86	2.82
12	4.75	3.88	3.49	3.26	3.11	3.00	2.92	2.85	2.80	2.76	2.72
13	4.67	3.80	3.41	3.18	3.02	2.92	2.84	2.77	2.72	2.67	2.63
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.77	2.70	2.65	2.60	2.56
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.70	2.64	2.59	2.55	2.51
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.45
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.62	2.55	2.50	2.45	2.41

Значения критерия Кочрена G_t при $\alpha = 0,05$

n	$f = m - 1$					
	1	2	3	4	5	6
2	0,9985	0,9750	0,9392	0,9057	0,8772	0,8534
3	0,9669	0,8709	0,7977	0,7457	0,7071	0,6771
4	0,9065	0,7679	0,6841	0,6287	0,5859	0,5598
5	0,8412	0,6338	0,5991	0,5441	0,5065	0,4783
6	0,7608	0,6161	0,5321	0,4803	0,4447	0,4184
7	0,7271	0,5612	0,4800	0,4307	0,3974	0,3726
8	0,6798	0,5157	0,4377	0,3910	0,3595	0,3362
9	0,6385	0,4770	0,4027	0,3584	0,3286	0,3067
10	0,6020	0,4450	0,3733	0,3311	0,3029	0,2823
12	0,5410	0,3924	0,3264	0,2880	0,2624	0,2439
16	0,4709	0,3346	0,2758	0,2419	0,2195	0,2034
20	0,3894	0,2705	0,2205	0,1921	0,1935	0,1602

Варианты заданий для выполнения самостоятельной работы по теме 7**Вариант 1**

3,04 3,31 3,35 3,39 3,21
 5,93 5,52 5,77 5,09 5,51
 3,27 3,50 3,36 3,98 3,89
 7,41 7,99 7,11 7,38 7,07
 4,84 4,97 4,88 4,30 4,29
 9,35 9,23 9,66 9,34 9,17
 6,71 6,03 6,43 6,39 6,37
 14,72 14,80 14,95 14,68 14,67

Вариант 2

3,51 3,05 3,53 3,92 3,27
 6,47 6,14 6,35 6,62 6,81
 4,61 4,93 4,16 4,92 4,01
 9,15 9,66 9,34 9,52 9,28
 5,28 5,47 5,42 5,05 5,86
 13,41 13,81 13,51 13,89 13,63
 8,64 8,71 8,38 8,65 8,66
 25,75 25,63 25,11 25,78 25,34

Вариант 3

2,24 2,50 2,39 2,10 2,57
 3,82 3,94 3,68 3,74 3,72
 2,05 2,52 2,55 2,74 2,73
 4,07 4,42 4,76 4,17 4,55
 3,07 3,89 3,96 3,19 3,37
 5,81 5,48 5,23 5,92 5,73
 3,48 3,01 3,14 3,51 3,19
 6,83 6,20 6,32 6,58 6,69

Вариант 4

2,88 2,97 2,42 2,37 2,39
 4,91 4,65 4,52 4,29 4,38
 3,01 3,31 3,02 3,99 3,48
 5,09 5,53 5,48 5,11 5,45
 3,73 3,30 3,80 3,89 3,52
 6,18 6,52 6,60 6,09 6,43
 4,63 4,96 5,01 4,52 5,07
 9,38 9,53 9,02 9,46 9,77

Вариант 5

3,72 3,28 3,80 3,49 3,69
 5,93 5,59 5,63 5,20 5,68
 3,32 3,55 3,93 3,15 3,39
 7,94 7,26 7,49 7,02 7,58
 4,40 4,04 4,68 4,98 4,24
 9,63 9,17 9,60 9,33 9,91
 6,36 6,96 6,69 6,05 6,57
 14,76 14,68 14,25 14,22 14,41

Вариант 6

4,92 4,85 4,33 4,24 4,77
 8,85 8,90 8,44 8,21 8,39
 5,81 5,86 5,47 5,90 5,69
 13,49 13,32 13,57 13,42 13,56
 7,89 7,68 7,39 7,19 7,42
 20,52 20,71 20,27 20,58 20,31
 11,82 11,69 11,93 11,49 11,54
 66,71 66,13 66,62 66,85 66,20

Вариант 7

4,07 4,84 4,28 4,16 4,66
 8,87 8,96 8,30 8,89 8,04
 5,32 5,73 5,86 5,43 5,62
 13,29 13,04 13,28 13,40 13,12
 7,79 7,15 7,45 7,68 7,38
 20,55 20,78 20,04 20,79 20,61
 11,26 11,38 11,71 11,34 11,73
 66,99 66,05 66,88 66,55 66,62

Вариант 8

3,83 3,05 3,23 3,23 3,87
 6,55 6,64 6,23 6,59 6,11
 4,75 4,90 4,76 4,98 4,44
 9,04 9,30 9,24 9,57 9,30
 5,55 5,89 5,27 5,81 5,63
 13,40 13,11 13,45 13,61 13,36
 8,38 8,31 8,03 8,19 8,10
 25,86 25,44 25,78 25,62 25,56

Вариант 9

3,54 3,32 3,024 3,46 3,19
 5,47 5,70 5,78 5,90 5,77
 3,26 3,95 3,37 3,31 3,15
 7,17 7,21 7,01 7,30 7,91
 4,01 4,82 4,90 4,18 4,19
 9,50 9,19 9,15 9,62 9,36
 6,90 6,83 6,84 6,78 6,78
 14,77 14,70 14,18 14,90 14,93

Вариант 10

2,49 2,37 2,63 2,64 2,69
 4,18 4,64 4,55 4,26 4,51
 3,36 3,20 3,02 3,12 3,07
 5,45 5,45 5,49 5,72 5,55
 3,25 3,12 3,90 3,82 3,81
 6,21 6,14 6,41 6,04 6,22
 4,51 4,89 4,55 4,41 4,81
 9,35 9,93 9,05 9,11 9,26

Вариант 11					Вариант 16				
2,64	2,65	2,45	2,50	2,63	8,46	8,41	8,42	8,47	8,44
3,47	3,38	3,22	3,18	3,58	12,52	12,98	12,78	12,18	12,08
2,39	2,68	2,51	2,48	2,70	10,05	10,80	10,88	10,79	10,37
4,81	4,51	4,96	4,76	4,69	15,82	15,99	15,69	15,04	15,86
3,86	3,84	3,81	3,22	3,68	11,51	11,14	11,59	11,57	11,84
5,82	5,28	5,17	5,06	5,78	17,31	17,36	17,81	17,09	17,63
3,50	3,32	3,08	3,35	3,01	14,06	14,15	14,62	14,54	14,173
6,55	6,70	6,75	6,72	6,07	22,74	22,75	22,99	22,79	22,569
Вариант 12					Вариант 17				
1,83	1,51	1,69	1,81	1,35	8,39	7,04	8,40	8,73	7,16
3,04	3,24	2,84	2,83	3,07	10,23	10,50	10,78	10,73	10,31
2,35	2,15	2,28	2,94	2,38	9,01	9,68	9,34	9,49	9,06
3,67	3,94	3,84	3,83	3,03	12,16	11,21	12,06	11,44	11,98
2,88	2,23	2,15	2,77	2,73	10,08	9,06	9,98	10,97	10,73
4,91	4,67	4,92	4,43	4,60	13,10	12,40	12,95	13,047	13,16
3,85	3,10	3,15	3,24	3,75	11,95	11,97	11,13	11,61	11,254
5,83	5,79	5,63	5,70	5,77	14,20	14,76	14,86	14,75	13,52
Вариант 13					Вариант 18				
2,32	2,14	2,60	2,46	2,20	7,39	7,03	7,80	7,19	7,50
3,73	3,24	3,77	3,27	3,85	12,65	12,56	12,04	12,037	12,09
2,08	2,645	2,57	2,45	2,57	9,92	9,14	10,72	9,10	9,76
4,77	4,54	4,11	4,88	4,65	15,47	15,11	15,71	15,55	15,91
3,075	3,74	3,90	3,99	3,96	11,27	11,83	11,94	11,21	11,74
5,83	5,76	5,36	5,98	5,40	19,69	19,40	19,31	18,38	19,42
3,78	3,28	3,05	3,48	3,04	14,45	14,08	14,94	14,86	14,49
6,98	6,08	6,87	6,40	6,04	26,77	26,30	26,07	26,37	26,81
Вариант 14					Вариант 19				
2,67	2,87	2,55	2,527	2,83	3,59	3,09	3,45	3,68	3,40
4,48	4,13	4,55	4,44	4,69	4,28	4,80	4,74	4,84	4,45
3,34	3,59	3,16	3,40	3,00	4,43	4,53	4,42	4,30	4,75
5,58	5,85	5,90	5,13	5,69	5,76	5,32	5,14	5,46	5,82
3,78	3,08	3,20	3,14	3,42	4,61	4,78	4,77	4,10	4,58
6,13	6,22	6,50	6,75	6,70	5,64	5,87	5,67	5,61	5,90
4,98	4,49	4,50	4,47	4,68	5,27	5,36	5,23	5,68	5,21
9,78	9,89	9,31	9,11	9,86	6,12	6,13	6,63	6,98	6,75
Вариант 15					Вариант 20				
3,73	3,33	3,62	3,65	3,29	2,82	3,04	2,84	2,88	2,96
5,91	5,86	5,21	5,56	5,98	3,54	3,61	3,51	3,17	3,50
3,84	3,32	3,29	3,14	3,99	3,23	3,83	3,53	3,99	3,29
7,52	7,65	7,79	7,10	7,43	3,63	3,70	3,84	3,64	3,04
4,43	4,40	4,83	4,75	4,99	3,44	3,52	3,39	3,28	3,24
9,78	9,94	9,57	9,59	9,21	4,25	4,47	4,05	4,53	4,52
6,04	6,70	6,41	6,34	6,39	3,10	3,77	3,55	3,80	3,59
14,70	14,69	14,34	14,54	14,74	4,53	4,47	4,72	4,50	4,13

Учебное издание

**Гефан Григорий Давыдович
Ширяева Наталья Константиновна**

Основы теории эксперимента

Учебное пособие

Редактор *Н. А. Михайлова*
Компьютерный набор *Г. Д. Гефан, Н. К. Ширяева*

Подписано в печать 30.05.2017.
Формат 60×84 ¹/₁₆. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 7,0. Уч.-изд. л. 7,63.
План 2017 г. Тираж 100 экз. Заказ

Типография ИрГУПС, г. Иркутск, ул. Чернышевского, 15