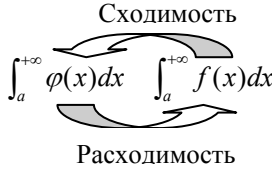



Несобственные интегралы (н.и.)

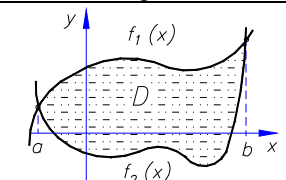
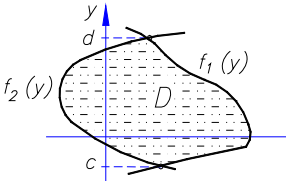
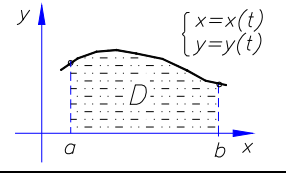
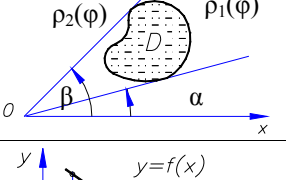
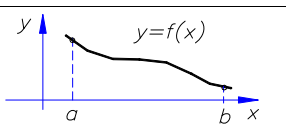
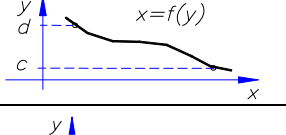
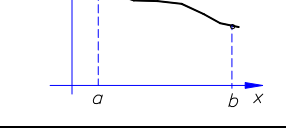
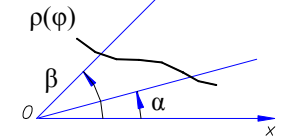
		I рода (по бесконечному промежутку)	II рода (от неограниченной на промежутке интегрирования функции)
Определение н.и.	1	$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx$	$\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \infty \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$
	2	$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx$	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$
	3	$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x)dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x)dx$	$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty \Rightarrow$ $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
Определение сходимости н.и.	<p>Несобственный интеграл сходится, если существуют конечные пределы в правых частях равенств, определяющих эти интегралы. Если эти пределы бесконечны или не существуют, то несобственный интеграл расходится.</p> $\int_a^b f(x)dx = \begin{cases} A - \text{конечное число} \Rightarrow \text{интеграл сходится;} \\ \infty \\ -\infty \end{cases} - \text{интеграл расходится.}$		
Признаки сходимости н.и.	1	$\varphi(x), f(x)$ непрерывны $\forall x \in [a, +\infty)$	$\varphi(x), f(x)$ непрерывны $\forall x \in [a, b)$ $\lim_{x \rightarrow b} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow b} f(x) = \infty$
	$0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$		
			
	2	$\varphi(x) > 0, f(x) > 0, \forall x \in [a, +\infty)$	$\varphi(x), f(x)$ непрерывны $\forall x \in [a, b)$ $\lim_{x \rightarrow b} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow b} f(x) = \infty$
	$\exists \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = A \neq 0, \quad A < \infty$	$\exists \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = A \neq 0, \quad A < \infty$	
Несобственные интегралы от функций $\varphi(x)$ и $f(x)$ ведут себя одинаково: или оба сходятся, или оба расходятся			
3	$\int_a^{+\infty} f(x) dx \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ <i>сходится \Rightarrow сходится абсолютно</i> <i>расходится \Rightarrow $\begin{cases} \text{сходится условно;} \\ \text{расходится.} \end{cases}$</i>	$\int_a^b f(x) dx \Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ <i>сходится \Rightarrow сходится абсолютно</i> <i>расходится \Rightarrow $\begin{cases} \text{сходится условно;} \\ \text{расходится.} \end{cases}$</i>	
Эталонные н.и.	$\int_{a>0}^{+\infty} \frac{dx}{x^k} = \begin{cases} \frac{a^{-k+1}}{k-1} - \text{сходится, если } k > 1, \\ +\infty - \text{расходится, если } k \leq 1. \end{cases}$	$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^k} = \begin{cases} \frac{(b-a)^{-k+1}}{-k+1} - \text{сходится, если } k < 1, \\ \infty - \text{расходится, если } k \geq 1. \end{cases}$ $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^k} = \begin{cases} \frac{(b-a)^{-k+1}}{-k+1} - \text{сходится, если } k < 1, \\ \infty - \text{расходится, если } k \geq 1. \end{cases}$	

ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Теорема. Если величина Q обладает на $[a, b]$

1. свойством аддитивности, а именно, если $a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n = b$, то $Q = \Delta Q_1 + \Delta Q_2 + \dots + \Delta Q_n$, где ΔQ_i – значение Q на $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$;
2. свойством линейности Q в малом: $\Delta Q \approx f(x)\Delta x$, где $f(x)$ – интегрируемая на $[a, b]$ функция, то величину Q можно найти интегралом от её элемента $dQ = f(x)dx$ по промежутку $[a, b]$:

$$Q = \int_a^b f(x)dx$$

Q	№	Чертеж	Система координат и пояснения	Формула	Q
S, п л о щ а д ь п л о с к о й ф и г у р ы	1		Д. С. К. $D = \begin{cases} a \leq x \leq b \\ f_2(x) \leq y \leq f_1(x) \end{cases}$ Одна кривая границы области D не выше другой.	$S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx$	S, п л о щ а д ь п л о с к о й ф и г у р ы
	2		Д. С. К. $D = \begin{cases} c \leq y \leq d \\ f_2(y) \leq x \leq f_1(y) \end{cases}$ Одна кривая границы области D не левее другой.	$S = \int_c^d (f_1(y) - f_2(y))dy$	
	3		Д. С. К. $\alpha \leq t \leq \beta$ $x(\alpha) = a, x(\beta) = b$ $(y(t) \geq 0, \forall t \in [\alpha, \beta])$ Верхняя граница области задана параметрически	$S = \int_\alpha^\beta y(t)x'_t dt$	
	4		П. С. К. $D = \begin{cases} \alpha \leq \phi \leq \beta \\ \rho_2(\phi) \leq \rho \leq \rho_1(\phi) \end{cases}$	$S = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta (\rho_1^2(\phi) - \rho_2^2(\phi))d\phi$	
l, д л и н а к р и в о й	1		Д. С. К. $L = \begin{cases} a \leq x \leq b \\ y = f(x) \end{cases}$	$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx$	l, д л и н а к р и в о й
	2		Д. С. К. $L = \begin{cases} c \leq y \leq d \\ x = f(y) \end{cases}$	$l = \int_c^d \sqrt{1 + (x'_y)^2} dy$	
	3		Д. С. К. $L = \begin{cases} \alpha \leq t \leq \beta \\ x = x(t), y = y(t) \\ x(\alpha) = a, x(\beta) = b \end{cases}$ Линия L задана параметрически	$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt$	
	4		П. С. К. $L = \begin{cases} \alpha \leq \phi \leq \beta \\ \rho = \rho(\phi) \end{cases}$	$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\phi$	

ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Q	№	Чертеж	Система координат и пояснения	Формула	Q
V, объем тела	1		<p>Д. С. К.</p> $T_1 = \begin{cases} a \leq x \leq b \\ S(x) \perp OX \end{cases}$ $T_2 = \begin{cases} c \leq y \leq d \\ S(y) \perp OY \end{cases}$ $T_3 = \begin{cases} e \leq z \leq f \\ S(z) \perp OZ \end{cases}$	$V_1 = \int_a^b S(x) dx$ $V_2 = \int_a^b S(y) dy$ $V_3 = \int_e^f S(z) dz$	V, объем тела
	2		<p>Д. С. К.</p> $T = \begin{cases} a \leq x \leq b, y = f(x) \\ \pi y^2 = S(x) \perp OX \end{cases}$ <p>Тело T образовано вращением кривой $y=f(x)$ вокруг оси OX</p>	$V = \pi \int_a^b y^2(x) dx$	
σ, площадь поверхности	1		<p>Д. С. К.</p> $\omega_x = \begin{cases} a \leq x \leq b \\ y = f(x) \\ \Delta\sigma = 2\pi y(x)\Delta l \end{cases}$ <p>Поверхность σ образована вращением кривой $y=f(x)$ вокруг оси OX</p>	$\sigma_x = 2\pi \int_a^b y(x) \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx$	σ, площадь поверхности
			<p>Д. С. К.</p> $\omega_x = \begin{cases} \alpha \leq t \leq \beta \\ y = y(t), x = x(t) \\ \Delta\sigma = 2\pi y(t)\Delta l \end{cases}$ <p>Поверхность σ образована вращением кривой $y=f(x(t))$, заданной параметрически, вокруг оси OX</p>	$\sigma_x = 2\pi \int_\alpha^\beta y(t) \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt$	
S, путь	1		<p>Д. С. К.</p> $V = \begin{cases} t_1 \leq t \leq t_2 \\ V = V(t) \end{cases}$ <p>V – скорость прямолинейного движения тела на промежутке времени $[t_1, t_2]$</p>	$s = \int_{t_1}^{t_2} V(t) dt$	S, путь
A, работа	1		<p>Д. С. К.</p> $F = \begin{cases} a \leq x \leq b \\ F = F(x) \end{cases}$ <p>Сила F направлена параллельно оси OX на промежутке $[a, b]$</p>	$A = \int_a^b F(x) dx$	A, работа
P, давление	1		<p>Д. С. К.</p> $D = \begin{cases} a \leq x \leq b \\ f_2(x) \leq y \leq f_1(x) \\ \Delta P = g\mu(x)(f_1(x) - f_2(x)) \end{cases}$ <p>μ – плотность жидкости, давящей на пластину D</p>	$P = g \int_a^b \mu(x)(f_1(x) - f_2(x)) dx$	P, давление
m, масса	1		<p>Д. С. К.</p> $L = \begin{cases} a \leq x \leq b, y = f(x) \\ \Delta m = \mu(x)\Delta l \end{cases}$ <p>μ – линейная плотность кривой L</p>	$m = \int_a^b \mu(x) \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx$	m, масса

Статические моменты относительно координатных осей S_x, S_y , моменты инерции M_x, M_y , координаты центра тяжести x_c, y_c плоской кривой

$$y = f(x), a \leq x \leq b, dl = \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt = \sqrt{\rho^2 + (\rho'_\varphi)^2} d\varphi$$

$$S_x = \int_a^b \mu(x) y dl \quad S_y = \int_a^b \mu(x) x dl \quad M_x = \int_a^b \mu(x) y^2 dl \quad M_y = \int_a^b \mu(x) x^2 dl \quad x_c = \frac{S_y}{m} \quad y_c = \frac{S_x}{m}$$