ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ ТИПОВОГО ВАРИАНТА ИДЗ ПО ТЕМЕ
«ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

1. Найти область определения функции

1.1. $y=\dfrac{4}{3x+4}+\dfrac{x}{2x^2+9}$; 1.2. $y=\sqrt{3x+6x^2}$;

1.3. $y=\ln(7-6x)$; 1.4. $y=\dfrac{\sqrt{2-3x}}{\ln(2x^2+3x-5)}$.

2. Вычислить пределы

2.1. $\lim\limits_{x\to-7}\dfrac{2x+5}{x^2-49}$; 2.2. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-25}{\sqrt{9-x}}$;

2.3. $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{2x^2+x-28}{x^3+64}$; 2.4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-2x^4+5}{3-x^3+9x^4}$;

2.5. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{64-x^3}{x^2-16}$; 2.6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3}{2x-4}-1\right)^{\frac{1+2x}{x-4}}$;

2.7. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3x^2+x-8}{x^2-5x+6}$; 2.8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-2x-5x^3}{4x^2-x+3}$;

2.9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x}{3x^2-2x^3+4}$; 2.10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3-2x}{1+4x}\right)^{\frac{2}{3x+1}}$;

2.11. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{2-5x}{x^2+4x+3}$; 2.12. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^3-27}{x^2-2x-3}$;

2.13. $\lim\limits_{x\to-4}\left(\dfrac{1}{x+4}-\dfrac{3}{x^2+4x}\right)$.

При нахождении области определения функции необходимо помнить

1. знаменатель дроби не должен равняться нулю: $f(x)=\dfrac{r(x)}{g(x)}\Rightarrow g(x)\neq0$;

2. выражение, стоящее под знаком корня чётной степени должно быть неотрицательным : $f(x)=\sqrt[2n]{g(x)}, n\in N\Rightarrow g(x)\geq0$;

3. область определения логарифмической функции – это множество всех положительных чисел : $f(x)=\log_a g(x)\Rightarrow g(x)>0$.

1. Найти область определения функции

1.1. $y=\dfrac{4}{3x+4}+\dfrac{x}{2x^2+9}$;

Решение

Данная функция является дробно-рациональной. Областью определения её является множество действительных чисел, за исключением тех, в которых знаменатель обращается в нуль. Найдём точки, которые необходимо исключить из области определения:

знаменатель первой дроби $3x+4$ обращается в нуль в точке $x=-\frac{4}{3}$; знаменатель второй дроби $2x^2+9$ не обращается в нуль ни в одной точке действительной оси (уравнение $2x^2+9=0$ не имеет действительных корней).

Таким образом, областью определения функции $y=\frac{4}{3x+4}+\frac{x}{2x^2+9}$ является множество действительных чисел, за исключением одной точки $x=-\frac{4}{3}$.

Ответ: $D(y): R\setminus\left\{-4/3\right\}$.

1.2. $y=\sqrt{3x+6x^2}$;

Решение

Так как выражение, стоящее под знаком квадратного корня должно быть неотрицательным, то для нахождения области определения функции $y=\sqrt{3x+6x^2}$ необходимо решить квадратное неравенство $3x+6x^2\geq 0$.

Для этого найдём нули функции $g(x)=3x+6x^2$:

$3x+6x^2=0\Rightarrow 3x(1+2x)=0\Rightarrow x_1=0, x_2=-0,5$.

Эти точки разбивают числовую ось на три промежутка, в каждом из которых функция $g(x)=3x+6x^2$ сохраняет постоянный знак.

В первом промежутке $(-\infty;-0,5)$ функция $g(x)>0$ (например, $g(-1)=3>0$) ;

во втором промежутке $(-0,5;0)$ функция $g(x)<0$ (например, $g(-0,1)=-0,24<0$);

в третьем промежутке $(0;\infty)$ функция $g(x)>0$ (например, $g(2)=30>0$).

Таким образом, областью определения функции будет объединение двух бесконечных полуинтервалов $(-\infty;-0,5]$ и $[0;\infty)$.

Ответ: $D(y):(-\infty;-0,5]\cup[0;\infty)$.

1.3. $y=\ln(7-6x)$;

Решение

Функция $y=\ln(7-6x)$ является логарифмической и её область определения будет совпадать с множеством значений решения неравенства $7-6x>0$.

Решим последнее неравенство: $7-6x>0\Rightarrow -6x>-7\Rightarrow x<\frac{7}{6}$. Таким образом, областью определения функции будет бесконечный интервал $\left(-\infty;7/6\right]$.

Ответ: $D(y):\left(-\infty;7/6\right]$.

1.4. $y=\frac{\sqrt{2-3x}}{\ln(2x^2+3x-5)}$.

Решение

Для нахождения области определения этой функции необходимо учесть, что выражение, стоящее под знаком квадратного корня должно быть неотрицательным ($2-3x \ge 0$); знаменатель дроби должен быть отличным от нуля ($\ln(2x^2+3x-5) \ne 0$); выражение, стоящее под знаком логарифма должно быть положительным ($2x^2+3x-5>0$).

Таким образом, областью определения функции $y=\dfrac{\sqrt{2-3x}}{\ln(2x^2+3x-5)}$ является множество значений переменной x, при которых одновременно выполняются три условия , что равносильно системе $\begin{cases} 2-3x \ge 0, \\ \ln(2x^2+3x-5) \ne 0, \\ 2x^2+3x-5>0 \end{cases}$.

Первое неравенство системы является линейным неравенством. Решим его: $2-3x \ge 0 \Rightarrow -3x \ge -2 \Rightarrow x \le 2/3$. Следовательно решением неравенства является бесконечный полуинтервал $\left(-\infty; 2/3\right]$.

Третье неравенство системы является квадратным неравенством:
$2x^2+3x-5>0 \Rightarrow (2x+5)(x-1)>0 \Rightarrow \ x \in \left(-\infty; -\dfrac{5}{2}\right) \cup (1; +\infty)$.

И наконец, условие $\ln(2x^2+3x-5) \ne 0$ исключает из области определения две точки. Найдём эти точки:
$$\ln(2x^2+3x-5)=0 \Rightarrow 2x^2+3x-5=1 \Rightarrow 2x^2+3x-6=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{57}}{4}$$

В итоге получаем $\begin{cases} x \in \left(-\infty; 2/3\right], \\ x_{1,2} \ne \dfrac{-3\pm\sqrt{57}}{4}, \\ x \in \left(-\infty; -\dfrac{5}{2}\right) \cup (1; +\infty) \end{cases}$. Решением этой системы будет являться совокупность следующих числовых промежутков
$x \in \left(-\infty; -\dfrac{3+\sqrt{57}}{4}\right) \cup \left(-\dfrac{3+\sqrt{57}}{4}; -2,5\right) \cup \left(1; \dfrac{-3+\sqrt{57}}{4}\right)$.

Ответ: $D(y)$: $x \in \left(-\infty; -\dfrac{3+\sqrt{57}}{4}\right) \cup \left(-\dfrac{3+\sqrt{57}}{4}; -2,5\right) \cup \left(1; \dfrac{-3+\sqrt{57}}{4}\right)$.

2. Вычислить пределы

При вычислении пределов , сначала необходимо в выражение, стоящее под знаком предела, вместо переменной подставить её предельное значение. В результате подстановки получим один из следующих результатов:

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\dfrac{a}{b}=c$ (т.е. определённое число)

2. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\left\{\dfrac{a}{0}\right\}=\infty$;

3. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \left\{\dfrac{a}{\infty}\right\} = 0$;

4. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \left\{\dfrac{\infty}{a}\right\} = \infty$;

5. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \left\{\dfrac{0}{0}\right\}$;

6. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$;

7. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \left\{\infty - \infty\right\}$.

В случаях 1-4 , полученные результаты и являются значениями пределов (т.е. ответом). В случаях 5-7 возникают неопределённости указанного типа и для их раскрытия необходимо использовать различные методы. В частности для раскрытия неопределённости вида $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$, которая ,как правило, возникает при вычислении предела от дроби , необходимо в числителе и знаменателе дроби выделить общий множитель $(x-a)$. Для этого используют одну из следующих формул сокращённого умножения :

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

или формулу разложения квадратного трёхчлена на множители

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 - корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Для раскрытия неопределённости вида $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$, которая также возникает при вычислении предела от дроби . Ограничимся рассмотрением случая, когда числитель и знаменатель дроби являются многочленами целой степени, т.е. $f(x) = P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$ и $g(x) = Q_m(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_0$. В этом случае можно воспользоваться следующим правилом:

$$\lim_{x\to a} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \begin{cases} 0, если.......n < m \\ \infty, если......n > m \\ \dfrac{a_n}{b_m}, если.....m = n \end{cases}.$$

И наконец, в случае неопределённости вида $\left\{\infty - \infty\right\}$, необходимо выражение, стоящее под знаком предела привести к общему знаменателю. В результате получим одну из неопределённостей, рассмотренного выше вида $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$, $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$.

Перейдём к вычислению пределов.

2.1. $\lim\limits_{x\to -7}\dfrac{2x+5}{x^2-49}$.

Решение

$$\lim_{x\to -7}\frac{2x+5}{x^2-49}=\left\{\frac{2\cdot(-7)+5}{(-7)^2-49}\sim\frac{-9}{0}\right\}=\infty.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to -7}\dfrac{2x+5}{x^2-49}=\infty.$

2.2. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{\sqrt{9-x}}$;

Решение

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{\sqrt{9-x}}=\frac{5^2-25}{\sqrt{9-5}}=\frac{0}{2}=0.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{\sqrt{9-x}}=0.$

2.3. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{2x^2+x-28}{x^3+64}$;

Решение

$\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{2x^2+x-28}{x^3+64}=\left\{\dfrac{2\cdot(-4)^2-4-28}{(-4)^3+64}\sim\dfrac{0}{0}\right\}$. Для раскрытия этого вида неопределённости разложим числитель и знаменатель дроби $\dfrac{2x^2+x-28}{x^3+64}$ на множители:

$2x^2+x-28=(x+4)(2x-7)$,

$x^3+64=(x+4)(x^2-4x+16)$.

Получим

$$\lim_{x\to -4}\frac{2x^2+x-28}{x^3+64}=\lim_{x\to -4}\frac{(x+4)(2x-7)}{(x+4)(x^2-4x+16)}=\lim_{x\to -4}\frac{2x-7}{x^2-4x+16}=$$

$$=\frac{2\cdot(-4)-7}{(-4)^2-4\cdot(-4)+16}=\frac{-21}{48}=-\frac{7}{16}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{2x^2+x-28}{x^3+64}=-\dfrac{7}{16}.$

2.4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-2x^4+5}{3-x^3+9x^4}$;

Решение

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-2x^4+5}{3-x^3+9x^4}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\left|\begin{matrix}m=2,\\ n=4\\ m<n\end{matrix}\right|=0$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2-2x^4+5}{3-x^3+9x^4}=0.$

2.5. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{64-x^3}{x^2-16};$

Решение

$$\lim_{x\to 4}\frac{64-x^3}{x^2-16}=\left\{\frac{64-4^3}{4^2-16}=\frac{0}{0}\right\}$$

Для раскрытия этого вида неопределённости разложим числитель и знаменатель дроби $\frac{64-x^3}{x^2-16}$ множители:

$$64-x^3=(4-x)(16+4x+16),$$

$$x^2-16=(x-4)(x+4).$$

Получаем

$$\lim_{x\to 4}\frac{64-x^3}{x^2-16}=\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)(16+4x+x^2)}{(x-4)(x+4)}=\lim_{x\to 4}\frac{-(x-4)(16+4x+x^2)}{(x-4)(x+4)}=\lim_{x\to 4}\frac{-16-4x-x^2}{x+4}=$$

$$=-\frac{48}{8}=-6$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 4}\frac{64-x^3}{x^2-16}=-6$

2.6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3}{2x-4}-1\right)^{\frac{1+2x}{x-4}};$

Решение

Для вычисления предела отдельно вычислим предел от основания и от степени:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{2x-4}-1\right)=\left\{\frac{3}{\infty}-1\right\}=-1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+2x}{x-4}\right)=\begin{vmatrix} m=1, \\ n=1, \\ m=n \end{vmatrix}=\frac{2}{1}=2.$$

В итоге получаем

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{2x-4}-1\right)^{\frac{1+2x}{x-4}}=(-1)^2=1.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3}{2x-4}-1\right)^{\frac{1+2x}{x-4}}=1$

2.7. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2+x-8}{x^2-5x+6};$

Решение

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2+x-8}{x^2-5x+6}=\left\{\frac{3\cdot 2^2+2-8}{2^2-5\cdot 2+6}=\frac{6}{0}\right\}=\infty.$$

Ответ: $\lim_{x\to 2}\frac{3x^2+x-8}{x^2-5x+6}=\infty$

2.8. $\lim_{x\to\infty}\frac{3-2x-5x^3}{4x^2-x+3}$;

Решение

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3-2x-5x^3}{4x^2-x+3}=\left|\begin{matrix} m=3, \\ n=2, \\ m>n \end{matrix}\right|=\infty.$$

Ответ: $\lim_{x\to\infty}\frac{3-2x-5x^3}{4x^2-x+3}=\infty$

2.9. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-5x}{3x^2-2x^3+4}$;

Решение

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-5x}{3x^2-2x^3+4}=\left|\begin{matrix} m=2, \\ n=2, \\ m=n \end{matrix}\right|=\frac{1}{3}.$$

Ответ: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-5x}{3x^2-2x^3+4}=\frac{1}{3}$

2.10. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3-2x}{1+4x}\right)^{\frac{2}{3x+1}}$;

Решение

Для вычисления предела отдельно вычислим предел от основания и от степени:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3-2x}{1+4x}\right)=\left|\begin{matrix} m=1, \\ n=1, \\ m=n \end{matrix}\right|=\frac{-2}{4}=-0,5;$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{1+3x}=\left\{\frac{2}{\infty}\right\}=0.$$

В итоге получаем $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3-2x}{1+4x}\right)^{\frac{2}{3x+1}}=(-0,5)^0=1.$

Ответ: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3-2x}{1+4x}\right)^{\frac{2}{3x+1}}=1.$

2.11. $\lim_{x\to -3}\frac{2-5x}{x^2+4x+3}$;

Решение

$$\lim_{x\to -3}\frac{2-5x}{x^2+4x+3}=\left\{\frac{2-5\cdot(-3)}{(-3)^2+4\cdot(-3)+3}=\frac{17}{0}\right\}=\infty .$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2-5x}{x^2+4x+3}=\infty$

2.12. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x^2-2x-3}$;

Решение:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x^2-2x-3}=\left\{\frac{3^3-27}{3^2-2\cdot 3-3}=\frac{0}{0}\right\}$$

Для раскрытия этого вида неопределённости разложим числитель и знаменатель дроби $\dfrac{x^3-27}{x^2-2x-3}$ множители:

$x^3-27=(x-3)(x^2+3x+9)$,

$x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$.

Получим

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)(x+1)}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2+3x+9}{x+1}=\frac{3^2+3\cdot 3+9}{3+1}=\frac{27}{4}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x^2-2x-3}=\dfrac{27}{4}$

2.13. $\lim\limits_{x\to -4}\left(\dfrac{1}{x+4}-\dfrac{3}{x^2+4x}\right)$.

Решение

$$\lim_{x\to -4}\left(\frac{1}{x+4}-\frac{3}{x^2+4x}\right)=\left\{\frac{1}{0}-\frac{3}{0}\sim\infty-\infty\right\}$$

Для раскрытия этого вида неопределённости приведём дроби к общему знаменателю:

$$\lim_{x\to -4}\left(\frac{1}{x+4}-\frac{3}{x^2+4x}\right)\lim_{x\to -4}\left(\frac{1}{x+4}-\frac{3}{x(x+4)}\right)=\lim_{x\to -4}\frac{x-3}{x(x+4)}=\left\{\frac{-7}{0}\right\}=\infty.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to -4}\left(\dfrac{1}{x+4}-\dfrac{3}{x^2+4x}\right)=\infty$