Домашнее задание по теме: «Матрица линейного оператора. Диагонализируемость линейных операторов»

3. В базисе 1, x, x^2 пространства $\mathbb{R}^{(3)}[x]$ оператор φ имеет матрицу $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Найти матрицу этого оператора в базисе $f_1(x)=3x^2+2x$, $f_2(x)=5x^2+3x+1$, $f_3(x)=7x^2+5x+3$.

Ответ: $\mathbf{T}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{T}^{-1}=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} -4 & 8 & -4 \\ 1 & -9 & 6 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -15/4 & -4 & -5 \\ 9/4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

4. Линейный оператор φ пространства L_3 имеет в некотором базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ матрицу $\mathbf{A}$. Выяснить, диагонализируем ли линейный оператор, и если да – то найти его диагональную матрицу и базис из собственных векторов.

а) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ б) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -3 & -7 & -7 \\ 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}$

Ответ: **а)** Да. $\lambda_1=-1$, $\lambda_{2,3}=2$. $L_{\lambda=-1}=\mathcal{L}(\mathbf{f}_1)$, $L_{\lambda=2}=\mathcal{L}(\mathbf{f}_2,\mathbf{f}_3)$, где $\mathbf{f}_1=\{1,-1,-1\}$, $\mathbf{f}_2=\{1,1,0\}$, $\mathbf{f}_3=\{1,0,1\}$.

б) Нет. $\lambda_{1,2}=-1$, $\lambda_3=3$. $L_{\lambda=-1}=\mathcal{L}(\mathbf{f}_1)$, $L_{\lambda=3}=\mathcal{L}(\mathbf{f}_2)$, где $\mathbf{f}_1=\{2,-1,0\}$, $\mathbf{f}_2=\{1,-1,1\}$.