Вариант 1

1. Измените порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2+y}}^{0} f(x,y)\,dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{-y}}^{0} f(x,y)\,dx .$$

2. Перейдите в двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ к двукратному и расставьте пределы интегрирования, если область D ограничена линиями $y=x$, $y=2x$, $x+y=6$.

3. Вычислите двойной интеграл:

3.1. $\iint\limits_D x^3y^3\,dxdy$, где область D ограничена линиями $x=0$, $y=0$, $x=2$, $y=1$;

3.2. $\iint\limits_D \left(54x^2y^2+150x^4y^4\right)dxdy$, где область D ограничена линиями $x=1, y=x^3, y=-\sqrt{x}$.

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

4.1. $y=4x-x^2$, $y=4-x$;

4.2. $y^2-2y+x^2=0$, $y^2-4y+x^2=0$, $\sqrt{3}y=x$, $y=\sqrt{3}x$.

5. Найдите массу пластинки, ограниченной линиями $x=1$, $y=0$, $y^2=4x$ $(y\ge 0)$, если плотность её в каждой точке равна $\rho(x,y)=7x^2+y$.

6. Вычислите тройной интеграл:

6.1. $\int_0^1 dx\int_0^2 dy\int_0^3 (x+y+z)\,dz$;

6.2. $\iiint\limits_V 2y^2e^{xy}\,dxdydz$, где область V ограничена поверхностями $x=0$, $y=1$, $y=x$, $z=0$, $z=1$;

7. Найдите объём тела, ограниченного поверхностями

$$y=16\sqrt{2x},\ \ y=\sqrt{2x},\ \ z=0,\ \ x+z=2.$$

8. Найдите массу тела, ограниченного поверхностями $64\left(x^2+y^2\right)=z^2$, $x^2+y^2=4$, $y=z=0$ $(y\ge 0, z\ge 0)$, если плотность его в каждой точке равна $\rho(x,y)=\dfrac{5\left(x^2+y^2\right)}{4}$.

1. Для векторного поля $\vec{a}=x^2yzi-xy^2zj+xyz^2k$ найдите $\operatorname{rot}\vec{a}$, $\operatorname{div}\vec{a}$ и $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{a})$.

2. Найдите работу силы $\vec{F}=\left(x^2-y\right)i+\left(y^2-2x\right)j$, совершаемую при перемещении материальной точки массой m из точки $O(0;0)$ в точку $A(1;1)$ по дуге параболы $y=x^2$.

3. Вычислите циркуляцию векторного поля $\vec{a}=yi-xj+z^2k$ вдоль контура L: $x=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t$, $y=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t$, $z=\sin t$ в направлении, соответствующем возрастанию параметра t, $0\le t\le 2\pi$.

4. Вычислите криволинейный интеграл $\int\limits_L ydl$, где L – дуга параболы $y=\frac{x^2}{2}$ от точки $A(0;0)$ до точки $B(2;2)$.

5. Вычислите с помощью формулы Грина интеграл

$$\int\limits_L (x-y)^2\,dx+(x+y)^2\,dy,$$

где L – контур треугольника с вершинами в точках $A(0;0)$, $B(2;0)$, $C(4;2)$.

6. Вычислите поток векторного поля $\vec{a}$ через замкнутую поверхность S (нормаль внешняя), применив теорему Остроградского – Гаусса:

6.1. $\vec{a}=9\pi xi+2\pi yj+8k$, S: $2x+8y+\frac{z}{3}=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

6.2. $\vec{a}=x^2i+xj+xzk$, S: $z=x^2+y^2$, $z=1$, $x\ge 0$, $y\ge 0$.

7. Вычислите поверхностный интеграл $\iint\limits_{(s)}\left(x^2y^2z+1\right)dS$, где S – часть плоскости $z=-x-y+1$, лежащая в первом октанте.

Вариант 2

Измените порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} f(x,y)\,dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f(x,y)\,dx.$$

2. Перейдите в двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ к двукратному расставьте пределы интегрирования, если область D ограничена линиями $y = x^2 - 2x + 4,\ \ y = 3, x = -1.$

3. Вычислите двойной интеграл:

3.1. $\iint\limits_D y\sqrt{x}\,dxdy$, где область D ограничена линиями $x = 0$, $y = 0$, $x = 3$, $y = 2$;

3.2. $\iint\limits_D \left(xy - 9x^5y^5\right)dxdy$, где область D ограничена линиями $x = 1$, $y = \sqrt[3]{x}$, $y = -x^2$.

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

4.1. $x^2 - 2x + y^2 = 0,\ \ x^2 - 4x + y^2 = 0,\ \ y = 0,\ \ y = x;$

4.2. $y = 6 + x - x^2,\ \ y = 6 - 2x.$

5. Найдите массу пластинки, ограниченной линиями $x = 2$, $y = 0$, $y^2 = 2x$, $(y \geq 0)$, если плотность её в каждой точке равна $\rho(x,y) = \frac{7}{8}x^2 + 2y$.

6. Вычислите тройной интеграл:

6.1. $\int_0^2 dx \int_0^1 dy \int_0^3 (x + y + z)\,dz$;

6.2. $\iiint\limits_V x^2 z \sin(xyz)\,dxdydz$, где область V ограничена поверхностями $x = 0,\ \ x = 2,\ \ y = \pi,$ $y = \pi,\ \ z = 0,\ \ z = 1.$

7. Найдите объём тела, ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 = y;\ \ x^2 + y^2 = 4y;\ \ z = 0;\ \ z = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

8. Найдите массу тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 2z$, $x = 0,\ \ y = 0,\ \ z = 0$ $(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$, если плотность его в каждой точке равна $\rho(x,y) = 10x.$

1. Для векторного поля $\vec{a} = x\left(y^2 - z^2\right)i - y\left(z^2 + x^2\right)j + z\left(x^2 + y^2\right)k$ найдите $\mathrm{rot}\,\vec{a}$, $\mathrm{div}\,\vec{a}$ и $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\vec{a})$.

2. Найдите работу силы $\vec{F} = \left(x^2 + 2y\right)i + \left(y^2 + 2x\right)j$, совершаемую при перемещении материальной точки массой m из точки $O(-4;0)$ в точку $A(0;2)$ по дуге параболы $y = 2 - \frac{1}{8}x^2$.

3. Вычислите циркуляцию векторного поля $\vec{a} = -x^2y^3i + j + zk$ вдоль контура L: $x = \sqrt[3]{4}\cos t$, $y = \sqrt[3]{4}\sin t$, $z = 3$ в направлении, соответствующем возрастанию параметра t, $0 \le t \le 2\pi$.

4. Вычислите криволинейный интеграл $\int\limits_L \frac{dl}{x+y}$, где L– отрезок прямой $y = x + 2$, соединяющий точки $A(0,2)$ и $B(1;3)$.

5. Вычислите с помощью формулы Грина интеграл

$$\oint\limits_L y^2dx + (x+y)^2\,dy,$$

где L – контур треугольника с вершинами в точках $A(2;0)$, $B(2;2)$, $C(0;2)$.

6. Вычислите поток векторного поля $\vec{a}$ через замкнутую поверхность S (нормаль внешняя), применив теорему Остроградского – Гаусса:

6.1. $\vec{a} = \pi xi - 2yj + k$, S: $2x + \frac{y}{6} + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

6.2. $\vec{a} = \left(x^2 + y^2\right)i + \left(y^2 + x^2\right)j + \left(y^2 + z^2\right)k$, S: $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, $z = 1$.

7. Вычислите поверхностный интеграл $\iint\limits_{(s)} (3xy + 4yz)\,dS$, где S– часть плоскости $z = -3x - 2y + 1$, лежащая в первом октанте.

Вариант 3

1. Измените порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_0^1 dy \int_0^y f(x,y)\,dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)\,dx.$$

2. Перейдите в двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ к двукратному и расставьте пределы интегрирования, если область D ограничена линиями $y=x^3$, $y=8$, $x=1$.

3. Вычислите двойной интеграл:

3.1. $\iint\limits_D x^2y^3\,dxdy$, где область D ограничена линиями $x=0$, $y=0$, $x=3$, $y=-1$;

3.2. $\iint\limits_D \left(54x^2y^2+150x^4y^4\right)dxdy$, где область D ограничена линиями $x=1$, $y=x^2$, $y=-\sqrt[3]{x}$

.

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

4.1. $y^2-4y+x^2=0$, $y^2-6y+x^2=0$, $y=x$, $x=0$;

4.2. $y=2x^2$, $y=3-x$.

5. Найдите массу пластинки, ограниченной линиями $x=2$, $y=0$, $y^2=2x$ $(y\ge 0)$, если плотность её в каждой точке равна $\rho(x,y)=\frac{7}{8}x^2+2y$.

6. Вычислите тройной интеграл:

6.1. $\int_0^3 dx\int_0^2 dy\int_0^1 (x+y+z)\,dz$;

6.2. $\iiint\limits_V y^2\,\mathrm{ch}(2xy)\,dxdydz$, где область V ограничена поверхностями $x=0$, $y=-2$, $y=4x$, $z=0$, $z=2$.

7. Найдите объём тела, ограниченного поверхностями

$$y=5\sqrt{x};.\ \ y=\frac{5}{3}x;\ \ z=0;\ \ z=5+\frac{5}{3}x.$$

8. Найдите массу тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=27$, $x=0$; $y=0$; $z=0$; $(x\ge 0, y\ge 0)$, если плотность его в каждой точке равна $\rho(x,y)=10x$.

1. Для векторного поля $\vec{a}=\left(x^2+y\right)zi-x\left(y^2+z\right)j+\left(x+y\right)z^2k$ найдите $\mathrm{rot}\,\vec{a}$, $\mathrm{div}\,\vec{a}$ и $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\vec{a})$.

2. Найдите работу силы $\vec{F}=\left(x^2+2y\right)i+\left(y^2+2x\right)j$, совершаемую при перемещении материальной точки массой m из точки $O(1;1)$ в точку $A(2;4)$ по дуге параболы $y=x^2$.

3. Вычислите циркуляцию векторного поля

$$\vec{a}=\left(y-z\right)i+\left(z-x\right)j+\left(x-y\right)k$$

вдоль контура $L: x=\cos t,\ \ y=\sin t,\ \ z=2\left(1-\cos t\right)$ в направлении, соответствующем возрастанию параметра t, $0\le t\le 2\pi$.

4. Вычислите криволинейный интеграл $\int\limits_L x^2dl$, где L – отрезок прямой $y=\frac{1}{2}x-1$, соединяющий точки $A(0,-1)$ и $B(2;0)$.

5. Вычислите с помощью формулы Грина интеграл

$$\int\limits_L \left(y^2-x^2\right)dx+\left(3x^2+y^2\right)dy,$$

где L – контур треугольника с вершинами в точках $A(0;0)$, $B(2;0)$, $C(0;2)$.

6. Вычислите поток векторного поля $\vec{a}$ через замкнутую поверхность S (нормаль внешняя), применив теорему Остроградского – Гаусса:

6.1. $\vec{a}=\pi xi+\frac{\pi}{2}yj+\left(4-2z\right)k,\ \ S: x+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1,\ \ x=0,\ \ y=0,\ \ z=0.$

6.2. $\vec{a}=-xi+2yj+yzk,\ \ S: z=x^2+y^2,\ \ z=4.$

7. Вычислите поверхностный интеграл $\iint\limits_{(s)}\left(4x^2y+3z\right)dS$, где S – часть плоскости $z=-x-y+1$, лежащая в первом октанте.

Вариант 4

1. Измените порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2-y}} f(x,y)dx.$$

2. Перейдите в двойном интеграле $\iint_D f(x,y)dxdy$ к двукратному и расставьте пределы интегрирования, если область D ограничена линиями $y = x^2 - 4x + 4,\ y = 4 - x^2.$

3. Вычислите двойной интеграл:

3.1. $\iint_D yx^2 dxdy$, где область D ограничена линиями $x = 0$, $y = 0$, $x = 2$, $y = 1$;

3.2. $\iint (9x^2y^2 + 25x^4y^4)dxdy,$ где область D ограничена линиями $x = 1$, $y = x^3$, $y = -\sqrt[3]{x}$.

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

4.1. $x^2 - 2x + y^2 = 0,\ x^2 - 10x + y^2 = 0,\ y = 0,\ y = \sqrt{3}x$;

4.2. $y = 2x^2,\ y = x + 3.$

5. Найдите массу пластинки, ограниченной линиями $x = 2,\ y = 0,\ y^2 = \dfrac{x}{2}\ \ (y \ge 0)$, если плотность её в каждой точке равна $\rho(x;y) = \dfrac{7}{2}x^2 + 6y.$

6. Вычислите тройной интеграл:

6.1. $\int_0^3 dx \int_0^1 dy \int_0^2 (x + y + z)dz$;

6.2. $\iiint 8y^2 z e^{2xyz} dxdydz,$ где область V ограничена поверхностями $x = 0,\ x = -1,\ y = 0,$ $y = 2,\ z = 0,\ z = 1.$

7. Найдите объём тела, ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 = y,\ x^2 + y^2 = 4y,\ z = \sqrt{x^2 + y^2},\quad z = 0.$$

8. Найдите массу тела, ограниченного поверхностями $x^2 + 2y^2 = 3z$, $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$; $(z \ge 0)$, если плотность его в каждой точке равна $\rho(x,y) = x + y.$

1. Для векторного поля $\vec{a} = x^2(y - z)i - xy^2zj + (x + y)z^2k$ найдите $\mathrm{rot}\,\vec{a}$, $\mathrm{div}\,\vec{a}$ и $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\vec{a})$.

2. Найдите работу силы $\vec{F}=(x-y)i+(y+x)j$, совершаемую при перемещении материальной точки массой m из точки $O(-1;1)$ в точку $A(1;1)$ по дуге параболы $y=x^2$.

3. Вычислите циркуляцию векторного поля $\vec{a}=x^2i+yj-zk$ вдоль контура $L: x=\cos t$, $y=\dfrac{\sqrt{2}\sin t}{2}$, $z=\dfrac{\sqrt{2}\cos t}{2}$ в направлении, соответствующем возрастанию параметра t, $0\le t\le 2\pi$.

4. Вычислите криволинейный интеграл $\int\limits_L \dfrac{dl}{x-y+1}$, где L – отрезок прямой $y=-2+\dfrac{x}{2}$, соединяющий точки $A(0,-2)$ и $B(4;0)$.

5. Вычислите с помощью формулы Грина интеграл

$$\int\limits_L (x+2y)dx+4xdy\,,$$

где L – контур треугольника с вершинами в точках $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(0;1)$.

6. Вычислите поток векторного поля $\vec{a}$ через замкнутую поверхность S (нормаль внешняя), применив теорему Остроградского – Гаусса:

6.1. $\vec{a}=9\pi xi+(5y+1)j+2\pi zk$, $S: 3x+y+\dfrac{z}{9}=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

6.2. $\vec{a}=yi+2zyj+2z^2k$, $S: 1-z=x^2+y^2$, $z=0$.

7. Вычислите поверхностный интеграл $\iint\limits_{(s)} xyzdS$, где S – часть плоскости $z=-x-y+1$, лежащая в первом октанте.

Вариант 5

1. Измените порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{0} f(x,y)\,dy + \int_{-1}^{0} dx \int_{x}^{0} f(x,y)\,dy .$$

2. Перейдите в двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ к двукратному и расставьте пределы интегрирования, если область D ограничена линиями $y = x^2 - 2x + 2,\ y = 2 + 6x - x^2$.

3. Вычислите двойной интеграл:

3.1. $\iint\limits_D x^2\sqrt{y}\,dxdy$, где область D ограничена линиями $x=0$, $y=0$, $x=1$, $y=4$;

3.2. $\iint\limits_D \left(3x^2y^2 + \frac{50}{3}x^4y^4\right)dxdy$, где область D ограничена линиями $x=1$, $y=\sqrt[3]{x}$, $y=-x^3$.

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

4.1. $y^2 - 2y + x^2 = 0,\ y^2 - 4y + x^2 = 0,\ y = \sqrt{3}x,\ x = 0$.

4.2. $y = 3 - 0{,}5x^2,\ y = 2 - 0{,}5x$.

5. Найдите массу пластинки, ограниченной линиями $x=1$, $y=0$, $y=4x^2$, если плотность её в каждой точке равна $\rho(x;y) = 2x + 6y^3$.

6. Вычислите тройной интеграл:

6.1. $\int_0^2 dx \int_0^3 dy \int_0^1 (x+y+z)\,dz$;

6.2. $\iiint\limits_V x^2\,\mathrm{sh}(3xy)\,dxdydz$, где область V ограничена поверхностями $x=1$, $y=0$, $y=2x$, $z=0,\ z=36$.

7. Найдите объём тела, ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 = 2;\ y = \sqrt{x};\ y = 0;\ z = 15x;\ z = 0 .$$

8. Найдите массу тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2+z^2=1$, $x^2+y^2=4z^2$, $x=0$; $y=0$; $(x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0)$, если плотность его в каждой точке равна $\rho(x,y) = 20z$.

1. Для векторного поля $\vec{a} = xy^3zi - xyz^2j + x^3yzk$ найдите $\mathrm{rot}\,\vec{a}$, $\mathrm{div}\,\vec{a}$ и $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\vec{a})$.

2. Найдите работу силы $\vec{F} = x^2 yi - yj$, совершаемую при перемещении материальной точки массой m из точки $O(-1;0)$ в точку $A(0;1)$ по дуге параболы $y = x^2$.

3. Вычислите циркуляцию векторного поля:

$$\vec{a} = (y - z)i + (z - x)j + (x - y)k$$

вдоль контура $L: x = 4\cos t, \quad y = 4\sin t, \quad z = 1 - \cos t$ в направлении, соответствующем возрастанию параметра t, $0 \le t \le 2\pi$.

4. Вычислите криволинейный интеграл

$$\int_L \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}},$$

где L – отрезок прямой $y = 2x$, соединяющий точки $A(0,0)$ и $B(2;1)$.

5. Вычислите с помощью формулы Грина интеграл

$$\int_L y^{-1}dx - x^{-1}dy,$$

где L – контур треугольника с вершинами в точках $A(1;1)$, $B(2;1)$, $C(2;2)$.

6. Вычислите поток векторного поля $\vec{a}$ через замкнутую поверхность S (нормаль внешняя), применив теорему Остроградского – Гаусса:

6.1. $\vec{a} = 5\pi xi + (9y + 1)j + 4\pi zk$, $S: \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

6.2. $\vec{a} = (y^2 + z^2)i + (xy + y^2)j + (xz + z)k$, $S: x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, $z = 1$.

7. Вычислите поверхностный интеграл $\iint\limits_{(s)} (3xy + 4yz)dS$, где S – часть плоскости $z = -3x - 2y + 1$, лежащая в первом октанте.

Вариант 6

1. Измените порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_{-2}^{-1} dy \int_{0}^{\sqrt{2+y}} f(x,y)\,dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{0}^{\sqrt{-y}} f(x,y)\,dx.$$

2. Перейдите в двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ к двукратному и расставьте пределы интегрирования, если область D ограничена линиями $y = x^2$, $y = 2x - x^2$.

3. Вычислите двойной интеграл:

3.1. $\iint\limits_D y^2 x^3 dxdy$, где область D ограничена линиями $x = 0$, $y = 0$, $x = -2$, $y = -1$;

3.2. $\iint\limits_D \left(6x^2y^2 + \frac{25}{3}x^4y^4\right)dxdy$, где область D ограничена линиями $x = 1$, $y = x^2$, $y = -\sqrt{x}$.

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

4.1. $1 \le \frac{x^2}{16} + y^2 \le 3,\ \ x \ge 0,\ \ y \ge \frac{x}{4}$;

4.2. $y = x^2 - x + 3,\ \ y = 4x - 1.$

5. Найдите массу пластинки, ограниченной линиями $x = 1$, $y = 0$, $y^2 = 16x$ $(y \ge 0)$, если плотность её в каждой точке равна $\rho(x,y) = 8y + x^2$.

6. Вычислите тройной интеграл:

6.1. $\int_0^1 dx \int_0^3 dy \int_0^2 (x + y + z)\,dz$;

6.2. $\iiint\limits_V y^2 z \cos(xyz)\,dxdydz$, где область V ограничена поверхностями $x = 0,\ \ x = 1,\ \ y = 0,$ $y = \pi,\ \ z = 0,\ \ z = 2.$

7. Найдите объём тела, ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 = 2;\ \ y = \sqrt{x};\ \ y = 0;\ \ z = 15x;\ \ z = 0.$$

8. Найдите массу тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 4z$, $x = 0,$ $y = 0,\ \ z = 0$ $(x \ge 0, y \ge 0)$, если плотность его в каждой точке равна $\rho(x,y) = 5y.$

1. Для векторного поля $\vec{a} = xyz^2 i - x^3 yzj + (x + y)z^2 k$ найдите $\operatorname{rot}\vec{a}$, $\operatorname{div}\vec{a}$ и $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{a})$.

2. Найдите работу силы $\vec{F} = xyi + (y + x)j$, совершаемую при перемещении материальной точки массой m из точки $O(0;0)$ в точку $A(1;1)$ по дуге параболы $y = 1 - x^2$.

3. Вычислите циркуляцию векторного поля $\vec{a} = 2yi - 3xj + xk$ вдоль контура

$L: x = 2\cos t,\ \ y = 2\sin t,\ \ L: x = 2\cos t, y = 2\sin t, z = 2 - 2\sin t - 2\cos t$

в направлении, соответствующем возрастанию параметра t, $0 \le t \le 2\pi$.

4. Вычислите криволинейный интеграл

$$\int\limits_L \frac{dl}{x+y},$$

где L – отрезок прямой $y = x + 2$, соединяющий точки $A(1,3)$ и $B(2;4)$.

5. Вычислите с помощью формулы Грина интеграл

$$\int\limits_L y^2 dx + (x+y)^2 dy,$$

где L – контур треугольника с вершинами в точках $A(2;0)$, $B(2;2)$, $C(0;2)$.

6. Вычислите поток векторного поля $\vec{a}$ через замкнутую поверхность S (нормаль внешняя), применив теорему Остроградского – Гаусса:

6.1. $\vec{a} = (2x+1)i - yj + 3\pi zk$, $S: \dfrac{x}{3} + y + 2z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

6.2. $\vec{a} = y^2 xi + x^2 yj + \dfrac{z^3}{3}k$, $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \ge 0$.

7. Вычислите поверхностный интеграл $\iint\limits_{(s)} (xy + yz + xz)dS$, где S – часть плоскости $z = -2x - y + 1$, лежащая в первом октанте.

Вариант 7

1. Измените порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} f(x,y)\,dx + \int_1^2 dy \int_{-1}^{-\ln y} f(x,y)\,dx.$$

2. Перейдите в двойном интеграле $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ к двукратному и расставьте пределы интегрирования, если область D ограничена линиями $y=x^3$, $y=x^2$.

3. Вычислите двойной интеграл:

3.1. $\iint_D \sqrt{x}\,y^2\,dxdy$, где область D ограничена линиями $x=0$, $y=0$, $x=3$, $y=2$;

3.2. $\iint_D \left(4xy+176x^3y^3\right)dxdy$, где область D ограничена линиями $x=1$, $y=\sqrt{x}$, $y=-x^3$

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

4.1. $y^2-8y+x^2=0,\ \ y^2-10y+x^2=0,\ \ y=\dfrac{x}{\sqrt{3}},\ \ y=\sqrt{3}x$;

4.2. $y=x^2+2x+6,\ \ y=-3x+2.$

5. Найдите массу пластинки, ограниченной линиями $x=2$, $y=0$, $y^2=2x\ \left(y\ge 0\right)$, если плотность её в каждой точке равна $\rho(x,y)=\dfrac{7x^2}{8}+2y$.

6. Вычислите тройной интеграл:

6.1. $\int_0^1 dx\int_0^2 dy\int_0^3 \left(x-y+z\right)dz$;

6.2. $\iiint_V y^2\cos\left(\dfrac{\pi xy}{4}\right)dxdydz$, где область V ограничена поверхностями $x=0$, $y=-1$, $y=\dfrac{x}{2}$, $z=0$, $z=-\pi^2$.

7. Найдите объём тела, ограниченного поверхностями

$$x^2+y^2+4x=0,\ \ z=8-y^2,\ \ z=0.$$

8. Найдите массу тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=4$; $x^2+y^2=8z$; $x=0$; $y=0$; $z=0$; $\left(x\ge 0, y\ge 0\right)$, если плотность его в каждой точке равна $\rho(x,y)=5x$.

1. Для векторного поля $\vec{a}=\sqrt{x}zi-y^2zj+xyz^2k$ найдите $\operatorname{rot}\vec{a}$, $\operatorname{div}\vec{a}$ и $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{a})$.

2. Найдите работу силы $\vec{F} = yi + \left(2y + 5x^2\right)j$, совершаемую при перемещении материальной точки массой m из точки $O(-4;0)$ в точку $A(0;2)$ по дуге параболы $y = x^2$.

3. Вычислите циркуляцию векторного поля $\vec{a} = 2zi - xj + yk$ вдоль контура $L: x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = 1$ в направлении, соответствующем возрастанию параметра t, $0 \le t \le 2\pi$.

4. Вычислите криволинейный интеграл

$$\int\limits_L \frac{dl}{2x + y},$$

где L – отрезок прямой $y = x + 3$, соединяющий точки $A(1,4)$ и $B(2;5)$.

5. Вычислите с помощью формулы Грина интеграл

$$\int\limits_L (x + y)^2\, dx - \left(x^2 + y^2\right)dy\ ,$$

где L – контур треугольника с вершинами в точках $A(1;1)$, $B(3;2)$, $C(2;5)$.

6. Вычислите поток векторного поля $\vec{a}$ через замкнутую поверхность S (нормаль внешняя), применив теорему Остроградского – Гаусса:

6.1. $\vec{a} = 2\pi xi + (7y + 2)j + 7\pi zk$, $S: x + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{3} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

6.2. $\vec{a} = zi + yzj - xyk$, $S: x^2 + y^2 4$, $z = 0$, $z = 4$.

7. Вычислите поверхностный интеграл $\iint\limits_{(s)} (xy + yz + xz)\,dS$, где S – часть плоскости $z = -2x - 7y + 1$, лежащая в первом октанте.

Вариант 8

1. Измените порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy + \int_{-1}^{0} dx \int_{0}^{x^2} f(x,y)\,dy .$$

2. Перейдите в двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ к двукратному и расставьте пределы интегрирования, если область D ограничена линиями $y=x^2-4x+5,\ y=0,\ x=0,\ x=4.$

3. Вычислите двойной интеграл:

3.1. $\iint\limits_D \sqrt{yx}\,dxdy$, где область D ограничена линиями $x=0$, $y=0$, $x=4$, $y=1$;

3.2. $\iint\limits_D \left(xy-4x^3y^3\right)dxdy$, где область D ограничена линиями $x=1$, $y=x^3$, $y=-\sqrt{x}$.

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

4.1. $y^2-6y+x^2=0,\ y^2-10y+x^2=0,\ y=x,\ x=0;$

4.2. $y=x^2-x-3,\ y=2x+1.$

5. Найдите массу пластинки, ограниченной линиями $x=2$, $y=0$, $y^2=\dfrac{x}{2}\ (y\ge 0)$, если плотность её в каждой точке равна $\rho(x,y)=\dfrac{7}{2}x^2+6y$.

6. Вычислите тройной интеграл:

6.1. $\int_0^2 dx\int_0^1 dy\int_0^3 (x-y+z)\,dz;$

6.2. $\iiint\limits_V x^2 z\sin\left(\dfrac{xyz}{4}\right)dxdydz,$ где область V ограничена поверхностями $x=0,\ x=1,\ y=0,$ $y=2\pi,\ z=0,\ z=4.$

7. Найдите объём тела, ограниченного поверхностями

$$x=20\sqrt{2y};\ x=5\sqrt{2y};\ z=0;\ y+z=0{,}5 .$$

8. Найдите массу тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=\dfrac{4}{25}z^2;\ x^2+y^2=\dfrac{2}{5}z;\ x=0;$ $y=0;\ (x\ge 0, y\ge 0)$, если плотность его в каждой точке равна $\rho(x,y)=28xz.$

1. Для векторного поля $\vec{a} = xy^3zi - x\sqrt{y}zj + 2yz^2k$ найдите $\mathrm{rot}\,\vec{a}$, $\mathrm{div}\,\vec{a}$ и $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\vec{a})$.

2. Найдите работу силы $\vec{F} = \left(x^2 - y\right)i + \left(y^2 - 2x\right)j$, совершаемую при перемещении материальной точки массой m из точки $O\left(0;2\right)$ в точку $A\left(3;-1\right)$ по прямой.

3. Вычислите циркуляцию векторного поля $\vec{a} = xi + z^2 j + yk$ вдоль контура $L: x = \cos t$, $y = 2\cos t$, $z = 2\cos t - 2\sin t - 1$ в направлении, соответствующем возрастанию параметра t, $0 \le t \le 2\pi$.

4. Вычислите криволинейный интеграл $\int\limits_L \frac{dl}{x-y}$, где L – отрезок прямой $y = -2 + \frac{x}{2}$, соединяющий точки $A\left(0,-2\right)$ и $B\left(4;0\right)$.

5. Вычислите с помощью формулы Грина интеграл

$$\int\limits_L \left(y^2 - x^2\right)dx + \left(3x^2 + y\right)^2 dy,$$

где L – контур треугольника с вершинами в точках $A\left(0;0\right)$, $B\left(2;0\right)$, $C\left(0;2\right)$.

6. Вычислите поток векторного поля $\vec{a}$ через замкнутую поверхность S (нормаль внешняя), применив теорему Остроградского – Гаусса:

6.1. $\vec{a} = \left(\pi - 1\right)xi + 2\pi yj + \left(1 - \pi z\right)k$, $S: \frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

6.2. $\vec{a} = yi + y^2 j + yzk$, $S: z = x^2 + y^2, z = 1, x \ge 0, y \ge 0$.

7. Вычислите поверхностный интеграл $\iint\limits_{(s)} \left(4xyz - x\right)dS$, где S – часть плоскости $z = -2x - 4y + 1$, лежащая в первом октанте.

Вариант 9

1. Измените порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f(x,y)dy + \int_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f(x,y)dy.$$

2. Перейдите в двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ к двукратному и расставьте пределы интегрирования, если область D ограничена линиями $y=-x^2-4x,\;\; y=0,\;\; x=-3,\;\; x=-1.$

3. Вычислите двойной интеграл:

3.1. $\iint\limits_D \sqrt{xy^3}dxdy$, где область D ограничена линиями $x=0$, $y=0$, $x=4$, $y=2$;

3.2. $\iint\limits_D \left(4xy+176x^3y^3\right)dxdy$, где область D ограничена линиями $x=1,\;\; y=\sqrt[3]{x},\;\; y=-x^2$.

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

4.1. $y^2-4y+x^2=0,\;\; y^2-6y+x^2=0,\;\; y=\sqrt{3}x,\;\; x=0$;

4.2. $y=-4x+x^2, y=-4+x.$

5. Найдите массу пластинки, ограниченной линиями $x=1,\;\; y^2=4x,\;\; y=0\;\; (y\geq 0)$, если плотность её в каждой точке равна $\rho(x,y)=x+3y^2$.

6. Вычислите тройной интеграл:

6.1. $\int\limits_0^3 dx\int\limits_0^2 dy\int\limits_0^1 (x-y+z)dz$;

6.2. $\iiint\limits_V y^2e^{-xy}dxdydz$, где область V ограничена поверхностями $x=0,\;\; y=-2,\;\; y=4x,\;\; z=0,$ $z=1.$

7. Найдите объём тела, ограниченного поверхностями

$$x^2+y^2=6x;.\;\; x^2+y^2=9x;\;\; y=0;\;\; z=0;\;\; z=\sqrt{x^2+y^2};\;\; (y\leq 0).$$

8. Найдите массу тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2+z^2=4;\;\; x^2+y^2=z^2;\;\; x=0;$ $y=0;\;\; (x\geq 0; y\geq 0; z\geq 0)$, если плотность его в каждой точке равна $\rho(x,y)=6z.$

1. Для векторного поля $\vec{a}=\left(x^2-y\right)zi-\left(x+y^2\right)zj+x\left(y-z^2\right)k$ найдите $\mathrm{rot}\,\vec{a}$, $\mathrm{div}\,\vec{a}$ и $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\vec{a})$.

2. Найдите работу силы $\vec{F} = 2yi + \left(y + 3x^2\right)j$, совершаемую при перемещении материальной точки массой m из точки $O(-4;0)$ в точку $A(0;2)$ по дуге параболы $y = 2 - \frac{1}{8}x^2$.

3. Вычислите циркуляцию векторного поля $\vec{a} = yi - xj + zk$ вдоль контура $L: x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 3$ в направлении, соответствующем возрастанию параметра t, $0 \le t \le 2\pi$.

4. Вычислите криволинейный интеграл

$$\int\limits_L \frac{dl}{x^2 + y^2},$$

где L – отрезок прямой $y = 4 - 2x$, соединяющий точки $A(0,4)$ и $B(2;0)$.

5. Вычислите с помощью формулы Грина интеграл

$$\int\limits_L \left(x^2 - 2y\right)dx + \left(3x + y\right)dy,$$

где L – контур треугольника с вершинами в точках $A(0;0)$, $B(2;0)$, $C(0;2)$.

6. Вычислите поток векторного поля $\vec{a}$ через замкнутую поверхность S (нормаль внешняя), применив теорему Остроградского – Гаусса:

6.1. $\vec{a} = 9\pi yj + \left(7z + 1\right)k$, $S: x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

6.2. $\vec{a} = \left(x + z\right)i + yk$, $S: z = 8 - x^2 - y^2$, $z = x^2 + y^2$.

7. Вычислите поверхностный интеграл $\iint\limits_{(s)} \left(x^2 + y^2 + 2z\right)dS$, где S – часть плоскости $z = -x - 2y + 1$, лежащая в первом октанте.

Вариант 10

1. Измените порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_0^1 dx \int_{1-x^2}^1 f(x,y)dy + \int_{`}^2 dx \int_{\ln x}^1 f(x,y)dy .$$

2. Перейдите в двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ к двукратному

и расставьте пределы интегрирования, если область D ограничена линиями $y=-x^2-4x$, $y=1$, $x=-3$, $x=-1$.

3. Вычислите двойной интеграл:

3.1. $\iint\limits_D y^2x^2dxdy$, где область D ограничена линиями $x=0$, $y=0$, $x=-2$, $y=-3$;

3.2. $\iint\limits_D \left(44x+16x^3y^3\right)dxdy$, где область D ограничена линиями $x=1$, $y=x^2$, $y=-\sqrt[3]{x}$.

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

4.1. $x^2-4x+y^2=0$, $x^2-8x+y^2=0$, $y=0$, $y=x$;

4.2. $y=x^2+x+2$, $y=-2x+6$.

5. Найдите массу пластинки, ограниченной линиями $x=1$, $y^2=x$, $y=0$ $(y\ge 0)$, если плотность её в каждой точке равна $\rho(x,y)=3x+6y^2$.

6. Вычислите тройной интеграл:

6.1. $\int_0^2 dx\int_0^3 dy\int_0^1 (x-y+z)dz.$

6.2. $\iiint\limits_V 2y^2ze^{xyz}dxdydz,$ где область V ограничена поверхностями $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$, $z=0$, $z=1$.

7. Найдите объём тела, ограниченного поверхностями

$$x=\frac{5}{2}\sqrt{y},.\ x=\frac{5}{6}y,\ z=0,\ z=\frac{5}{6}\left(3+\sqrt{y}\right)$$

8. Найдите массу тела, ограниченного поверхностями $25\left(x^2+y^2\right)=z^2$; $x^2+y^2=4$; $x=0$; $y=0$; $z=0$; $(x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0)$, если плотность его в каждой точке равна $\rho(x,y)=2\left(x^2+y^2\right)$.

1. Для векторного поля $\vec{a} = x^2\sqrt{y}zi - \sqrt{x}y^2 j + 4yz^2k$ найдите $\operatorname{rot}\vec{a}$, $\operatorname{div}\vec{a}$ и $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{a})$.

2. Найдите работу силы $\vec{F} = \left(x^2 + y\right)i + \left(y^2 - x\right)j$, совершаемую при перемещении материальной точки массой m из точки $O(0;0)$ в точку $A(2;2)$ по дуге параболы $y = \frac{1}{2}x^2$.

3. Вычислите циркуляцию векторного поля $\vec{a} = 3yi - 3xj + xk$ вдоль контура $L: x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = 3 - 3\sin t - 3\cos t$ в направлении, соответствующем возрастанию параметра t, $0 \le t \le 2\pi$.

4. Вычислите криволинейный интеграл $\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{x+y}}$, где L – отрезок прямой $y = \frac{x-3}{2}$, соединяющий точки $A(3,0)$ и $B(5;1)$.

5. Вычислите с помощью формулы Грина интеграл

$$\int\limits_L 2\left(x^2 + y^2\right)dx + \left(x + y\right)^2 dy,$$

где L – контур треугольника с вершинами в точках $A(1;1)$, $B(2,2)$, $C(1;3)$.

6. Вычислите поток векторного поля $\vec{a}$ через замкнутую поверхность S (нормаль внешняя), применив теорему Остроградского – Гаусса:

6.1. $\vec{a} = \pi yj + \left(4 - 2z\right)k$, $S: 2x + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

6.2. $\vec{a} = \left(y + z\right)i + \left(x - 2y + z\right)j + xk$, $S: x^2 + y^2 = 1$, $z = x^2 + y^2$, $z = 0$.

7. Вычислите поверхностный интеграл $\iint\limits_{(s)} \left(x - y - z\right)dS$, где S – часть плоскости $z = -2x - y + 2$, лежащая в первом октанте.

Вариант 11

1. Измените порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f(x,y)\,dx.$$

2. Перейдите в двойном интеграле $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ к двукратному и расставьте пределы интегрирования, если область D ограничена линиями $y = x^2$, $y = 0$, $x = 3$.

3. Вычислите двойной интеграл:

3.1. $\iint_D y^3 x\,dxdy$, где область D ограничена линиями $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = -2$;

3.2. $\iint_D \left(4xy + 16x^3y^3\right)dxdy$, где область D ограничена линиями $x = 1$, $y = x^3$, $y = -\sqrt[3]{x}$.

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

4.1. $x^2 - 4x + y^2 = 0$, $x^2 - 8x + y^2 = 0$, $y = 0$, $y = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$;

4.2. $y = -x^2 - x - 2$, $y = 2x - 6$.

5. Найдите массу пластинки, ограниченной линиями $x = 2$, $y^2 = \dfrac{x}{2}$, $y = 0$ $(y \geq 0)$, если плотность её в каждой точке равна $\rho(x,y) = 2x + 3y^2$.

6. Вычислите тройной интеграл:

6.1. $\int_0^3 dx \int_0^1 dy \int_0^2 (x - y + z)\,dz.$

6.2. $\iiint_V y^2 \operatorname{ch}(2xy)\,dxdydz$, где область V ограничена поверхностями $x = 0$, $y = 1$, $y = x$, $z = 0$, $z = 8$.

7. Найдите объём тела, ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 = 6\sqrt{2}y,\ \ z = x^2 + y^2 - 36,\ \ z = 0,\ \ (z \geq 0).$$

8. Найдите массу тела, ограниченного поверхностями $16\left(x^2 + y^2\right) = z^2$; $x^2 + y^2 = 1$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$ $(x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0)$, если плотность его в каждой точке равна $\rho(x,y) = 5\left(x^2 + y^2\right)$.

1. Для векторного поля $\vec{a} = \frac{xy}{z} i - y^2 zj + \frac{z}{x} k$ найдите $\mathrm{rot}\,\vec{a}$, $\mathrm{div}\,\vec{a}$ и $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\vec{a})$.

2. Найдите работу силы $\vec{F} = \left(x^2 - y\right)i + \left(y^2 - 2x\right)j$, совершаемую при перемещении материальной точки массой m из точки $O(0;0)$ в точку $A(1;1)$ по дуге параболы $y = x^2$.

3. Вычислите циркуляцию векторного поля $\vec{a} = -x^2 y^3 i + 2j + xzk$ вдоль контура $L: x = \sqrt{2}\cos t,\ \ y = \sqrt{2}\cos t,\ \ z = 1$ в направлении, соответствующем возрастанию параметра $t,\ 0 \le t \le 2\pi.$

4. Вычислите криволинейный интеграл $\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2}}$, где L – отрезок прямой $y = -x + 4$, соединяющий точки $A(0,4)$ и $B(4;0)$.

5. Вычислите с помощью формулы Грина интеграл

$$\oint\limits_L \frac{3}{4} x^2 y^2 dx + \frac{x^2}{2}\left(1 + xy\right)dy,$$

где L – контур треугольника с вершинами в точках $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(0;1)$.

6. Вычислите поток векторного поля $\vec{a}$ через замкнутую поверхность S (нормаль внешняя), применив теорему Остроградского – Гаусса:

6.1. $\vec{a} = 7\pi xi + \left(4y + 1\right)j + 2\pi zk,\ \ S: \frac{x}{3} + 2y + z = 1,\ \ x = 0,\ \ y = 0,\ \ z = 0.$

6.2. $\vec{a} = (3yz - x)i + (x^2 - y)j + (6z - 1)k,\ \ S: z^2 = 9(x^2 + y^2), z = 3.$

7. Вычислите поверхностный интеграл $\iint\limits_{(s)} \left(y^2 + x^2 z\right)dS$, где S – часть плоскости $z = -x - 7y + 1$, лежащая в первом октанте.

Вариант 12

1. Измените порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} dy \int_0^{\sin y} f(x,y)\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dy \int_0^{\cos y} f(x,y)\,dx.$$

2. Перейдите в двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ к двукратному и расставьте пределы интегрирования, если область D ограничена линиями $y=4-x^2$, $y=0$.

3. Вычислите двойной интеграл:

3.1. $\iint\limits_D y^3\sqrt{x}\,dxdy$, где область D ограничена линиями $x=0$, $y=0$, $x=1$, $y=3$;

3.2. $\iint\limits_D \left(4xy+16x^3y^3\right)dxdy$, где область D ограничена линиями $x=1$, $y=\sqrt[3]{x}$, $y=-x^3$.

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

4.1. $y^2-6y+x^2=0$, $y^2-8y+x^2=0$, $y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$, $y=\sqrt{3}x$;

4.2. $y=x^2+5x-1$, $y=2x+3$.

5. Найдите массу пластинки, ограниченной линиями $x=\dfrac{1}{2}$, $y^2=8x$, $y=0$ $(y\ge 0)$, если плотность её в каждой точке равна $\rho(x,y)=7x+3y^2$.

6. Вычислите тройной интеграл:

6.1. $\int_0^1 dx\int_0^3 dy\int_0^2 (x-y+z)\,dz.$

6.2. $\iiint\limits_V x^2 z\,sh(xyz)\,dxdydz$, где область V ограничена поверхностями $x=0$, $x=2$, $y=0$, $y=1$, $z=0$, $z=1$.

7. Найдите объём тела, ограниченного поверхностями

$$x^2+y^2=2;\ x=\sqrt{y};\ x=0;\ z=0;\ z=30y.$$

8. Найдите массу тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=1$; $x^2+y^2=6z$; $x=y=z=0$; $(x\ge 0, y\ge 0)$, если плотность его в каждой точке равна $\rho(x,y)=20y$.

1. Для векторного поля $\vec{a}=x^2zi-x(y+z)j+x(y-z^2)k$ найдите $\operatorname{rot}\vec{a}$, $\operatorname{div}\vec{a}$ и $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{a})$.

2. Найдите работу силы $\vec{F} = xyi + \left(y^2 - x\right)j$, совершаемую при перемещении материальной точки массой m из точки $O(0;1)$ в точку $A(1;0)$ по дуге параболы $y = (1-x)^2$.

3. Вычислите циркуляцию векторного поля $\vec{a} = 6zi - xj + xyk$ вдоль контура $L: x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = 3$ в направлении, соответствующем возрастанию параметра t, $0 \le t \le 2\pi$.

4. Вычислите криволинейный интеграл

$$\int_L e^{2x} dl,$$

где L – дуга кривой $y = e^x$ от точки $A(0,1)$ до точки $B(\ln 4; 4)$.

5. Вычислите с помощью формулы Грина интеграл

$$\int_L 2\left(x^2 + y^2\right)dx + (x+y)^2 dy,$$

где L – контур треугольника с вершинами в точках $A(0;0)$, $B(2;0)$, $C(4;2)$.

6. Вычислите поток векторного поля $\vec{a}$ через замкнутую поверхность S (нормаль внешняя), применив теорему Остроградского – Гаусса:

6.1. $\vec{a} = (21\pi - 1)i + 62\pi yj + (1 - 2\pi z)k$, $S: 8x + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{3} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

6.2. $\vec{a} = (3x - y - z)i + 3yj + 2zk$, $S: z = x^2 + y^2$, $z = 2y$.

7. Вычислите поверхностный интеграл $\iint\limits_{(s)} (xy + yz + xz)\,dS$, где S – часть плоскости $z = -x - 4y + 2$, лежащая в первом октанте.

Вариант 13

1. Измените порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_{-2}^{-1} dx \int_{-2-x}^{0} f(x,y)\,dy + \int_{-1}^{0} dx \int_{\sqrt[3]{x}}^{0} f(x,y)\,dy.$$

2. Перейдите в двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ к двукратному и расставьте пределы интегрирования, если область D ограничена линиями $y=(x+2)^2$, $y=0$, $x=0$.

3. Вычислите двойной интеграл:

3.1. $\iint\limits_D x^3 y\,dxdy$, где область D ограничена линиями $x=0$, $y=0$, $x=-2$, $y=-2$;

3.2. $\iint\limits_D \left(6xy+24x^3y^3\right)dxdy$, где область D ограничена линиями $x=1$, $y=\sqrt{x}$, $y=-x^2$.

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

4.1. $y^2-2y+x^2=0$, $y^2-6y+x^2=0$, $y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$, $x=0$;

4.2. $y=1-5x-x^2$, $y=-2x-3$.

5. Найдите массу пластинки, ограниченной линиями $x=1$, $y^2=4x$, $y=0$ $(y\ge 0)$, если плотность её в каждой точке равна $\rho(x,y)=2y+7x^2$.

6. Вычислите тройной интеграл:

6.1. $\int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_0^3 (x+y-z)\,dz.$

6.2. $\iiint\limits_V y^2 e^{\frac{xy}{2}}\,dxdydz,$ где область V ограничена поверхностями $x=0$, $y=2$, $y=2x$, $z=0$, $z=-1$.

7. Найдите объём тела, ограниченного поверхностями

$$x^2+y^2=2y,\ z=0,\ z=\frac{9}{4}-x^2.$$

8. Найдите массу тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=\dfrac{z^2}{25}$; $x^2+y^2=\dfrac{z}{25}$; $x=0$; $y=0$; $(x\ge 0, y\ge 0)$, если плотность его в каждой точке равна $\rho(x,y)=14yz$.

1. Для векторного поля $\vec{a} = x^2 yzi - \dfrac{y}{x} j + (x - 2y) z^2 k$ найдите $\mathrm{rot}\,\vec{a}$, $\mathrm{div}\,\vec{a}$ и $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\vec{a})$.

2. Найдите работу силы $\vec{F} = (x^2 - y)i + yxj$, совершаемую при перемещении материальной точки массой m из точки $O(0;1)$ в точку $A(1;4)$ по дуге параболы $y = (x+1)^2$.

3. Вычислите циркуляцию векторного поля $\vec{a} = zi + y^2 j - xk$ вдоль контура $L: x = \sqrt{2}\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = \sqrt{2}\cos t$ в направлении, соответствующем возрастанию параметра t, $0 \le t \le 2\pi$.

4. Вычислите криволинейный интеграл $\int\limits_L \dfrac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$, где L – отрезок прямой $y = \dfrac{x}{2}$, соединяющий точки $A(0,0)$ и $B(1;2)$.

5. Вычислите с помощью формулы Грина интеграл

$$\int\limits_L (xy + x + y)dx + (xy + x - y)^2 dy,$$

где L – контур треугольника с вершинами в точках $A(1;1)$, $B(2;2)$, $C(1,3)$.

6. Вычислите поток векторного поля $\vec{a}$ через замкнутую поверхность S (нормаль внешняя), применив теорему Остроградского – Гаусса:

6.1. $\vec{a} = 4\pi xi + 7\pi yj + (2z+1)k$, $S: 2x + \dfrac{y}{3} + 2z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

6.2. $\vec{a} = xy^2 i + x^2 yj + zk$, $S: x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$, $z = 0$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.

7. Вычислите поверхностный интеграл $\iint\limits_{(s)} (x^2 + y^2 z) dS$, где S – часть плоскости $z = -3x - 8y + 1$, лежащая в первом октанте.

Вариант 14

1. Измените порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int_1^2 dy \int_{\ln y}^{1} f(x,y)dx.$$

2. Перейдите в двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ к двукратному и расставьте пределы интегрирования, если область D ограничена линиями $y=2x-x^2$, $y=0$.

3. Вычислите двойной интеграл:

3.1. $\iint\limits_D x^3\sqrt{y}dxdy$, где область D ограничена линиями $x=0$, $y=0$, $x=2$, $y=1$;

3.2. $\iint\limits_D \left(\frac{4}{5}xy-9x^3y^3\right)dxdy$, где область D ограничена линиями $x=1$, $y=x^2$, $y=-\sqrt{x}$.

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

4.1. $x-2x+y^2=0$, $x^2-4x+y^2=0$, $y=0$, $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$;

4.2. $y=x^2-x+2$, $y=2x+6$.

5. Найдите массу пластинки, ограниченной линиями $x=1$, $y^2=16x$, $y=0$ $(y\geq 0)$, если плотность её в каждой точке равна $\rho(x,y)=\frac{7x^2}{4}+\frac{y}{2}$.

6. Вычислите тройной интеграл:

6.1. $\int_0^2 dx\int_0^1 dy\int_0^3 (x+y-z)dz.$

6.2. $\iiint\limits_V y^2 z\cos\left(\frac{xyz}{3}\right)dxdydz$, где область V ограничена поверхностями $x=0$, $x=3$, $y=0$, $y=1$, $z=0$, $z=2\pi$

7. Найдите объём тела, ограниченного поверхностями

$$x+y=2,\ x=\sqrt{y},\ z=0,\ z=\frac{12}{5}x.$$

8. Найдите массу тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2+z^2=4$; $x^2+y^2=9z^2$; $x=0$; $y=0$; $(x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0)$, если плотность его в каждой точке равна $\rho(x,y)=10z$.

1. Для векторного поля $\vec{a} = ye^{-x}i - y^2zj + x\left(y^2 - z^2\right)k$ найдите $\mathrm{rot}\,\vec{a}$, $\mathrm{div}\,\vec{a}$ и $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\vec{a})$.

2. Найдите работу силы $\vec{F} = (x-y)i + (y+x)j$, совершаемую при перемещении материальной точки массой m из точки $O(0;1)$ в точку $A(1;0)$ по дуге параболы $y = 1 - x^2$.

3. Вычислите циркуляцию векторного поля $\vec{a} = xi + 2z^2j + yk$ вдоль контура $L: x = \cos t$, $y = 3\sin t$, $z = 2\cos t - 3\sin t - 2$ в направлении, соответствующем возрастанию параметра t, $0 \le t \le 2\pi$.

4. Вычислите криволинейный интеграл

$$\int_L y\,dl,$$

где L – отрезок прямой $y = 1 - \frac{3}{4}x$, соединяющий точки $A(0,1)$ и $B(4;-2)$.

5. Вычислите с помощью формулы Грина интеграл

$$\int_L y^2dx + (x+y)^2\,dy,$$

где L – контур треугольника с вершинами в точках $A(3;0)$, $B(3;3)$, $C(0;3)$.

6. Вычислите поток векторного поля $\vec{a}$ через замкнутую поверхность S (нормаль внешняя), применив теорему Остроградского – Гаусса:

6.1. $\vec{a} = \pi yj + (1-2z)k$, $S: \frac{x}{4} + \frac{y}{3} + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

6.2. $\vec{a} = x^3i + y^3j + z^3k$, $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \ge 0$.

7. Вычислите поверхностный интеграл $\iint\limits_{(s)}\left(x^2 + y^2 - z\right)dS$, где S – часть плоскости $z = -2x - 5y + 1$, лежащая в первом октанте.

Вариант 15

1. Измените порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} f(x,y)\,dx + \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{2-y}}^{0} f(x,y)\,dx.$$

2. Перейдите в двойном интеграле $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ к двукратному и расставьте пределы интегрирования, если область D ограничена линиями $y=\dfrac{1}{x^2}$, $y=0$, $x=1$, $x=2$.

3. Вычислите двойной интеграл:

3.1. $\iint_D \sqrt{x^3 y}\,dxdy$, где область D ограничена линиями $x=0$, $y=0$, $x=4$, $y=1$;

3.2. $\iint_D \left(\dfrac{4}{5}xy+9x^2y^2\right)dxdy$, где область D ограничена линиями $x=1$, $y=\sqrt{x}$, $y=-x^3$.

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

4.1. $x^2-2x+y^2=0$, $x^2-6x+y^2=0$, $y=0$, $y=x$;

4.2. $y=-x^2+x-2$, $y=-2x-6$.

5. Найдите массу пластинки, ограниченной линиями $x=1$, $y^2=16x$, $y=0$ $(y\ge 0)$, если плотность её в каждой точке равна $\rho(x,y)=\dfrac{7x^2}{4}+y$.

6. Вычислите тройной интеграл:

6.1. $\int_0^3 dx \int_0^2 dy \int_0^1 (x+y-z)\,dz$;

6.2. $\iiint_V y^2\cos\left(\dfrac{\pi xy}{2}\right)dxdydz$, где область V ограничена поверхностями $x=0$, $y=-1$, $y=x$, $z=0$, $z=2\pi^2$.

7. Найдите объём тела, ограниченного поверхностями

$$x^2+y^2=2y,\ x^2+y^2=5y,\ z=0,\ z=\sqrt{x^2+y^2}.$$

8. Найдите массу тела, ограниченного поверхностями $9(x^2+y^2)=z^2$; $x^2+y^2=4$; $x=0$; $y=0$; $z=0$; $(x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0)$, если плотность его в каждой точке равна $\rho(x,y)=\dfrac{5}{3}(x^2+y^2)$.

1. Для векторного поля $\vec{a} = x^2 zi - y^2 \cos zj + xz^2 k$ найдите $\operatorname{rot}\vec{a}$, $\operatorname{div}\vec{a}$ и $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{a})$.

2. Найдите работу силы $\vec{F} = \left(x + y^2\right)i + \left(y - x\right)j$, совершаемую при перемещении материальной точки массой m из точки $O(0;1)$ в точку $A(1;2)$ по дуге параболы $y = x^2 + 1$.

3. Вычислите циркуляцию векторного поля $\vec{a} = xi - \frac{1}{3}z^2 j + yk$ вдоль контура $L: x = \frac{\cos t}{2}$, $y = \frac{\sin t}{3}$, $z = \cos t - \frac{\sin t}{3} - \frac{1}{4}$ в направлении, соответствующем возрастанию параметра t, $0 \le t \le 2\pi$.

4. Вычислите криволинейный интеграл

$$\int_L x\,dl,$$

где L – дуга параболы $y = x^2$ от точки $A(1,1)$ до точки $B(2;4)$.

5. Вычислите с помощью формулы Грина интеграл

$$\int_L \left(x+y\right)^2 dx - \left(x^2 + y^2\right)dy ,$$

где L – контур треугольника с вершинами в точках $A(1;1)$, $B(3;2)$, $C(2;5)$.

6. Вычислите поток векторного поля $\vec{a}$ через замкнутую поверхность S (нормаль внешняя), применив теорему Остроградского – Гаусса:

6.1. $\vec{a} = \left(5y+3\right)j + 11\pi zk$, $S: x + \frac{y}{3} + 4z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

6.2. $\vec{a} = x^2 i + xyj + 3zk$, $S: z^2 = x^2 + y^2$, $z = 4$.

7. Вычислите поверхностный интеграл $\iint\limits_{(s)} \left(z^2 - xy\right)dS$, где S – часть плоскости $z = -4x - 5y + 1$, лежащая в первом октанте.

Вариант 16

1. Измените порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_0^1 dy \int_{-y}^0 f(x,y)\,dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f(x,y)\,dx.$$

2. Перейдите в двойном интеграле $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ к двукратному и расставьте пределы интегрирования, если область D ограничена линиями $y=e^x$, $y=0$, $x=0$, $x=1$.

3. Вычислите двойной интеграл:

3.1. $\iint_D xy^2\,dxdy$, где область D ограничена линиями $x=0$, $y=0$, $x=-3$, $y=-1$;

3.2. $\iint_D \left(\frac{4}{5}xy+\frac{9}{11}x^2y^2\right)dxdy$, где область D ограничена линиями $x=1$, $x=\sqrt[3]{y}$, $y=-\sqrt{x}$.

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

4.1. $x^2-6y+y^2=0$, $x^2-8y+y^2=0$, $x=0$, $y=x$;

4.2. $y=x^2-2x$, $y=4+x$.

5. Найдите массу пластинки, ограниченной линиями $x=2$, $y^2=\frac{x}{2}$, $y=0$ $(y\ge 0)$, если плотность её в каждой точке равна $\rho(x,y)=\frac{7x^2}{2}+8y$.

6. Вычислите тройной интеграл:

6.1. $\int_0^3 dx\int_0^1 dy\int_0^2 (x+y-z)\,dz$;

6.2. $\iiint_V 2x^2z\,\mathrm{sh}(xyz)\,dxdydz$, где область V ограничена поверхностями $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=-1$, $z=0$, $z=1$.

7. Найдите объём тела, ограниченного поверхностями

$$y=17\sqrt{2x};\ \ y=2\sqrt{2x};\ \ z=0;\ \ x+z=0{,}5.$$

8. Найдите массу тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2+z^2=4$; $x^2+y^2=1$; $(x^2+y^2\le 1)$, если плотность его в каждой точке равна $\rho(x,y)=6z^2$.

1. Для векторного поля $\vec{a}=(3x-y)zi+y^2(z-3)j+\sqrt{x}z^2k$ найдите $\mathrm{rot}\,\vec{a}$, $\mathrm{div}\,\vec{a}$ и $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\vec{a})$.

2. Найдите работу силы $\vec{F} = x^2 yi + (y - x) j$, совершаемую при перемещении материальной точки массой m из точки $O(0;1)$ в точку $A(4;-1)$ по дуге параболы $y = 1 - \frac{1}{2}x^2$.

3. Вычислите циркуляцию векторного поля $\vec{a} = 4yi - 3xj + xk$ вдоль контура $L: x = 4\cos t$, $y = 4\sin t$, $z = 4 - 4\cos t - 4\sin t$ в направлении, соответствующем возрастанию параметра t, $0 \le t \le 2\pi$.

4. Вычислите криволинейный интеграл

$$\int_L x dl,$$

где L – отрезок прямой $y = 1 - 2x$, соединяющий точки $A(0,1)$ и $B(2;-3)$.

5. Вычислите с помощью формулы Грина интеграл

$$\int_L (y - x^2) dx + (x + y^2) dy,$$

где L – контур треугольника с вершинами в точках $A(0;0)$, $B(2;0)$, $C(4;2)$.

6. Вычислите поток векторного поля $\vec{a}$ через замкнутую поверхность S (нормаль внешняя), применив теорему Остроградского – Гаусса:

6.1. $\vec{a} = xi + (\pi z - 1)k$, $S: 2x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

6.2. $\vec{a} = 3xzi - 2xj + yk$, $S: x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$, $z = 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.

7. Вычислите поверхностный интеграл $\iint\limits_{(s)} (xyz + x + y) dS$, где S – часть плоскости $z = -x - y + 2$, лежащая в первом октанте.

Вариант 17

1. Измените порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_0^1 dy \int_0^{y^3} f(x,y)\,dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f(x,y)\,dx.$$

2. Перейдите в двойном интеграле $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ к двукратному и расставьте пределы интегрирования, если область D ограничена линиями $y=2^x$, $y=0$, $x=-1$, $x=2$.

3. Вычислите двойной интеграл:

3.1. $\iint_D x\sqrt{y}\,dxdy$, где область D ограничена линиями $x=0$, $y=0$, $x=-1$, $y=4$;

3.2. $\iint_D \left(8xy+18x^2y^2\right)dxdy$, где область D ограничена линиями $x=1$, $y=\sqrt[3]{x}$, $y=-x^2$.

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

4.1. $y^2-4y+x^2=0$, $y^2-8y+x^2=0$, $y=x$, $x=0$;

4.2. $y=-x^2+2x$, $y=-4-x$.

5. Найдите массу пластинки, ограниченной линиями $x=1$, $y^2=4x$, $y=0$ $(y\ge 0)$, если плотность её в каждой точке равна $\rho(x,y)=6x+3y^2$.

6. Вычислите тройной интеграл:

6.1. $\int_0^2 dx \int_0^3 dy \int_0^1 (x+y-z)\,dz$;

6.2. $\iiint_V y^2\cos(\pi xy)\,dxdydz$, где область V ограничена поверхностями $x=0$, $y=1$, $y=2x$, $z=0$, $z=\pi^2$.

7. Найдите объём тела, ограниченного поверхностями

$$x^2+y^2+2\sqrt{2}y=0,\ z=0,\ z=x^2+y^2-4,\ (z\ge 0).$$

8. Найдите массу тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=1$; $x^2+y^2=z$; $x=0$; $y=0$; $z=0$; $(x\ge 0, y\ge 0)$, если плотность его в каждой точке равна $\rho(x,y)=10y$.

1. Для векторного поля $\vec{a}=\dfrac{xz}{y}i-\left(y^2+3z\right)j+x\sin zk$ найдите $\operatorname{rot}\vec{a}$, $\operatorname{div}\vec{a}$ и $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{a})$.

2. Найдите работу силы $\vec{F}=(x-y)i+\left(x^2-2y\right)j$, совершаемую при перемещении материальной точки массой m из точки $O(0;2)$ в точку $A(1;1)$ по дуге параболы $y=2-x^2$.

3. Вычислите циркуляцию векторного поля $\vec{a}=-zi-xj+xzk$ вдоль контура $L: x=5\cos t$, $y=5\sin t$, $z=4$ в направлении, соответствующем возрастанию параметра t, $0\le t\le 2\pi$.

4. Вычислите криволинейный интеграл $\int\limits_L xdl$, где L – дуга параболы $y=\frac{3}{8}x^2$ от точки $A(0,0)$ до точки $B(4;6)$.

5. Вычислите с помощью формулы Грина интеграл

$$\int\limits_L (2x-y)^2\,dx+\left(x^2+y\right)dy,$$

где L – контур треугольника с вершинами в точках $A(-1;0)$, $B(0;1)$, $C(1;0)$.

6. Вычислите поток векторного поля $\vec{a}$ через замкнутую поверхность S (нормаль внешняя), применив теорему Остроградского – Гаусса:

6.1. $\vec{a}=7\pi xi+2\pi yj+(7z+2)k$, $S: x+y+\frac{z}{2}=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

6.2. $\vec{a}=(zx+y)i-(2y-x)j-\left(x^2+y^2\right)k$, $S: z=x^2+y^2$, $z=4$, $x=0$, $y\ge 0$.

7. Вычислите поверхностный интеграл $\iint\limits_{(s)}\left(x^2-y^2-z\right)dS$, где S – часть плоскости $z=-x-y+1$, лежащая в первом октанте.

Вариант 18

1. Измените порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_0^{\sqrt{3}} dx \int_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f(x,y)\,dy + \int_{\sqrt{3}}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f(x,y)\,dx.$$

2. Перейдите в двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ к двукратному и расставьте пределы интегрирования, если область D ограничена линиями $y=e^x$, $y=e^{-x}$, $y=e$.

3. Вычислите двойной интеграл:

3.1. $\iint\limits_D \sqrt[3]{xy}\,dxdy$, где область D ограничена линиями $x=0$, $y=0$, $x=-2$, $y=1$;

3.2. $\iint\limits_D \left(12xy+27x^2y^2\right)dxdy$, где область D ограничена линиями $x=1$, $y=x^2$, $y=\sqrt[3]{x}$.

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

4.1. $x^2-6x+y^2=0,\ x^2-10x+y^2=0,\ y=\dfrac{x}{\sqrt{3}},\ y=\sqrt{3}x;$

4.2. $y=x^2+2x+1,\ y=-3x-3.$

5. Найдите массу пластинки, ограниченной линиями $x=2,\ y^2=\dfrac{x}{2},\ y=0\ (y\ge 0)$, если плотность её в каждой точке равна $\rho(x,y)=4x+6y^2$.

6. Вычислите тройной интеграл:

6.1. $\int_0^1 dx\int_0^3 dy\int_0^2 (x+y-z)\,dz;$

6.2. $\iiint\limits_V 2x^2z\,\mathrm{sh}(2xyz)\,dxdydz,$ где область V ограничена поверхностями $x=0,\ x=2,\ y=0,$ $y=0{,}5,\ z=0,\ z=0{,}5.$

7. Найдите объём тела, ограниченного поверхностями

$$y=\frac{5}{3}\sqrt{x};\ y=\frac{5}{9}x;\ z=0;\ z=\frac{5}{9}\left(3+\sqrt{x}\right).$$

8. Найдите массу тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=\dfrac{z^2}{49};\ x^2+y^2=\dfrac{z}{7};\ x=0;$ $y=0;\ (x\ge 0, y\ge 0)$, если плотность его в каждой точке равна $\rho(x,y)=10xz.$

1. Для векторного поля $\vec{a} = \frac{xz}{y} i - \sqrt{z} y^2 j + \left(x - z^2\right) k$ найдите $\operatorname{rot}\vec{a}$, $\operatorname{div}\vec{a}$ и $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{a})$.

2. Найдите работу силы $\vec{F} = \left(x - y^2\right) i + yxj$, совершаемую при перемещении материальной точки массой m из точки $O(0;-1)$ в точку $A(1;0)$ по дуге параболы $y = x^2 - 1$.

3. Вычислите циркуляцию векторного поля $\vec{a} = zi + xj + yk$ вдоль контура $L: x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = 0$ в направлении, соответствующем возрастанию параметра t, $0 \le t \le 2\pi$.

4. Вычислите криволинейный интеграл

$$\int_L x\,dl,$$

где L – отрезок прямой $y = 2x - 3$, соединяющий точки $A(2,1)$ и $B(3;3)$.

5. Вычислите с помощью формулы Грина интеграл

$$\int_L (xy - 2x + y)\,dx + \left(x^2 + y\right) dy\,,$$

где L – контур треугольника с вершинами в точках $A(0;0)$, $B(2;2)$, $C(4;0)$.

6. Вычислите поток векторного поля $\vec{a}$ через замкнутую поверхность S (нормаль внешняя), применив теорему Остроградского – Гаусса:

6.1. $\vec{a} = 7xi + (5\pi y + 2) j + 4\pi zk$, $S: x + y + \frac{z}{2} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

6.2. $\vec{a} = 6xi - 2yj - zk$, $S: z = 3 - 2\left(x^2 + y^2\right)$, $z^2 = x^2 + y^2$, $z \ge 0$.

7. Вычислите поверхностный интеграл $\iint\limits_{(s)} (xy - z + 1)\,dS$, где S – часть плоскости $z = -x - y + 2$, лежащая в первом октанте.

Вариант 19

1. Измените порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_{-2}^{-1} dy \int_{-2-y}^{0} f(x,y)\,dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{\sqrt[3]{y}}^{0} f(x,y)\,dx.$$

2. Перейдите в двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ к двукратному и расставьте пределы интегрирования, если область D ограничена линиями $y = \dfrac{1}{2^x}$, $y = 1$, $x = -2$.

3. Вычислите двойной интеграл:

3.1. $\iint\limits_D \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}\,dxdy$, где область D ограничена линиями $x = 0$, $y = 0$, $x = 4$, $y = 9$;

3.2. $\iint\limits_D \left(24xy + 18x^2y^2\right)dxdy$, где область D ограничена линиями $x = 1$, $y = x^3$, $y = -\sqrt[3]{x}$.

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

4.1. $y^2 - 4y + x^2 = 0$, $y^2 - 8y + x^2 = 0$, $y = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$, $x = 0$;

4.2. $y = -2x - x^2 - 1$, $y = 3 + 3x$.

5. Найдите массу пластинки, ограниченной линиями $x = \dfrac{1}{2}$, $y^2 = 2x$, $y = 0$ $(y \ge 0)$, если плотность её в каждой точке равна $\rho(x,y) = 4x + 9y^2$.

6. Вычислите тройной интеграл:

6.1. $\int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_0^3 (-x + y + z)\,dz$;

6.2. $\iiint\limits_V x^2\,\mathrm{sh}(xy)\,dxdydz$, где область V ограничена поверхностями $x = -1$, $y = 0$, $y = x$, $z = 0$, $z = 8$.

7. Найдите объём тела, ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 = 4x,\ z = 0,\ z = 10 - y^2.$$

8. Найдите массу тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 4$; $x^2 + y^2 = 4z^2$; $x = 0$; $y = 0$; $(x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0)$, если плотность его в каждой точке равна $\rho(x,y) = 10z$.

1. Для векторного поля $\vec{a} = x^2 e^{yz} i - \frac{y^2}{z} j + \left(xy - z^2\right) k$ найдите $\operatorname{rot}\vec{a}$, $\operatorname{div}\vec{a}$ и $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{a})$.

2. Найдите работу силы $\vec{F} = xyi + x^2 j$, совершаемую при перемещении материальной точки массой m из точки $O(0;1)$ в точку $A(1;4)$ по дуге параболы $y = (x+1)^2$.

3. Вычислите циркуляцию векторного поля:

$$\vec{a} = (y - z)i + (z - x)j + (x - y)k$$

вдоль контура $L: x = 3\cos t,\ \ y = 3\sin t,\ \ z = 2(1 - \cos t)$ в направлении, соответствующем возрастанию параметра t, $0 \le t \le 2\pi$.

4. Вычислите криволинейный интеграл $\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{x + y + 4}}$, где L – отрезок прямой $y = 3 - 2x$, соединяющий точки $A(1,1)$ и $B(2;-1)$.

5. Вычислите с помощью формулы Грина интеграл

$$\int\limits_L (x - y)^2 dx + (x + y)^2 dy,$$

где L – контур треугольника с вершинами в точках $A(-2;0)$, $B(0;2)$, $C(2;0)$.

6. Вычислите поток векторного поля $\vec{a}$ через замкнутую поверхность S (нормаль внешняя), применив теорему Остроградского – Гаусса:

6.1. $\vec{a} = 2\pi xi + 6\pi yj + 10k,\ \ S: 2x + y + \frac{z}{3} = 1,\ \ x = 0,\ \ y = 0,\ \ z = 0.$

6.2. $\vec{a} = (2x + y)j + (y + 2z)k,\ \ S: z = 2 - 4\left(x^2 + y^2\right),\ \ z = 4\left(x^2 + y^2\right).$

7. Вычислите поверхностный интеграл $\iint\limits_{(s)} (z - xy)dS$, где S – часть плоскости $z = -2x - y + 2$, лежащая в первом октанте.

Вариант 20

1. Измените порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_0^1 dy \int_0^y f(x,y)\,dx + \int_1^e dy \int_{\ln y}^1 f(x,y)\,dx .$$

2. Перейдите в двойном интеграле $\iint f(x,y)\,dxdy$ к двукратному и расставьте пределы интегрирования, если область D ограничена линиями $y=e^x$, $y=e^{2x}$, $x=2$.

3. Вычислите двойной интеграл:

3.1. $\iint\limits_D y^2\sqrt{x^3}\,dxdy$, где область D ограничена линиями $x=0$, $y=0$, $x=1$, $y=-2$;

3.2. $\iint\limits_D \left(4xy+3x^2y^2\right)dxdy$,где область D ограничена линиями $x=1$, $y=x^2$, $y=-\sqrt{x}$.

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

4.1. $1\le \dfrac{x^2}{16}+y^2\le 3,\ \ x\ge 0,\ \ y\ge \dfrac{x}{4}$;

4.2. $y=x^2+4x+3, y=9x-1.$

5. Найдите массу пластинки, ограниченной линиями $x=\dfrac{1}{4},\ \ y^2=16x,\ \ y=0\ \ (y\ge 0)$, если плотность её в каждой точке равна $\rho(x,y)=16x+\dfrac{9y^2}{2}$.

6. Вычислите тройной интеграл:

6.1. $\int_0^1 dx\int_0^3 dy\int_0^2 (-x+y+z)\,dz$;

6.2. $\iiint\limits_V x^2 z\sin\left(\dfrac{xyz}{2}\right)dx\,dy\,dz,$ где область V ограничена поверхностями $x=0,\ \ x=1,\ \ y=0,$ $y=4,\ \ z=0,\ \ z=\pi.$

7. Найдите объём тела, ограниченного поверхностями

$$x+y=4,\ \ y=\sqrt{2x},\ \ z=0,\ \ z=3y.$$

8. Найдите массу тела, ограниченного поверхностями $16\left(x^2+y^2\right)=z^2;\ \ x^2+y^2=1;\ \ x=0;$ $y=0;\ \ z=0;\ \ (x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0)$, если плотность его в каждой точке равна $\rho(x,y)=5\left(x^2+y^2\right).$

1. Для векторного поля $\vec{a} = z\cos xi - \left(y^2 - 2z\right)j + xz^2k$ найдите $\mathrm{rot}\,\vec{a}$, $\mathrm{div}\,\vec{a}$ и $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\vec{a})$.

2. Найдите работу силы $\vec{F} = \left(x^2 - y\right)i + \left(y - x^2\right)j$, совершаемую при перемещении материальной точки массой m из точки $O(0;0)$ в точку $A(1;-1)$ по дуге параболы $y = -x^2$.

3. Вычислите циркуляцию векторного поля $\vec{a} = 2yi - zj + xk$ вдоль контура $L: x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 4 - \sin t - \cos t$ в направлении, соответствующем возрастанию параметра t, $0 \le t \le 2\pi$.

4. Вычислите криволинейный интеграл

$$\int_L \frac{dl}{2x + 4y - 3},$$

где L – отрезок прямой $y = 5x - 1$, соединяющий точки $A(0,-1)$ и $B(1;4)$.

5. Вычислите с помощью формулы Грина интеграл

$$\int_L (x + y)^2\,dx + \left(x^2 - y^2\right)dy\,,$$

где L – контур треугольника с вершинами в точках $A(0;0)$, $B(2;0)$, $C(4;2)$.

6. Вычислите поток векторного поля $\vec{a}$ через замкнутую поверхность S (нормаль внешняя), применив теорему Остроградского – Гаусса:

6.1. $\vec{a} = 6\pi xi + 3\pi yj + 10k$, $S: 2x + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{3} = 1, x = 0, y = 0, z = 0.$

6.2. $\vec{a} = zi - 4yj + 2xk$, $S: z = x^2 + y^2$, $z = 9$, $x \ge 0$, $y = 0$.

7. Вычислите поверхностный интеграл $\iint\limits_{(s)} \left(x^3 z - yx\right)dS$, где S – часть плоскости $z = -3x - y + 3$, лежащая в первом октанте.