Вариант 6

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

   1.1. $f(x)=1-x^2$, $x_0=-1$; 1.2. $f(x)=\begin{cases}\ln\left(1-x^2\right), & x\neq 0;\\ 0, & x=0,\end{cases}$ $x_0=0$.

2. Найти производную функций:

   2.1. $y=(1+x)\cdot\ln(x^2-1)$; 2.2. $y=\dfrac{1}{x}-5^x-10$;

   2.3. $y=(1-x)^2\cdot e^{\sqrt[3]{1-x^2+x}}$; 2.4. $y=\dfrac{\sin(2-x^3)}{e^{\sqrt{x}-1}}$;

   2.5. $y=\sqrt[3]{x^2+3}-\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3+x}}$; 2.6. $y=\cos^2(1+x^3)$;

   2.7. $y=\log_3(3-\sqrt{4^x-\sqrt{2x}})$; 2.8. $y=\arcsin(\cos(x+\sqrt{e^x-1}))$.

3. Найти производную степенно-показательной функции $y=(1+x)^{\sin x}$.

4. Найти производную неявной функции $y=y(x)$: $x\cdot y=arctg(x^2+y)$.

5. Найти производную параметрической функции: $\begin{cases}x=\cos t,\\ y=1-\cos 2t.\end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке M_0 (x_0; y_0):

   6.1. $y=1+\sin x-\cos 2x,\ x_0=\dfrac{\pi}{6}$; 6.2. $\begin{cases}x=2t-t^2,\\ y=3t-t^3,\end{cases}$ $M_0(1;\,2)$.

7. Найти производную второго порядка $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для функций:

   7.1. $y=(x^2-1)\cdot\ln(1-x^2)$; 7.2. $\begin{cases}x=\cos t,\\ y=1-\cos 2t.\end{cases}$

8. Найти дифференциал функции $y=\dfrac{1}{\sqrt{2x^2+x+1}}$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y(1.016)$.

9. Найти дифференциал второго порядка функции $y=(x^2-1)\cdot\ln(1-x^2)$ в точке $x_0=0$.

10. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

    а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x^3}{\sin^6 2x}$; *б*) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(tgx)^{2x-\pi}$; *в*) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\arcsin x\cdot ctgx\right]$.

11. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0:

    а) $y=\sqrt{2+x},\ x_0=-1$; *б*) $y=\dfrac{1-e^{-3x}}{x}$, $x_0=0$.

12. Найти экстремумы функций:

а) $y = x^3 - 6x^2 + 12x$; *б*) $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 3}$; *в*) $y = x^3 (x+2)^2$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

а) $y = x^3 - 12x + 7,\ \ [0;3]$; *б*) $y = \dfrac{\ln x}{x},\ \ (0;\infty)$.

14. Исследовать и построить графики функций:

а) $y = \sqrt[3]{(x^2-8)^2}$; *б*) $y = \dfrac{1-x^3}{x^2}$.

15. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения: $X \in (-\infty;\infty)$.
2) Вертикальные асимптоты: –
3) Горизонтальные асимптоты: –
4) Наклонные асимптоты: $y = x\ (x \to \pm\infty)$.
5) Стационарные точки: –2; 2; 3.
6) Точки, где $(y' = \infty)$: 0.
7) Интервалы монотонности:
   а) возрастания: $(-2;0), (2;3)$,
   б) убывания: $(-\infty;-2); (0;2); (3;\infty)$.
8) Интервалы выпуклости и вогнутости:
   а) выпуклости: $(2.5;3.5)$
   б) вогнутости: $(-\infty;0), (0;2.5), (3.5;\infty)$.
9) Значение функции в некоторых точках:
   $y(-2) = 3$, $y(0) = 5$, $y(2) = -3$, $y(3) = -1$, $y(5) = -4.5$.

Вариант 7

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

1.1. $f(x)=1+x^2$, $x_0=-1$; 1.2. $f(x)=\begin{cases}\ln\left(1-\dfrac{3\sin x^2}{x}\right), & x\neq 0;\\ 0, & x=0,\end{cases}$ $x_0=0$.

2. Найти производную функций:

2.1. $y=x\cdot\ln(x^2-1)$; 2.2. $y=\sqrt{x}-2^x-3$;

2.3. $y=(1-\sqrt{x})^3\cdot e^{\sin^4 x}$; 2.4. $y=\dfrac{2-x^3+x^5}{e^{x-1}}$;

2.5. $y=\sqrt[3]{3-x^2}-\dfrac{1}{\sqrt[4]{1-x^3}+x}$; 2.6. $y=\cos^2(1-x^4)$;

2.7. $y=\log_3(\sqrt{3}-\sqrt{4^x-\sqrt{1-x}})$; 2.8. $y=\arccos(\sin(x+\sqrt{e^x-1}))$.

3. Найти производную степенно-показательной функции $y=(1-x)^{\ln x}$.

4. Найти производную неявной функции $y=y(x)$: $\sin(x\cdot y)=x^2+y$.

5. Найти производную параметрической функции: $\begin{cases}x=\cos t,\\ y=1-\sin 2t.\end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке M_0 $(x_0; y_0)$:

6.1. $y=1+\sin x-\cos 2x,\ x_0=-\dfrac{\pi}{6}$; 6.2. $\begin{cases}x=\dfrac{2t+t^2}{1+t^3},\\ y=\dfrac{2t-t^2}{1+t^3},\end{cases}$ $M_0\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

7. Найти производную второго порядка $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для функций:

7.1. $y=(x^2-1)\cdot\ln(x^2-1)$; 7.2. $\begin{cases}x=\cos t,\\ y=1-\sin 2t.\end{cases}$

8. Найти дифференциал функции $y=\arcsin x$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y(0.08)$.

9. Найти дифференциал второго порядка функции $y=(x^2-1)\cdot\ln(x^2-1)$ в точке $x_0=2$.

10. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-6x+6\sin x}{x^5}$; *б*) $\lim\limits_{x\to 0^+}(x)^{\frac{6}{1+2\ln x}}$; *в*) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right]$.

11. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0:

а) $y=\sqrt[3]{3+x},\ x_0=-2$; *б*) $y=\sin(100x^2)$, $x_0=0$.

12. Найти экстремумы функций:

а) $y=\sqrt[3]{(x^2-1)^2}$; *б*) $y=\dfrac{\ln^2 x}{x}$; *в*) $y=2x^2-x^4$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

а) $y=x^3-18x^2+96x,\ \ [0;9]$; *б*) $y=\dfrac{(x+2)^2}{x-1},\ \ [-4;0]$.

14. Исследовать и построить графики функций:

а) $y=\dfrac{2}{x^2-4}$; *б*) $y=xe^{-x}$).

15. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения: $X\in(-\infty;-1)\cup(-1;\infty)$.
2) Вертикальные асимптоты: -1
3) Горизонтальные асимптоты: –
4) Наклонные асимптоты: $y=\dfrac{1}{2}x-1$.
5) Стационарные точки: 0; –3.
6) Точки, где $(y'=\infty)$: –
7) Интервалы монотонности:
   а) возрастания: $(-\infty;-3),(-1;\infty)$,
   б) убывания: $(-3;-1)$.
8) Интервалы выпуклости и вогнутости:
   а) выпуклости: $(-\infty;-1),(-1;0)$
   б) вогнутости: $(0;\infty)$.
9) Значение функции в некоторых точках:
   $y(-3)=-\dfrac{27}{8}$, $y(-2)=-4$, $y(0)=0$, $y(2)=\dfrac{4}{3}$.

Вариант 8

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

   1.1. $f(x) = 2 + x^3$, $x_0 = -1$; 1.2. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 3x}{x}, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0, \end{cases}$ $x_0=0$.

2. Найти производную функций:

   2.1. $y = x^4 \cdot \ln(x-1)$; 2.2. $y = \sqrt{x} - \dfrac{1}{x} - 3$;

   2.3. $y = (\dfrac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}) \cdot e^{\cos^4 x}$; 2.4. $y = \dfrac{2 + x^3 - x^5}{e^{x+1}}$;

   2.5. $y = \sqrt{3x - x^2} - \dfrac{1}{\sqrt{1+x^3} + x}$; 2.6. $y = \cos^3(1 - x^4)$;

   2.7. $y = 4^{\sqrt{3} - \sqrt{4^x - \sqrt{1-x}}}$; 2.8. $y = arctg(\sin(x + \sqrt{e^x - 1}))$.

3. Найти производную степенно-показательной функции $y = (tgx)^{\ln x}$.

4. Найти производную неявной функции $y=y(x)$: $x \cdot y = arctg \dfrac{x}{y}$.

5. Найти производную параметрической функции: $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = 1 - \cos t. \end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке M_0 $(x_0; y_0)$:

   6.1. $y = x + \sin x + \cos 2x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$; 6.2. $\begin{cases} x = \dfrac{3t}{1+t^2}, \\ y = \dfrac{3t^2}{1+t^2}, \end{cases}$ $M_0\left(\dfrac{6}{5}; \dfrac{12}{5}\right)$.

7. Найти производную второго порядка $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$ для функций:

   7.1. $y = (1 - x^2) \cdot \ln(x^2 - 1)$; 7.2. $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = 1 - \cos t. \end{cases}$

8. Найти дифференциал функции $y = \sqrt[3]{x^2 + 2x + 5}$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y(0.97)$.

9. Найти дифференциал второго порядка функции $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = 1 - \cos t. \end{cases}$ в точке $t_0=\pi/3$.

10. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

   а) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\pi - 2x) \cdot tgx$; *б*) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1} \right)$; *в*) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + e^x\right)^{\frac{1}{x}}$.

11. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0:

а) $y = e^{2+x}$, $x_0 = -2$; *б*) $y = \cos(100x^2)$, $x_0=0$.

12. Найти экстремумы функций:

а) $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 3$; *б*) $y = \sqrt{2x - x^2}$; *в*) $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

а) $y = x^3 - 12x + 7$, $[-3;0]$; *б*) $y = \frac{x^3+16}{x}$, $[1;4]$.

14. Исследовать и построить графики функций:

а) $y = (x+4)e^{2x}$; *б*) $y = x - \ln(x+1)$.

15. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения: $X \in (-\infty;1) \cup (1;\infty)$.

2) Вертикальные асимптоты: $x=1$.

3) Горизонтальные асимптоты: $y=0$.

4) Наклонные асимптоты: –

5) Стационарные точки: 0; 3.

6) Точки, где $(y' = \infty)$: –

7) Интервалы монотонности:

а) возрастания: $(0;1), (1;3)$,

б) убывания: $(-\infty;0), (3;\infty)$.

8) Интервалы выпуклости и вогнутости:

а) выпуклости: $(-\infty;-0.5), (1;4)$;

б) вогнутости: $(-0.5;1), (4;\infty)$.

9) Значение функции в некоторых точках:

$y(-0.5) = -0.5$, $y(0) = -1$, $y(0.5) = 0$, $y(1.5)=0$, $y(3) = 2$, $y(4)=1$.

Вариант 9

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

   1.1. $f(x)=2-x^3$, $x_0=-1$; 1.2. $f(x)=\begin{cases}2arctg\,\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0;\\ \pi, & x=0,\end{cases}$ $x_0=0$.

2. Найти производную функций:

   2.1. $y=x^4\cdot\ln(1-x)$; 2.2. $y=e^x-\dfrac{1}{x}-3x$;

   2.3. $y=\left(\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}-\sqrt{3-x}\right)\cdot 5^{\cos^4 x}$; 2.4. $y=\dfrac{2+x-x^4}{e^{x+1}}$;

   2.5. $y=\sqrt[4]{3x-x^3}-\dfrac{1}{\sqrt{1+x^3}-2x}$; 2.6. $y=tg^3(1-x-x^4)$;

   2.7. $y=4^{\sqrt{3}-\sqrt{4^x-\sqrt{1-x}}}$; 2.8. $y=arctg(\sin(x+\sqrt{e^x-1}))$.

3. Найти производную степенно-показательной функции $y=(tg^2x)^{\ln x}$.

4. Найти производную неявной функции $y=y(x)$: $x+y=arctg(x^2\cdot y)$.

5. Найти производную параметрической функции: $\begin{cases}x=\sin t,\\ y=t^2-2t.\end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке M_0 $(x_0; y_0)$:

   6.1. $y=x+\sin x-\cos 2x$, $x_0=\pi$; 6.2. $\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}t^2-\dfrac{1}{4}t^4,\\ y=\dfrac{1}{2}t^2+\dfrac{1}{3}t^3,\end{cases}$ $M_0(0;0)$.

7. Найти производную второго порядка $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для функций:

   7.1. $y=\sqrt{x^2-1}\cdot\ln(x^2-1)$; 7.2. $\begin{cases}x=\sin t,\\ y=t^2-2t.\end{cases}$

8. Найти дифференциал функции $y=\sqrt{x^2+x+3}$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y(1.97)$.

9. Найти дифференциал второго порядка функции $y=x+\sin x-\cos 2x$ в точке $x_0=\pi$.

10. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

    а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-tgx)$; *б*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\ln x}$; *в*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos 2x}$.

11. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0:

а) $y = e^{2-x}$, $x_0 = 2$; *б*) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{64 - x^3}}$, x_0=0.

12. Найти экстремумы функций:

а) $y = 3 - 2x^2 - x^4$; *б*) $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x-4}}$; *в*) $y = e^x + e^{-x}$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

а) $y = \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$, $[-2;0.5]$; *б*) $y = \sqrt[3]{2x^2+1}$, $[-2;1]$.

14. Исследовать и построить графики функций:

а) $y = \dfrac{2-4x^2}{1-4x^2}$; *б*) $y = x^2 e^x$.

15. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения: $X \in (-\infty;-1) \cup (-1;\infty)$.
2) Вертикальные асимптоты: $x = -1$
3) Горизонтальные асимптоты: –
4) Наклонные асимптоты: $y = x - 1$.
5) Стационарные точки: –2; 0; 2.
6) Точки, где $(y' = \infty)$: 1.
7) Интервалы монотонности:
   а) возрастания: $(-\infty;-2), (1;\infty)$;
   б) убывания: $(-2;-1), (-1;0), (0;1)$.
8) Интервалы выпуклости и вогнутости:
   а) выпуклости: $(-\infty;-1), (0;1), (1;2)$;
   б) вогнутости: $(-1;0), (2;\infty)$.
9) Значение функции в некоторых точках:
   $y(-2) = -3.5$, $y(0) = 0$, $y(1) = -2$, $y(2) = 2$.

Вариант 10

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

   1.1. $f(x)=(2+x)^2$, x_0= 3; 1.2. $f(x)=\begin{cases}\ln\left(1-x^3\sin\dfrac{2}{x}\right), \ x\neq 0;\\ 0, \quad x=0,\end{cases}$ x_0=0.

2. Найти производную функций:

   2.1. $y=(x+1)^4\cdot\ln(x);$ 2.2. $y=2^x-\sqrt{x}-3x;$

   2.3. $y=(\dfrac{1}{\sqrt{x-4}}-\sqrt{x+4})\cdot 5^{\sin^4 3x};$ 2.4. $y=\dfrac{2x-3x^2-x^3}{x^2+1};$

   2.5. $y=\sqrt[3]{3-x-x^3}-\dfrac{1}{\sqrt{1+3x}-4x^2};$ 2.6. $y=tg^5(1+4x-x^4);$

   2.7. $y=\log_5(\sqrt{3}-\sqrt{4^x-x^4});$ 2.8. $y=arctg(\ln x+\sqrt{1-e^x})$.

3. Найти производную степенно-показательной функции $y=(tgx)^{\ln^2 x}$.

4. Найти производную неявной функции $y=y(x)$: $\dfrac{y}{x}=arctg(x+y)$.

5. Найти производную параметрической функции: $\begin{cases}x=t^2-2t,\\ y=t-\cos t.\end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке M_0 (x_0; y_0):

   6.1. $y=1+e^{-3x},\ x_0=0;$ 6.2. $\begin{cases}x=t\cos t,\\ y=t\sin t,\end{cases}$ $M_0\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

7. Найти производную второго порядка $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для функций:

   7.1. $y=(1-x)^2\cdot e^{x^2-1};$ 7.2. $\begin{cases}x=t^2-2t,\\ y=t-\cos t.\end{cases}$

8. Найти дифференциал функции $y=x^{11}$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y(1.021)$.

9. Найти дифференциал второго порядка функции $y=(1-x)^2\cdot e^{x^2-1}$ в точке $x_0=2$.

10. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

    а) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right);$ *б*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\cdot e^{(x/2)}}{x+e^x};$ *в*) $\lim\limits_{x\to \pi/2}(tgx)^{tg2x}$.

11. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0:

    а) $y=\dfrac{1}{\sqrt[4]{2x-1}}$, x_0=1; *б*) $y=\dfrac{1-e^{-x^2}}{x^2}$, x_0=0.

12. Найти экстремумы функций:

а) $y=\frac{1}{3}x^3-x^4$; *б*) $y=x\cdot\sqrt[3]{x-1}$; *в*) $y=\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

а) $y=2x^3+3x^2-12x+1,\ \ [-3;0]$; *б*) $y=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2,\ \ [-3;0]$.

14. Исследовать и построить графики функций:

а) $y=\ln(x^2-4x+8)$; *б*) $y=(x-1)e^{3x}$.

15. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения: $X\in(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;\infty)$.
2) Вертикальные асимптоты: $x=-2$, $x=2$
3) Горизонтальные асимптоты: $y=0\quad(x\to\infty)$, $y=-1\quad(x\to-\infty)$
4) Наклонные асимптоты: –
5) Стационарные точки: –4; 0; 4.
6) Точки, где $(y'=\infty)$: –
7) Интервалы монотонности:
   а) возрастания: $(-\infty;-4),(-2;2),(4;\infty)$;
   б) убывания: $(-4;-2),(2;4)$.
8) Интервалы выпуклости и вогнутости:
   а) выпуклости: $(-5;-2),(-2;0),(5;\infty)$;
   б) вогнутости: $(-\infty;-5),(0;2),(2;5)$.
9) Значение функции в некоторых точках:
   $y(-5)=0$, $y(-4)=1$, $y(-3)=0$, $y(0)=0$, $y(3)=-1$, $y(4)=-2$, $y(5)=-1$.