

### Вариант 1

1. Исходя из определения производной, найти  $f'(x_0)$  для функций:

1.1.  $f(x) = (2 - x)^2, x_0=1;$       1.2.  $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg}\left(x^3 + x^2 \sin \frac{2}{x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases} x_0=0.$

2. Найти производную функций:

2.1.  $y = x \cdot \ln(x+1);$       2.2.  $y = 1 - \sin x + (1 - x^2)^3;$   
2.3.  $y = x^2 \cdot e^{\sqrt{x^2+x+1}};$       2.4.  $y = \frac{3x^5 - 2x^4 + 4}{\sqrt{x^2 - 1}};$   
2.5.  $y = 2\sqrt[3]{x+3} - \frac{3}{\sqrt{x^2+x+1}};$       2.6.  $y = \cos^3(1 - 5x^2);$   
2.7.  $y = \ln(2x + \sqrt{2^x - \sqrt{x+1}});$       2.8.  $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x + \sqrt{1 - \sin x}).$

3. Найти производную степенно-показательной функции  $y = (\sin x)^{x^2}.$

4. Найти производную неявной функции  $y=y(x): \operatorname{tg}(xy) = e^{x^2+y^3}.$

5. Найти производную параметрической функции:  $\begin{cases} x = t^3 - 3t, \\ y = \frac{1}{2}t^2 - t. \end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой  $y=y(x)$  в точке  $x_0$  и составить уравнение касательной и нормали в точке  $M_0(x_0, y_0):$

6.1.  $y = \frac{4x - x^2}{4}, x_0 = 2;$       6.2.  $\begin{cases} x = a \sin^3 t, \\ y = a \cos^3 t, \end{cases} M_0\left(\frac{a}{8}; a \frac{3\sqrt{3}}{8}\right).$

7. Найти производную второго порядка  $\frac{d^2y}{dx^2}$  для функций:

7.1.  $y = x^2 \cdot e^{\sqrt{x^2+x+1}};$       7.2.  $\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin^2 t. \end{cases}$

8. Найти дифференциал функции  $y = \sqrt[3]{x}$  и вычислить приближенно с помощью дифференциала  $y = \sqrt[3]{7.76}.$

9. Найти дифференциал второго порядка функции  $y = \ln(1 - \cos 2x)$  в точке  $x_0 = \pi/2.$

10. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталья:

а)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right];$       б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi/x}{\operatorname{ctg}(\pi x/2)};$       в)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}.$

11. Записать формулу Тейлора для функции  $y=f(x)$  в окрестности точки  $x_0:$

а)  $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, x_0=1;$       б)  $y = x \cdot \sin x^2, x_0=0.$

12. Найти экстремумы функций:

$$a) y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + 1; \quad б) y = \frac{(x-1)^2}{x^2 + 1}; \quad в) y = x - 2 \ln x.$$

13. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

$$a) y = x + \sqrt{x}, \quad [0;4]; \quad б) y = \frac{x+3}{x^2+7}, \quad [-3;7].$$

14. Исследовать и построить графики функций:

$$a) y = \frac{(x+1)^2}{x-2} \quad б) y = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

15. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения:  $X \in (-\infty;4) \cup (4;\infty).$

2) Вертикальные асимптоты:  $x = 4.$

3) Горизонтальные асимптоты:  $y = 0 \quad (x \rightarrow +\infty).$

4) Наклонные асимптоты:  $y = x \quad (x \rightarrow -\infty).$

5) Стационарные точки:  $1; 2.$

6) Точки, где  $(y' = \infty)$ :  $-2; 0.$

7) Интервалы монотонности:

а) возрастания:  $(-\infty;-2), (-2;-1), (0;2), (2;4)$

б) убывания:  $(-1;0), (4;\infty).$

8) Интервалы выпуклости и вогнутости:

а) выпуклости:  $(-2;0), (0;2)$

б) вогнутости:  $(-\infty;-2), (2;4), (4;\infty).$

9) Значение функции в некоторых точках:  
 $y(-2)=0, y(-1)=2, y(0)=0, y(2)=3, y(5)=2.$

## Вариант 2

1. Исходя из определения производной, найти  $f'(x_0)$  для функций:

$$1.1. f(x) = (2+x)^2, x_0 = -1; \quad 1.2. f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(x \cos \frac{1}{3x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad x_0 = 0.$$

2. Найти производную функций:

$$2.1. y = (x+1) \cdot \ln x;$$

$$2.2. y = 2 - \cos x + (1-x^2)^4;$$

$$2.3. y = x^3 \cdot e^{\sqrt{x^2-x+1}};$$

$$2.4. y = \frac{2x^3 - 2x + 1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$2.5. y = \sqrt[4]{x+3} - \frac{3}{(x^2+x+1)^2};$$

$$2.6. y = \cos^2(1-5x^3);$$

$$2.7. y = \ln(x - \sqrt{3^x - \sqrt{x+1}});$$

$$2.8. y = \operatorname{arcctg}(tg^3 x + \sqrt{1+\sin x}).$$

3. Найти производную степенно-показательной функции  $y = (\cos x)^{x^2}$ .

4. Найти производную неявной функции  $y=y(x)$ :  $\operatorname{ctg}(xy) = e^{x^2+y}$ .

5. Найти производную параметрической функции: 
$$\begin{cases} x = t^2 - 2t, \\ y = \frac{1}{3}t^3 - t. \end{cases}$$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой  $y=y(x)$  в точке  $x_0$  и составить уравнение касательной и нормали в точке  $M_0(x_0; y_0)$ :

$$6.1. y = 1 + x - x^2, x_0 = 2;$$

$$6.2. \begin{cases} x = \sin^2 t, \\ y = \cos^2 t, \end{cases} \quad M_0\left(\frac{1}{4}; \frac{3\sqrt{3}}{4}\right).$$

7. Найти производную второго порядка  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  для функций:

$$7.1. y = x^2 \cdot e^{x^2+1};$$

$$7.2. \begin{cases} x = 2 \cos^2 t, \\ y = 3 \sin t. \end{cases}$$

8. Найти дифференциал функции  $y = \sqrt[4]{x}$  и вычислить приближенно с помощью дифференциала  $y = \sqrt[4]{16.06}$ .

9. Найти дифференциал второго порядка функции  $y = \ln(1 - \sin 2x)$  в точке  $x_0 = \pi/8$ .

10. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталья:

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ x^n \cdot \sin \frac{a}{x} \right];$$

б)

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^{\cos(\pi x/2)};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt[3]{(a+x)(b+x)(c+x)} - x \right).$$

11. Записать формулу Тейлора для функции  $y=f(x)$  в окрестности точки  $x_0$ :

$$a) y = \cos x, x_0 = \frac{\pi}{4}; \quad б) y = x \cdot e^{-6x^2}, x_0 = 0.$$

12. Найти экстремумы функций:

$$a) y = \frac{2}{3}x^2 \cdot \sqrt[3]{6x-7}; \quad б) y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x-1}; \quad в) y = \ln x + \frac{1}{x}.$$

13. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

$$a) y = x^4 - 2x^2 + 3, [-3; 2]; \quad б) y = \frac{x-5}{x^2+11}, [-3; 7].$$

14. Исследовать и построить графики функций:

$$a) y = x + \ln(x^2 - 4); \quad б) y = x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}}.$$

15. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

- 1) Область определения:  $X \in (-2; +\infty)$ .
- 2) Вертикальные асимптоты:  $x = -2$ .
- 3) Горизонтальные асимптоты:  $y = 2 (x \rightarrow +\infty)$ .
- 4) Наклонные асимптоты: —
- 5) Стационарные точки:  $-1; 1$ .
- 6) Точки, где  $(y' = \infty)$ :  $0; 2$ .
- 7) Интервалы монотонности:
  - a) возрастания:  $(-1; 0), (1; 2), (2; \infty)$
  - б) убывания:  $(-2; -1), (0; 1)$ .
- 8) Интервалы выпуклости и вогнутости:
  - a) выпуклости:  $(2; \infty)$
  - б) вогнутости:  $(-2; 0), (0; 2)$ .
- 9) Значение функции в некоторых точках:  
 $y(-1) = -2, y(0) = 0, y(1) = -2, y(2) = 0$ .

### Вариант 3

1. Исходя из определения производной, найти  $f'(x_0)$  для функций:

1.1.  $f(x) = (1+x)^3, x_0=1;$       1.2.  $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(x^2 \cos \frac{1}{3x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases} x_0=0.$

2. Найти производную функций:

2.1.  $y = x^2 \cdot \ln x;$

2.2.  $y = 2 - \cos x + x^2;$

2.3.  $y = x^3 \cdot e^{\sqrt[3]{x^2-x+1}};$

2.4.  $y = \frac{x^3 + 2x^2 - 11}{\sqrt{1-x^3}};$

2.5.  $y = \sqrt[4]{3x-1} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^2+x+1}};$

2.6.  $y = \operatorname{tg}^2(1+5x^3);$

2.7.  $y = \log_3(x - \sqrt{3^x - \sqrt{x}});$

2.8.  $y = \arcsin(\operatorname{tg}^2 x + \sqrt{1 - \sin x}).$

3. Найти производную степенно-показательной функции  $y = (\sin(1+x))^{x^2}.$

4. Найти производную неявной функции  $y=y(x): \operatorname{tg}(x+y) = e^{x^2+y}.$

5. Найти производную параметрической функции:  $\begin{cases} x = \frac{1}{t}, \\ y = \frac{1}{3}t^3 - t. \end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой  $y=y(x)$  в точке  $x_0$  и составить уравнение касательной и нормали в точке  $M_0(x_0; y_0):$

6.1.  $y = 1 + x^3 - 2x^5, x_0 = -1;$

6.2.  $\begin{cases} x = 2 \sin^3 t, \\ y = 2 \cos^3 t, \end{cases} M_0\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}; \frac{1}{4}\right).$

7. Найти производную второго порядка  $y''_{xx}$  для функций:

7.1.  $y = x \cdot e^{x^2-1};$

7.2.  $\begin{cases} x = \frac{1}{t}, \\ y = \frac{1}{3}t^3 - t. \end{cases}$

8. Найти дифференциал функции  $y = \frac{x + \sqrt{5-x^2}}{2}$  и вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции  $y(0.98).$

9. Найти дифференциал второго порядка функции  $y = x \cdot e^{x^2-1};$  в точке  $x_0=1.$

10. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталья:

а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} [x^n \cdot e^{-x}];$       б)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{3}{4+\ln x}};$       в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \operatorname{ctgx} - \frac{1}{x} \right).$

11. Записать формулу Тейлора для функции  $y=f(x)$  в окрестности точки  $x_0:$

$$a) y = \sin x, x_0 = \frac{\pi}{4}; \quad б) y = \frac{\ln(1-3x)}{x}, x_0=0.$$

12. Найти экстремумы функций:

$$a) y = x \cdot \sqrt{2-x^2}; \quad б) y = \frac{1+\ln x}{x}; \quad в) y = (x-1)^4.$$

13. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

$$a) y = x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 2, \left[-\frac{1}{2}; 3\right]; \quad б) y = \frac{x-4}{x^2+9}, [-4; 6].$$

14. Исследовать и построить графики функций:

$$a) y = \left(\frac{x-1}{x}\right)^2 \quad б) y = x^3 \cdot e^x.$$

15. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

- 1) Область определения:  $X \in (-\infty; 2) \cup (2; \infty)$ .
- 2) Вертикальные асимптоты:  $x = 2$ .
- 3) Горизонтальные асимптоты:  $y = 3$  ( $x \rightarrow +\infty$ ),  $y = 0$  ( $x \rightarrow -\infty$ ).
- 4) Наклонные асимптоты: —
- 5) Стационарные точки:  $-2; 1; 3$ .
- 6) Точки, где ( $y' = \infty$ ):  $0$ .
- 7) Интервалы монотонности:
  - a) возрастания:  $(-2; 0), (3; \infty)$
  - б) убывания:  $(-\infty; -2), (0; 1), (1; 2), (2; 3)$ .
- 8) Интервалы выпуклости и вогнутости:
  - a) выпуклости:  $(-\infty; -3), (1; 2), (4; \infty)$
  - б) вогнутости:  $(-3; 0), (0; 1), (2; 4)$ .
- 9) Значение функции в некоторых точках:  
 $y(-3) = -1, y(-2) = -2, y(0) = 3, y(1) = 1, y(3) = 2, y(4) = 2,5$ .

### Вариант 4

1. Исходя из определения производной, найти  $f'(x_0)$  для функций:

$$1.1. f(x) = (1-x)^3, x_0 = -1; \quad 1.2. f(x) = \begin{cases} \arcsin\left(x^2 \cos \frac{1}{3x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad x_0 = 0.$$

2. Найти производную функций:

$$2.1. y = (1-x^2) \cdot \ln x;$$

$$2.2. y = 2x^2 - \operatorname{tg} x + 2;$$

$$2.3. y = x \cdot e^{\sqrt[5]{x-x^2+1}};$$

$$2.4. y = \frac{\sin(2x^2 - 11)}{\sqrt{x^3 - 1}};$$

$$2.5. y = \sqrt[3]{x-3} - \frac{1}{\sqrt{x^3 + x + 1}};$$

$$2.6. y = \operatorname{ctg}^2(1 - 5x^3);$$

$$2.7. y = \log_2(3x - \sqrt{4^x - \sqrt{2x}});$$

$$2.8. y = \arccos(\ln x + \sqrt{1 - e^x}).$$

3. Найти производную степенно-показательной функции  $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ .

4. Найти производную неявной функции  $y=y(x)$ :  $\frac{x}{y} = 2^{x^2+y}$ .

5. Найти производную параметрической функции:  $\begin{cases} x = t^2 - 2t, \\ y = \frac{1}{t}. \end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой  $y=y(x)$  в точке  $x_0$  и составить уравнение касательной и нормали в точке  $M_0(x_0; y_0)$ :

$$6.1. y = 2x^3 - x^2, x_0 = -1;$$

$$6.2. \begin{cases} x = \sqrt{3} \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \quad M_0\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

7. Найти производную второго порядка  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  для функций:

$$7.1. y = (x^2 - 1) \cdot e^{x^2 - 1};$$

$$7.2. \begin{cases} x = t^2 - 2t, \\ y = \frac{1}{t}. \end{cases}$$

8. Найти дифференциал функции  $y = \sqrt[3]{x^3 + 7x}$  и вычислить приближенно с помощью дифференциала  $y = \sqrt[3]{1.012}$ .

9. Найти дифференциал второго порядка функции  $y = (x^2 - 1) \cdot e^{x^2 - 1}$  в точке  $x_0 = -1$ .

10. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} [\ln x \cdot \ln(x-1)];$$

$$б) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}.$$

11. Записать формулу Тейлора для функции  $y=f(x)$  в окрестности точки  $x_0$ :

a)  $y = \ln x, x_0 = e;$

б)  $y = \frac{1}{\sqrt[5]{1+x^4}}, x_0=0.$

12. Найти экстремумы функций:

a)  $y = (1+x) \cdot e^x;$

б)  $y = \frac{4\sqrt{x}}{x+2};$

в)  $y = 2x^3 - 3x^2.$

13. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

a)  $y = 3x^4 - 16x^3 + 2, [-3;1];$

б)  $y = \frac{x-2}{x^2+5}, [-2;3].$

14. Исследовать и построить графики функций:

a)  $y = x + \frac{2x}{x^2-1};$

б)  $y = x + \frac{1}{x^2}.$

15. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения:

$X \in (-3;0) \cup (0;2).$

2) Вертикальные асимптоты:

$x = -3, x = 2.$

3) Горизонтальные асимптоты:

—

4) Наклонные асимптоты:

—

5) Стационарные точки:

$-2; -1; 1.$

6) Точки, где  $(y' = \infty)$ :

$0 (x \rightarrow \pm 0).$

7) Интервалы монотонности:

a) возрастания:

$(-3;-2), (-1;0), (0;1), (1;2);$

б) убывания:

$(-2;-1).$

8) Интервалы выпуклости и вогнутости:

a) выпуклости:

$(-3;-\frac{3}{2}), (0;1);$

б) вогнутости:

$(-\frac{3}{2};0), (1;2).$

9) Значение функции в некоторых точках:  
 $y(-1)=1, y(-0)=2, y(+0)=0, y(1)=1.$



### Вариант 5

1. Исходя из определения производной, найти  $f'(x_0)$  для функций:

1.1.  $f(x) = 1 + x + x^2, x_0 = -1;$       1.2.  $f(x) = \begin{cases} \ln\left(1 + x^2 \sin \frac{2}{x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases} x_0 = 0.$

2. Найти производную функций:

2.1.  $y = (1 - x) \cdot \ln(1 - x);$       2.2.  $y = 2x^5 - \operatorname{arctg} x + 1;$   
2.3.  $y = x^2 \cdot 7^{\sqrt{1-x^2+x}};$       2.4.  $y = \frac{\ln(2x^2 - 11)}{e^{x^3 - 1}};$   
2.5.  $y = \sqrt[3]{x+3} - \frac{1}{\sqrt{x^3 + x}};$       2.6.  $y = \sin^2(1 + x^3);$   
2.7.  $y = \log_2\left(3 - \sqrt{4^x - \frac{1}{\sqrt{2x}}}\right);$       2.8.  $y = \arccos(\cos x + \sqrt{e^x - 1}).$

3. Найти производную степенно-показательной функции  $y = (1 + x^2)^{\frac{1}{x}}.$

4. Найти производную неявной функции  $y=y(x): \frac{x+1}{y} = \sin(x^2 + y).$

5. Найти производную параметрической функции:  $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = 1 - \sin 2t. \end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой  $y=y(x)$  в точке  $x_0$  и составить уравнение касательной и нормали в точке  $M_0(x_0; y_0):$

6.1.  $y = x^5 - 2x^3, x_0 = 1;$       6.2.  $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases} M_0\left(\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}; 1\right).$

7. Найти производную второго порядка  $\frac{d^2y}{dx^2}$  для функций:

7.1.  $y = (x^2 - 1) \cdot e^{1-x^2};$       7.2.  $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = 1 - \sin 2t. \end{cases}$

8. Найти дифференциал функции  $y = \sqrt[3]{x}$  и вычислить приближенно с помощью дифференциала  $y = \sqrt[3]{27.54}.$

9. Найти дифференциал второго порядка функции  $y = (x^2 - 1) \cdot e^{1-x^2}$  в точке  $x_0 = 0.$

10. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\cos \frac{\pi x}{2} \cdot \ln(1 - x)};$       б)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x};$       в)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[ \frac{x}{\operatorname{ctg} x} - \frac{\pi}{2 \cos x} \right].$

11. Записать формулу Тейлора для функции  $y=f(x)$  в окрестности точки  $x_0:$

a)  $y = \ln(2 + x)$ ,  $x_0 = -1$ ;

б)  $y = \frac{x^3}{6} - \sin x^3$ ,  $x_0 = 0$ .

12. Найти экстремумы функций:

a)  $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ ;

б)  $y = (1 + x) \cdot e^{-x}$ ;

в)  $y = \frac{x^2}{2} + \frac{8}{x^2}$ .

13. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

a)  $y = x^3 - 3x + 1$ ,  $[\frac{1}{2}; 2]$ ;

б)  $y = \frac{4 - x^2}{4 + x^2}$ ,  $[-1; 3]$ .

14. Исследовать и построить графики функций:

a)  $y = 2x - \arcsin x$ ;

б)  $y = \ln \frac{x-1}{x+2}$ .

15. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения:

$X \in (-\infty; \infty)$ .

2) Вертикальные асимптоты:

—

3) Горизонтальные асимптоты:

$y=0$ ,  $(x \rightarrow -\infty)$ .

4) Наклонные асимптоты:

$y=x-2$   $(x \rightarrow \infty)$ .

5) Стационарные точки:

$-1$ ;  $1$ ;  $3$ .

6) Точки, где  $(y' = \infty)$ :

$0$ ;  $2$ .

7) Интервалы монотонности:

a) возрастания:

$(-\infty; -1)$ ,  $(0; 1)$ ,  $(3; \infty)$ ,

б) убывания:

$(-1; 0)$ ;  $(1; 2)$ ;  $(2; 3)$ .

8) Интервалы выпуклости и вогнутости:

a) выпуклости:

$(-2; 0)$ ,  $(0; 2)$

б) вогнутости:

$(-\infty; -2)$ ,  $(2; \infty)$ .

9) Значение функции в некоторых точках:  
 $y(-2) = 1$ ,  $y(-1) = 2$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y(1) = 4$ ,  $y(2) = 3$ ,  $y(3) = 2$ .