ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ Первообразная функция и неопределённый интеграл

Определение первообразной	Функция $F(x)$ называется **первообразной** для функции $f(x)$ на промежутке X, если $F'(x) = f(x) \quad \forall\, x \in X$.

Лемма	Функция, производная которой на некотором промежутке X равна нулю, постоянна на этом промежутке.

Теорема (о множестве первообразных)	Если $F(x)$ − одна из первообразных для $f(x)$ на промежутке X, то любая другая первообразная $\Phi(x)$ для функции $f(x)$ на промежутке X имеет вид: $\Phi(x) = F(x) + C$, где C − некоторая постоянная.

Определение неопределённого интеграла	Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на промежутке X называется **неопределенным интегралом** от функции $f(x)$ на промежутке X и обозначается $\int f(x)dx$. В силу теоремы о множестве первообразных $\int f(x)dx = F(x) + C$, где $F(x)$ − одна из первообразных для $f(x)$, C − произвольная постоянная.

Замечание. Иногда символом $\int f(x)dx$ обозначается не вся совокупность первообразных, а какая-либо одна из них.

Теорема (существования первообразной)	Всякая непрерывная на промежутке X функция имеет первообразную на этом промежутке.

Примеры «неберущихся» интегралов

$$\int \frac{e^x}{x}dx; \quad \int \frac{\sin x}{x}dx; \quad \int \frac{\cos x}{x}dx; \quad \int \frac{dx}{\ln x};$$

$$\int \exp(-x^2)dx; \quad \int \sin(x^2)dx; \quad \int \cos(x^2)dx;$$

$$\boxed{\begin{aligned} e^{ix} &= \cos x + i\sin x \\ i^2 &= -1 \end{aligned}}$$

§ Основные свойства неопределённого интеграла

Свойство 1 (о дифференциале интеграла)	Производная неопределённого интеграла равна подынтегральной функции: $(\int f(x)dx)' = f(x)$. Дифференциал неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению: $d\int f(x)dx = f(x)dx$.
Свойство 2 (об интеграле от дифференциала)	Неопределённый интеграл от дифференциала функции равен сумме этой функции и постоянного слагаемого: $\int dF(x) = F(x) + C$.

Вывод из свойств 1 и 2: знаки интеграла и дифференциала взаимно уничтожаются.

Свойство 3 (линейности)	Если существуют первообразные функций $f(x)$ и $g(x)$, а α и β − любые вещественные числа, то существует первообразная функции $\alpha f(x) + \beta g(x)$, причем $\int(\alpha f(x)+\beta g(x))dx = \alpha\int f(x)dx + \beta\int g(x)dx$.

§ Таблица интегралов

1. $\int 0\, du = c;$

степенные функции

2. $\int u^m du = \dfrac{u^{m+1}}{m+1} + c; m \neq -1;$

3. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + c;$

$(\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}};\quad \dfrac{1}{\sqrt[n]{x^m}} = x^{-\frac{m}{n}})$

показательные функции

4. $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + c;$

4a. $\int e^u du = e^u + c;$

дробные рациональные и иррациональные функции

5. $\int \dfrac{du}{u^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{u}{a} + c;$

6. $\int \dfrac{du}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right| + c;$

7. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \dfrac{u}{a} + c;$

8. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + c;$

тригонометрические функции

9. $\int \sin u\, du = -\cos u + c;$

10. $\int \cos u\, du = \sin u + c;$

11. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = tg\, u + c;$

12. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctg\, u + c;$

гиперболические функции

13. $\int sh\, u\, du = ch\, u + c;$

14. $\int ch\, u\, du = sh\, u + c;$

15. $\int \frac{du}{ch^2 u} = th\, u + c;$

16. $\int \frac{du}{sh^2 u} = -cth\, u + c;$

§ Метод замены переменных (подстановки) в неопределённом интеграле

Теорема (о замене переменных)	Пусть функция $x = \varphi(t)$ определена и дифференцируема на промежутке T, а промежуток X – множество её значений. Пусть функция $f(x)$ определена на X и имеет на этом промежутке первообразную $F(x)$. Тогда на промежутке T функция $F(\varphi(t))$ является первообразной для функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. То есть $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C$

Следствие (алгоритм замены переменных в неопределённом интеграле)	$\int f(x)dx = \left\lvert \begin{matrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{matrix} \right\rvert = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ $\int f(x)dx = \left\lvert \begin{matrix} t = \varphi^{-1}(x) \\ dt = (\varphi^{-1}(x))'dx \end{matrix} \right\rvert = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

Замечание. Частным случаем замены переменной является приём подведения некоторой функции под знак дифференциала, когда замена переменной делается устно.

§ Метод интегрирования по частям в неопределённом интеграле

Теорема (интегрирование по частям в неопределённом интеграле)	Пусть на промежутке X функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы, и функция $v(x)u'(x)$ имеет первообразную на X. Тогда $u(x)v'(x)$ также имеет первообразную на X, и справедлива формула интегрирования по частям: $\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$, или $\int udv = uv - \int vdu.$

Рекомендации по применению метода интегрирования по частям

№	Интеграл	Разбиение подынтегрального выражения на части	du	v	Результат применения метода
1	$\int P_n(x)e^{\alpha x}dx,$ $\int P_n(x)a^{\alpha x}dx,$ $\int P_n(x)\sin mxdx,$ $\int P_n(x)\cos mxdx.$	$u = P_n(x)$ $dv = \left\{\begin{matrix} e^{\alpha x} \\ a^{\alpha x} \\ \sin mx \\ \cos mx \end{matrix}\right\}dx$	$P_{n-1}(x)dx$	$\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}$, $\frac{a^{\alpha x}}{\alpha \ln a}$, $-\frac{\cos mx}{m}$, $\frac{\sin mx}{m}$	Метод применяют ***n* раз**, пока степень многочлена не понизится до нулевой
2	$\int P_n(x)\ln xdx,$ $\int P_n(x)\arcsin xdx,$ $\int P_n(x)\arccos xdx,$ $\int P_n(x)arctgxdx,$ $\int P_n(x)arcctgxdx.$	$u = \left\{\begin{matrix} \ln x \\ \ldots \\ arcctgx \end{matrix}\right\},$ $dv = P_n(x)dx$	$\frac{dx}{x}$, ... $-\frac{dx}{1+x^2}$	$P_{n+1}(x)$	Получают интеграл от функций степеней x
3	Циклические интегралы: $\int e^{\alpha x}\sin mxdx,$ $\int e^{\alpha x}\cos mxdx$	$u = e^{\alpha x},$ $dv = \left\{\begin{matrix} \sin mx \\ \cos mx \end{matrix}\right\}dx$ $\left(\begin{matrix} или\ u = \left\{\begin{matrix} \sin mx \\ \cos mx \end{matrix}\right\}, \\ dv = e^{\alpha x}dx \end{matrix}\right)$	$\alpha e^{\alpha x}dx$	$-\frac{\cos mx}{m}$, $\frac{\sin mx}{m}$	Метод применяют **2 раза**, получая уравнение относительно искомого интеграла

Какими методами можно найти следующие интегралы:

1.	$\int x^2\exp(x^3)dx$	2.	$\int x^3\exp(x^2)dx$
3.	$\int \frac{\ln^2 x}{x}dx$	4.	$\int \frac{\ln^2 x}{x^2}dx$
5.	$\int x\sin x^2 dx$	6.	$\int x^2\sin xdx$
7.	$\int 5^x\cos xdx$	8.	$\int 5^{\sin x}\cos xdx$
9.	$\int \sqrt{x}\exp(\sqrt{x})dx$	10.	$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\exp(\sqrt{x})dx$

11.	$\int \frac{x\arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}}$	12.	$\int \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}}$

§ Интегрирование дробных рациональных функций

А. Правильные и неправильные рациональные дроби

Определение рациональной дроби	**Рациональной дробью** называется отношение двух многочленов: $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \ldots + b_m}$

Определение правильной и неправильной рациональной дроби	Рациональная дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ называется **правильной**, если степень многочлена в числителе меньше степени многочлена в знаменателе ($n < m$). Рациональная дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ называется не**правильной**, если степень многочлена в числителе больше или равна степени многочлена в знаменателе ($n \geq m$).

Теорема	Интегрирование неправильной рациональной дроби можно свести к интегрированию многочлена и правильной рациональной дроби.

Б. Основная теорема алгебры

Теорема (основная алгебры)	Любой многочлен степени n имеет ровно n корней и может быть представлен в виде произведения n сомножителей.

Теорема (о разложении многочлена на множители)	Любой многочлен степени m можно разложить на линейные и квадратичные множители: $Q_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots. + b_m =$ $= b_0(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\cdots(x-x_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\cdots(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}$ в соответствии с его вещественными ($x_1, x_2, \ldots x_r$) и комплексными сопряжёнными корнями с учётом кратности $k_1, k_2, \ldots, k_r$ его вещественных и $l_1, l_2, \ldots, l_s$ комплексных корней, причём $k_1 + k_2 + \ldots + k_r + 2l_1 + 2l_2 + \ldots + 2l_s = m$.

В. Разложение правильной дроби на сумму простых дробей

Теорема (о сумме простых дробей)	Любую правильную рациональную дробь можно представить в виде суммы простых дробей с неопределёнными коэффициентами единственным образом, руководствуясь следующим правилом:

Вид множителя в знаменателе дроби	Число дробей	Сумма простых дробей, соответствующая множителю в знаменателе правильной рациональной дроби
$(x\text{-}a)^k$	k	$\frac{A_1}{(x-a)^k}+\frac{A_2}{(x-a)^{k-1}}+\ldots+\frac{A_k}{x-a}$
$(x^2+px+q)^w$	w	$\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^w}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{w-1}}+\ldots+\frac{M_wx+N_w}{x^2+px+q}$

Г. Методы нахождения неопределённых коэффициентов

Метод задания частных значений	1. Сумму простых дробей приводят к общему знаменателю. 2. Приравнивают числители данной дроби и дроби с неопределёнными коэффициентами. 3. В полученное уравнение подставляют вещественные корни знаменателя или другие любые значения.

Метод неопределённых коэффициентов	1. Сумму простых дробей приводят к общему знаменателю. 2. Приравнивают числители данной дроби и дроби с неопределёнными коэффициентами. 3. Из полученного уравнения получают систему линейных уравнений, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях аргумента x в правой и левой частях уравнения.

Метод комбинированный	1. Сумму простых дробей приводят к общему знаменателю. 2. Приравнивают числители данной дроби и дроби с неопределёнными коэффициентами. 3. В полученное уравнение последовательно подставляют все вещественные корни знаменателя, остальные коэффициенты находят методом неопределённых коэффициентов.

Д. Интегрирование простых дробей

а) дроби первого типа $\int\frac{A}{x-a}dx=\int\frac{A}{x-a}d(x-a)=A\ln|x-a|+c;$

б) дроби второго типа $\int\frac{A}{(x-a)^k}dx=A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+c;\ (k>1)$

в) дроби третьего типа

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\left|\begin{matrix}x^2+px+q=\\=(x+\frac{p}{2})^2-\frac{p^2}{4}+q\\x+\frac{p}{2}=t;\quad dx=dt\\x^2+px+q=t^2\pm a^2\end{matrix}\right|=\int\frac{M(t-\frac{p}{2})+N}{t^2\pm a^2}dt=M\int\frac{td(t^2\pm a^2)}{(t^2\pm a^2)2t}+(N-M\frac{p}{2})\int\frac{dt}{t^2\pm a^2}=....$$

г) дроби четвертого типа

$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^w}dx=\left|\begin{matrix}x^2+px+q=(x+\frac{p}{2})^2-\frac{p^2}{4}+q\\x+\frac{p}{2}=t;\quad dx=dt\\x^2+px+q=t^2\pm a^2\end{matrix}\right|=...$$

$$\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^n}=\frac{1}{2a^2(n-1)}\left(\frac{t}{(t^2+a^2)^{n-1}}+(2n-3)\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}}\right)-$$

рекуррентная формула.

План интегрирования рациональных дробей

Пример 1. Найти $\int\frac{x^5+x^4+x^3+14x^2-2x+5}{x^4-2x^3+5x^2}dx$.

Пример 2 . Найти $\int\frac{x^7}{x^4-1}dx$.

Пример 3. $\int\frac{7x^3-14x^2+15x+2}{x^3-2x^2+2x}dx$.

§ Интегрирование некоторых тригонометрических функций

Определение рациональной функции двух переменных	**Рациональной** функцией двух переменных $R(u,v)$ называется функция, полученная путём применения к аргументам u,v конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в **целую** степень.

Рекомендации для интегрирования тригонометрических функций

Примеры.

1.

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\left|\begin{matrix}t=tg\frac{x}{2};\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2};\\\sin x=\frac{2t}{1+t^2}\end{matrix}\right|=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+C.$$

2.

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx = \left| \begin{array}{l} t=\cos x; \quad dt=-\sin x dx; \\ \sin x dx=-dt; \\ \sin^3 x dx=\sin^2 x\cdot \sin x dx= \\ =(1-\cos^2 x)\sin x dx= \\ =(1-t^2)(-dt)=(t^2-1)dt \end{array} \right| =$$

$$=\int \frac{t^2-1}{t^4}dt=\int \frac{t^2}{t^4}dt-\int \frac{1}{t^4}dt=$$

$$=\frac{t^{-1}}{-1}-\frac{t^{-3}}{-3}+C=\frac{1}{3\cos^3 x}-\frac{1}{\cos x}+C.$$

3. $\int \sin^2 x\cos^4 x dx$.

$$\sin^2 x\cos^4 x=\frac{(4\sin^2 x\cos^2 x)\cos^2 x}{4}=$$

$$=\frac{\sin^2 2x}{4}\cdot\cos^2 x=\frac{1-\cos 4x}{8}\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}=$$

$$=\frac{1}{16}(1+\cos 2x-\cos 4x-\cos 4x\cos 2x)=$$

$$=\frac{1}{16}(1+\cos 2x-\cos 4x-\frac{1}{2}(\cos 6x+\cos 2x))=$$

$$=\frac{1}{16}(1-\cos 4x)+\frac{1}{32}(\cos 2x-\cos 6x).$$

$$\int \sin^2 x\cos^4 x dx=\int (\frac{1}{16}(1-\cos 4x)+\frac{1}{32}(\cos 2x-\cos 6x))dx=$$

$$=\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}+\frac{\sin 2x}{64}-\frac{\sin 6x}{192}+C.$$

4. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^4 x}dx$.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^4 x}dx=\left| \begin{array}{l} t=tgx; \quad dx=\frac{dt}{1+t^{2;}}; \\ \sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2}; \quad \cos^2 x=\frac{1}{1+t^2} \end{array}\right| =\int \frac{\frac{dt}{1+t^{2;}}}{\frac{t^2}{1+t^2}\cdot(\frac{1}{1+t^2})^2}$$

$$=\int \frac{(1+t^2)^2}{t^2}dt=\int \frac{1+2t^2+t^4}{t^2}dt=\frac{t^{-1}}{-1}+2t+\frac{t^3}{3}+C=2tgx-\frac{1}{tgx}+\frac{tg^3 x}{3}+C.$$

Первообразные в системе MathCAD и "вручную" получаются разные.
Проверить правильность получаемых результатов можно двумя способами:
1. разность между первообразными должна быть константой,
2. производная от первообразной должна быть равна подынтегральной функции.
Компьютерные первообразные обозначим F(x), найденные "вручную" - G(x), f(x) - подынтегральная функция.

1. $$\int \frac{1}{\sin(x)}\,dx \to \ln(\csc(x) - \cot(x)) \qquad \ln(\csc(x) - \cot(x)) - \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) \text{ simplify } \to 0$$

2. $$\int \frac{(\sin(x))^3}{(\cos(x))^4}\,dx \to \frac{1}{3}\cdot\frac{\sin(x)^4}{\cos(x)^3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{\sin(x)^4}{\cos(x)} - \frac{1}{3}\cdot\sin(x)^2\cdot\cos(x) - \frac{2}{3}\cdot\cos(x)$$

$$G2(x) := \frac{1}{\left[3(\cos(x))^3\right]} - \frac{1}{\cos(x)}$$

$$F2(x) := \frac{1}{3}\cdot\frac{\sin(x)^4}{\cos(x)^3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{\sin(x)^4}{\cos(x)} - \frac{1}{3}\cdot\sin(x)^2\cdot\cos(x) - \frac{2}{3}\cdot\cos(x)$$

$$F2(x) - G2(x) \text{ simplify } \to 0$$

3. $$\int (\sin(x))^2\cdot(\cos(x))^4\,dx \to \frac{-1}{6}\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)^5 + \frac{1}{24}\cdot\cos(x)^3\cdot\sin(x) + \frac{1}{16}\cdot\cos(x)\cdot\sin(x) + \frac{1}{16}\cdot x$$

$$F3(x) := \frac{-1}{6}\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)^5 + \frac{1}{24}\cdot\cos(x)^3\cdot\sin(x) + \frac{1}{16}\cdot\cos(x)\cdot\sin(x) + \frac{1}{16}\cdot x$$

$$G3(x) := \frac{1}{16}\cdot\left(x - \frac{\sin(4x)}{4} + \frac{\sin(2\cdot x)}{4} - \frac{\sin(6\cdot x)}{12}\right)$$

$$F3(x) - G3(x) \text{ simplify } \to 0$$

4. $$\int \frac{1}{(\sin(x))^2\cdot(\cos(x))^4}\,dx \to \frac{1}{3\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)^3} + \frac{4}{3\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)} - \frac{8}{3\cdot\sin(x)}\cdot\cos(x)$$

$$F4(x) := \frac{1}{3\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)^3} + \frac{4}{3\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)} - \frac{8}{3\cdot\sin(x)}\cdot\cos(x)$$

$$G4(x) := 2\tan(x) - \frac{1}{\tan(x)} + \frac{(\tan(x))^3}{3} \qquad F4(x) - G4(x) \text{ simplify } \to 0$$

Определение иррациональной функции	Функция называется алгебраической **иррациональной**, если она получена путём применения к аргументу *x* конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в **рациональную** степень.

Рекомендации для интегрирования иррациональных функций

Примеры:

5.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \left| \begin{matrix} x=t^6; & dx=6t^5dt; \\ \sqrt{x}=t^3; & \sqrt[3]{x}=t^2 \end{matrix} \right| = \int \frac{6t^5dt}{t^3+t^2} = 6\int \frac{t^3dt}{t+1}$$

$$\frac{t^3}{t+1} \text{ convert , parfrac , t } \to t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} =$$

$$= 6\int (t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1})dt = 6(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1|) + C =$$

$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x} - \ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right| + C.$$

Проверка ответа системой MathCAD:

$$f5(x) := \frac{1}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}}$$

$$G5(x) := 6\cdot\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{3} - \frac{x^{\frac{1}{3}}}{2} + x^{\frac{1}{6}} - \ln\left(x^{\frac{1}{6}} + 1\right)\right)$$

$$\frac{d}{dx}G5(x) \to \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} + \frac{1}{x^{\frac{5}{6}}} - \frac{1}{x^{\frac{5}{6}}\cdot\left(1 + x^{\frac{1}{6}}\right)}$$

$$f5(x) - \frac{d}{dx}G5(x) \text{ simplify } \to 0$$

6.

$$\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx = \left| \begin{array}{l} \dfrac{x-1}{x+1}=t^2; \quad x-1=t^2(x+1); \quad x(1-t^2)=t^2+1; \\ x=\dfrac{t^2+1}{1-t^2}; \quad dx=\dfrac{4t}{(1-t^2)^2}dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{t^2+1}{1-t^2}\cdot t\cdot \frac{4t}{(1-t^2)^2}dt = 4\int \frac{t^4+t^2}{(1-t)^3(1+t)^3}dt.$$

$$-4\cdot\frac{\left(t^4+t^2\right)}{(t-1)^3\cdot(t+1)^3} \text{ convert , parfrac , t } \rightarrow \frac{-1}{(t-1)^3}-\frac{3}{2\cdot(t-1)^2}-\frac{1}{2\cdot(t-1)}+\frac{1}{(t+1)^3}-\frac{3}{2\cdot(t+1)^2}+\frac{1}{2\cdot(t+1)}$$

Попытаемся поступить по-другому. Умножим и разделим подынтегральную функцию на сопряжённое знаменателю выражение $\sqrt{x-1}$.

$$\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx = \int \frac{x(x-1)}{\sqrt{x^2-1}}dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}dx - \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx.$$

Второй интеграл берётся непосредственно подведением подкоренного выражения под знак дифференциала.
Займёмся первым интегралом.

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}dx = \int \frac{(x^2-1)+1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \int \sqrt{x^2-1}dx + \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} =$$

$$= \int \sqrt{x^2-1}dx + \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + C.$$

(☺)

С другой стороны, если к этому интегралу применить интегрирование по частям, получим

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}dx = \left| \begin{array}{ll} u=x; & dv=\dfrac{xdx}{\sqrt{x^2-1}}; \\ du=dx; & v=\sqrt{x^2-1} \end{array} \right| = x\sqrt{x^2-1} - \int \sqrt{x^2-1}dx.$$

(☺ ☺)

Сложив (☺) и (☺ ☺), будем иметь

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}dx = \frac{1}{2}(\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + x\sqrt{x^2-1}) + C.$$

Следовательно,

$$\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx = \frac{1}{2}(\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + x\sqrt{x^2-1}) - \sqrt{x^2-1} + C.$$

7. Интеграл $\int \sqrt[3]{x^3+1}\,dx$ является дифференциальным биномом (см. ОК). Проверим условия теоремы Пафнутия Львовича Чебышева при $p=\frac{1}{3}; \quad m=0; \quad n=3.$

$p=\frac{1}{3}$ – не целое;

$\frac{m+1}{n}=\frac{1}{3}$ – не целое;

$\frac{m+1}{n}+p=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ – не целое.

Вывод: интеграл не берётся в элементарных функциях.

8. Интеграл $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$ является дифференциальным биномом (см. ОК). Проверим условия теоремы Пафнутия Львовича Чебышева

при $p=-\frac{1}{4}; \quad m=0; \quad n=4.$

$p=-\frac{1}{4}$ – не целое;

$\frac{m+1}{n}=\frac{1}{4}$ – не целое;

$\frac{m+1}{n}+p=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$ – целое.

Поэтому

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=\left|\begin{array}{l} 1+x^4=t^4x^4; \quad x^{-4}+1=t^4; \quad x^4=\frac{1}{t^4-1}; \\ -4x^{-5}dx=4t^3dt; \quad dx=-x^5t^3dt; \\ \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=\frac{-x^5t^3dt}{tx}=-\frac{t^2dt}{t^4-1} \end{array}\right|=-\int\frac{t^2dt}{t^4-1}$$

.

Правильную дробь разложим на сумму простых дробей

$$\frac{t^2}{t^4-1}=\frac{A_1}{t-1}+\frac{A_2}{t+1}+\frac{Mt+N}{t^2+1}$$

и найдём неопределённые коэффициенты:

$$\frac{t^2}{t^4-1} \text{ convert}, \text{parfrac}, t \;\rightarrow\; \frac{1}{4\cdot(t-1)}-\frac{1}{4\cdot(t+1)}+\frac{1}{2\cdot\left(t^2+1\right)}$$

$$t^2 = A_1(t+1)(1+t^2) + A_2(t-1)(1+t^2) + (Mt+N)(t^2-1).$$

$$t = 1 \Rightarrow 1 = 4A_1; \quad A_1 = \frac{1}{4};$$

$$t = -1 \Rightarrow 1 = -4A_2; \quad A_2 = -\frac{1}{4};$$

$$t^3: \quad 0 = A_1 + A_2 + M; \quad M = 0;$$

$$t^0: \quad 0 = A_1 - A_2 - N; \quad N = \frac{1}{2}.$$

Поэтому

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \left| \begin{array}{l} 1+x^4 = t^4x^4; \quad x^{-4}+1 = t^{4;}; \quad x^4 = \dfrac{1}{t^4-1}; \\ -4x^{-5}dx = 4t^3dt; \quad dx = -\,x^5t^3dt; \\ \dfrac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \dfrac{-\,x^5t^3dt}{tx} = -\dfrac{t^2dt}{t^4-1} \end{array} \right| = -\int \frac{t^2dt}{t^4-1} =$$

$$= -\left(\frac{1}{4}\int \frac{dt}{t-1} - \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1}\right) = -\left(\frac{1}{4}(\ln|t-1| - \ln|t+1|) + \frac{1}{2}arctgt\right) + C =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{x^{-4}+1}+1}{\sqrt[4]{x^{-4}+1}-1} - \frac{1}{2}arctg\sqrt[4]{x^{-4}+1} + C.$$

9.. Интеграл $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{(1+2x^2)^3}}$ является дифференциальным биномом (см. ОК). Проверим условия теоремы Пафнутия Львовича Чебышева

при $p = -\frac{3}{2}; \quad m = 3; \quad n = 2.$

$p = -\frac{3}{2}$ – не целое;

$\frac{m+1}{n} = \frac{4}{2} = 2$ – целое.

Поэтому

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{(1+2x^2)^3}} = \left| \begin{array}{l} 1+2x^2 = t^2; \quad 4xdx = 2tdt; \\ x^2 = \dfrac{t^2-1}{2}; \quad dx = \dfrac{tdt}{2x}; \\ \dfrac{x^3dx}{\sqrt{(1+2x^2)^3}} = \dfrac{x^3tdt}{t^3 2x} = \dfrac{(t^2-1)dt}{4t^2} \end{array} \right| = \int \frac{(t^2-1)dt}{4t^2} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\int dt - \int \frac{dt}{t^2}\right) = \frac{1}{4}\left(t + \frac{1}{t}\right) + C = \frac{1}{4}\left(\sqrt{1+2x^2} + \frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}\right) + C.$$

10. $\int \sqrt{3-2x-x^2}\,dx$.

Выделим полный квадрат в подкоренном выражении интеграла $\int \sqrt{3-2x-x^2}\,dx$, потом сделаем замену переменной и тригонометрическую подстановку (см. ОК).

$$\int \sqrt{3-2x-x^2}\,dx = \left|\begin{array}{l} 3-2x-x^2 = 3-(x^2+2x+1)+1 = 4-(x+1)^2 = 4-t^2; \\ x+1=t; \quad dx=dt \end{array}\right| = \int \sqrt{4-t^2}\,dt =$$

$$= \left|\begin{array}{l} t=2\sin u; \quad dt = 2\cos u\,du; \\ 4-t^2 = 4\cos^2 u \end{array}\right| = 4\int \cos^2 u\,du = 2\int (1+\cos 2u)\,du = 2\left(u+\frac{\sin 2u}{2}\right)+C =$$

$$= 2\left(\arcsin\frac{t}{2}+\sin u\cos u\right)+C = 2\left(\arcsin\frac{x+1}{2}+\frac{t}{2}\sqrt{1-\frac{t^2}{4}}\right)+C =$$

$$= 2\arcsin\frac{x+1}{2}+(x+1)\sqrt{1-\frac{(x+1)^2}{4}}+C = 2\arcsin\frac{x+1}{2}+\frac{(x+1)\sqrt{3-2x-x^2}}{2}+C.$$

При нахождении первообразной функции можно пользоваться следующим **алгоритмом**:

1. Попытаться применить непосредственное интегрирование и подведение функции под знак дифференциала;

2. Если это не приводит к успеху, определить класс подынтегральной функции (дробная рациональная, тригонометрическая, иррациональная функция) и применить соответствующие подстановки,

3. а если функция смешанных классов – интегрирование по частям.

Интегрирование тригонометрических и гиперболических функций

№ п/п	Подынтегральная функция	Подстановка	Вспомогательные преобразования	Итог
1	$R(\sin x, \cos x)$ – рациональная функция относительно $\sin x$, $\cos x$	Универсальная $t = tg\,\frac{x}{2}$	$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$; $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$; $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$	Подынтегральная функция рациональная относительно x
2	$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ Нечётная относительно $\cos x$	$t = \sin x$	$dt = \cos x\,dx$	
3	$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ Нечётная относительно $\sin x$	$t = \cos x$	$dt = -\sin x\,dx$	
4	$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ Чётная относительно $\cos x$ и $\sin x$	$t = tgx$	$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$; $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$; $dx = \frac{dt}{1+t^2}$	
		$t = ctgx$	$\sin^2 x = \frac{1}{1+t^2}$; $\cos^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$; $dx = -\frac{dt}{1+t^2}$	
5	$\sin^{2m} x \cdot \cos^{2n} x$ Степени чётные неотрицательные	$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$; $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$; $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$		Понижение степени
6	$\sin mx \cos nx$ $\cos mx \cos nx$ $\sin mx \sin nx$	$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x)$ $\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x)$ $\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x)$		Сумма функций
7	$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$; $chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$; $thx = \frac{shx}{chx}$; $cthx = \frac{chx}{shx}$; $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$; $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$; $ch^2 x - sh^2 x = 1$; $shxchx = \frac{1}{2}sh2x$; $sh^2 x = \frac{ch2x - 1}{2}$; $ch^2 x = \frac{ch2x + 1}{2}$ Интегрирование гиперболических функций аналогично интегрированию тригонометрических функций			

Интегрирование иррациональностей

<table>
<tr><th></th><th colspan="2">Подынтегральная функция</th><th>Подстановка</th><th>Итог</th></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="2">$R(x,(\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{p_1}{q_1}},(\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{p_2}{q_2}},...)$
R – рациональная функция,
$p_1,p_2,q_1,q_2,...$ – целые числа</td><td>$\frac{ax+b}{cx+d}=t^k$, где k — наименьшее общее кратное знаменателей показателей:
$k=НОК(q_1,q_2,...)$</td><td>Рациональная функция t</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2</td><td colspan="2">$R(x,\sqrt{a^2-x^2})$</td><td>$x=a\sin t$ или $x=a\cos t$
$dx=a\cos tdt$ или $dx=-a\sin tdt$
$(a^2-x^2=a^2\cos^2 t$ или $a^2-x^2=a^2\sin^2 t)$</td><td rowspan="3">Рациональная функция $\sin t$, $\cos t$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$R(x,\sqrt{a^2+x^2})$</td><td>$x=atgt$ или $x=actgt$
$dx=\frac{adt}{\cos^2 t}$ или $dx=\frac{-adt}{\sin^2 t}$
$(a^2+x^2=\frac{a^2}{\cos^2 t}$ или $a^2+x^2=\frac{a^2}{\sin^2 t})$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$R(x,\sqrt{x^2-a^2})$</td><td>$x=\frac{a}{\cos t}$ или $x=\frac{a}{\sin t}$
$dx=\frac{a\sin t}{\cos^2 t}dt$ или $dx=\frac{-a\cos t}{\sin^2 t}dt$
$(x^2-a^2=a^2tg^2t$ или $x^2-a^2=a^2ctg^2t)$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">3</td><td rowspan="3">Дифференциальный бином
$x^m(a+bx^n)^p$
по теореме Пафнутия Львовича Чебышева интегрируется в элементарных функциях только в трёх случаях:</td><td>p — целое число, m,n — дроби</td><td>$x=t^k$, $k=НОК(знаменателей\ m,n)$
$dx=kt^{k-1}dt$</td><td rowspan="3">Рациональная функция t</td></tr>
<tr><td>$\frac{m+1}{n}$ – целое</td><td>$a+bx^n=t^k$, k – знаменатель дроби p
$bnx^{n-1}dx=kt^{k-1}dt$, $x^m(a+bx^n)^p dx=x^m t^{kp}\frac{kt^{k-1}dt}{bnx^{n-1}}$</td></tr>
<tr><td>$\frac{m+1}{n}+p$ –
– целое</td><td>$a+bx^n=t^kx^n$, k – знаменатель дроби p
$ax^{-n}+b=t^k$, $-anx^{-n-1}dx=kt^{k-1}dt$,
$x^m(a+bx^n)^p dx=x^m(t^kx^n)^p\frac{kt^{k-1}dt}{-anx^{-n-1}}$, где
$x^{-n}=\frac{t^k-b}{a}$</td></tr>
<tr><td>4</td><td colspan="2">$\frac{1}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}$</td><td>$t=\frac{1}{mx+n}$</td><td>См. пункт 5</td></tr>
<tr><td>5</td><td colspan="2">$\frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$</td><td>$t=x+\frac{b}{2a}$, $ax^2+bx+c=at^2-\frac{b^2}{4a}+c$</td><td>Два табл-х инт-ла</td></tr>
</table>

Функции комплексного переменного

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ – модуль

x=*Re z* – действительная часть *z* – действств. число,
***y*=Im z** – мнимая часть *z* – **действительное число**

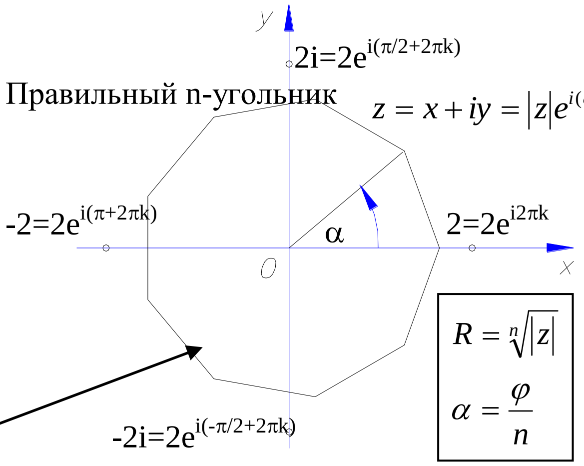
z=*x*+*iy* – алгебраическая форма записи компл. числа

Главное значение аргумента

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} arctg\,\dfrac{y}{x}, I, IV \text{ четверть} \\ arctg\,\dfrac{y}{x} + \pi, II \text{ четверть} \\ arctg\,\dfrac{y}{x} - \pi, \text{III четверть} \end{cases}$$

$-\pi < \varphi \le \pi \qquad Argz = \arg z + 2\pi k$

Правильный n-угольник



$z = x + iy = |z|e^{i(\varphi + 2\pi k)}$

$R = \sqrt[n]{|z|}$

$\alpha = \dfrac{\varphi}{n}$

Показательная форма записи компл. числа
$z = |z|e^{i\varphi}$

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{\varphi + 2\pi k}{n}}$, k = 0,1,…, n-1

Формула Эйлера
$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

Тригонометрическая форма записи комплексного числа
$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

$$ch\varphi = \frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2} \quad sh\varphi = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2}$$

$shz = -i\sin iz$

$chz = \cos iz$

$$Arc\sin z = w \to z = \sin w = \frac{e^{-iw} - e^{-iw}}{2i} = \frac{e^{2iw} - 1}{2ie^{iw}} \to e^{2iw} - 2ize^{wi} - 1 = 0 \to e^{iw} = iz \pm \sqrt{1 - z^2} \to$$

$$\to w = Arc\sin z = -iLn(iz \pm \sqrt{1 - z^2})$$

$Arc\sin z = -iLn(iz \pm \sqrt{1 - z^2})$

$Arc\cos z = -iLn(z \pm \sqrt{z^2 - 1})$

$Arctgz = -\dfrac{i}{2}Ln\dfrac{1 + iz}{1 - iz}$

$Arcctgz = \dfrac{i}{2}Ln\dfrac{z - i}{z + i}$

$Lnz = \ln|z| + i(\varphi + 2\pi k)$

$z^n = e^{nLnz}$

$a^z = e^{zLna}$