ДОМАШНЯЯ РАБОТА №3

«Достаточные признаки сходимости числовых рядов с положительными членами. Признак Коши. Интегральный признак »

Краткий теоретический материал:

- *Признак Коши*

Если для ряда с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ существует предел $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$, то при $l<1$ ряд сходится, а при $l>1$ расходится .

Если $l=1$, то признак Коши не даёт ответа на вопрос о сходимости ряда.

Признак Коши применяется для сходимости ряда, если его общий член является функцией вида $u_n = (\varphi(n))^{\psi(n)}$.

- *Интегральный признак*

Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, члены которого являются значениями функции, удовлетворяющей условиям:

1) $f(x) = f(n)$ при $x = n$;

2) $f(x) > 0$ для $\forall x \in [1;+\infty)$;

3) $f(x)$ монотонно убывает при $x \in [1;+\infty)$;

4) $f(x)$ непрерывна при $x \in [1;+\infty)$.

Тогда несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ и числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходятся или расходятся одновременно.

1. Исследовать числовой ряд на сходимость с помощью признака Коши:

1.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n}$;

1.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{3n^2+5}\right)^{\frac{n}{2}}$;

1.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\ln n}}$;

1.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(4+\frac{1}{2\sqrt{n}+1}\right)^{-2n}$.

2. Исследовать числовой ряд на сходимость с помощью интегрального признака:

2.1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^3 n}$;

2.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$;

2.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(2n-3)^2}}$;

2.4. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$.