Министерство образования и науки РФ
Национальный исследовательский
Томский политехнический университет

Дисциплина «Методология моделирования систем»

Направление подготовки «Управление качеством»

Разработчик : доцент каф. ФМПК, к.т.н. Плотникова И.В.

Лекция 4

Схемы, применяемые при моделировании систем

Описание обобщенной модели

Матрица планирования

Поставщики	Потребители					Запасы
	B_1	B_2	B_3	…	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	c_{13} x_{13}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
….	…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	c_{m3} x_{m3}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потребности	b_1	b_2	b_3	…	b_n	$\sum a_i = \sum b_j$

Математическая модель сводится к минимизации целевой функции, выражающей суммарные затраты на перевозку всего груза

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

Систему ограничений получаем из следующих условий задачи:

1. Все грузы должны быть вывезены, т.е.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \; (i = 1, \ldots, m).$$

2. Все потребности должны быть удовлетворены, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Тогда математическая модель транспортной задачи имеет следующее.найти наименьшее значение линейной функции при ограничениях:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad i = \overline{1,m} \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad j = \overline{1,n} \\ x_{ij} \geq 0. \end{cases}$$

- Это есть задача с $m + n$ уравнениями и mn неизвестными.

В рассмотренной модели предполагается, что суммарные запасы равны суммарным потребностям

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

Такая модель называется закрытой

Теорема. Любая транспортная задача, у которой

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

имеет решение.

Построение первоначального опорного плана

При решении задач итерационный процесс по описанию оптимального плана начинают с определения опорного плана.

- В общем случае система ограничений должна содержать $m+n-1$ линейно-независимых уравнений, значит невырожденный опорный план транспортной задачи содержит $m+n-1$ положительных компонент или перевозок, т.е. в матрице значений компонент $\left(x_{ij}\right)_{m\times n}$ положительными являются только $m+n-1$, а остальные равны 0

Клетки в таблице матрицы планирования, в которых находятся отличные от 0 перевозки, называются <u>*занятыми*</u>, остальные <u>*незанятыми*</u>. Занятые клетки соответствуют базисным неизвестным и для невырожденного опорного плана их должно быть *m+n-1*.

Опорность плана заключается в его *ацикличности* (это ситуация, при которой нельзя построить замкнутый многоугольник или цикл, все вершины которого будут лежать в занятых клетках).

Циклом называется набор клеток, в котором две и только две соседние клетки расположены в одном столбце или в одной строке таблице, причем последняя клетка находится в той же строке или столбце, что и первая.

Построение циклов начинают с какой-либо занятой клетки и переходят по столбцу (строке) к другой занятой клетке, в которой делают поворот под прямым углом и движутся по строке (столбцу) к следующей занятой клетке и т.д., пытаясь возвратиться к первоначальной клетке.

Клетки, в которых происходит поворот под прямым углом, определяют <u>вершины цикла</u>.

Если план транспортной задачи содержит более ***m+n-1*** занятых клеток, он не является опорным, т.к. ему соответствует линейно-зависимая система векторов.

В этом случае в таблице всегда можно поставить замкнутый цикл, с помощью которого всегда уменьшают число занятых клеток до ***m+n-1***.

Если к занятым клеткам, определяющим опорный невырожденный план, а значит и цикличный, присоединить какую-либо незанятую клетку, то план становится не опорным, появляется единственный цикл, все вершины которого за исключением одной, лежат в занятых клетках.

Метод минимальной стоимости (элемента)

ПРИМЕР. В резерве трех железнодорожных станций *А, В, С* находятся соответственно *60, 80, 100* вагонов. Составить оптимальный план перегона этих вагонов к *4*-ем пунктам погрузки хлеба, если пункту *№1* необходимо *40* вагонов, *№2 – 60*, *№3 – 80*, *№4 – 60*. Стоимость перегонов одного вагона со станции *А* в в указанные пункты соответственно равны *1*, *2*, *3*, *4* ден.ед., со станции *В – 4*, *3*, *2*, *0* ден.ед. и со станции *С – 0*, *2*, *2*, *1* ден.ед..

Поставщики	Потребители				Запасы
	1	2	3	4	
A	1	2	3	4	60
B	4	3	2	0	80
C	0	2	2	1	100
Потребности	40	60	80	60	

- Получили опорный план, т.к.

$$m=3,\ n=4,\ m+n-1=6 \quad .$$

$$X\left(x_{11}=40,\ x_{12}=20,\ x_{22}=40,\ x_{23}=40,\ x_{33}=40,\ x_{34}=60\right)$$

$$X=\begin{pmatrix} 40 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 40 & 60 \end{pmatrix}$$

Общая стоимость составленного плана:

$$Z=40\cdot 1+20\cdot 2+40\cdot 3+40\cdot 2+40\cdot 2+60\cdot 1=$$

$$=40+40+120+80+80+60=420$$

Это не оптимальное решение.

Если при составлении опорного плана учитывать стоимость перевозки единицы груза, то очевидно, что план будет ближе к оптимальному.

Метод минимальной стоимости

Суть *метода минимальной стоимости (элемента)* заключается в том, что из всей таблицы стоимостей выбирают наименьшую, и в клетку, которая ему соответствует, помещают меньшее из чисел a_i и b_j.

Затем из рассмотренного исключают либо строку, соответствующую поставщику, запасы которого полностью израсходованы, либо столбец, соответствующий потребителю, потребности которого полностью удовлетворены, либо и строку и столбец. Затем из оставшейся части опять выбирают наименьшую стоимость и процесс распределения запасов продолжают, пока все запасы не будут распределены, а потребности удовлетворены.

Итак, опорный план трансформированной задачи построен, теперь надо из него получит оптимальный. Можно было получить оптимальный план используя симплекс-метод, но в нашем случае симплексная таблица будет содержать *mn* неизвестных, что приведет к громоздким вычислениям.

Поэтому для нахождения оптимального плана транспортной задачи используют другие методы, самый распространенный из которых метод потенциалов.

Метод потенциалов

- Если решение транспортной задачи является оптимальным, то ему соответствует система из $m+n$ чисел u_i и v_j удовлетворяющих условиям

$$u_i + v_j = c_{ij}, \; x_{ij} > 0$$

$$u_i + v_i \le c_{ij}, \; x_{ij} = 0$$

Для того чтобы план был оптимальным, необходимо выполнение следующих условий:

1) для каждой занятой клетки сумма потенциалов должна быть равно стоимости единицы перевозки, стоящей в этой клетке;

2) для каждой незанятой клетки сумма потенциалов должна быть меньше, либо равна стоимости единицы перевозки, стоящей в этой клетке.

Если хотя бы одна незанятая клетка удовлетворяет условию (2), то опорный план не является оптимальным, и его улучшают, перемещая в клетку некоторое количество единиц груза).

Проверяем условие оптимальности для незанятых клеток: если $u_i + v_j > c_{ij}$, то план не является оптимальным, и для каждой клетки, в которой не выполняется условие оптимальности, находим величину $(u_i + v_j) - c_{ij} > 0$ и записываем в левый нижний угол.

Выбор клетки в которую необходимо послать перевозку: транспортная задача линейного программирования решается на min линейной функции, поэтому алгоритм ее решения тот же, что и алгоритм симплекс-метода.

Загрузке подлежит в первую очередь клетка, которой соответствует $\max\{(u_i + v_j) - c_{ij}\}$

Построение цикла и определение величины перераспределения груза:

-отмечаем знаком « + » незанятую клетку, которую надо загрузить (знаки «-»и «+» чередуются);

-затем находим *min* x_{ij} , где x_{ij} – перевозки, стоящие в вершинах цикла, отмеченных знаком « - ». Величина *min* x_{ij} определяет сколько единиц груза над перераспределить.

После перераспределения должно получиться ***m+n-1*** занятых клеток.

Если для какой-либо клетки условие оптимальности не выполняется, то можно улучшить решение двойственной задачи, а заодно и исходной задачи, сделав эту клетку занятой и перебросив груз по циклу.

Для свободных клеток сумма потенциалов меньше, либо равна стоимости, следовательно в последней таблице должно быть получено оптимальное решение исходной транспортной задачи.

Открытая модель транспортной задачи

- Транспортная задача называется открытой если

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$$

- Для такой задачи может быть два случая:

1) суммарные запасы превышают суммарные потребности, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j;$$

2) суммарные потребности превышают суммарные запасы, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

- Линейная функция остается без изменения, изменяются только ограничения:

1)

2) $$Z = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum_j x_{ij} \le a_i, \\ \sum_i x_{ij} = b_j, \\ x_{ij} \ge 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_j x_{ij} = a_i, \\ \sum_i x_{ij} \le b_j, \\ x_{ij} \ge 0. \end{cases}$$

Производственные функции также делят на

- **статические** (не учитывают фактор времени)
- **Динамические** (включают фактор время)

Наиболее распространенные ПФ:

- Функция выпуска y=f(x)
- Функция производственных затрат x=f(y)
- Функция издержек
- Функция спроса относительно цены q = q (p)
- Функция цен спроса P= P(x)
- Функция выручки U= U (x)
- Функция предложения относительно цены S= S (p)
- Функция цен предложения P= P(s) и т.д.

Экономический смысл производной для ПФ.

Если y = f(x) –ПФ выпуска, то производная характеризует ***предельную отдачу некоторого ресурса*** и показывает, сколько дополнительных единиц продукции приносит дополнительная единица затраченного ресурса.

Это количество продукции носит название ***предельного продукта***.

$$E(y) = \frac{x}{y} * \frac{dy}{dx}$$

Изоквантой называют геометрическое место точек плоскости $\left(x_1, x_2\right)$ для которых ***предельной формой замещения*** ресурсов называется величина $f\left(x_1, x_2\right) = Y_c$

Балансовые модели

Под **балансовой моделью** понимается система уравнений, каждое из которых выражает требования баланса между, производимым отдельными экономическими объектами, количеством продукции и совокупной потребностью в этой продукции.

Балансовые модели широко применяются при экономико-математическом моделировании экономических систем и процессов.

В основе создания этих моделей лежит *балансовый метод*, т.е. метод взаимного сопоставления имеющихся материальных, трудовых и финансовых ресурсов и потребностей в них.

<u>Межотраслевой баланс</u> - это важный раздел системы национальных счетов, с помощью которого исследуются межотраслевые связи, сложные зависимости между промежуточным потреблением, конечным спросом и выпуском отраслей экономики.

дства и
нного

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли					Конечный продукт	Валовой продукт
	1	2	3	…	*n*		
1	x_{11}	x_{21}	x_{23}	…	x_{1n}	Y_1	X_1
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	…	x_{2n}	Y_2	X_2
3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	…	x_{3n}	Y_3	X_3
…	…	…	…	I	…	II	…
n	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}		x_{nn}	Y_n	X_n
Амортизация	c_1	c_2	c_3		c_n		
Оплата труда	v_1	v_2	v_3	III	v_n	IV	
Чистый доход	m_1	m_2	m_3		m_n		
Валовой продукт	X_1	X_2	X_3	…	X_n		$= \sum_{j=1}^{n} Xj$

Итог материальных затрат любой потребляющей отрасли и ее условно чистой продукции равен валовой продукции этой отрасли. Данный вывод можно записать в виде соотношения:

$$Xj = \sum_{i=1}^{n} Xij + Z$$

, где

x_j - валовый продукт потребляющей отрасли;

x_{ij}- величины межотраслевых потоков продукции;

z_j - сумма амортизации, оплаты труда и чистого дохода j-ой отрасли.

Валовая продукция той или иной отрасли равна сумме материальных затрат потребляющих ее продукцию отраслей и конечной продукции данной отрасли:

$$Xi = \sum_{i=1}^{n} Xij + Yj$$

x_i- валовый продукт производящих отраслей,

y_j- конечная продукция.

Динамическое программирование

Динамическое программирование – это метод оптимизации многошаговых процессов, критерий эффективности которых обладает свойством аддитивности

Задача.

Инвестор выделяет средства в размере 5 тыс. ден. ед., которые должны быть распределены между тремя предприятиями.

Требуется, используя принцип оптимальности Беллмана, построить план распределении инвестиции между предприятиями, обеспечивающий наибольшую общую прибыль, если каждое предприятие при инвестировании в него средств x тыс. ден. ед. приносит прибыль φi(x) тыс. ден. ед. (i =1,2 и 3) по следующим данным

Инвестирование средств (тыс. ден. ед.)	Прибыль (тыс. ден. ед.)		
x	$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$	$\varphi_3(x)$
1	1,62	2,23	1,77
2	1,98	2,96	2.46
3	3,12	3,37	2,73
4	3,25	3,51	3,48
5	3,76	4,11	3,59

Решение

Составим математическую модель задачи:

- 1. *Определение числа шагов*.

  Разобьем решение задачи на шаги. Число шагов положим равным числу предприятий, в которые осуществляется инвестирование.

- 2. *Определение состояний системы*. Введем переменную *s*- количество средств, имеющихся в наличии перед данным шагом и характеризующих состояние системы на каждом шаге.

- 3. *Выбор шаговых управлений*.

Управление на *i*-м (*i* =1,2 и 3) шаге x_i - количество средств, инвестируемых в *i*-е предприятие.

- 4. *Определение выигрыша на i-м шаге*.

Выигрыш $\varphi_i(x_i)$ на *i*-м шаге—это прибыль, которую приносит *i* -е предприятие при инвестировании в него средств x_i.

Если через выигрыш в целом обозначить общую прибыль *W*, то

$$W = \varphi_1(x_1) + \varphi_2(x_2) + \varphi_3(x_3)$$

- 5. *Определение функции перехода в новое состояние*.

  Если в наличии имеются средства в размере *s* тыс. ден ед. и в *i*-е предприятие инвестируется *x* тыс. ден. ед., то для дальнейшего инвестирования остается *s* -*x* тыс. ден. ед.

  и, следовательно, функция перехода в новое состояние имеет вид

$$f_1(s,x)=s-x$$

- 6. *Составление функционального уравнения для последнего шага*.

  На последнем *i* = 3 шаге оптимальное управление соответствует количеству средств, имеющихся и наличии.

  Это означает, что, сколько средств осталось, столько и надо вложить и последнее предприятие, а выигрыш будет равен доходу, приносимому последним предприятием:

$$x_3(s)=s, W_3(s)=\varphi_3(s)$$

Составление основного функционального уравнения.

Управление на каждом шаге надо выбирать так, чтобы оптимальной была сумма выигрышей на всех оставшихся до конца процесса шагах, включая выигрыш на данном шаге.

Поэтому, если перед *i* -м шагом у инвестора остались средства в размере *s* тыс. ден. ед. то, вкладывая х тыс. ден. ед. в *i*-е предприятие, оно принесет доход φi(х), а оставшиеся *s* - *x* тыс. ден. ед., вложенные в остальные предприятия *i* + 1-го до последнего, составят выигрыш $W_i+1(s-x)$

Так как оптимальным является управление х, при котором сумма $\varphi_i(x)$ и $W_i+1(s-x)$ должна быть наибольшей, то основное функциональное уравнение примет вид

После того как составлена модель, можно провести пошаговую оптимизацию, по результатам которой заполняется таблица

s	i = 3		i = 2		i = 1	
	$x_3(s)$	$W_3(s)$	$x_2(s)$	$W_2(s)$	$x_1(s)$	$W_1(s)$
1	1	1,77	1	2,23		
2	2	2,46	1	4,00		
3	3	2,73	2	4,73		
4	4	3,48	2	5,42		
5	5	3,59	3	5,83	3	7,12

Таким образом, для получения наибольшей общей прибыли в размере 7,12 тыс. ден. ед. следует 3 тыс. ден. ед. вложить в первое предприятие и по 1 тыс. ден. ед. вложить во второе и третье предприятия.