

Вариант 11

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

1.1. $f(x) = (1+x)^2, x_0 = 4;$ 1.2. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x \cdot \sin \frac{7}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases} x_0 = 0.$

2. Найти производную функций:

2.1. $y = x^4 \cdot e^{x+1};$ 2.2. $y = 3^x - \sqrt{1+x} - x^3;$

2.3. $y = \left(\frac{1}{\sqrt{4-x}} - \sqrt{\ln x + 4} \right) \cdot 5^{\sin^2 3x};$ 2.4. $y = \frac{2-3x^3+x^4}{\sqrt{1-x}};$

2.5. $y = \sqrt[3]{3+x-2x^3} - \frac{1}{\cos(1-x)-4x^2};$ 2.6. $y = \operatorname{ctg}^5(1-x^4);$

2.7. $y = \log_5(\sqrt{3} - \sin 4x + \cos^4 x);$ 2.8. $y = \operatorname{arctg} \sqrt{1-e^x}.$

3. Найти производную степенно-показательной функции $y = (\operatorname{tg} x)^{\sqrt{x}}.$

4. Найти производную неявной функции $y=y(x): \frac{y}{x} = \sin(x \cdot y).$

5. Найти производную параметрической функции: $\begin{cases} x = t^2 - 2t, \\ y = \sin t - t. \end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке $M_0(x_0; y_0):$

6.1. $y = 1 + \ln(x-1) - x^2, x_0 = 2;$ 6.2. $\begin{cases} x = \frac{1+t}{t^2}, \\ y = \frac{3}{2t^2} + \frac{2}{t}, \end{cases} M_0\left(\frac{3}{4}; \frac{11}{8}\right).$

7. Найти производную второго порядка $\frac{d^2 y}{dx^2}$ для функций:

7.1. $y = (1-x)^2 \cdot \sin(x^2 - 1);$ 7.2. $\begin{cases} x = t^2 - 2t, \\ y = \sin t - t. \end{cases}$

8. Найти дифференциал функции $y = x^{21}$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y(1.998).$

9. Найти дифференциал второго порядка функции $y = (1-x)^2 \cdot \sin(x^2 - 1)$ в точке $x_0 = -1.$

10. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталья:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right);$ б) $\lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)};$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - (e^x + e^{-x}) \cdot \cos x}{x^4}.$

11. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0 :

a) $y = \cos^2 x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$;

б) $y = \frac{1}{\sqrt[4]{16+x^4}}$, $x_0=0$.

12. Найти экстремумы функций:

a) $y = x - \ln(1+x^2)$;

б) $y = \frac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}$;

в) $y = x - \sqrt[3]{x^2}$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

a) $y = \arctg\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$, $[0;1]$;

б) $y = \frac{x-3}{x^2+7}$, $[2;8]$.

14. Исследовать и построить графики функций:

a) $y = x^3 \ln x$;

б) $y = \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2$.

15. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения: $X \in (-\infty; \infty)$.

2) Вертикальные асимптоты: —

3) Горизонтальные асимптоты: —

4) Наклонные асимптоты: $y = -0.5x$. —

5) Стационарные точки: 0; 4.

6) Точки, где $(y' = \infty)$: -3; 3.

7) Интервалы монотонности:

а) возрастания: $(-3;0), (3;4)$;

б) убывания: $(-\infty;-3), (0;3), (4;\infty)$.

8) Интервалы выпуклости и вогнутости:

а) выпуклости: $(-\infty;-3), (-3;3), (3;5)$;

б) вогнутости: $(5;\infty)$.

9) Значение функции в некоторых точках:

$y(-4)=0, y(-3)=-4, y(-2)=0, y(0)=4, y(2)=0, y(3)=-4, y(4)=0, y(5)=2$.

Вариант 12

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

$$1.1. f(x) = x^2, x_0 = -3; \quad 1.2. f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 + \ln(1 + x^2)} \cos \frac{1}{x} - 1, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases} x_0 = 0.$$

2. Найти производную функций:

$$2.1. y = (1 - x)^2 \cdot 2^{x+1};$$

$$2.2. y = \ln x + \frac{1}{x} - \cos x;$$

$$2.3. y = \left(\frac{1}{9 - x^2} - \sqrt{e^x + x^3} \right) \cdot \operatorname{tg}^2 3x;$$

$$2.4. y = \frac{2 + 3x^2 + 5x^4}{\sqrt{1 + x}};$$

$$2.5. y = \sqrt[3]{3 - 2x^3} - \frac{1}{\sin(1 - x) - 4x^2};$$

$$2.6. y = \operatorname{ctg}^4(1 + x^5);$$

$$2.7. y = \log_2(\sqrt{3} - \cos 4x + \sin^4 x);$$

$$2.8. y = \operatorname{arcctg} \sqrt{1 - e^x}.$$

3. Найти производную степенно-показательной функции $y = (\sin x)^{\sqrt{1-x}}$.

4. Найти производную неявной функции $y=y(x)$: $\frac{y}{x} = x \sin y$.

5. Найти производную параметрической функции: $\begin{cases} x = \frac{1}{t^2 - t}, \\ y = t + t^2. \end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке $M_0(x_0; y_0)$:

$$6.1. y = 1 + \operatorname{tg}^2 x, x_0 = \pi;$$

$$6.2. \begin{cases} x = 1 + \sin t, \\ y = 1 - \cos 2t, \end{cases} M_0\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

7. Найти производную второго порядка $\frac{d^2 y}{dx^2}$ для функций:

$$7.1. y = (x - 1)^2 \cdot \cos(x^2 - 1);$$

$$7.2. \begin{cases} x = \frac{1}{t^2 + t}, \\ y = t + t^2. \end{cases}$$

8. Найти дифференциал функции $y = x^6$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y(2.01)$.

9. Найти дифференциал второго порядка функции $y = (x - 1)^2 \cdot \cos(x^2 - 1)$ в точке $x_0 = -1$.

10. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} (e^x - x^2); \quad б) \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)^{\frac{a}{\ln 2(x-1)}}; \quad в) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi - \operatorname{arctg} x}{\frac{3}{e^x - 1}}.$$

11. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0 :

a) $y = \sin^2 x, x_0 = \frac{\pi}{4}$;

б) $y = x \cdot \ln(1 - 2x^2), x_0 = 0$.

12. Найти экстремумы функций:

a) $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$;

б) $y = \frac{x}{1+x^2}$;

в) $y = x \cdot e^{-x}$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

a) $y = x^4 + 4x, [-2;2]$;

б) $y = \sqrt{100 - x^2}, [-6;8]$.

14. Исследовать и построить графики функций:

a) $y = \frac{x^3 + 16}{x}$;

б) $y = x^2 - 2 \ln x$.

15. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения:

$$X \in (-\infty; 3) \cup (3; \infty).$$

2) Вертикальные асимптоты:

$$x = 3.$$

3) Горизонтальные асимптоты:

$$y = 0.$$

4) Наклонные асимптоты:

$$- \quad -$$

5) Стационарные точки:

$$-2; 2; 5.$$

6) Точки, где $(y' = \infty)$:

$$0.$$

7) Интервалы монотонности:

a) возрастания:

$$(-\infty; -2), (0; 2), (2; 3), (3; 5);$$

б) убывания:

$$(-2; 0), (5; \infty).$$

8) Интервалы выпуклости и вогнутости:

a) выпуклости:

$$(-3; 0), (0; 2), (3; 6);$$

б) вогнутости:

$$(-\infty; -3), (2; 3), (6; \infty).$$

9) Значение функции в некоторых точках:

$$y(-3)=1, y(-2)=2, y(0)=-4, y(2)=1, y(5)=2, y(6)=1.$$

Вариант 13

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

1.1. $f(x) = 2 + x, x_0 = 10;$ 1.2. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x^2}{x} - 1, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases} x_0 = 0.$

2. Найти производную функций:

2.1. $y = x^4 \cdot \ln(1 - x);$ 2.2. $y = 2^x - ctgx + x^2;$
2.3. $y = (1 - x)^3 \cdot e^{\sqrt[5]{x-1}};$ 2.4. $y = \frac{3x^4 + 2x^3 - 1}{\sqrt{1 - x^3}};$
2.5. $y = \sqrt{3x^2 - 1} - \frac{1}{\sqrt{x^2 - x - 1}};$ 2.6. $y = tg^2(1 - x^3);$
2.7. $y = \ln(1 - \sqrt{5^x - \sqrt{x}});$ 2.8. $y = arctg(tg^2 x + \sqrt{1 - \sin x}).$

3. Найти производную степенно-показательной функции $y = (\sin x)^{\frac{1}{\sqrt{1-x}}}$

4. Найти производную неявной функции $y=y(x): \frac{y}{x} = y \sin x.$

5. Найти производную параметрической функции: $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = 1 - tg t. \end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке $M_0(x_0; y_0):$

6.1. $y = 10 + x(3 - 2x^3), x_0 = -1;$ 6.2. $\begin{cases} x = \frac{1+t}{t}, \\ y = \frac{t-1}{t}, \end{cases} M_0(0; 2).$

7. Найти производную второго порядка $\frac{d^2 y}{dx^2}$ для функций:

7.1. $y = (x - 1)^2 \cdot \cos(1 - x^2);$ 7.2. $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = 1 - tg t. \end{cases}$

8. Найти дифференциал функции $y = \sqrt[3]{x^2}$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y(1.03).$

9. Найти дифференциал второго порядка функции $y = x^2 \cdot \cos(1 - x^2)$ в точке $x_0 = -1.$

10. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталья:

a) $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{ctg(x - \alpha)}{\ln(x - \alpha)};$ б) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right);$ в) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (tgx)^{tg 2x}.$

11. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки $x_0:$

$$a) y = \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}, x_0=1;$$

$$б) y = x \cdot \sin 25x^2, x_0=0.$$

12. Найти экстремумы функций:

$$a) y = 2x + 3 \cdot \sqrt[3]{x^2};$$

$$б) y = \frac{(x-2)(8-x)}{x^2};$$

$$в) y = x \cdot \ln x.$$

13. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

$$a) y = 81x - x^4, [-1;4];$$

$$б) y = \frac{4-x^2}{4+x^2}, [-1;3].$$

14. Исследовать и построить графики функций:

$$a) y = x^{\frac{2}{3}} \cdot e^{-x};$$

$$б) y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}.$$

15. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения:

$$X \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty).$$

2) Вертикальные асимптоты:

$$x = -1, x = 1.$$

3) Горизонтальные асимптоты:

—

4) Наклонные асимптоты:

$$y = x \quad (x \rightarrow \pm\infty). \quad -$$

5) Стационарные точки:

$$-2; 0; 2.$$

6) Точки, где $(y' = \infty)$:

$$-3, 3.$$

7) Интервалы монотонности:

а) возрастания:

$$(-\infty; -3), (-2; -1), (1; 2), (3; \infty);$$

б) убывания:

$$(-3; -2), (-1; 1), (2; 3).$$

8) Интервалы выпуклости и вогнутости:

а) выпуклости:

$$(0; 1), (1; 3), (3; \infty);$$

б) вогнутости:

$$(-\infty; -3), (-3; -1), (-1; 0).$$

9) Значение функции в некоторых точках:

$$y(-3) = -1, y(-2) = -3, y(0) = 0, y(2) = 3, y(3) = 1.$$

Вариант 14

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

1.1. $f(x) = (2 + x)^2$, $x_0 = 8$; 1.2. $f(x) = \begin{cases} 10 \frac{\arcsin x^2}{x} - 1, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases} x_0 = 0.$

2. Найти производную функций:

2.1. $y = x \cdot \ln(1 - x^2)$; 2.2. $y = 7^x - \arccos x + x^7$;

2.3. $y = (1 - x^3) \cdot e^{\sqrt{x-1}}$; 2.4. $y = \frac{x - 2x^3 + 3}{\sqrt{1 - x^3}}$;

2.5. $y = \sqrt[3]{1 - 3x^2} - \frac{1}{\sqrt{1 - x^2} - x}$; 2.6. $y = \sin^3(1 - x^2)$;

2.7. $y = \ln(x^2 + \sqrt{5^x - \sqrt{x}})$; 2.8. $y = \arctg(\cos^2 x + \sqrt{1 - \operatorname{tg} x})$.

3. Найти производную степенно-показательной функции $y = (\sin \sqrt{x})^x$.

4. Найти производную неявной функции $y=y(x)$: $\frac{x}{y} = x \sin y$.

5. Найти производную параметрической функции: $\begin{cases} x = \operatorname{tg} 2t, \\ y = 1 - \sin 2t. \end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке $M_0(x_0; y_0)$:

6.1. $y = x + \sin \frac{x}{2} - 2 \cos \frac{x}{4}$, $x_0 = 2\pi$; 6.2. $\begin{cases} x = 1 - t^2, \\ y = t - t^3, \end{cases} M_0(-3; -6).$

7. Найти производную второго порядка $\frac{d^2 y}{dx^2}$ для функций:

7.1. $y = x^3 \cdot \ln^2 x$; 7.2. $\begin{cases} x = \operatorname{tg} 2t, \\ y = 1 - \sin 2t. \end{cases}$

8. Найти дифференциал функции $y = \sqrt{4x - 1}$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y(2.56)$.

9. Найти дифференциал второго порядка функции $y = x^3 \cdot \ln^2(x + 1)$ в точке $x_0 = 0$.

10. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталья:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt{\frac{1}{x(x-1)}} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right)$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x}$;

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(e^{2x} + x \right)^{\frac{1}{x}}$.

11. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0 :

$$a) y = \sqrt[3]{x}, x_0 = -1;$$

$$б) y = x^3 \cdot e^{-2x}, x_0 = 0.$$

12. Найти экстремумы функций:

$$a) y = x^2(x-12)^2;$$

$$б) y = \frac{16}{x(4-x^2)};$$

$$в) y = \sqrt{x} \cdot \ln x.$$

13. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

$$a) y = x^3 - 3x + 1, [0;2];$$

$$б) y = \frac{x^2}{x^2 - 4}, (-2;3).$$

14. Исследовать и построить графики функций:

$$a) y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2;$$

$$б) y = \ln(2x^2 + 3).$$

15. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения:

$$X \in (-\infty; -1) \cup (-1; \infty).$$

2) Вертикальные асимптоты:

$$x = -1.$$

3) Горизонтальные асимптоты:

—

4) Наклонные асимптоты:

$$y = -\frac{1}{2}x + 1. \quad -$$

5) Стационарные точки:

$$-2; 0; 2.$$

6) Точки, где $(y' = \infty)$:

$$1.$$

7) Интервалы монотонности:

а) возрастания:

$$(-2; -1), (1; 2);$$

б) убывания:

$$(-\infty; -2), (-1; 1), (2; \infty).$$

8) Интервалы выпуклости и вогнутости:

а) выпуклости:

$$(-\infty; -3), (0; 1), (1; 3);$$

б) вогнутости:

$$(-3; -1), (-1; 0), (3; \infty).$$

9) Значение функции в некоторых точках:

$$y(-3) = 1, y(-2) = 0, y(0) = 0, y(1) = -2, y(2) = 1, y(3) = 0.$$

Вариант 15

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

1.1. $f(x) = x^3, x_0 = -2;$ 1.2. $f(x) = \begin{cases} \frac{4 \operatorname{arctg}^2 x}{x} - 1, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases} x_0 = 0.$

2. Найти производную функций:

2.1. $y = x + 1 + \ln(1 - x);$ 2.2. $y = 2^{x+1} - \operatorname{tg} x + x^3;$
2.3. $y = (1 - x^2)^3 \cdot e^{\sqrt[5]{x-1}};$ 2.4. $y = \frac{3 + x^4 - 2x^3}{\sqrt{1 - x^3}};$
2.5. $y = \sqrt[3]{3x^2 - x} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + x - 1}};$ 2.6. $y = \operatorname{ctg}^2(1 - 2x^3);$
2.7. $y = \ln(5^x - \sqrt{1 - \sqrt{x}});$ 2.8. $y = \operatorname{arctg}(\sin^4 x + \sqrt{1 - \cos x}).$

3. Найти производную степенно-показательной функции $y = (\sin \sqrt{x})^{\sqrt{x}}.$

4. Найти производную неявной функции $y=y(x): \frac{x}{y} = y \sin x.$

5. Найти производную параметрической функции: $\begin{cases} x = t + e^t, \\ y = t - e^{-t}. \end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке $M_0(x_0; y_0):$

6.1. $y = 1 + x^3 + x^5, x_0 = -1;$ 6.2. $\begin{cases} x = t(1 - \sin t), \\ y = t \cos t, \end{cases} M_0(0; 0).$

7. Найти производную второго порядка $\frac{d^2 y}{dx^2}$ для функций:

7.1. $y = (1 - x)^3 \cdot \ln^2(x - 1);$ 7.2. $\begin{cases} x = t + e^t, \\ y = t - e^{-t}. \end{cases}$

8. Найти дифференциал функции $y = x^7$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y(2.002).$

9. Найти дифференциал второго порядка функции $y = x \cdot \ln^2(x + 1)$ в точке $x_0 = 1.$

10. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталья:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right);$ б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \sqrt{\cos x}}{x^2};$ в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + e^x \right)^{\operatorname{tg} \frac{2}{x}}.$

11. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки $x_0:$

a) $y = \sqrt[4]{2 - x}, x_0 = 1;$ б) $y = x^4 + \sin x^2, x_0 = 0.$

12. Найти экстремумы функций:

$$a) y = x^3 + x^2 + 3; \quad б) y = \frac{x^2 + 6x + 13}{x - 3}; \quad в) y = x^2 \cdot e^{-x}.$$

13. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

$$a) y = x^3(8 - x), [0;7]; \quad б) y = \frac{3 - x}{x^2 + 7}, [-3;2].$$

14. Исследовать и построить графики функций:

$$a) y = \frac{x^3 - 1}{4x^2}; \quad б) y = e^{3x - x^2}.$$

15. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

- 1) Область определения: $X \in (-\infty; \infty)$.
- 2) Вертикальные асимптоты: $-$
- 3) Горизонтальные асимптоты: $y = -1$ ($x \rightarrow +\infty$), $y = 0$ ($x \rightarrow -\infty$).
- 4) Наклонные асимптоты: $-$ $-$
- 5) Стационарные точки: $-4; -2; 0; 2; 4$.
- 6) Точки, где $(y' = \infty)$: $-1; 1$.
- 7) Интервалы монотонности:
 - a) возрастания: $(-\infty; -4), (-2; -1), (0; 1), (2; 4)$;
 - б) убывания: $(-4; -2), (-1; 0), (1; 2), (4; \infty)$.
- 8) Интервалы выпуклости и вогнутости:
 - a) выпуклости: $(-5; -3), (3; 5)$;
 - б) вогнутости: $(-\infty; -5), (-3; -1), (-1; 1), (1; 3)$.
- 9) Значение функции в некоторых точках: $y(-5) = \frac{1}{2}$, $y(-4) = 1$, $y(-3) = 0$, $y(-2) = -1$, $y(-1) = 2$, $y(0) = 1$, $y(2) = -2$, $y(3) = -1$, $y(4) = 0$, $y(5) = -\frac{1}{2}$.