ДОМАШНЯЯ РАБОТА №2

«Однородные дифференциальные уравнения первого порядка»

Краткий теоретический материал:

• Уравнение вида $y' = f(x; y)$ называется *однородным*, если функция $f(x; y)$ является однородной функцией нулевой степени, т.е. $f(\alpha x; \alpha y) = f(x; y)$.

Метод решения: подстановка $y = u \cdot x$, где $u = u(x)$; $y' = u' \cdot x + u$.

Данная подстановка сводит однородное уравнение к уравнению с разделяющимися переменными.

Если уравнение имеет вид $M(x; y)dx + N(x; y)dy = 0$, то его сначала необходимо привести к виду $y' = f(x; y)$:

$$M(x; y)dx + N(x; y)dy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{M(x; y)}{N(x; y)} \Rightarrow y' = -\frac{M(x; y)}{N(x; y)} .$$

1. Какие из приведённых ниже уравнений являются однородными:

1.1. $x(x+2y)dx + (x^2 - y^2)dy = 0$;

1.2. $y' = \dfrac{2}{x+y}$;

1.3. $y' = e^{\frac{2y}{x}} - \dfrac{x}{y}$;

1.4. $(y + \sqrt{x^2 + y^2})dx - xdy = 0$.

2. Найти общее решение ДУ

2.1. $y' = \dfrac{x+3y}{2x}$;

2.2. $y' = \dfrac{y}{x} - \sin^2 \dfrac{y}{x}$;

2.3. $x(x+2y)dx + (x^2 - y^2)dy = 0$;

2.4. $y' = \dfrac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x}$.

3. Найти частное решение ДУ

3.1. $y' = e^{-\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x}, y(1) = 0$;

3.2. $y' = \dfrac{y}{x} \ln \dfrac{y}{x}, y(1) = 1$.