ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Дивергенцией*** *векторного поля в точке* M *называется предел отношения потока вектора через замкнутую поверхность, окружающую точку* M*, к объему тела, ограниченного этой поверхностью, при условии, что вся поверхность стягивается в точку* M.

ОБОЗНАЧАЮТ: $\mathrm{div}\,\bar{\mathbf{a}}(M)$.

Таким образом, если

$$\bar{\mathbf{a}}(M) = P(x;y;z)\mathbf{i} + Q(x;y;z)\mathbf{j} + R(x;y;z)\mathbf{k}$$

то

$$\mathrm{div}\,\bar{\mathbf{a}}(M) = \lim_{(S)\to M} \frac{\displaystyle\oint\!\!\!\oint_{(S)} P\,dydz + Q\,dxdz + R\,dxdy}{V}$$

Если $\mathrm{div}\,\bar{\mathbf{a}}(M)>0$, то точка M называется ***источником***.

Если $\mathrm{div}\,\bar{\mathbf{a}}(M)<0$, то точка M называется ***стоком***.

Величина $|\mathrm{div}\,\bar{\mathbf{a}}(M)|$ характеризует мощность источника (стока).

ТЕОРЕМА. *Пусть в области* $G \subset Oxyz$ *задано векторное поле*:

$$\bar{\mathbf{a}}(M) = P(x;y;z)\mathbf{i} + Q(x;y;z)\mathbf{j} + R(x;y;z)\mathbf{k}\ ,$$

причем функции P, Q, R *и их частные производные непрерывны в* G .

Тогда $\forall M \in G$ *существует* $\operatorname{div}\bar{\mathbf{a}}(M)$ *и справедлива формула*

$$\operatorname{div}\bar{\mathbf{a}}(M) = \frac{\partial P(M)}{\partial x} + \frac{\partial Q(M)}{\partial y} + \frac{\partial R(M)}{\partial z}$$

ОБОЗНАЧИМ:

$$\bar{\nabla} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z} \right\}$$

Этот символический вектор называют ***набла-вектором*** или ***оператором Гамильтона***.

$$\Rightarrow \operatorname{div}\bar{\mathbf{a}}(M) = (\bar{\nabla}, \bar{\mathbf{a}})$$

ТЕОРЕМА Остроградского – Гаусса в векторной форме.

Поток вектора $\bar{\mathbf{a}}(M) = P(x;y;z)\mathbf{i} + Q(x;y;z)\mathbf{j} + R(x;y;z)\mathbf{k}$ *изнутри замкнутой поверхности* (S) (*т.е. нормаль к поверхности внешняя*) *равен тройному интегралу от дивергенции этого вектора по телу, ограниченному поверхностью* (S):

$$\iint\limits_{+(S)} P dydz + Q dxdz + R dxdy = \iiint\limits_{(V)} \operatorname{div} \bar{\mathbf{a}}(x, y, z) dxdydz$$

ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ТЕОРЕМЫ Остроградского – Гаусса:

В поле скоростей текущей жидкости поток жидкости через замкнутую поверхность равен суммарной мощности всех источников и стоков ограниченных этой поверхность.

СВОЙСТВА ДИВЕРГЕНЦИИ

1) Если $\bar{\mathbf{a}}(M) = \text{const}$, то $\operatorname{div}\bar{\mathbf{a}}(M) = 0$;

2) Если C_1, C_2 – const, то $\operatorname{div}(C_1\bar{\mathbf{a}}_1 + C_2\bar{\mathbf{a}}_2) = C_1\operatorname{div}\bar{\mathbf{a}}_1 + C_2\operatorname{div}\bar{\mathbf{a}}_2$;

3) Если $u = u(x,y,z) = u(M)$, то

$$\operatorname{div}[u(M) \cdot \bar{\mathbf{a}}(M)] = u(M) \cdot \operatorname{div}\bar{\mathbf{a}}(M) + (\operatorname{grad} u(M), \bar{\mathbf{a}}(M))$$

4. Циркуляция. Ротор

Циркуляция и ротор – характеристики вращательной способности поля.

Пусть в области $G \subset Oxyz$ задано векторное поле:

$$\bar{\mathbf{a}}(M) = P(x;y;z)\mathbf{i} + Q(x;y;z)\mathbf{j} + R(x;y;z)\mathbf{k}$$

(ℓ) – замкнутый контур в G.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Циркуляцией векторного поля*** $\bar{\mathbf{a}}(M)$ (*вектора* $\bar{\mathbf{a}}(M)$) *по замкнутому контуру* (ℓ) *называется величина* C, *равная*

$$C = \oint\limits_{(\ell)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ЦИРКУЛЯЦИИ ВЕКТОРА

Если $\bar{\mathbf{a}}(M) = P(x;y;z)\mathbf{i} + Q(x;y;z)\mathbf{j} + R(x;y;z)\mathbf{k}$ – сила, под действием которой точка перемещается по контуру (ℓ), то циркуляция вектора $\bar{\mathbf{a}}(M)$ – работа силы.

Наибольшего значения циркуляция будет достигать если (ℓ) – векторная линия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Ротором векторного поля***

$$\bar{\mathbf{a}}(M) = P(x;y;z)\mathbf{i} + Q(x;y;z)\mathbf{j} + R(x;y;z)\mathbf{k}$$

называется вектор $[\overline{\nabla}, \bar{\mathbf{a}}]$

ОБОЗНАЧАЮТ: $\mathrm{rot}\,\bar{\mathbf{a}}(M)$

Имеем:

$$\mathrm{rot}\,\bar{\mathbf{a}}(M) = [\overline{\nabla}, \bar{\mathbf{a}}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ РОТОРА

Вектор $\mathrm{rot}\,\bar{\mathbf{a}}(M)$ указывает направление, ортогонально которому вращательная способность поля наибольшая.

ТЕОРЕМА (формула Стокса в векторной форме).

Циркуляция вектора $\bar{\mathbf{a}}(M) = P(x;y;z)\mathbf{i} + Q(x;y;z)\mathbf{j} + R(x;y;z)\mathbf{k}$ *по замкнутому контуру равна потоку ротора этого вектора через любую поверхность, ограниченную этим контуром* (говорят: *натянутую на этот контур*).

СВОЙСТВА РОТОРА

1) Если $\bar{\mathbf{a}}(M) = \text{const}$, то $\text{rot}\,\bar{\mathbf{a}}(M) = \bar{\mathbf{0}}$;

2) Если C_1, C_2 – const, то $\text{rot}(C_1\bar{\mathbf{a}}_1 + C_2\bar{\mathbf{a}}_2) = C_1\text{rot}\,\bar{\mathbf{a}}_1 + C_2\text{rot}\,\bar{\mathbf{a}}_2$;

3) Если $u = u(x,y,z) = u(M)$, то

$$\text{rot}[u(M)\cdot\bar{\mathbf{a}}(M)] = u(M)\cdot\text{rot}\,\bar{\mathbf{a}}(M) + [\text{grad}\,u(M)\,,\,\bar{\mathbf{a}}(M)]\ ;$$

4) $\text{rot}(\text{grad}\,u) = \bar{\mathbf{0}}$;

5) $\text{div}(\text{rot}\,\bar{\mathbf{a}}) = 0$.

5. Типы векторных полей

а) соленоидальное

Векторное поле $\bar{\mathbf{a}}(M)$ *называется* ***соленоидальным*** (трубчатым), *если* $\operatorname{div}\bar{\mathbf{a}}(M) \equiv 0$.

Физический смысл: векторное поле соленоидальное $\Leftrightarrow$ в нем нет источников и стоков.

СВОЙСТВА СОЛЕНОИДАЛЬНОГО ПОЛЯ

1) *Если векторное поле* $\bar{\mathbf{a}}(M)$ *является ротором некоторого векторного поля* (т.е. $\bar{\mathbf{a}}(M) = \operatorname{rot}\bar{\mathbf{b}}(M) = [\bar{\nabla}, \bar{\mathbf{b}}]$), *то оно является соленоидальным* .

Вектор $\bar{\mathbf{b}}(M)$ называют ***векторным потенциалом*** векторного поля $\bar{\mathbf{a}}(M)$.

2) *Поток векторного поля через любую замкнутую поверхность* (S) *равен нулю*.

б) потенциальное

Векторное поле $\bar{\mathbf{a}}(M)$ *называется* ***потенциальным*** *если*

$$\mathrm{rot}\,\bar{\mathbf{a}}(M) \equiv \bar{\mathbf{0}}$$

СВОЙСТВА ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ПОЛЯ

1) *Векторное поле* $\bar{\mathbf{a}}(M)$ *потенциальное* $\Leftrightarrow$ *оно является градиентом некоторого скалярного поля*, т.е.

$$\bar{\mathbf{a}}(M) = \mathrm{grad}\,u(M) = \bar{\nabla} u$$

Функцию $u(M)$ называют ***потенциалом*** векторного поля $\bar{\mathbf{a}}(M)$.

2) *Циркуляция потенциального векторного поля по любой замкнутой линии* (ℓ) *равен нулю*.

3) *Векторные линии потенциального поля незамкнуты*.

4) *В потенциальном поле векторные линии перпендикулярны к поверхностям уровня потенциала*

в) гармоническое

Векторное поле $\bar{\mathbf{a}}(M)$ *называется* ***гармоническим*** *если оно является соленоидальным и потенциальным одновременно*.

СВОЙСТВА ГАРМОНИЧЕСКОГО ПОЛЯ

1) *Поле* $\bar{\mathbf{a}}(M)$ *гармоническое* $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rot}\,\bar{\mathbf{a}}(M) \equiv \bar{\mathbf{0}}$ *и* $\mathrm{div}\,\bar{\mathbf{a}}(M) \equiv 0$.

2) *Если векторное поле* $\bar{\mathbf{a}}(M)$ *гармоническое, то* $\exists u(M)$ *такая, что*

$$\bar{\mathbf{a}}(M) = \mathrm{grad}\, u(M)$$

и

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \qquad (1)$$

Уравнение (1) называют ***уравнением Лапласа***.

Функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа, называется ***гармонической***.

Векторное поле $\bar{\mathbf{a}}(M)$, *не яляющееся соленоидальным, потенциальным или гармоническим, называется полем общего вида.*

ТЕОРЕМА (о представлении векторного поля общего вида в виде суммы потенциального и соленоидального полей).

Пусть $\bar{\mathbf{a}}(M) = P(M)\mathbf{i} + Q(M)\mathbf{j} + R(M)\mathbf{k}$ – *поле общего вида,*

$P(M)$, $Q(M)$, $R(M)$ – *непрерывно дифференцируемы.*

Тогда векторное поле $\bar{\mathbf{a}}(M)$ *может быть представлено в виде* $\bar{\mathbf{a}}(M) = \bar{\mathbf{a}}_1(M) + \bar{\mathbf{a}}_2(M)$,

где $\bar{\mathbf{a}}_1(M)$ – *потенциальное поле,*

$\bar{\mathbf{a}}_2(M)$ – *соленоидальное поле.*