

Вопросы к экзамену Математика 1.3

1. Определения: матрицы, основной и расширенной матриц, квадратной, диагональной, единичной, нулевой и треугольной, строчной и столбцовой, транспонированной матрицы.
2. Линейные и нелинейные операции над матрицами: сложение, умножение матрицы на число, умножение матриц, транспонирование матриц. Их свойства.
3. Определения: перестановки чисел, числа инверсий в перестановке, определителя. Вычисление определителя второго порядка, третьего порядка. Основные свойства определителя (одно из них доказать). Критерий равенства нулю определителя квадратной матрицы. Теорема Лапласа и ее следствия.
4. Определения: минора порядка k , минора элемента матрицы и алгебраического дополнения матрицы, ранга матрицы, элементарных преобразований матрицы. Понятие системы m линейных уравнений с n неизвестными. Методы окаймляющих миноров и элементарных преобразований для нахождения ранга матрицы. Теорема об инвариантности ранга матрицы относительно элементарных преобразований. Теорема о базисном миноре (формулировка).
5. Определения: линейного, однородного и неоднородного уравнения, решения СЛУ, совместной и несовместной СЛУ, определённой и неопределённой СЛУ. Теорема Кронекера-Капелли. Критерий единственности решения СЛУ.
6. Эквивалентные СЛУ. Элементарные преобразования СЛУ. Метод Гаусса.
7. Определения невырожденной и обратной матрицы. Свойства обратной матрицы. Критерий существования обратной матрицы. Матричный метод решения системы. Метод Крамера.
8. Определения системы однородных уравнений, тривиального решения и нетривиального решения, фундаментальной системы решений. Условие существования нетривиальных решений. Свойства решений СЛОУ. Теорема существования ФСР.
9. Деление отрезка в данном отношении (с выводом формул). Определение проекции вектора на ось. Свойства проекций. Направляющие косинусы в декартовой системе координат: определение и вывод формул, свойство направляющих косинусов. Теорема о сведении линейных операций над векторами к таким же операциям над их одноименными координатами (с доказательством). Линейная зависимость и независимость свободных векторов. Критерий линейной зависимости двух свободных векторов (доказать) Критерий линейной зависимости трех свободных векторов (доказать). Понятие базиса. Теорема (о базисе) о разложении вектора по базису и единственности разложения.
10. Скалярное произведение векторов: определение и свойства (доказать). Скалярное произведение векторов в декартовой системе координат (с выводом формулы). Критерий ортогональности (перпендикулярности) векторов.
11. Определения: правой (левой) тройки векторов, векторного произведения. Свойства векторного произведения (доказать) и его геометрический смысл. Критерий коллинеарности векторов. Вычисление векторного произведения в декартовой системе.
12. Смешанное произведение трёх векторов: определение и свойства. Определение компланарных векторов. Критерий компланарности трёх векторов. Вычисление смешанного

произведения в декартовой системе координат. Геометрический смысл смешанного произведения.

13. Линейное пространство: определение и примеры. Линейные подпространства: определение, критерий подпространства.

14. Понятия базиса и размерности линейного пространства. Определение линейной зависимости и независимости векторов линейного пространства. Критерий линейной зависимости векторов линейного пространства (доказать). Формула преобразования координат вектора линейного пространства при преобразовании его базиса (вывод).

15. Понятие линейного оператора. Матрица линейного оператора. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Докажите, что каждый собственный вектор соответствует одному собственному значению. Докажите, что если X_1 и X_2 – собственные векторы оператора φ , относящиеся к одному и тому же собственному значению λ , то их линейная комбинация $\alpha X_1 + \beta X_2$ – собственный вектор оператора φ , относящийся к тому же собственному значению. Доказать, что если векторы X_1 и X_2 относятся к различным собственным значениям λ_1, λ_2 , то они линейно независимы.

16. Характеристический многочлен и характеристическое уравнение. Теорема о независимости характеристического многочлена от выбора базиса. Критерий диагонализруемости линейного оператора (доказать).

17. Прямая линия на плоскости (вывод: общего уравнения прямой, канонических и параметрических уравнений прямых, проходящих через заданную точку параллельно вектору, канонических и параметрических уравнений прямых, проходящих через две заданные точки). Взаимное расположение прямых на плоскости (в случае задания их общими уравнениями или каноническими, с угловым коэффициентом).

18. Уравнение плоскости (вывод: общего уравнения плоскости, уравнения плоскости, проходящей через три точки, уравнение плоскости, проходящей через точку параллельно двум заданным неколлинеарным векторам). Исследование общего уравнения плоскости.

19. Прямая линия в пространстве: общее уравнение прямой в пространстве, канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через заданную точку параллельно вектору (вывод), канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через две заданные точки (вывод). Переход от общих уравнений к каноническим.

20. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве: пересечение, перпендикулярность, параллельность, принадлежность прямой и плоскости. Угол между прямой и плоскостью.

21. Определение эллипса и свойства эллипса. Каноническое уравнение эллипса (вывод). Определение гиперболы и свойства гиперболы. Каноническое уравнение гиперболы в декартовой системе координат (вывод).

22. Определение параболы и свойства параболы. Каноническое уравнение параболы в декартовой системе координат (с выводом).

23. Понятие функции. Вещественная функция вещественного аргумента. Композиция функций. Основные элементарные функции. Классификация элементарных функций.
24. Понятие числовой последовательности. Способы задания последовательности. Ограниченные и неограниченные числовые последовательности. Монотонные последовательности. Бесконечно малые последовательности и их свойства. Бесконечно большие последовательности и их свойства.
25. Сходящаяся последовательность. Единственность ее предела и ограниченность. Свойства сходящихся последовательностей. Теоремы о предельном переходе в неравенстве. Монотонные последовательности.
26. Определение предела функции в точке по Гейне и по Коши. Теоремы о пределе суммы, произведения, частного и композиции функций.
27. Теоремы о предельном переходе в неравенстве.
28. Односторонние пределы функции в точке. Необходимые и достаточные условия существования предела функции в точке.
29. Локальные свойства функций, имеющих предел в точке: о локальной ограниченности функции, об устойчивости знака.
30. Бесконечно малые функции в точке и на бесконечности и их свойства. Бесконечно большие функции в точке и на бесконечности и их свойства.
31. Понятие функции, непрерывной в точке. Необходимые и достаточные условия непрерывности функции в точке. Точки разрыва и их классификация.
32. Локальные свойства непрерывных функций. Непрерывность элементарных функций в области определения.
33. Первый замечательный предел и его следствия. Второй замечательный предел и его следствия.
34. Сравнение бесконечно малых величин. Эквивалентные бесконечно малые величины, их свойства. Таблица эквивалентных бесконечно малых. Критерий эквивалентности бесконечно малых величин. Теорема о применении эквивалентных бесконечно малых величин к вычислению пределов.
35. Свойства функций, непрерывных на отрезке.
36. Понятие производной. Определение левосторонней, правосторонней производной. Теорема о производной обратной функции. Теорема о необходимом и достаточном условии существования производной. Теорема 2 о необходимом условии существования производной с доказательством.
37. Физический и геометрический смысл производной. Уравнения касательной и нормали к кривой в точке.
38. Определение дифференцируемой функции в точке. Теорема о связи дифференцируемости и существованием производной (доказательство).

39. Правила дифференцирования суммы, разности, произведения и частного функций. Дифференцирование сложной функции. Теорема о производной обратной функции.
40. Дифференциал функции. Геометрический смысл дифференциала функции. Инвариантность формы записи дифференциала первого порядка.
41. Производные высших порядков. Физический смысл производной второго порядка. Правила нахождения производной высшего порядка, формула Лейбница. Дифференциалы высших порядков.
42. Теорема Ферма. Теорема Роля. Теорема Лагранжа. Теорема Коши. Теорема (правило) Лопиталя.
43. Формула Тейлора для многочлена.
44. Формула Тейлора для произвольной функции. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Формула Маклорена. Пять основных разложений.
45. Определение возрастающей, убывающей, невозрастающей, неубывающей функции. Теорема о необходимом и достаточном условии возрастания (убывания) функции (доказательство).
46. Точки минимума, максимума, экстремума, стационарные, критические. Теорема о необходимом условии экстремума. Теорема о достаточном условии экстремума (доказательство). Теорема 2 о достаточном условии экстремума.
47. Определение выпуклой, вогнутой функции в точке и на интервале. Теорема 1 о необходимом и достаточном условии выпуклости (вогнутости) функции (доказательство достаточного условия). Определение точки перегиба. Необходимое условие перегиба кривой. Теорема о достаточном условии перегиба кривой (доказательство).
48. Определение асимптоты. Виды асимптот. Теорема о наклонной асимптоте.

Задачи

1. Вычислить определители:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}, \text{ б) } \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}, \text{ в) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}.$$

2. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Найти: а) матрицу $4A - 2B$,
 б) матрицу $AB - BA$,
 в) матрицу A^{-1} . Сделать проверку.

3. Решить матричные уравнения:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{б) } X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

4. Найти $f(A)$, если $f(x) = x^2 - x - 1$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Перемножить матрицы:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

6. Решить системы методом Крамера:

а)
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -5. \end{cases}$$

7. Решить системы матричным методом:

а)
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 = 1, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 1; \end{cases} \quad б) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$$

8. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

а)
$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_4 = -1, \\ -2x_2 + x_3 + 5x_4 = 3, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 9x_4 = 5; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$$

9. Найти общее решение системы линейных однородных уравнений и записать ее фундаментальную систему решений:

а)
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 7x_3 = 0, \\ -x_1 + x_2 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 - x_4 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

10. Найти собственные векторы и собственные значения матрицы:

а) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad б) A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

11. Относительно базиса $\bar{e}_1 = \{1; 0; 0\}$, $\bar{e}_2 = \{0; 1; 0\}$, $\bar{e}_3 = \{0; 0; 1\}$ заданы векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{x}$:

$$\bar{a}_1 = \{1; 1; 1\}, \quad \bar{a}_2 = \{1; 1; 2\}, \quad \bar{a}_3 = \{1; 2; 3\}, \quad \bar{x} = \{6; 9; 14\}.$$

- а) доказать, что векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ образуют базис пространства R_3 ;
- б) записать матрицу A перехода от базиса $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ к базису $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ и матрицу B перехода от базиса $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ к базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$;
- в) найти координаты вектора $\bar{x}$ в базисе $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$;
- г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора в базисах $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ и $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$.

12. Найти угловой коэффициент k прямой, проходящей через точки $M_1(1,8)$ и $M_2(-1,4)$; записать уравнение прямой в параметрическом виде.
13. Составить уравнения сторон и медиан треугольника с вершинами $A(3,2)$, $B(5,-2)$, $C(1,0)$.
14. Даны вершины треугольника $A(-10,-13)$, $B(-2,3)$, $C(2,1)$. Вычислить длину перпендикуляра, опущенного из вершины B на медиану, проведенную из вершины C .
15. Составить уравнение плоскости, которая проходит через ось Oy и точку $M(1,4,-3)$.
16. Точка $A(1,-3,0)$ – вершина куба, одна из граней которого лежит на плоскости $3x + 2y - 6z + 17 = 0$. Вычислить объем куба.
17. Установить, что три плоскости $2x - 4y + 5z - 21 = 0$, $x - 3z + 18 = 0$, $6x + y + z - 30 = 0$ имеют общую точку и вычислить ее координаты.
18. Расстояние между директрисами эллипса в 2 раза больше расстояния между его фокусами. Определить эксцентриситет эллипса. Построить эллипс.
19. Уравнение линии привести к каноническому виду. Построить линию.
 $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$.
20. Доказать, что $x_n = 2^{-n}$ – бесконечно малая последовательность. Указать $N(\varepsilon)$ при $\varepsilon = \frac{1}{1024}$.

21. Найдите $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \sqrt{\cos 2x}}{x \sin x} \right)$.

22. Пользуясь правилом Лопиталя, найти пределы:

- а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x^n - 1}$.
- б) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sin x)^{\lg x}$;

23. Определите порядок малости бесконечно малой $\alpha(x) = e^{2x^2} - 1$ относительно x при $x \rightarrow 0$.

24. Найти производные:

а) $y = 2\sqrt[3]{x+3} - \frac{3}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$;

б) $z = \cos 2x - 2\sin^4 3x$;

в) $\operatorname{tg} s = t + t^2 + 3s$;

г) $y = \sqrt[3]{x}$;

25. Найдите производную второго порядка y''_{xx} для функции, заданной параметрически $\begin{cases} x = \cos t + 3 \\ y = \sin t \end{cases}$.

26. Найдите экстремумы функции $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ и постройте ее график.

27. Исследуйте на непрерывность функцию $y = \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{x-2}}}$. Постройте эскиз графика.

28. Исследовать непрерывность функции

$$y = \begin{cases} \sqrt{-x}, & x \leq 0 \\ 2, & 0 < x \leq 2 \\ x^2 + 3, & x > 2 \end{cases} \text{ построить график.}$$

29. Найдите точки экстремума и точки перегиба графика функции $y = 3 \cdot \sqrt[3]{x} - x$ и постройте график.

30. Составьте уравнение касательной и нормали к кривой, заданной уравнением $y = x^3 - x - 2$ в точке $M_0(1; -2)$.

31. Записать формулу Маклорена для функции $y = \sqrt{1+x}$.

32. Найдите асимптоты и постройте график функции $y = \frac{x^2 + 1}{2 - x}$.