Вариант 16

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

1.1. $f(x) = 2 + x$, $x_0 = 11$;

1.2. $f(x) = \begin{cases} 3^{x\sin\frac{1}{x}} - 1, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ $x_0=0$.

2. Найти производную функций:

2.1. $y = 1 - x + \ln(1 + x)$;

2.2. $y = 3^{x+1} - \cos x + (x+1)^3$;

2.3. $y = (1 + 2x^3)^2 \cdot e^{\sqrt{1-x}}$;

2.4. $y = \dfrac{3x^4 + x^3 - 3}{\sqrt{1 - 2x^2}}$;

2.5. $y = \sqrt[3]{3x - 3} - \dfrac{1}{\sqrt[4]{10 - x^4 + x}}$;

2.6. $y = tg^3(1 - 2x)^2$;

2.7. $y = \ln(2^x - \sqrt{x - \sqrt{2x}})$;

2.8. $y = arctg(\sin 4x + \sqrt{\cos x})$.

3. Найти производную степенно-показательной функции $y = (\sin\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$.

4. Найти производную неявной функции $y=y(x)$: $2x - 3y = x\ln y$.

5. Найти производную параметрической функции: $\begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = t - \sin 2t. \end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке $M_0(x_0; y_0)$:

6.1. $y = \sin^3 x + \cos^2 x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$;

6.2. $\begin{cases} x = \dfrac{1 + t^3}{t^2 - 1}, \\ y = \dfrac{t}{t^2 - 1}, \end{cases}$ $M_0\left(3; \dfrac{2}{3}\right)$.

7. Найти производную второго порядка $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для функций:

7.1. $y = (1 + x)^3 \cdot \ln^2(x + 1)$;

7.2. $\begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = t - \sin 2t. \end{cases}$

8. Найти дифференциал функции $y = \sqrt[3]{2x + \cos x}$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y(0.01)$.

9. Найти дифференциал второго порядка функции $y = \dfrac{x^3}{x+1}$ в точке $x_0 = 1$.

10. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{tgx} - e^x}{tg2x - 2x}$; *б)* $\lim\limits_{x\to 0} \left(tgx\right)^{2tg2x}$; *в)* $\lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{\ln(1+x)^{1+x}}{x^2} - \dfrac{1}{x}\right]$.

11. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0:

а) $y = \ln(2 - x)$, $x_0 = 1$; *б)* $y = \sin(5x/2)^2$, $x_0=0$.

12. Найти экстремумы функций:

а) $y = x^3 + x^2 - x + 2$; *б*) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$; *в*) $y = \dfrac{2x}{1 + x^2}$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

а) $y = x^3 \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2}$, $[-2;2]$; *б*) $y = \dfrac{x-2}{x^2+5}$, $[2;8]$.

14. Исследовать и построить графики функций:

а) $y = e^{2x - x^2}$; *б*) $y = \dfrac{x}{(x-1)^2}$.

15. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения: $X \in (-\infty;-1) \cup (-1;1) \cup (1;\infty)$.
2) Вертикальные асимптоты: $x = -1$, $x = 1$
3) Горизонтальные асимптоты: –
4) Наклонные асимптоты: $y = \dfrac{1}{2}x$.
5) Стационарные точки: –2½; 0; 2½.
6) Точки, где $(y' = \infty)$: –4.
7) Интервалы монотонности:
   а) возрастания: $(-\infty;-4), (-2\,{}^1\!/_2;-1), (-1;1), (2\,{}^1\!/_2;\infty)$;
   б) убывания: $(-4;-2\,{}^1\!/_2), (1;2\,{}^1\!/_2)$.
8) Интервалы выпуклости и вогнутости:
   а) выпуклости: $(-1;0), (4;\infty)$;
   б) вогнутости: $(-\infty;-4), (-4;-1), (0;1), (1;4)$.
9) Значение функции в некоторых точках:
   $y(-4) = 0$, $y(-2½) = -2$, $y(0) = 0$, $y(2½) = 0$, $y(4) = 1$.

Вариант 17

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

   1.1. $f(x)=1+x-x^2$, $x_0=1$;

   1.2. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3^{x^2}-4^x}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0,\end{cases}$ $x_0=0$.

2. Найти производную функций:

   2.1. $y=1-x^2+\ln(1-x)$;

   2.2. $y=3^x-\log_3 x+x^3$;

   2.3. $y=(1+2x)^2\cdot e^{\sqrt[3]{1-x}}$;

   2.4. $y=\dfrac{3x^2-3}{\sqrt{2-x^2}}$;

   2.5. $y=\sqrt[3]{3x^3-x}-\dfrac{1}{\sqrt{10-x^2+x^4}}$;

   2.6. $y=\sin^4(x-2x^2)$;

   2.7. $y=\ln(3^x-\sqrt{2x-\sqrt{2+x}})$;

   2.8. $y=\cos(arctg4x+\sqrt{tg\,x})$.

3. Найти производную степенно-показательной функции $y=(\sqrt{x})^{\frac{1}{\sin x}}$.

4. Найти производную неявной функции $y=y(x)$: $2x-3y=x\ln(y^2)$.

5. Найти производную параметрической функции: $\begin{cases}x=\ln t,\\ y=t-t^2.\end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке M_0 $(x_0; y_0)$:

   6.1. $y=x-x^3-2x^5$, $x_0=1$;

   6.2. $\begin{cases}x=3\cos t,\\ y=4\sin t,\end{cases}$ $M_0\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}};2\sqrt{2}\right)$.

7. Найти производную второго порядка $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для функций:

   7.1. $y=(x-1)^3\cdot\ln^2(1-x)$;

   7.2. $\begin{cases}x=\ln t,\\ y=t-t^2.\end{cases}$

8. Найти дифференциал функции $y=\sqrt{1+x+\sin x}$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y(0.01)$.

9. Найти дифференциал второго порядка функции $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ в точке $x_0=0$.

10. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

    а) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^{2x}-1}\right]$; *б*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^3}-1-x^3}{tg^6\dfrac{x}{2}}$; *в*) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

11. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0:

    а) $y=\ln(3-x)$, $x_0=2$; *б*) $y=(x^2-1)\cdot e^{x^2}$, $x_0=0$.

12. Найти экстремумы функций:

а) $y = 14x - x^4$; *б*) $y = x - arctgx$; *в*) $y = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

а) $y = x^3 - 3x + 1,\ \ [-1; \frac{1}{2}]$; *б*) $y = \frac{x+6}{x^2+13},\ \ [-5;5]$.

14. Исследовать и построить графики функций:

а) $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x}$; *б*) $y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$.

15. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения: $X \in (-\infty;-2) \cup (-2;\infty)$.
2) Вертикальные асимптоты: $x = 2$
3) Горизонтальные асимптоты: –
4) Наклонные асимптоты: $y = -\frac{1}{2}x - 1$.
5) Стационарные точки: –4; 0; 4.
6) Точки, где $(y' = \infty)$: –2.
7) Интервалы монотонности:
   а) возрастания: $(-4;-2), (2;4)$;
   б) убывания: $(-\infty;-4), (-2;2), (4;\infty)$.
8) Интервалы выпуклости и вогнутости:
   а) выпуклости: $(-\infty;-5), (0;2), (2;5)$;
   б) вогнутости: $(-5;-2), (-2;0), (5;\infty)$.
9) Значение функции в некоторых точках:
   $y(-5) = 0$, $y(-4) = -2$, $y(-2) = 4$, $y(0) = 0$, $y(4) = -1$, $y(5) = -2$.

Вариант 18

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

1.1. $f(x) = 2 + x + x^2$, $x_0 = 1$; 1.2. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3^x - 4^x}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ $x_0=0$.

2. Найти производную функций:

2.1. $y = 1 - 2x + \ln(1 - 2x)$; 2.2. $y = 4^x - \log_4 x + x^4$;

2.3. $y = (1 - 2x)^2 \cdot e^{\sqrt[3]{1+x}}$; 2.4. $y = \dfrac{3x^2 + 3}{\sqrt{2 + x^2}}$;

2.5. $y = \sqrt[3]{3x^3 + x} - \dfrac{1}{\sqrt{10 + x^2 - x^4}}$; 2.6. $y = \sin^3(x + 2x^2)$;

2.7. $y = \ln(3^x + \sqrt{2x + \sqrt{2 - x}})$; 2.8. $y = \cos(arctg 4x - \sqrt{ctg\, x})$.

3. Найти производную степенно-показательной функции $y = x^{\frac{1}{\cos x}}$.

4. Найти производную неявной функции $y=y(x)$: $x^2 - 3y = e^x \cdot y$.

5. Найти производную параметрической функции: $\begin{cases} x = t^2 - 3, \\ y = 3 + \ln 2t. \end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке M_0 $(x_0; y_0)$:

6.1. $y = arctgx - 2,\ x_0 = 0$; 6.2. $\begin{cases} x = 1 - t^4, \\ y = t^2 - t^3, \end{cases}$ $M_0(0;\,0)$.

7. Найти производную второго порядка $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для функций:

7.1. $y = x \cdot \ln^3 x$; 7.2. $\begin{cases} x = t^2 - 3, \\ y = 3 + \ln 2t. \end{cases}$

8. Найти дифференциал функции $y = \sqrt[4]{2x - \sin(\pi x/2)}$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y(1.02)$.

9. Найти дифференциал второго порядка функции $y = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$ в точке $x_0 = 0$.

10. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x \to 1} (x)^{\frac{m}{x^2 - 1}}$; *б*) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\cos x \cdot \ln(x - a)}{\ln(e^x - e^a)}$;

в) $\lim\limits_{x \to 0} \left[\dfrac{2}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{\ln(1 + x)} \right]$.

11. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0:

а) $y=\ln(3+x),\ x_0=-2$; *б*) $y=\dfrac{x+\ln(1-x)}{x}$, x_0=0.

12. Найти экстремумы функций:

а) $y=x^3-6x^2+9x$; *б*) $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+2x+1}$; *в*) $y=x\cdot\sqrt{1-x}$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

а) $y=x^5-\dfrac{5}{3}x^3+2,\ \ [0;2]$; *б*) $y=\dfrac{x-3}{x^2+16},\ \ [-5;5]$.

14. Исследовать и построить графики функций:

а) $y=x+\dfrac{1}{x}$; *б*) $y=x^3\cdot e^{-x}$.

15. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения: $X\in(-\infty;2)\cup(2;\infty)$.

2) Вертикальные асимптоты: $x = 2$

3) Горизонтальные асимптоты: $y=1\ (x\to+\infty), y=0\ (x\to-\infty)$

4) Наклонные асимптоты: –

5) Стационарные точки: –1; 1; 4.

6) Точки, где $(y'=\infty)$: 0.

7) Интервалы монотонности:

а) возрастания: $(-1;0),(1;2),(2;4)$;

б) убывания: $(-\infty;-1),(0;1),(4;\infty)$.

8) Интервалы выпуклости и вогнутости:

а) выпуклости: $(-\infty;-2),(2;5)$;

б) вогнутости: $(-2;0),(0;2),(5;\infty)$.

9) Значение функции в некоторых точках:

$y(-2)=-\frac{1}{2}$, $y(-1)=-1$, $y(0)=3$, $y(3)=1.5$, $y(4)=2$, $y(5)=1.5$.

Вариант 19

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

   1.1. $f(x) = x^2 - x$, $x_0 = -1$;

   1.2. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3^{x^2} - 4^{x^2}}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ $x_0 = 0$.

2. Найти производную функций:

   2.1. $y = x - x^3 + \ln(1 + 2x)$;

   2.2. $y = 2^x + \log_2 x - x^2$;

   2.3. $y = (1 + 2x^2) \cdot e^{\sqrt[4]{1-x}}$;

   2.4. $y = \dfrac{x^2 - x}{\sqrt{2 - x^3}}$;

   2.5. $y = \sqrt[3]{x^3 - 2x} - \dfrac{1}{\sqrt{10 + 3x^4}}$;

   2.6. $y = \cos^4(x - 2x^2)$;

   2.7. $y = \ln(5^x - \sqrt{2x + \sqrt{2 - 5x}})$;

   2.8. $y = \sin(arctg 4x + \sqrt{tg\, x})$.

3. Найти производную степенно-показательной функции $y = (\sqrt{1-x})^{\frac{1}{x^2}}$.

4. Найти производную неявной функции $y=y(x)$: $x(x + y) = e^{x-y}$.

5. Найти производную параметрической функции: $\begin{cases} x = \dfrac{2}{\sqrt{t}}, \\ y = \sqrt{t} - 2 \cdot t^{\frac{3}{2}}. \end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке M_0 (x_0; y_0):

   6.1. $y = arctg \dfrac{1}{x}$, $x_0 = 1$;

   6.2. $\begin{cases} x = t^3 + 1, \\ y = t^2 + t + 1, \end{cases}$ $M_0(2;\ 3)$.

7. Найти производную второго порядка y''_{xx} для функций:

   7.1. $y = x^3 \cdot \ln x$;

   7.2. $\begin{cases} x = \dfrac{2}{\sqrt{t}}, \\ y = \sqrt{t} - 2 \cdot t^{\frac{3}{2}}. \end{cases}$

8. Найти дифференциал функции $y = \sqrt{x^2 + 5}$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y(1.97)$.

9. Найти дифференциал второго порядка функции $y = \dfrac{x - 1}{x^2 + 1}$ в точке $x_0 = -1$.

10. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x - x^2\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$; *б*) $\lim\limits_{x\to 2a}\left(3-\frac{x}{a}\right)^{tg\frac{\pi x}{4a}}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[(\pi - 2arctgx)\cdot\ln x\right]$.

11. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0:

а) $y = e^{3-x},\ x_0 = 2$; *б*) $y = \frac{\ln(1-3x^3)}{x}$, $x_0=0$.

12. Найти экстремумы функций:

а) $y = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x$; *б*) $y = (x-5)\cdot e^x$;

в) $y = \frac{x^3}{(x-2)(x+3)}$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

а) $y = x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 2,\ \ [-2;0]$; *б*) $y = \frac{1+x^2}{1+x^4},\ \ [-0.1;4]$.

14. Исследовать и построить графики функций:

а) $y = e^{-x^2}$; *б*) $y = \frac{4x}{1+x^2}$.

15. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения: $X \in (-\infty;-1)\cup(-1;\infty)$.
2) Вертикальные асимптоты: $x=-1$
3) Горизонтальные асимптоты: –
4) Наклонные асимптоты: $y = x$.
5) Стационарные точки: –2; 0.
6) Точки, где $(y' = \infty)$: –3.
7) Интервалы монотонности:
   а) возрастания: $(-\infty;-3), (-2;-1), (1;\infty)$;
   б) убывания: $(-3;-2)$.
8) Интервалы выпуклости и вогнутости:
   а) выпуклости: $(-1;0)$;
   б) вогнутости: $(-\infty;-3), (-3;-1), (0;\infty)$.
9) Значение функции в некоторых точках:
   $y(-3) = -1$, $y(-2) = -3.5$, $y(0) = 1$.

Вариант 20

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

   1.1. $f(x) = x + x^2$, $x_0 = 2$;

   1.2. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3^{x^2} - 1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ $x_0 = 0$.

2. Найти производную функций:

   2.1. $y = (1+x)^2 + \ln(1+x)$;

   2.2. $y = 6^x - \log_3 x + x^6$;

   2.3. $y = (1-x)^3 \cdot e^{\sqrt[3]{1+2x}}$;

   2.4. $y = \dfrac{3x-1}{\sqrt{2-x}}$;

   2.5. $y = \sqrt[3]{x^3 - x} - \dfrac{1}{\sqrt{1 - 3x^2 + x^4}}$;

   2.6. $y = \sin^2(2x - x^2)$;

   2.7. $y = \ln(5^x + 3 \cdot \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}})$;

   2.8. $y = ctg(arctg 4x + \sqrt{\cos x})$.

3. Найти производную степенно-показательной функции $y = (\sqrt{1-x})^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$.

4. Найти производную неявной функции $y=y(x)$: $x \cdot y = e^{x+y}$.

5. Найти производную параметрической функции: $\begin{cases} x = \sin^2 t, \\ y = 1 - \sin^3 2t. \end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке M_0 $(x_0; y_0)$:

   6.1. $y = arctg\dfrac{2}{x}$, $x_0 = -2$;

   6.2. $\begin{cases} x = t^3 + 1, \\ y = t^2, \end{cases}$ $M_0(-7; 4)$.

7. Найти производную второго порядка $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$ для функций:

   7.1. $y = x \cdot e^{x^3}$;

   7.2. $\begin{cases} x = \sin^2 t, \\ y = 1 - \sin^3 2t. \end{cases}$

8. Найти дифференциал функции $y = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y(1.58)$.

9. Найти дифференциал второго порядка функции $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ в точке $x_0 = -1$.

10. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

    а) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln(1+e^x)}{1 - xe^x}$; *б*) $\lim\limits_{x \to 0} \left(ctgx\right)^{\frac{1}{\ln x}}$; *в*) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left[tgx - \sec x\right]$.

11. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0:

а) $y = e^{x-4}$, $x_0 = 1$; *б*) $y = \dfrac{x - \ln(1+x)}{x}$, x_0=0.

12. Найти экстремумы функций:

а) $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$; *б*) $y = \dfrac{4x}{x^2 + 4}$; *в*) $y = x \cdot \sqrt{1 - x^2}$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

а) $y = 3x^4 - 16x^3 + 2$, $[0;4]$; *б*) $y = \dfrac{x-3}{x^2+16}$, $[3;10]$.

14. Исследовать и построить графики функций:

а) $y = \dfrac{4x}{\left(1 + x^2\right)^2}$; *б*) $y = \dfrac{2^x}{x}$.

15. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения: $X \in (-\infty;0) \cup (0;\infty)$.
2) Вертикальные асимптоты: $x = 0$
3) Горизонтальные асимптоты: –
4) Наклонные асимптоты: $y = -\dfrac{1}{2}x$.
5) Стационарные точки: –2; –1; 1.
6) Точки, где $(y' = \infty)$: –3; 2.
7) Интервалы монотонности:
   а) возрастания: $(-3;-2), (-1;0), (1;2)$;
   б) убывания:
   $(-\infty;-3), (-2;-1), (0;1), (2;\infty)$.
8) Интервалы выпуклости и вогнутости:
   а) выпуклости: $(-\infty;-3), (-3;-{}^3\!/_2)$;
   б) вогнутости: $(-{}^3\!/_2;0), (0;2), (2;\infty)$.
9) Значение функции в некоторых точках:
   $y(-3)= 0$, $y(-2)= 3$, $y(-1.5)= 2$, $y(-1)= 1.5$, $y(1)= -2$, $y(2)= 0$.