Домашнее задание по теме “Линейный оператор”

1.

Доказать, что оператор пространства $V^{(3)}$, действующий на произвольный вектор $\overline{\mathbf{x}}$ по формуле $\varphi\overline{\mathbf{x}} = [\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{a}}]$, где $\overline{\mathbf{a}}$ – фиксированный ненулевой вектор, является линейным. Найти матрицу этого оператора в базисе $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, если вектор $\overline{\mathbf{a}}$ имеет в этом базисе координаты $\overline{\mathbf{a}} = \{a_1, a_2, a_3\}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix}$

2.

Найти матрицу оператора φ_α поворота плоскости на угол α вокруг начала координат против часовой стрелки в базисе $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

3.

Убедившись в линейности оператора $A: V_3 \to V_3$, найти его матрицу в базисе $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$. $A\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}) \cdot \boldsymbol{e}$, где $\boldsymbol{e}$ – заданный единичный вектор.

Ответ:

$$A = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha & \cos\beta\cos\alpha & \cos\gamma\cos\alpha \\ \cos\alpha\cos\beta & \cos^2\beta & \cos\gamma\cos\beta \\ \cos\alpha\cos\gamma & \cos\beta\cos\gamma & \cos^2\gamma \end{pmatrix}.$$

4. Установить, какое из отображений линейного пространства $\mathbb{R}^3$ в себя является линейным оператором:

а) $\hat{A}\boldsymbol{x} = (x_1, x_2 + 1, 2x_1 + x_3)$,

б) $\hat{A}\boldsymbol{x} = (x_1 + x_2, 2x_2 - x_3, 3x_1 - x_2 + 2x_3)$,

где $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

5. Установить, является ли отображение линейного пространства $\mathbb{R}^3$ в себя линейным оператором и если да, найти его матрицу в стандартном базисе $\hat{A}(\boldsymbol{x}) = (x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, 3x_1 - x_2 + x_3)$.