

2. ОСНОВЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

2.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

В процессе эксплуатации машин и механизмов элементы конструкции в результате действия на них внешних сил в той или иной степени изменяют свои первоначальные размеры и форму, то есть *деформируются*. Деформации, в силу своей малости по сравнению с абсолютными размерами тела, не оказывают существенного влияния на законы его равновесия и движения, вследствие чего в теории механизмов и машин ими пренебрегают. Однако без изучения этих деформаций невозможно определить условия, при которых может произойти разрушение детали или недопустимое изменение ее формы или размеров.

Под прочностью понимают *способность конструкции, а также ее частей и деталей, выдерживать, не разрушаясь, действие внешней нагрузки*.

Изложение *методов расчета* элементов конструкций *на прочность* составляет *первую* задачу науки о сопротивлении материалов.

Во многих случаях приходится определять те изменения формы и размеров (*деформации*), которые возникают в элементах конструкций при действии нагрузок. Абсолютно твердых, недеформирующихся тел в природе не существует. Поэтому во многих случаях величину деформаций, несмотря на их малую величину по сравнению с размерами самой детали, приходится ограничивать, так как в противном случае нормальная эксплуатация конструкции может стать невозможной. Например, при механической обработке детали на станке вследствие деформации самой детали и элементов станка может произойти недопустимое снижение точности обработки.

Способность конструкции и ее элементов сопротивляться изменению своих первоначальных размеров и формы называется *жесткостью*.

Изложение *методов расчета* элементов конструкций *на жесткость* составляют *вторую* задачу науки о сопротивлении материалов.

Имеется ряд задач, в которых основное внимание приходится уделять вопросам *устойчивости*, под которой понимается *способность элемента конструкции сопротивляться возникновению больших отклонений от невозмущенного равновесия при малых возмущающих воздействиях*. Возмущающим воздействием в этом случае является малое изменение нагрузки. Следовательно, понятие устойчивости может быть сформулировано также следующим образом.

Равновесие элемента устойчиво, если малому изменению нагрузки соответствует малое изменение деформаций.

И наоборот, *равновесие неустойчиво, если ограниченный рост нагрузки сопровождается неограниченным ростом деформаций.*

Признаком потери устойчивости является также внезапная смена одной формы равновесия другой.

В качестве примера приведем случай сжатия тонкого элемента силой, действующей вдоль его оси. До какого-то определенного (критического) значения сжимающей силы, зависящего от материала, размеров и условий закрепления элемента, он устойчиво сохраняет прямолинейную форму. При достижении же силой критического значения наряду с прямолинейной становится возможной и *искривленная форма равновесия* – более опасная для элемента.

Потеря устойчивости может иметь место при значениях нагрузок, совершенно безопасных с точки зрения прочности или жесткости элемента.

Создание *методов расчетов на устойчивость*, которые должны обеспечить отсутствие качественного изменения характера деформации элементов конструкций, составляют *третью* задачу науки о сопротивлении материалов.

Основной задачей науки о сопротивлении материалов является *разработка методов расчета* различных элементов сооружений и машин с целью получения их оптимальных весогабаритных характеристик.

2.2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

2.2.1. ВНЕШНИЕ И ВНУТРЕННИЕ СИЛЫ

При изучении сопротивления материалов активные внешние силы, действующие на рассматриваемое тело (элемент конструкции), называют *нагрузками*.

Нагрузки, действующие на сооружения и их элементы, *по способу приложения* нагрузки подразделяют на:

- *сосредоточенные;*
- *распределенные.*

К *сосредоточенным* относят силы, которые передаются на элемент конструкции через площадку *небольших размеров (по сравнению с размерами всего элемента)*. Характеристикой сосредоточенной силы F является ее *модуль*, имеющий размерность, например, ньютон. При расчетах сосредоточенную силу считают приложенной в *точке*. Это допущение достаточно условно, так как в природе сосредоточенных сил не бывает. Все реальные силы распределены по некоторой площади или объему. Например, давление колеса вагона на рельс практически передается через *небольшую площадку*, получающуюся в результате деформации рельса и колеса. Однако для определения внутренних сил, возник-

кающих в рельсе и колесе на некотором расстоянии от площади передачи давления, можно, как это будет показано позднее (принцип Сен-Венана), распределенную нагрузку заменить сосредоточенной равнодействующей силой, что значительно упрощает расчет.

К *распределенным* относятся *нагрузки, приложенные непрерывно на некоторой длине или площади*. На схемах такие нагрузки изображают в виде графиков, показывающих изменение нагрузки по длине или поверхности тела. Характеристикой распределенной нагрузки является ее интенсивность q , то есть величина нагрузки, которая приходится на единицу площади или длины. В первом случае величина q измеряется, например, в Н/м^2 , а во втором – в Н/м . Нагрузки могут быть *распределены* не только *по поверхности* или *длине*, но и *по объему* (силы веса, силы инерции, магнитные силы и др.). Они также характеризуются интенсивностью, имеющей размерность, например, Н/м^3 . Распределенные *по длине* элемента конструкции нагрузки, как и сосредоточенные силы, реально в природе не существуют, а получаются в результате схематизации действительных нагрузок. В ряде случаев такая схематизация приводит к появлению пар сил (моментов).

По *характеру воздействия* на элементы конструкции нагрузки подразделяют на:

- *статические*;
- *динамические*.

Статическими называются *нагрузки, которые изменяют свою величину или точку приложения (или направление) с очень маленькой скоростью, поэтому возникающими при этом ускорениями можно пренебречь*. При действии таких нагрузок колебания сооружений и их частей пренебрежимо малы.

Динамическими называются *нагрузки, изменяющиеся во времени с большой скоростью* (например, *ударные* нагрузки). Действие таких нагрузок сопровождается возникновением колебаний сооружений. При колебании же вследствие изменения скорости колеблющихся масс возникают силы инерции, пропорциональные (по второму закону Ньютона) колеблющимся массам и ускорениям. Величина этих сил инерции может многократно превосходить те же нагрузки, приложенные статически, и ими при расчетах пренебрегать нельзя.

Динамические нагрузки делятся на:

- *мгновенно приложенные*,
- *ударные*,
- *повторно-переменные*.

В частных случаях изменение нагрузки F может носить *периодически повторяющийся характер*, так что через одни и те же промежутки

времени t максимальные значения нагрузки будут повторяться. Нагрузки такого типа называются нагрузками с *установившимся режимом* или *повторно-периодическими*.

Однако во многих, других случаях изменение нагрузки во времени не имеет установившегося характера. Таковы нагрузки, действующие на детали автомобилей, тракторов, станков, нагрузки, действующие на сооружения, нагрузки от давления ветра, снега и т.п. Эти нагрузки называются *повторными нагрузками неуставившихся режимов*.

В машиностроении расчетные нагрузки определяются в зависимости по *номинальным* значениям мощности, угловой скорости отдельных ее деталей, силы тяжести, сил инерции и т.п. Например, при расчете деталей трехтонного автомобиля учитывают номинальный полезный груз, равный трем тоннам. Возможность же *перегрузки* автомобиля учитывают тем, что размеры сечения деталей назначают с некоторым *запасом прочности*.

Сопротивление тел, оказываемое действующим на них нагрузкам, обуславливается наличием в этих телах *внутренних сил*, природа которых объясняется молекулярным строением материи. Внутренние силы существуют всегда, и именно они являются причиной существования тела как такового. При действии на тело *внешних сил* *внутренние* силы изменяются – появляются *дополнительные внутренние* силы, которые в дальнейшем будем называть *усилиями*. Эти усилия и являются предметом изучения науки о сопротивлении материалов, так как именно их величина характеризует способность тел сопротивляться внешним воздействиям.

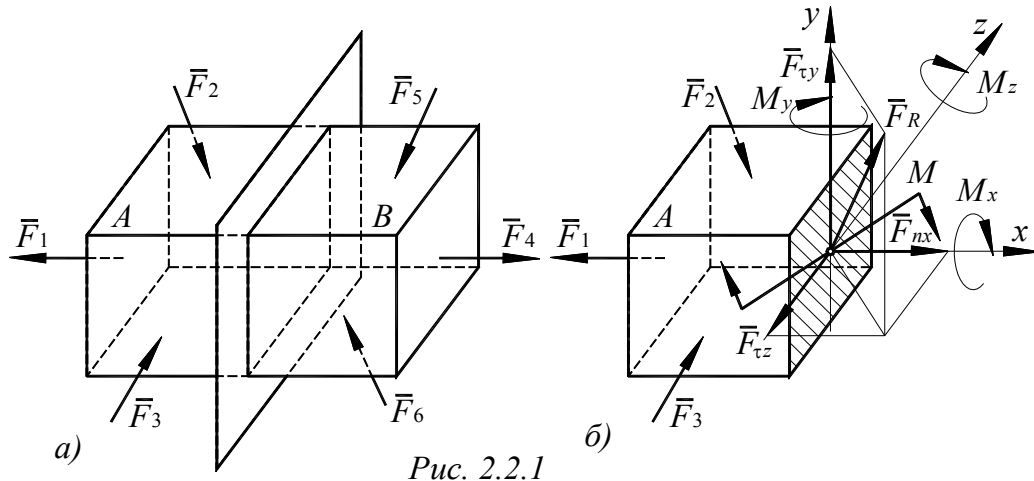
Для определения величины внутренних усилий пользуются *методом сечений*, суть которого заключается в следующем.

1. Тело, на которое действует какая-либо *внешняя* нагрузка, в интересующем нас месте мысленно рассекается на две части (рис. 2.2.1, *а*).
2. Отбрасывается условно одна из частей (например, часть *В*).
3. Действие отброшенной части *В* на оставшуюся *А* заменяется *внутренними* силами.

Так как тело под действием внешних сил находилось в состоянии статического равновесия, то эти внутренние силы, являющиеся внешними для оставшейся части, должны уравновесить часть *А* с приложенными к ней внешними силами (рис. 2.2.1, *б*).

Таким образом, *внутренние* силы сводятся к категории *внешних сил*, для определения которых можно использовать уравнения *статики* твердого тела.

Со стороны отброшенной части на часть *А* действует система сил, распределенных по всему сечению. Эту систему в общем случае можно привести к одной силе F_R (главному вектору) и к одной паре сил M (главному моменту) (рис. 2.2.1, *б*).



Выбрав систему координатных осей x, y, z с началом в центре тяжести сечения, разложим главный вектор и главный момент на составляющие по указанным осям.

Эти составляющие имеют следующие обозначения и названия:

$F_{nx} = F_n$ – продольная сила;

F_{τ_y} и F_{τ_z} – поперечные силы соответственно в плоскостях yx и xz ;

$M_x = T_k$ – крутящий момент;

M_y и M_z – изгибающие моменты соответственно в плоскостях xz и xy .

Этим видам внутренних усилий соответствуют следующие виды деформации:

1) *растяжение* или *сжатие* – при появлении в поперечных сечениях только продольных усилий F_n ;

2) *сдвиг* – при появлении в поперечных сечениях только поперечных усилий F_{τ_y} и F_{τ_z} ;

3) *кручение* – в поперечных сечениях возникает только крутящий момент T_k ;

4) *изгиб* – в сечении действует только изгибающий момент M_y или M_z .

Появление в поперечных сечениях сразу нескольких внутренних усилий приводит к сложным видам деформации (сложному сопротивлению).

2.2.2. ПОНЯТИЕ О НАПРЯЖЕНИЯХ

Внутренние усилия, которые были найдены выше из уравнений статики, не являются реальными, а представляют собой лишь статический эквивалент этих усилий, распределенных по всей площади рас-

смаатриваемого сечения. Иначе говоря, найденные усилия являются равнодействующими действительных внутренних сил, возникающих в каждой точке сечения.

В сечении части A (рис. 2.2.1, б) выделим элементарную площадку dA (рис. 2.2.2). В силу малости элемента можно считать, что внутренние усилия, приложенные к его различным точкам, одинаковы по величине и направлению. Тогда равнодействующая их $\overline{dF_R}$ будет проходить через центр тяжести площади элемента dA , координаты которого равны x и z . Проектируя вектор $\overline{dF_R}$ на оси x , y и z , получим элементарную продольную силу $\overline{dF_n}$ и элементарные поперечные силы $\overline{dF_{\tau_y}}$ и $\overline{dF_{\tau_z}}$. Разделив эти усилия на площадь dA , получим величины внутренних сил, приходящихся на единицу площади (рис. 2.2.3):

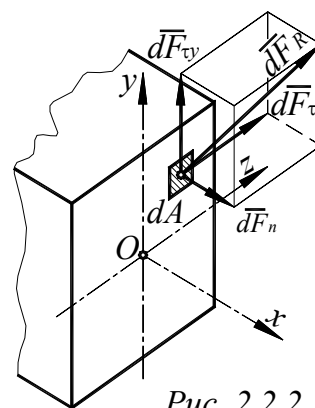


Рис. 2.2.2

$$\sigma_x = \frac{dF_n}{dA}; \quad (2.2.1)$$

$$\tau_{xy} = \frac{dF_{\tau_y}}{dA}; \quad (2.2.2)$$

$$\tau_{xz} = \frac{dF_{\tau_z}}{dA}. \quad (2.2.3)$$

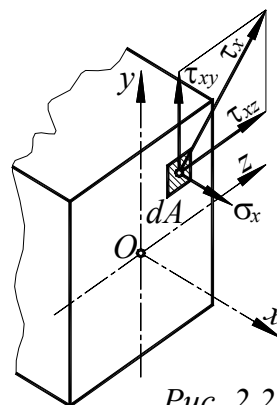


Рис. 2.2.3

Эти величины называют *напряжениями в точке поперечного сечения тела* (с координатами y, z):

- σ – нормальное напряжение;
- τ – касательное напряжение.

Нормальные и касательные напряжения представляют собой интенсивность распределения соответственно нормальных и поперечных сил, действующих по элементарной площадке в рассматриваемой точке.

У нормального напряжения ставится индекс, указывающий, какой координатной оси параллельно данное напряжение.

Растягивающее нормальное напряжение принято считать положительным, а сжимающее нормальное напряжение – отрицательным.

Обозначения касательных напряжений снабжены двумя индексами:

- *первый индекс* указывает, какой оси параллельна нормаль к площадке действия данного напряжения,
- *второй индекс* указывает, какой оси параллельно само напряжение.

Разложение полного напряжения на нормальное и касательное имеет физический смысл.

Нормальное напряжение возникает, когда частицы материала стремятся отдалиться друг от друга или, наоборот, сблизиться.

Касательные напряжения связаны со сдвигом частиц материала по плоскости рассматриваемого сечения.

Через любую точку упругого тела, подверженного действию внешней нагрузки, можно провести бесчисленное множество сечений (площадок), по которым в общем случае будут действовать как нормальные, так и касательные напряжения. При этом величина и направление указанных напряжений в каждом конкретном случае будут зависеть от ориентации площадки.

Для исследования напряжений обычно выделяют элемент в виде бесконечно малого параллелепипеда (рис. 2.2.4). На его гранях действуют внутренние силы, заменяющие воздействие удаленной части тела и вызывающие появление напряжений. Полные напряжения на гранях можно разложить на нормальные и касательные составляющие.

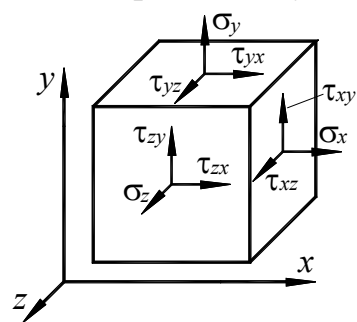


Рис. 2.2.4

Если ориентацию выделенного элемента изменить, то действующие на его гранях напряжения будут также изменяться. При этом *можно найти хотя бы одно такое положение элемента, при котором на его гранях касательные напряжения равны нулю*.

Грани элемента, по которым касательные напряжения не действуют, называют *главными площадками*, а нормальные напряжения на них – *главными напряжениями*. Доказано, что в каждой точке тела имеются, по крайней мере, *три главные площадки*, причем они всегда взаимно перпендикулярны, то есть в каждой точке будут также *три главных напряжения*. Главные напряжения принято обозначать так, чтобы наибольшее из них (алгебраически) имело индекс «1», а наименьшее – индекс «3» (рис. 2.2.5). В зависимости от величины главных напряжений различают следующие виды напряженного состояния в точке:

— *линейное*, или *одноосное* – только одно главное напряжение (любое из трех) отлично от нуля, а два других равны нулю (рис. 2.2.5, а);

— *плоское*, или *двухосное* – два главных напряжения отличны от нуля (рис. 2.2.5, б);

— *объемное*, или *трехосное* – все главные напряже-

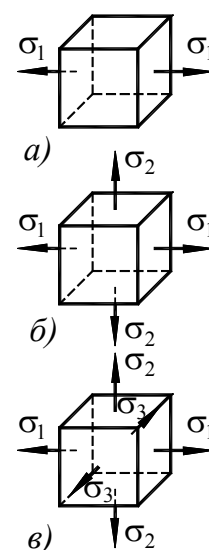


Рис. 2.2.5

ния отличны от нуля (рис. 2.2.5, в).

Зная напряженное состояние в любой точке детали, можно оценить прочность этой детали.

В *простейших* случаях оценка прочности элементов конструкций производится или по наибольшему нормальному напряжению (расчет на растяжение или сжатие), или по наибольшему касательному напряжению (расчет на сдвиг).

Условия прочности в этих случаях записываются в виде:

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_p, \quad (2.2.4)$$

$$\tau_{\max} \leq \tau_p, \quad (2.2.5)$$

где σ_p и τ_p – допускаемые значения нормального и касательного напряжений, зависящие от материала и условий работы рассчитываемого элемента.

Величины σ_p и τ_p выбираются с таким расчетом, чтобы была обеспечена нормальная эксплуатация конструкции.

В более сложных случаях оценка прочности производится по приведенному напряжению в соответствии с той или иной гипотезой прочности, которые будут рассмотрены в разделе «Сложное сопротивление».

2.2.3. КОНСТРУКТИВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

Конструкции, с которыми инженеру приходится встречаться на практике, имеют в большинстве случаев сложную форму, отдельные элементы которой можно свести к следующим *простейшим типам*:

1. *Брусья* – элементы конструкций, у которых один размер (длина) значительно больше других (рис. 2.2.6, а).

Основными геометрическими характеристиками бруса являются его *ось* и *поперечное сечение*.

Ось бруса – линия, соединяющая центры тяжести всех его поперечных сечений. В зависимости от формы оси брусья могут быть либо *прямолинейными* (рис. 2.2.6, а), либо *криволинейными* (рис. 2.2.6, б). Брус с *прямолинейной осью* часто называют *стержнем*.

Плоская фигура, имеющая свой центр тяжести на оси и нормальная к ней, называется его *поперечным сечением*.

Оболочки – тела, ограниченные криволинейными поверхностями, расположенными на близком расстоянии друг от друга. У этих элементов конструкции один размер значительно меньше двух других (рис. 2.2.6, в).

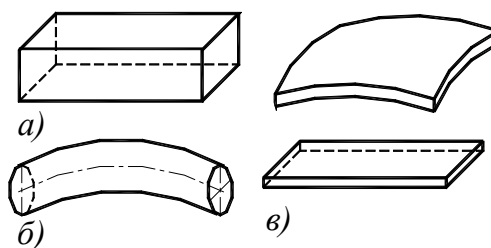


Рис. 2.2.6

Плоские оболочки называют плитами или пластинами.

Массив – тело, у которого все три размера одного порядка.

В разделе «Основы сопротивления материалов» рассматриваются преимущественно тела, имеющие форму брусьев постоянного сечения, и простейшие системы, состоящие из них, обладающие *достаточной жесткостью*, то есть *не претерпевающие значительных деформаций при нагрузке*. В расчетных схемах брусья обычно изображают одной осевой линией с идеализированными опорами.

В *гибких стержнях* возникают столь значительные деформации, что с ними нельзя не считаться даже при определении опорных реакций. Методы расчета *гибких* брусьев, пластинок, оболочек и массивных тел рассматриваются в курсе «Прикладная теория упругости» без упрощающих гипотез, которые вводятся в данном разделе (см. ниже).

Способы расчета *стержневых* систем изучаются в курсе «*Строительная механика*».

2.2.4. ОСНОВНЫЕ ГИПОТЕЗЫ И ДОПУЩЕНИЯ

Из-за сложности задачи расчета элементов конструкций в курсе сопротивления материалов принимают некоторые *упрощающие* гипотезы и допущения, касающиеся свойств материала, нагрузок и характера взаимодействия детали и нагрузок. Экспериментальная проверка расчетных зависимостей, полученных на основе приведенных ниже гипотез и допущений, показала, что погрешность, вносимая ими, незначительна и для практических целей ею можно пренебречь.

Гипотеза о сплошном строении тела.

Предполагают, что материал полностью заполняет объем тела (пустоты отсутствуют).

Это допущение вполне оправдано, так как большинство конструктивных материалов имеет мелкозернистую структуру, что позволяет без существенной погрешности считать их строение сплошным, непрерывным.

Гипотеза об однородности материала.

Предполагают, что все частицы материала обладают одинаковыми свойствами, то есть свойства материала не зависят от размеров тела.

Металлы обладают высокой однородностью, то есть имеют во всех точках детали практически одинаковые свойства. В пластмассах же свойства смолы отличаются от свойств наполнителя.

Тем не менее, как показывает опыт, расчеты, основанные на допущении об однородности материала детали, для основных конструктивных материалов дают удовлетворительные результаты.

Гипотеза об изотропности материала.

Предполагают, что в любом направлении свойства материала одинаковы.

У материалов, имеющих мелкозернистую структуру, благодаря большому количеству кристаллов, расположенных в беспорядке, свойства в разных направлениях выравниваются, «осредняются», и можно считать эти материалы практически *изотропными*.

Материалы, свойства которых в разных направлениях различны, называются *анизотропными*. Например, для меди прочность кристаллов в разных направлениях различается более чем в 3 раза.

Гипотеза об идеальной упругости материала.

Под идеальной упругостью понимают способность тела восстанавливать свою первоначальную форму и размеры после устранения причин, вызвавших деформацию тела.

Гипотеза плоских сечений (гипотеза Бернулли).

Поперечные сечения, плоские и нормальные к оси бруса до приложения к нему нагрузки, остаются плоскими и нормальными к его оси после деформации.

Допущение о малости деформаций.

Деформации тела настолько малы по сравнению с его размерами, что не оказывают существенного влияния на взаимное расположение нагрузок.

Допущение о линейной зависимости между деформациями и нагрузками.

Предполагают, что для большинства материалов перемещения, являющиеся результатом деформации тела, прямо пропорциональны вызвавшим их нагрузкам.

Допущение об отсутствии начальных усилий.

В теле до приложения нагрузки нет внутренних (начальных) усилий.

Это допущение полностью не выполняется ни для одного материала. Например, в стальных деталях имеются внутренние силы, вызванные неравномерностью остывания. Величина этих сил конструктору обычно неизвестна. В тех случаях, когда есть основания предполагать, что эти силы значительны, их определяют экспериментальным путем.

Принцип независимости действия сил (принцип суперпозиции или принцип наложения).

Какая-либо величина, например усилие или перемещение в любом элементе конструкции, вызванные различными факторами (несколькими силами, воздействием температуры), может быть получена как сумма величин, найденных от действия каждого из этих факторов в отдельности и в любом порядке.

Под словами «результат воздействия» в зависимости от конкретной задачи следует понимать деформации, внутренние силы, возникающие в теле, и перемещения отдельных точек. Необходимо иметь в виду, что действие отдельных сил системы должно рассматриваться вместе с соответствующими им реакциями связей.

Принцип независимости действия сил к деформируемым телам применим лишь при следующих *двух условиях*:

— *перемещения* точек приложения сил *малы* по сравнению с размерами тела;

— *перемещения*, являющиеся результатом деформации тела, *линейно* зависят от действующих сил (такие тела называют *линейно деформируемыми* или подчиняющимися закону Гука).

В обычных конструкциях оба эти условия выполняются и поэтому принцип независимости действия сил широко используется при силовом расчете конструкций.

Принцип Сен-Венана.

Если тело нагружается статически эквивалентными системами сил и размеры области их приложения невелики (по сравнению с размерами тела), то в сечениях, достаточно удаленных от мест приложения нагрузок, величина напряжений весьма мало зависит от способа нагружения.

Этот принцип во многих случаях позволяет производить замену одной системы сил другой системой, статически эквивалентной, что может упростить расчет.

Например, при расчете рельса, как балки, опирающейся на множество опор (шпал) (рис. 2.2.7), фактическую нагрузку от колеса, распределенную по площадке контакта по некоторому закону (σ), можно заменить сосредоточенной (равнодействующей) силой \bar{F}_r .

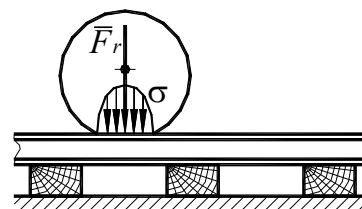


Рис. 2.2.7

2.3. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

2.3.1. ВНУТРЕННИЕ УСИЛИЯ

Рассмотрим случай *осевого* (центрального) растяжения или сжатия, когда внешние силы действуют по оси стержня (рис. 2.3.1).

Для определения *внутренних* усилий (продольных сил) применим *метод сечений*. Проведем какое-нибудь сечение, например *a-a*, и рассмотрим равновесие нижней отсеченной части. Воздействие верхней отброшенной части на нижнюю заменим продольной силой и предвари-

тельно направим ее *от сечения*, то есть предположим, что сила является *растягивающей*.

Составим *уравнение равновесия*.

Проектируя все силы, действующие на нижнюю часть, на направление, параллельное оси стержня, и приравнивая сумму проекций нулю, получаем:

$$F_{n1} + F_1 - F_2 = 0,$$

откуда:

$$F_{n1} = -(F_1 - F_2).$$

Знак «минус» показывает, что направление силы F_{n1} следует изменить на обратное, то есть продольная сила будет в данном случае не *растягивающей*, как мы предположили, а *сжимающей*.

Аналогично найдем продольную силу в сечении *b-b*:

$$F_{n2} = F_2 \text{ (растяжение).}$$

Условимся продольную силу, соответствующую *растяжению*, считать *положительной*.

Наглядное представление о законе изменения продольных сил по длине стержня дает график (эпюра продольных сил), ось абсцисс которого проводится параллельно оси стержня, а ось ординат ей перпендикулярна. По оси ординат в выбранном масштабе откладывают значения продольных сил (с учетом знаков) в поперечных сечениях стержня.

Для рассмотренного случая эпюра F_n представлена на рис. 2.3.1.

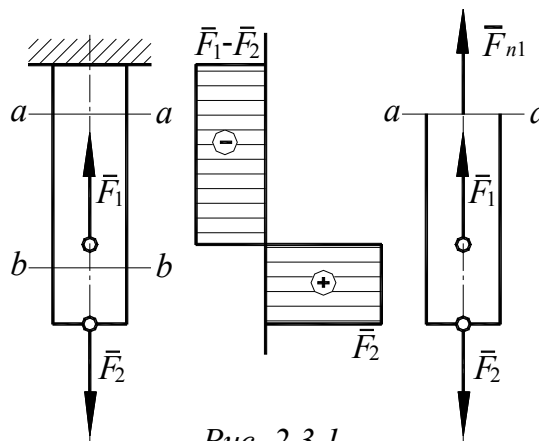


Рис. 2.3.1

2.3.2. НАПРЯЖЕНИЯ

Если на поверхность призматического стержня нанести сетку линий, параллельных и перпендикулярных оси стержня (рис. 2.3.2, *a*), и приложить к нему растягивающую силу, то можно убедиться в том, что линии сетки и после деформации останутся взаимно перпендикулярными, за исключением небольшого участка стержня вблизи точки приложения силы, который из рассмотрения пока исключаем, но расстояния между ними изменятся (рис. 2.3.2, *б*).

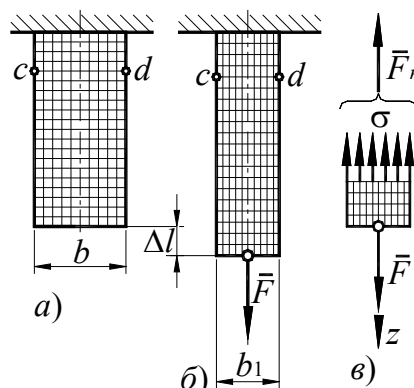


Рис. 2.3.2

Все горизонтальные линии, например cd , переместятся вниз, оставаясь горизонтальными и прямыми.

Можно предположить также, что и внутри стержня будет такая же картина – *поперечные сечения стержня плоские и нормальные к его оси до деформации, останутся плоскими и нормальными к оси и после деформации*, то есть подтверждается гипотеза плоских сечений.

Такая картина деформаций дает основание считать, что в поперечных сечениях стержня действуют только *нормальные* напряжения, равномерно распределенные по сечению, а *касательные* напряжения равны нулю.

Продольная сила F_n есть равнодействующая нормальных напряжений в поперечном сечении:

$$F_n = \int_A \sigma dA.$$

Поскольку $\sigma = \text{const}$, то:

$$F_n = \sigma A, \quad (2.3.1)$$

откуда:

$$\sigma = \frac{F_n}{A}. \quad (2.3.2)$$

В частном случае, когда на стержень действует одна внешняя сила F , из уравнения равновесия (рис. 2.3.2, в) получим:

$$F_n = F$$

и вместо общей формулы (2.3.2) получим частный вид формулы для растяжения:

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (2.3.3)$$

Эти формулы справедливы и для *сжатия*, с той только разницей, что сжимающие напряжения считаются *отрицательными*.

Кроме того, *сжатые* стержни помимо расчета на *прочность* рассчитываются также на *устойчивость*.

2.3.3. ДЕФОРМАЦИИ И ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

Стержень (рис. 2.3.2), под действием двух равных по величине и противоположно направленных по его продольной оси сил (F и F_n , претерпевает деформацию *растяжения*, которая проявляется в изменении длины и поперечных размеров стержня. Его первоначальная длина l увеличивается на величину Δl , именуемую *абсолютным удлинением*, и становится равной l_1 .

Таким образом:

$$\Delta l = l_1 - l.$$

Абсолютное удлинение стержня при заданном значении деформирующей силы возрастает с увеличением его первоначальной длины. Поэтому деформация при растяжении более полно характеризуется относительной величиной $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$, которую называют *относительным удлинением*.

Очевидно:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{l_1 - l}{l} \quad (2.3.4)$$

При направлении внешних сил, *противоположном* указанному на рис. 2.3.2, стержень испытывает деформацию *сжатия*. В этом случае параметр Δl называют *абсолютным укорочением*, так как при сжатии длина стержня уменьшается.

Одновременно с продольной деформацией стержень претерпевает *поперечную* деформацию. При растяжении поперечные размеры уменьшаются, при сжатии – увеличиваются.

Относительная *поперечная деформация*:

$$\varepsilon' = \frac{b - b_1}{b}.$$

Отношение

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right| \quad (2.3.5)$$

называют *коэффициентом Пуассона*, характеризующим способность материала к поперечным деформациям. Этот коэффициент определяют опытным путем.

2.3.4. МЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И СВОЙСТВА МАТЕРИАЛОВ

2.3.4.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Работоспособность конструкционных материалов при различных видах нагружения определяется величинами, которые называют *механическими характеристиками*.

Механические характеристики устанавливают *границу безопасной эксплуатации* элементов конструкций при *статическом* и *динамическом* (циклическом и ударном) нагружениях.

К числу *основных* механических характеристик относятся:

- *предельные напряжения*,
- *твердость*,
- *ударная вязкость*.

Величины механических характеристик могут быть получены в лабораторных условиях доведением образцов до *разрушения* или *чрезмерной деформации*. Наиболее распространены *испытания на растяжение и сжатие*, так как они относительно просты, дают результаты, позволяющие с достаточной достоверностью судить о поведении материалов и при других видах деформации.

Часто целью испытаний является *определение твердости* и *ударной вязкости*.

Все конструкционные материалы можно условно разделить на:

- *хрупкие*,
- *пластичные*.

К весьма *пластичным* материалам относят малоуглеродистые стали, алюминий, медь и некоторые другие. Эти материалы обладают способностью деформироваться в широких пределах без разрушения.

Примерами *хрупких* материалов могут служить чугун, высокоуглеродистые сорта стали, металлокерамические материалы, стекло. Хрупкие материалы разрушаются без заметной предварительной деформации.

Промежуточное положение занимают *малопластичные* материалы, к которым могут быть отнесены многие легированные стали, дюралюминий, бронза.

2.3.4.2. ИСПЫТАНИЯ МАТЕРИАЛОВ

2.3.4.2.1. ИСПЫТАНИЯ НА РАСТЯЖЕНИЕ

Для изучения свойств материалов и установления величины предельных напряжений (по разрушению или по пластическим деформациям) производят испытания образцов материала вплоть до разрушения.

Испытания производят при нагрузках следующих *категорий*:

- статической,
- ударной и циклической (испытание на усталость или выносливость).

По *виду деформации*, испытываемой образцом, различают испытания на:

- растяжение,
- сжатие,
- кручение
- изгиб.

Значительно реже проводят испытания на *сложное сопротивление*, например, сочетание растяжения и кручения.

Так как результаты испытаний зависят от формы образца, скорости его деформирования, температуры при испытании и т.д., то экспери-

мент обычно ведут в условиях, предусмотренных Государственными стандартами (ГОСТами).

Подробное описание испытательных машин и приборов можно найти в специальных руководствах.

Наибольшее распространение имеют испытания на растяжение статической нагрузкой, так как они наиболее просты и в то же время во многих случаях дают возможность достаточно верно судить о поведении материала при других видах деформации. Испытание различных материалов на растяжение осуществляют статическим нагружением на специальных машинах. Для этого применяют стандартный цилиндрический образец диаметром (3-10) мм (рис. 2.3.3, а).

Длина центрального цилиндра превышает его диаметр приблизительно в 15 раз. На цилиндре выделяют участок l_0 для измерения деформации:

$$l_0 = 10d_0,$$

где d_0 – диаметр стержня до растяжения.

Иногда для испытаний применяют плоские или малые цилиндрические образцы, у которых:

$$l_0 = 5d_0.$$

При растяжении образца на машинах регистрируют нагрузку на образец и его удлинение Δl .

Количественная оценка физических свойств материала может быть сделана при помощи диаграммы растяжения в системе координат (σ , ε).

Напряжение, откладываемое по вертикальной оси:

$$\sigma = \frac{F}{A_0}, \quad (2.3.6)$$

где A_0 – площадь поперечного сечения образца до испытания.

Относительное удлинение образца, откладываемое по горизонтальной оси:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}, \quad (2.3.7)$$

где l_0 – длина расчетного участка образца до испытания.

Диаграмма растяжения $\sigma = f(\varepsilon)$ характеризует свойства испытуемого материала и носит название *условной* диаграммы растяжения, так как напряжения и относительные удлинения вычисляют соответственно по отношению к *первоначальной* площади сечения и *первоначальной* длине.

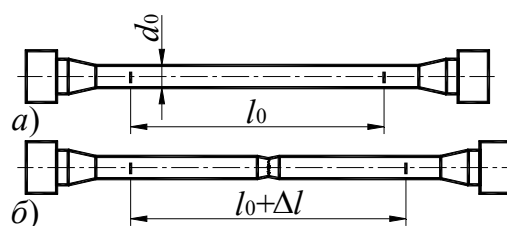


Рис. 2.3.3

Условная диаграмма растяжения образца из малоуглеродистой стали (рис. 2.3.4) характеризуется следующими четырьмя отличительными участками.

Участок I соответствует упругим деформациям материала образца.

На этом участке для пластичных материалов имеет место *прямая пропорциональная зависимость* между напряжениями и деформациями, называемая *законом Гука* (прямая OA):

$$\sigma = E\varepsilon \quad (2.3.8)$$

Коэффициент пропорциональности E называется *модулем продольной упругости* или *модулем упругости первого рода*. Он имеет размерность напряжений (МПа) и характеризует способность материала сопротивляться упругой деформации при *растяжении* и *сжатии*. Величину модуля продольной упругости для различных материалов определяют экспериментально и приводят в справочниках.

Участок II начинается после точки A, когда диаграмма становится *криволинейной*. Однако до точки B деформации остаются *упругими*, то есть при разгрузке образец восстанавливает свою первоначальную форму и размеры.

При дальнейшем увеличении нагрузки за точкой B появляются *неупругие* деформации.

В точке C начинается процесс деформации детали *без увеличения внешней* нагрузки. Этот процесс называется процессом *текучести* материала.

Участок III (DK) характерен увеличением нагрузки, при которой происходит дальнейшая деформация образца. Этот участок называется *зоной упрочнения*. Заканчивается участок при достижении максимальной нагрузки, воспринимаемой образцом.

Участок IV начинается в точке K и заканчивается разрушением образца в точке R. Этот участок носит название *зоны разрушения* образца. Деформация образца на этом участке характерна образованием шейки и удлинением образца за счет ее утонения (рис. 2.3.3, б).

Диаграмма растяжения *хрупких* материалов показана на рис. 2.3.5, где отклонение от закона Гука начинает-

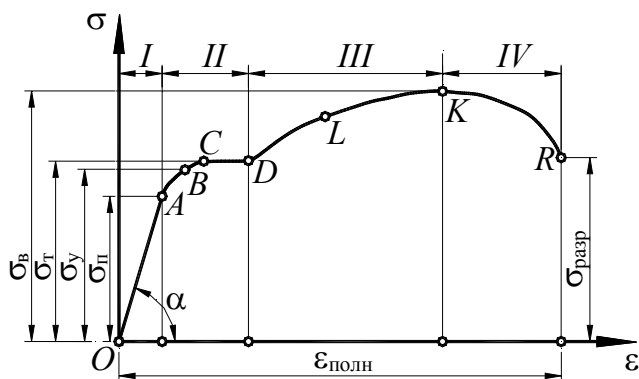


Рис. 2.3.4

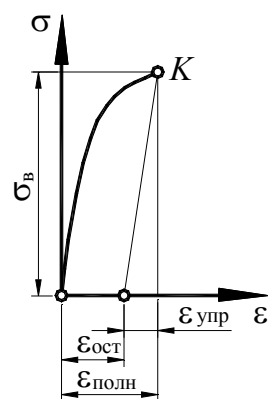


Рис. 2.3.5

ся при *малых* значениях деформирующей силы. Эта диаграмма не имеет площадки текучести. Образцы разрушаются при очень малой остаточной деформации без образования шейки.

2.3.4.2.2. ИСПЫТАНИЯ НА СЖАТИЕ

Во избежание искривления металлические образцы, подлежащие испытанию на сжатие, выполняют в виде коротких цилиндров высотой $h \leq 3d$ или кубиков. Применение очень коротких образцов также нежелательно, так как развивающиеся по торцам образца силы трения препятствуют его расширению, в результате чего образец принимает бочкообразную форму. Результаты испытания на сжатие зависят от величины сил трения и поэтому цилиндрические образцы целесообразнее кубических.

Образцы на *сжатие* испытывают на специальных прессах или универсальных разрывных машинах.

Диаграмма сжатия образца из *пластического* материала показана на рис. 2.3.6, *а*. В начальной части диаграмма сжатия совпадает с диаграммой растяжения (линия *OABCD*). После точки *D* материал образца расплющивается, и сжимающая сила быстро возрастает. Модуль упругости первого рода, а также пределы пропорциональности, упругости и текучести у малоуглеродистой стали при растяжении и сжатии можно считать совпадающими. На рис. 2.3.6, *в* представлен вид малоуглеродистого стального образца до сжатия и после сжатия на специальном испытательном станке.

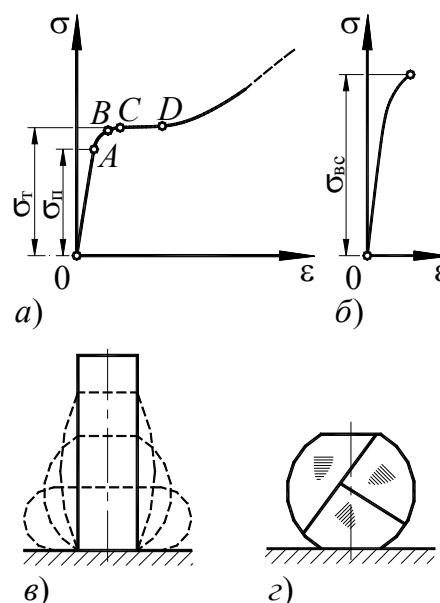


Рис. 2.3.6

Диаграмма сжатия образца из *хрупкого* материала показана на рис. 2.3.6, *б*. Основными характеристиками хрупкого материала при сжатии является предел прочности, обозначаемый $\sigma_{в.с.}$, и относительная остаточная деформация при разрушении $\epsilon_{ост.}$. На рис. 2.3.6, *г* изображен образец из хрупкого материала, разрушенный при сжатии.

Предел прочности при сжатии хрупких материалов оказывается значительно выше, чем при растяжении, то есть хрупкие материалы сопротивляются сжатию значительно лучше, чем растяжению.

Качественно диаграмма сжатия хрупкого материала аналогична диаграмме его растяжения.

2.3.4.3. МЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МАТЕРИАЛОВ

2.3.4.3.1. ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

В соответствии с диаграммой растяжения вводят следующие *основные характеристики материала*.

1. Отношение растягивающего усилия в точке *A* к первоначальной площади поперечного сечения стержня:

$$\sigma_{\Pi} = \frac{F_A}{A_0} \quad (2.3.9)$$

называется *пределом пропорциональности*.

До предела пропорциональности сохраняет силу *закон Гука*.

2. Отношение растягивающего усилия в точке *B* к первоначальной площади поперечного сечения стержня:

$$\sigma_y = \frac{F_B}{A_0} \quad (2.3.10)$$

называется *пределом упругости*.

Предел упругости – такое напряжение, при котором величина относительной остаточной деформации не превышает 0,005%, то есть предел упругости соответствует такому наибольшему напряжению, до которого материал сохраняет свои упругие свойства.

Для многих материалов разница между *пределом пропорциональности* и *пределом упругости* очень мала.

3. Отношение растягивающего усилия в точке *C* к первоначальной площади поперечного сечения стержня:

$$\sigma_T = \frac{F_C}{A_0} \quad (2.3.11)$$

называется *пределом текучести*.

Предел текучести – такое напряжение, при котором происходит рост деформации без увеличения нагрузки.

Для ряда материалов, не имеющих на диаграмме выраженной площадки текучести, вводят понятие *условного предела текучести*, под которым подразумевают напряжение, вызывающее остаточную деформацию, равную 0,2%.

4. Отношение наибольшей нагрузки к первоначальной площади поперечного сечения стержня:

$$\sigma_{B(\text{пч})} = \frac{F_{\max}}{A_0} \quad (2.3.12)$$

называется *пределом прочности*, или *временным сопротивлением*.

Предел прочности обозначают:

— при *растяжении* $\sigma_{в.р.}$,

— при *сжатии* $\sigma_{в.с.}$.

Предел прочности соответствует *максимальному* напряжению, возникающему в образце *до* его разрушения.

Диаграммой растяжения можно воспользоваться для определения модуля упругости E . На диаграмме растяжения (рис. 2.3.4) прямолинейный участок, соответствующий закону Гука, наклонен под углом α к горизонтальной оси. Отметим текущее напряжение σ и соответствующее ему относительное удлинение ε . Тогда тангенс угла наклона участка OA :

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sigma}{\varepsilon}. \quad (2.3.13)$$

Исходя из соотношения, выражающего закон Гука, получим:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}. \quad (2.3.14)$$

Сопоставление этих формул позволяет сделать вывод о том, что:

$$E = \operatorname{tg}\alpha. \quad (2.3.15)$$

Следовательно, модуль упругости материала численно равен тангенсу угла наклона к горизонтали прямолинейного участка OA диаграммы растяжения.

За *характеристику прочности хрупких материалов*, как и в случае растяжения, *принимается временное сопротивление*.

Подставив в формулу (2.3.8) значение величин ε и σ из формул (2.3.7) и (2.3.3), получим:

$$\Delta l = \frac{Fl_0}{EA} \quad (2.3.16)$$

то есть абсолютное удлинение (укорочение) стержня при растяжении (сжатии) прямо пропорционально растягивающей (сжимающей) силе, первоначальной длине стержня и обратно пропорционально модулю упругости E и площади поперечного сечения A .

Произведение EA называют *жесткостью поперечного сечения при растяжении (сжатии)*.

Для ступенчатых стержней (рис. 2.3.7) полное изменение длины бруса определяется как алгебраическая сумма деформаций его отдельных частей, в пределах которых E , F_n и A постоянны:

$$\Delta l = \sum_{i=1}^{i=n} \Delta l_i = \sum \frac{F_{n_i} l_i}{E_i A_i} \quad (2.3.17)$$

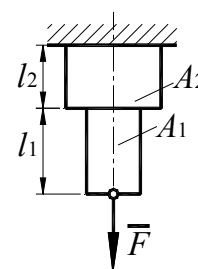


Рис. 2.3.7

Например, для стержня согласно рис. 2.3.7 имеем:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \frac{F_{n1} l_1}{E_1 A_1} + \frac{F_{n2} l_2}{E_2 A_2} \quad (2.3.18)$$

где $F_{n1} = F_{n2} = F$.

2.3.4.3.2. ЯВЛЕНИЕ НАКЛЕПА

Если при нагружении образца *не был превышен предел упругости*, то при разгрузке все деформации полностью исчезнут и при повторном нагружении этот образец будет себя вести так же, как и при первом нагружении.

Если же образец был нагружен *до напряжения, большего предела упругости*, например, до напряжения, соответствующего точке L диаграммы на рис. 2.3.4, а затем нагрузка будет снята, то *пластическая часть деформации останется*. При этом происходит увеличение *предела текучести*. Если материал нагружать снова, то *пластическая деформация увеличится*, но в меньшей степени, чем при первичном однократном нагружении.

Явление повышения предела пропорциональности и снижения пластичности материала при повторных нагружениях называется *наклепом*.

Наклеп во многих случаях является нежелательным явлением, так как наклепанный металл становится более хрупким. Наклеп можно устранить при помощи специальной термической обработки

Однако в целом ряде других случаев наклеп полезен и его создают искусственно, например, в деталях, подвергающихся воздействию переменных нагрузок.

2.3.4.3.3. ВЛИЯНИЕ ВРЕМЕНИ НА ДЕФОРМАЦИЮ. ПОСЛЕДЕЙСТВИЕ. ПОЛЗУЧЕСТЬ. РЕЛАКСАЦИЯ

Опыты показывают, что деформация под нагрузкой проявляется не сразу, а в течение определенного периода времени.

Если при напряжениях, соответствующих точке E (рис. 2.3.8), прекратить нагружение и оставить образец на некоторое время под нагрузкой, то деформация будет расти (отрезок EQ), причем вначале быстрее, а затем медленнее.

При разгрузке часть деформации, соответствующая отрезку GI , исчезнет почти мгновенно, другая часть деформации, изображаемая отрезком OG , исчезнет не сразу, а спустя некоторое время (на рис. 2.3.8 отрезок EQ для наглядности показан в значительно более крупном масштабе, чем остальная диаграмма).

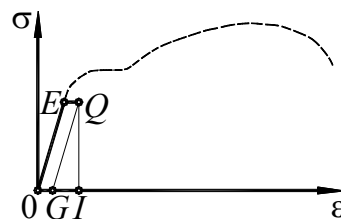


Рис. 2.3.8

Это явление изменения упругих деформаций во времени носит название *упругого последействия*.

Чем однороднее материал, тем меньше упругое последействие. Для тугоплавких материалов при обычных температурах оно настолько невелико, что его можно не учитывать. Наоборот, в материалах органического происхождения упругое последействие велико и с ним нельзя не считаться.

У многих материалов под нагрузкой при высоких температурах наблюдается другое явление – *непрерывный рост остаточных деформаций*, заканчивающийся в определенных условиях разрушением материала. Например, стальная труба, являющаяся паропроводом и работающая при определенном давлении и температуре пара, непрерывно увеличивает свой диаметр. Изменение во времени пластических деформаций в нагруженной детали носит название *пластического последействия*.

Изменение во времени полных деформаций (то есть суммы упругих и пластических) носит название *упругопластического последействия* или *ползучести*.

У металлов с низкой температурой плавления (например, цинка, свинца), а также у бетона ползучесть наблюдается уже при нормальных температурах. У стали заметная ползучесть проявляется при температурах, превышающих 300°C.

Напряжение, при котором скорость пластической деформации при заданной температуре и постоянной нагрузке составляет определенную, наперед заданную величину, например 0,0001 % в час, называется *пределом ползучести* $\sigma_{пз}$ и является важной механической характеристикой.

Тесно связано с ползучестью другое явление, при котором упругие деформации тела со временем переходят в пластические. Результатом этого является изменение действующих напряжений при сохранении полной величины деформации. Такое явление называется *релаксацией*. Вследствие релаксации соединения, выполненные с натягом, при длительной работе в условиях высоких температур ослабевают.

2.3.4.3.4. ВЛИЯНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ

Опыты показывают, что свойства материалов зависят от температуры.

До температуры 300°C *временное сопротивление* σ_v малоуглеродистых сталей повышается на (20-30)%, а при дальнейшем повышении температуры резко снижается.

Величина предела текучести σ_t и *предела пропорциональности* $\sigma_{п}$ с повышением температуры уменьшается.

При температуре 400°C предел текучести составляет (60-70)% его величины при комнатной температуре. С повышением температуры

длина площадки текучести сокращается и при температуре около 400°C площадка вовсе исчезает.

Пластические свойства (относительное остаточное удлинение при разрыве δ и сужение площади поперечного сечения ψ) с повышением температуры до 300°C снижаются, а при дальнейшем ее повышении увеличиваются.

Механические свойства материалов зависят от продолжительности испытания. При некоторых температурах (например, для малоуглеродистой стали при температуре выше 800°C) испытуемый образец может быть разрушен при напряжении меньшем, чем предел пропорциональности, соответствующий комнатной температуре, если это напряжение будет действовать достаточно продолжительное время.

Поэтому прочность металлов при *высоких температурах* характеризуют не величиной обычного предела прочности, определяемого путем кратковременных испытаний, а величиной так называемого *предела длительной прочности* $\sigma_{вт}$.

Предел длительной прочности – это то напряжение, воздействие которого в течение определенного промежутка времени при постоянной температуре приводит к разрушению образца.

Детали, предназначенные для работы при высоких температурах, изготавливают из специальных теплоустойчивых (жаропрочных) и жаростойких сталей, содержащих примеси специальных легирующих элементов.

Под *теплоустойчивостью* (*жаропрочностью*) стали понимают ее способность сохранять высокую прочность при повышенных температурах, в частности высокую сопротивляемость ползучести.

Для повышения теплоустойчивости сталь легируют вольфрамом, молибденом, ванадием.

Под *жаростойкостью* понимают способность стали сопротивляться химическому разрушению поверхности под воздействием горячего воздуха или газа (газовая коррозия).

Для повышения жаростойкости сталь легируют хромом, кремнием и алюминием.

2.3.4.3.5. ТВЕРДОСТЬ

Твердостью называют *способность материала сопротивляться механическому проникновению в него другого тела*.

Твердость определяют различными *способами*, и соответственно существуют различные величины, характеризующие твердость. Наиболее широкое распространение получили испытания твердости по Бринеллю и по Роквеллу.

Твердость *по Бринеллю* определяют вдавливанием *закаленного шарика* в испытуемый материал. Величина, характеризующая твердость или число твердости по Бринеллю (*HB*), представляет отношение силы F , с которой вдавливается шарик, к поверхности A лунки, оставшейся после вдавливания на испытуемом материале:

$$HB = \frac{F}{A}. \quad (2.3.19)$$

При испытании *по Роквеллу* в материал вдавливают острый *алмазный наконечник*.

Числом твердости можно пользоваться в производственных условиях для определения механических характеристик материала. Так, по числу твердости можно с достаточной степенью точности определить предел текучести, временное сопротивление и предел упругости.

Для углеродистой термически не обработанной стали связь между числом твердости и временным сопротивлением может быть выражена следующей зависимостью:

$$\sigma_B = (0,35 - 0,40) HB. \quad (2.3.20)$$

Для легированной термически обработанной стали

$$\sigma_B = (0,35 - 0,45) HB. \quad (2.3.21)$$

В справочной литературе приведены таблицы, устанавливающие зависимость между числами твердости по Бринеллю и Роквеллу.

2.3.4.3.6. УДАРНАЯ ВЯЗКОСТЬ

Ударной вязкостью называют величину, характеризующую способность материала сопротивляться действию ударных нагрузок.

Меру сопротивления удару определяют на специальных испытательных копрах, на которых при помощи маятника разрушаются образцы. Ударную вязкость a определяют как отношение работы, затраченной на разрушение образца A_p (в дж) к площади его поперечного сечения A (в m^2):

$$a = \frac{A_p}{A}. \quad (2.3.22)$$

Величины механических характеристик основных конструкционных материалов приведены в соответствующих справочниках.

Описанные выше испытания материалов с целью получения их механических характеристик проведены по методикам, строго регламентированным ГОСТами и ведомственными нормами.

Механические характеристики материалов зависят от многих факторов, в числе которых можно назвать, например, химический состав и технологию получения материалов, виды термической обработки и обработки резанием, условия эксплуатации и др.

2.3.5. ДОПУСКАЕМЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ И ЗАПАСЫ ПРОЧНОСТИ

Для обеспечения нормальной работоспособности детали необходимо, чтобы фактически возникающие напряжения растяжения и сжатия не превышали некоторого *безопасного*, или *допускаемого напряжения*, обозначаемого σ_p . То есть *допускаемое напряжение является таким максимально возможным напряжением, при котором обеспечивается достаточная прочность и необходимая долговечность детали.*

Известно, что экспериментально определенные механические характеристики, как и принимаемые для расчета нагрузки, в большинстве случаев отличаются от фактически существующих. При этом многие факторы, оказывающие влияние на действительную прочность, не поддаются непосредственному предварительному учету, так как носят случайный характер и прогнозировать их трудно. Часть факторов не может быть учтена из-за отсутствия исчерпывающих данных о физической сущности происходящих явлений.

Для того чтобы деталь обладала необходимой надежностью, необходимо создать требуемый *запас прочности* по отношению к экспериментально определенным величинам предельных напряжений, при которых может разрушиться деталь или возникнуть пластическая деформация. Таким образом:

$$\sigma_p = \frac{\sigma_{пр}}{S_p} \quad (2.3.23)$$

где σ_p – допускаемое напряжение;

S_p – регламентированный нормами проектирования *коэффициент запаса прочности* или *коэффициент безопасности*;

$\sigma_{пр}$ – предельное напряжение материала.

В качестве исходной величины для определения предельных напряжений выбирают одну из нормативных механических характеристик материала:

— для *пластичных* материалов при статическом нагружении – *предел текучести* σ_t ;

— для *хрупких* материалов при статическом нагружении – *временное сопротивление* σ_b ;

— для *любых* материалов при циклическом изменении нагрузки – *предел выносливости (предел усталости)* σ_r .

Величина *регламентированного коэффициента безопасности* S_p определяется на основе существующего опыта эксплуатации данной группы механизмов, машин, приборов.

Общий коэффициент безопасности S_p обычно рассматривают как произведение частных коэффициентов безопасности:

$$S_p = S_{p1}S_{p2}\dots S_{pn} \quad (2.3.24)$$

При выполнении проверочных расчетов должно быть выполнено условие:

$$S \geq S_p, \quad (2.3.25)$$

где S – фактически существующий коэффициент безопасности.

Каждый из *частных* коэффициентов безопасности отражает влияние на прочность деталей какого-либо фактора или группы взаимозависимых факторов. Учет тех или иных факторов зависит от требований, которые предъявляются к расчету, а также от назначения и условий работы рассчитываемых деталей. Обычно при определении коэффициента безопасности учитывают степень надежности материала, точность расчетной схемы, степень динамичности нагрузки и величину возможной перегрузки, степень ответственности детали, условия работы детали, наличие концентраторов напряжения и т.д. Количество учитываемых факторов и соответствующих им частных коэффициентов колеблется от одного до десяти.

Значения коэффициентов безопасности обычно принимают на основании опыта конструирования и эксплуатации машин определенного типа. В литературе имеются рекомендации по использованию одним, тремя, пятью и даже десятью частными коэффициентами безопасности. Обычно рекомендуется пользоваться тремя частными коэффициентами:

$$S_p = S_{p1}S_{p2}S_{p3}, \quad (2.3.26)$$

где S_{p1} – коэффициент, учитывающий *точность расчетной схемы*;

при повышенной точности расчета:

$$S_{p1}=1,2-1,5;$$

при наличии упрощений и допущений, снижающих точность расчета:

$$S_{p1}=2-3;$$

S_{p2} – коэффициент, учитывающий *неоднородность материала и его чувствительность к степени чистоты обработки поверхности*;

S_{p2} в расчетах по пределу текучести при действии *статических* нагрузок можно принимать по нижеприведенной таблице (без учета влияния абсолютных размеров) в зависимости от отношения предела текучести к пределу прочности.

$\frac{\sigma_T}{\sigma_B}$	0,45-0,55	0,55-0,70	0,70-0,90
S_{p2}	1,2-1,5	1,4-1,8	1,7-2,2

При расчете по пределу прочности для *малопластичных* и *хрупких* материалов величину S_{p2} принимают:

а) для *малопластичных* материалов (высокопрочные стали при низком отпуске) $S_{p2}=2-3$;

б) для *хрупких* материалов $S_{p2}=3-4$;

в) для *весьма хрупких* материалов $S_{p2}=4-6$.

При расчете на усталость коэффициент S_{p2} принимают равным 1,5-2,0, увеличивая его для материала с *пониженной однородностью* (особенно для литья) и для деталей *больших размеров* до 3,0 и более;

S_{p3} – коэффициент, учитывающий условия работы и степень ответственности детали; обычно $S_{p3}=1,0-1,5$.

Выбор допускаемого напряжения определяет эксплуатационные и экономические характеристики механизма или машины.

2.3.6. РАСЧЕТЫ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ (СЖАТИИ)

2.3.6.1. РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ

Для обеспечения нормальной работоспособности детали необходимо, чтобы фактически существующее напряжение растяжения (сжатия) не превышало допускаемого. Напряжение в расчетном сечении растянутого (сжатого) стержня может быть определено из уравнения (2.3.3). Для оценки прочности стержня необходимо сопоставить *действующее* напряжение с *допускаемым*:

$$\sigma_{p(c)} = \frac{F}{A} \leq \sigma_{p(c)p} \quad (2.3.27)$$

Здесь $\sigma_{p(c)}$ – фактическое напряжение на растяжение или сжатие;

$\sigma_{p(c)p}$ – допускаемое напряжение на растяжение или сжатие.

Неравенство (2.3.27) называется *условием прочности*.

С помощью условия (2.3.27) могут быть решены задачи следующих трех типов.

1. Расчет на прочность существующей конструкции с определенными размерами. При этом определяют *напряжения* в деталях конструкции и величину их сравнивают с допустимым напряжением. Такой расчет носит название *поверочного*.

2. Определение *предельной (допускаемой) нагрузки* для детали с определенными размерами поперечного сечения A и допускаемым напряжением σ_p .

Из соотношения (2.3.27) получим:

$$F_p \leq A\sigma_p. \quad (2.3.28)$$

3. Определение *площади поперечного сечения* стержня по заданной продольной силе и допускаемому напряжению:

$$A \geq \frac{F}{\sigma_p}. \quad (2.3.29)$$

Такие расчеты называют *расчетами на прочность*.

2.3.6.2. РАСЧЕТЫ НА ЖЕСТКОСТЬ

В некоторых случаях работоспособность конструкции определяют не величиной предельной нагрузки или предельного напряжения, а *величиной предельной деформации* Δl_p . В этом случае по уравнению (2.3.16) находят *фактическую деформацию* и сопоставляют ее с *предельной*:

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA} \leq \Delta l_p. \quad (2.3.30)$$

Неравенство (2.3.30) называют *условием жесткости*, а расчеты, проводимые по этому неравенству, – *расчетами на жесткость*.

2.3.6.3. ПРИМЕР РАСЧЕТОВ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ (СЖАТИИ)

В качестве примера рассмотрим ступенчатый брус (рис. 2.3.9), нагруженный продольными силами F_1 и F_2 , для которого следует определить во всех поперечных сечениях внутреннюю продольную силу F_R и напряжения σ , а так же определить также вертикальные перемещения δ всех поперечных сечений стержня. Результаты приведем в графическом виде, построив графики (*эпюры*) $F_R = f(l)$, $\sigma = f(l)$ и $\delta = f(l)$.

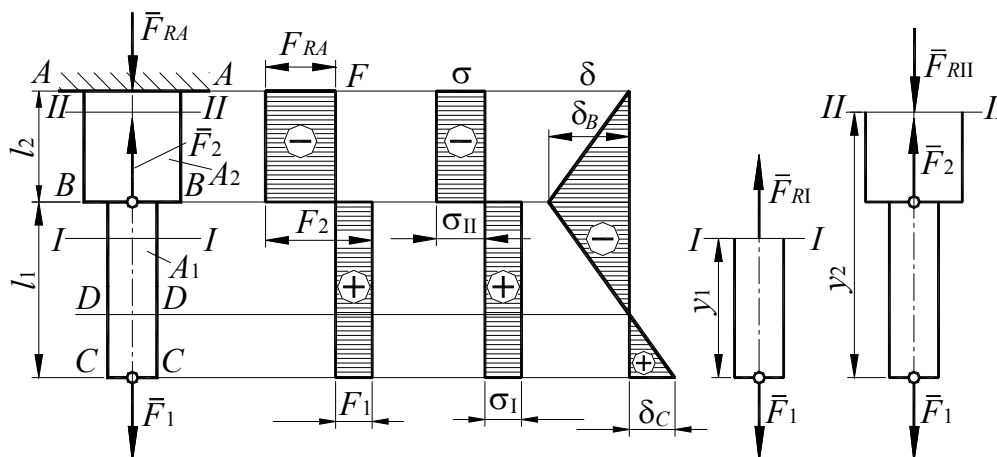


Рис. 2.3.9

Решение.

Для определения внутренних сил в поперечных сечениях бруса используем метод сечений.

Мысленно разрежем брус по сечениям *I-I* и *II-II*.

Составим уравнение равновесия части стержня, расположенной ниже сечения *I-I*:

$$\Sigma F_{yI} = F_{R_I} - F_1 = 0,$$

откуда:

$$F_{R_I} = F_1.$$

Эти уравнения будут справедливы при изменении текущей координаты y_1 в пределах от 0 до l_1 , то есть при:

$$0 \leq y_1 \leq l_1.$$

Уравнение равновесия части стержня, расположенной ниже сечения *II-II*:

$$\Sigma F_{yII} = -F_{R_{II}} + F_2 - F_1 = 0,$$

откуда:

$$F_{R_{II}} = F_2 - F_1 = 0.$$

Эти уравнения будут справедливы при:

$$l_1 \leq y_1 \leq l_1 + l_2.$$

Выбрав масштаб, строим эпюру продольных сил. При этом *растягивающую* продольную силу F_{R_I} считаем *положительной*, *сжимающую* $F_{R_{II}}$ – *отрицательной*.

Напряжения равны:

в сечениях нижней части стержня:

$$\sigma_I = \frac{F_{R_I}}{A_1} \text{ (растяжение),}$$

в сечениях верхней части стержня:

$$\sigma_{II} = \frac{F_{R_{II}}}{A_2} \text{ (сжатие).}$$

В выбранном масштабе строим эпюру напряжений.

Для построения эпюры δ определяем перемещения характерных сечений *B-B* и *C-C* (перемещение сечения *A-A* равно нулю).

Перемещение сечения вниз считаем *положительным*, вверх – *отрицательным*.

Сечение *B-B* будет перемещаться вверх, поскольку верхняя часть стержня сжимается:

$$\delta_B = \frac{\sigma_{II} l_2}{E} \text{ (вверх).}$$

Перемещение сечения $C-C$ является алгебраической суммой перемещения сечения $B-B$ (δ_B) и удлинения части стержня длиной l_1 :

$$\delta_C = \delta_B + \Delta l = \delta_B + \frac{\sigma_{II} l_1}{E}$$

В выбранном масштабе откладываем на эпюре значения δ_C и δ_B , соединяем полученные точки прямыми линиями, так как при действии сосредоточенных внешних сил перемещения линейно зависят от абсцисс сечений стержня, и получаем график (эпюру) перемещений.

Из эпюры видно, что сечение $D-D$ не перемещается, сечения, расположенные выше сечения $D-D$, перемещаются вверх, сечения, расположенные ниже сечения $D-D$, перемещаются вниз.

2.3.7. НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

2.3.7.1. НАПРЯЖЕНИЯ В НАКЛОННЫХ СЕЧЕНИЯХ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ (СЖАТИИ) В ОДНОМ НАПРАВЛЕНИИ

Для полного суждения о прочности материала необходимо уметь определять напряжения, действующие по любому наклонному сечению *растянутого (сжатого)* элемента (рис. 2.3.10, а).

Нормальные напряжения в поперечном сечении стержня σ считаем известными (например, $\sigma_1 = \frac{F_n}{A}$).

Определим напряжения, возникающие в наклонном сечении BC , нормаль к которому повернута на угол α к направлению σ_1 . За положительное направление отсчетов угла α примем направление, обратное движению часовой стрелки.

Обозначим:

A – площадь сечения, перпендикулярного оси стержня;

A_α – площадь наклонного сечения, при этом:

$$A_\alpha = \frac{A}{\cos \alpha}. \tag{2.3.31}$$

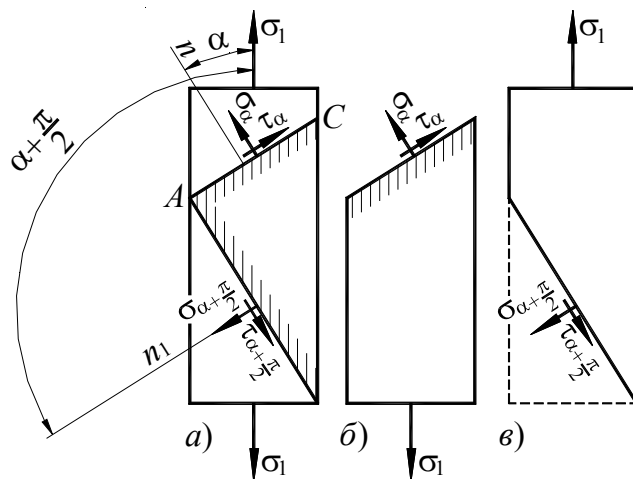


Рис. 2.3.10

В общем случае в наклонном сечении могут действовать нормальные σ_α и касательные τ_α напряжения. Их величину найдем из условия равновесия отсеченной, например, нижней части (рис. 2.3.10, б). Проектируем силы на направление σ_α :

$$\sigma_\alpha A_\alpha - \sigma_1 A \cos \alpha = 0.$$

Используя соотношение (2.3.31), получаем:

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha. \quad (2.3.32)$$

Проектируя силы на направление τ_α , получаем:

$$\tau_\alpha A_\alpha - \sigma_1 A \sin \alpha = 0,$$

откуда:

$$\tau_\alpha = 0,5\sigma_1 \sin 2\alpha = 0. \quad (2.3.33)$$

При *положительном* значении σ (то есть растягивающем) и при $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$ получим *положительное* значение для τ_α . Это означает, что касательное напряжение будет направлено так, как изображено на рис. 2.3.10, б.

Данное направление касательного напряжения характеризуется тем, что внешнюю нормаль n к площадке для совпадения с касательным напряжением необходимо поворачивать по часовой стрелке. Касательные напряжения такого направления принято считать положительными. Если же нормаль к площадке для совпадения с касательным напряжением необходимо поворачивать *против часовой стрелки*, то касательное напряжение считается *отрицательным* (рис. 2.3.10, в).

Из формулы (2.3.32) следует, что максимальной величины нормальные напряжения достигают при $\alpha=0$, то есть в сечении, перпендикулярном оси стержня.

Из формулы (2.3.33) следует, что при $\alpha=0$ касательное напряжение равно нулю.

Из формул (2.3.32) и (2.3.33) видно, что при $\alpha=90^\circ$ $\sigma=0$ и $\tau=0$.

Следовательно, в *продольных* сечениях нет ни нормальных, ни касательных напряжений.

Как уже было отмечено (см. раздел 2.2.3), площадки, на которых нет касательных напряжений, называются *главными площадками*, а нормальные напряжения, действующие по главным площадкам, – *главными напряжениями*. Следовательно, *нормальное* напряжение в *поперечном* сечении растянутого или сжатого стержня есть *главное* напряжение. Поэтому оно обозначено σ_1 , поскольку индексы 1, 2, 3 принято присваивать только *главным* напряжениям (см. раздел 2.2.3).

Так как в данном случае отлично от нуля только *одно* главное напряжение, то рассматриваемое напряженное состояние является *одноосным*.

Из формулы (2.3.33) видно также, что *максимальное касательное напряжение* имеет место в сечении под углом $\alpha=45^\circ$ и равно *половине главного напряжения*:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1}{2}. \quad (2.3.34)$$

Именно в этих сечениях и начинаются *первые сдвиги* кристаллов.

2.3.7.2. ЗАКОН ПАРНОСТИ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Определим нормальные и касательные напряжения на двух взаимно перпендикулярных площадках.

Для площадки, наклоненной под углом α , по формулам (2.3.32) и (2.3.38) имеем:

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \sigma_1 \cos^2 \alpha; \\ \tau_\alpha &= 0,5\sigma_1 \sin 2\alpha \end{aligned}$$

Для взаимно перпендикулярной площадки при значении угла $\alpha + \frac{\pi}{2}$ нормальные и касательные напряжения можно определить или непосредственно из условия равновесия верхней или нижней части стержня (рис. 2.3.10, в), или по формулам (2.3.32) и (2.3.33) с заменой α на $\alpha + \frac{\pi}{2}$.

Применяя формулы (2.3.32) и (2.3.33), получим:

$$\sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}} = \sigma_1 \cos^2 \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) = \sigma_1 \sin^2 \alpha, \quad (2.3.35)$$

$$\tau_{\alpha+\frac{\pi}{2}} = 0,5\sigma_1 \sin 2 \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) = -0,5\sigma_1 \sin 2\alpha \quad (2.3.36)$$

Анализируя полученные результаты, видим, что, во-первых,

$$\sigma_\alpha + \sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}} = \sigma_1,$$

то есть сумма нормальных напряжений по двум взаимно перпендикулярным площадкам постоянна и равна главному напряжению; во-вторых,

$$\tau_\alpha = -\tau_{\alpha+\frac{\pi}{2}}, \quad (2.3.37)$$

то есть, на двух взаимно перпендикулярных площадках действуют равные по величине и обратные по знаку касательные напряжения (закон парности или взаимности касательных напряжений). При этом оба касательных напряжения на двух взаимно перпендикулярных площадках направлены либо к ребру пересечения площадок, либо от ребра, как

на рис. 2.3.10, *a*. Например, если изменить знак σ , то напряжения τ_α и $\tau_{\alpha+\frac{\pi}{2}}$ изменят свое направление на противоположное и будут оба направлены к ребру *B* пересечения площадок. Закон парности (взаимности) касательных напряжений имеет силу не только для *одноосного*, но и для любого другого напряженного состояния: *двухосного* и *объемного*.

2.3.7.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В НАКЛОННЫХ СЕЧЕНИЯХ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ (СЖАТИИ) В ДВУХ НАПРАВЛЕНИЯХ

Рассмотрим более общий случай плоского (двухосного) напряженного состояния, когда отличны от нуля два главных напряжения σ_1 и σ_2 (рис. 2.3.11, *a*). Как уже было отмечено в разделе 2.2.3, индексы у обозначений главных напряжений ставятся так, что соблюдается неравенство $\sigma_1 > \sigma_2$.

Положительный угол α между направлением σ_1 и нормалью к произвольной площадке будем отсчитывать *против* часовой стрелки. Между направлением напряжения σ_2 и площадкой угол равен $\alpha + \frac{\pi}{2}$.

Напряжения σ_α и τ_α в произвольном наклонном сечении можно или определить из условий равновесия трехгранной призмы *ABC* (рис. 2.3.12, *б*), или вычислить по формулам (2.3.32) и (2.3.33), суммируя напряжения от действия σ_1 с напряжениями от действия σ_2 (при замене угла α на угол $\alpha + \frac{\pi}{2}$).

В результате получим:

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right),$$

откуда:

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha. \quad (2.3.38)$$

Далее:

$$\tau_\alpha = 0,5\sigma_1 \sin 2\alpha + 0,5\sigma_2 \sin 2 \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right),$$

откуда:

$$\tau_\alpha = 0,5(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\alpha \quad (2.3.39)$$

Из формулы (2.3.39) видно, что *максимальные касательные напряжения равны полуразности главных напряжений*:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (2.3.40)$$

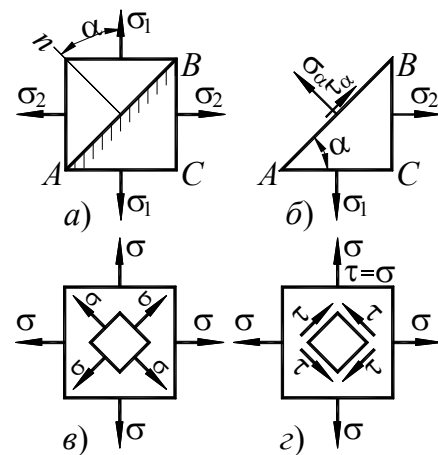


Рис. 2.3.11

и имеют место в сечениях, наклоненных под одним и тем же углом к направлениям σ_1 и σ_2 , то есть при $\alpha = 45^\circ$. Это следует из условия, что $\tau = \tau_{\max}$ при $\sin 2\alpha = 1$.

Определив касательные напряжения на площадке, перпендикулярной площадке AB , убедимся, что и для двухосного напряженного состояния сохраняет свою силу закон парности касательных напряжений.

В этом можно убедиться также по формуле (2.3.39), определив по ней значения τ_α и $\tau_{\alpha + \frac{\pi}{2}}$.

2.3.7.3.1. ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ 1

Рассмотрим напряженное состояние, при котором $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ (рис. 2.3.11, в). В этом случае на всех площадках, проходящих через исследуемую точку, касательное напряжение τ_α равно нулю, а нормальное напряжение имеет одно и то же значение $\sigma_\alpha = \sigma$ (см. формулы (2.3.37) и (2.3.38)). Такое напряженное состояние называется *равномерным двухосным растяжением* (или *сжатием*).

2.3.7.3.2. ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ 2

Рассмотрим напряженное состояние, представленное на рис. 2.3.11, г, характеризующееся главными напряжениями $\sigma_1 = \sigma$ и $\sigma_3 = -\sigma$. При этом $\sigma_2 = 0$.

Определим напряжения в сечениях, одинаково наклоненных к направлениям σ_1 и σ_3 , то есть при $\alpha = 45^\circ$ и $\alpha = 135^\circ$.

По формулам (2.3.37) и (2.3.38) получим $\sigma_\alpha = 0$; $\tau_\alpha = \pm\sigma$. Такое напряженное состояние называется *чистым сдвигом*.

2.3.7.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЛАВНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ И ПОЛОЖЕНИЯ ГЛАВНЫХ ПЛОЩАДОК

Рассмотрим обратную задачу.

Известны нормальные и касательные напряжения, действующие по граням элемента (рис. 2.3.12, а). Требуется определить положение главных площадок и величину главных напряжений.

Рассмотрим равновесие трехгранной призмы с основанием DBC (рис. 2.3.12, б).

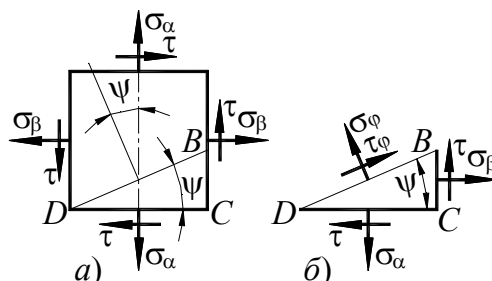


Рис. 2.3.12

Примем, что $\sigma_\alpha > \sigma_\beta$. Угол ψ будем отсчитывать от направления большего напряжения до нормали к площадке. За положительное направление отсчетов угла ψ примем направление против часовой стрелки. Площадь наклонной грани обозначим через dA . Тогда площадь вертикальной грани будет $dA \sin \psi$, а горизонтальной – $dA \cos \psi$.

Проектируя все силы на направление σ_ψ , получим:

$$\sigma_\psi dA - (\sigma_\alpha dA \cos \psi) \cos \psi + (\tau dA \cos \psi) \sin \psi + (\tau dA \sin \psi) \cos \psi - (\sigma_\beta dA \sin \psi) \sin \psi = 0.$$

Проектируем теперь все силы на направление τ_ψ :

$$\tau_\psi dA - (\sigma_\alpha dA \cos \psi) \sin \psi + (\tau dA \cos \psi) \cos \psi + (\tau dA \sin \psi) \sin \psi + (\sigma_\beta dA \sin \psi) \cos \psi = 0.$$

Сократив на dA и введя функции двойных углов, получим:

$$\sigma_\psi = \sigma_\alpha \cos^2 \psi + \sigma_\beta \sin^2 \psi - \tau \sin 2\psi, \quad (2.3.41)$$

$$\tau_\psi = 0,5(\sigma_\alpha - \sigma_\beta) \sin 2\psi + \tau \cos 2\psi. \quad (2.3.42)$$

При изменении угла наклона площадки ψ величина σ_ψ будет непрерывно изменяться.

Чтобы отыскать положения главных площадок, то есть площадок, на которых действуют экстремальные нормальные напряжения, следует либо приравнять нулю производную $\frac{d\sigma_\psi}{d\psi}$, либо приравнять нулю касательные напряжения τ_ψ , так как на главных площадках касательных напряжений нет.

В обоих случаях получаем следующую зависимость для определения угла ψ_0 наклона главных площадок:

$$0,5(\sigma_\alpha - \sigma_\beta) \sin 2\psi_0 + \tau \cos 2\psi_0 = 0$$

или

$$\operatorname{tg} 2\psi_0 = \frac{2\tau}{\sigma_\beta - \sigma_\alpha}. \quad (2.3.43)$$

Для получения экстремальных значений нормальных напряжений, то есть величин главных напряжений, значение угла из формулы (2.3.43) подставим в формулу (2.3.41). Предварительно тригонометрические функции в формуле (2.3.41) следует выразить через тангенс двойного угла:

$$\sin 2\psi_0 = \pm \frac{\operatorname{tg} 2\psi_0}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\psi_0}};$$

$$\cos 2\psi_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\psi_0}};$$

$$\cos^2 \psi_0 = 0,5(1 + \cos 2\psi_0);$$

$$\sin^2 \psi_0 = 0,5(1 - \cos 2\psi_0).$$

После несложных преобразований получим следующую формулу для определения величин главных напряжений:

$$\sigma_{\max}^{\min} = \frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau^2}. \quad (2.3.44)$$

Если одно из заданных нормальных напряжений равно нулю, то формула (2.49) упростится и примет вид:

$$\sigma_{\max}^{\min} = 0,5\sigma \pm 0,5\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad (2.3.45)$$

Этой формулой будем пользоваться в дальнейшем при изучении изгиба и сложного сопротивления.

Исследуя вторую производную $\frac{d^2\sigma_\psi}{d\psi^2}$, можно убедиться, что на главной площадке под углом ψ_0 при принятых условиях ($\sigma_\alpha > \sigma_\beta$) действует максимальное главное напряжение, а на площадке под углом $\psi_0 + \frac{\pi}{2}$ действует минимальное главное напряжение.

Аналогичным образом можно найти экстремальные значения касательных напряжений, приравняв нулю производную $\frac{d\tau_\psi}{d\psi}$. В результате получим:

$$\tau_{\max}^{\min} = \pm 0,5\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad (2.3.46)$$

2.3.7.5. ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ ДЕФОРМАЦИЯМИ И НАПРЯЖЕНИЯМИ ПРИ ПЛОСКОМ И ОБЪЕМНОМ НАПРЯЖЕННЫХ СОСТОЯНИЯХ (ОБОБЩЕННЫЙ ЗАКОН ГУКА)

Определим деформации ε_1 и ε_2 в направлениях главных напряжений при плоском напряженном состоянии (рис. 2.3.13).

Для этого используем:

— закон Гука для одноосного напряженного состояния (см. формулу (2.3.8)),

— зависимость (2.3.5) между продольной и поперечной деформациями,

— принцип независимости действия сил (принцип сложения деформаций).

От действия одного напряжения σ_1 относительное удлинение по вертикали равно:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_1}{E}$$

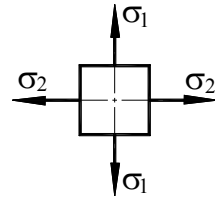


Рис. 2.3.13

и одновременно в горизонтальном направлении относительное сужение равно:

$$\varepsilon_{21} = -\frac{\mu\sigma_1}{E}.$$

От действия одного только σ_2 имели бы в горизонтальном направлении удлинение:

$$\varepsilon_{22} = \frac{\sigma_2}{E}$$

и в вертикальном направлении сужение:

$$\varepsilon_{12} = \frac{\mu\sigma_2}{E}.$$

Суммируя деформации, получаем:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\mu\sigma_2}{E} \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon_{22} + \varepsilon_{21} = \frac{\sigma_2}{E} - \frac{\mu\sigma_1}{E} \end{aligned} \right\} \quad (2.3.47)$$

Эти формулы выражают *обобщенный закон Гука для плоского напряженного состояния*.

Если известны деформации ε_1 и ε_2 , то, решая уравнения (2.3.47) относительно напряжений σ_1 и σ_2 , получим следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{E(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2)}{1 - \mu^2} \\ \sigma_2 &= \frac{E(\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1)}{1 - \mu^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.3.48)$$

Аналогично, для объемного (пространственного) напряженного состояния, когда все три главных напряжения σ_1 , σ_2 , и σ_3 отличны от нуля, получим:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)] \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)] \end{aligned} \right\} \quad (2.3.49)$$

Уравнения (2.3.49) представляют собой *обобщенный закон Гука* для *объемного* напряженного состояния.

Деформации ε_1 , ε_2 и ε_3 в направлении главных напряжений называются *главными деформациями*.

Зная ε_1 , ε_2 и ε_3 , можно вычислить изменение объема при деформации.

Возьмем кубик $1 \times 1 \times 1 \text{ см}^3$.

Его объем до деформации равен:

$$V_0 = 1 \text{ см}^3.$$

Объем после деформации равен:

$$V = (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) \approx 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \quad (2.3.50)$$

(произведениями ε_i , в силу их малости по сравнению с ε , пренебрегаем).

Относительное изменение объема ν :

$$\nu = \frac{V_1 - V_0}{V_0} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \quad (2.3.51)$$

Подставив сюда значения ε_1 , ε_2 и ε_3 из уравнений (2.3.49), получим:

$$\nu = \frac{(1 - 2\mu)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{E} \quad (2.3.52)$$

Из формулы (2.3.52) следует, что коэффициент Пуассона μ не может быть больше 0,5.

Действительно, при трехосном растяжении, очевидно, объем элемента уменьшиться не может, то есть ν положительно, а это возможно лишь при условии:

$$1 - 2\mu \geq 0,$$

так как главные напряжения в этом случае положительны:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 > 0.$$

Формулы (2.3.47)-(2.3.52) выражают зависимость не только между главными деформациями и напряжениями, но и между любыми (неглавными) значениями этих величин, то есть они остаются справедливыми и тогда, когда на площадках действуют также касательные напряжения. Это следует из того, что линейные деформации в направлениях, перпендикулярных τ , не зависят от касательных напряжений.

2.3.8. РАБОТА ВНЕШНИХ И ВНУТРЕННИХ СИЛ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ (СЖАТИИ). ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ

При растяжении (сжатии) внешние силы совершают работу вследствие перемещения точек их приложения (рис. 2.3.14, а).

Вычислим работу статически приложенной внешней силы, то есть такой силы, величина которой растет в процессе деформации от нуля до своего конечного значения с весьма небольшой скоростью. Элементарная работа dW внешней силы F на перемещении $d\delta$ равна:

$$dW = Fd\delta. \quad (2.3.53)$$

Но между δ и F существует зависимость (закон Гука):

$$\delta = \frac{Fl}{EA},$$

откуда:

$$F = \frac{EA\delta}{l}.$$

Подставляя это значение в формулу (2.3.53), получаем:

$$dW = \frac{EA\delta d\delta}{l}.$$

Полную работу силы получим, интегрируя это выражение в пределах от нуля до окончательного значения перемещения δ_1 :

$$W = \frac{EA}{l} \int_0^{\delta_1} \delta d\delta = \frac{EA\delta_1^2}{2l} = \frac{F_1\delta_1}{2}.$$

Таким образом,

$$W = 0,5F_1\delta_1, \quad (2.3.54)$$

то есть работа внешней статически приложенной силы равна половине произведения окончательной величины силы на окончательную величину соответствующего перемещения.

Графически работа силы F выражается (с учетом масштабов) площадью OCB диаграммы, построенной в координатах $\delta - F$ (рис. 2.3.14, б).

Отметим, что работа силы F_1 , неизменной по величине, на перемещении δ_1 равна:

$$W = F_1\delta_1,$$

т. е. в два раза больше, чем при статическом действии.

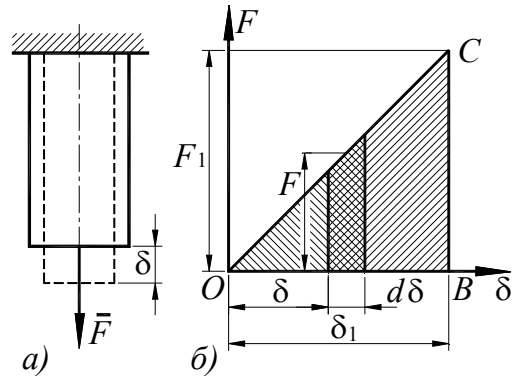


Рис. 2.3.14

При деформации совершают работу не только внешние силы, но и внутренние (силы упругости). Работу *внутренних* сил при растяжении (сжатии) можно вычислить следующим образом. На рис. 2.3.15 показан элемент dz стержня, на который действуют нормальные напряжения σ , являющиеся для этого элемента *внешними* силами. Внутренние силы, очевидно, будут направлены в противоположную сторону, то есть в сторону, противоположную перемещению. Поэтому *работа внутренних сил при нагружении всегда отрицательна*.

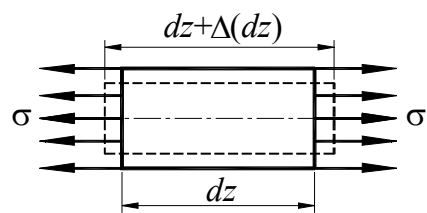


Рис. 2.3.15

Элементарная работа внутренних сил (для элемента dz) вычисляется по формуле, аналогичной формуле (2.3.54):

$$dW_{\text{в}} = -0,5F_n\Delta(dz) \quad (2.3.55)$$

где F_n – внутреннее усилие (продольная сила);
 $\Delta(dz)$ – удлинение элемента.

Но, согласно закону Гука, имеем:

$$\Delta(dz) = \frac{F_n dz}{EA}.$$

Следовательно,

$$dW_{\text{в}} = -\frac{F_n^2 dz}{2EA} \quad (2.3.56)$$

Полную работу внутренних сил получим, интегрируя обе части формулы (2.3.56) по длине всего стержня l :

$$dW_{\text{в}} = -\frac{1}{2} \int_0^l \frac{F_n^2 dz}{EA} \quad (2.3.57)$$

Если F_n , E и A постоянны, то:

$$dW_{\text{в}} = -\frac{F_n^2 l}{2EA} = -\frac{EA\Delta l^2}{2l} \quad (2.3.58)$$

где $\Delta l = \delta = \frac{F_n l}{EA}$ – удлинение стержня.

Величина, равная работе внутренних сил, но имеющая противоположный знак, называется *потенциальной энергией деформации*. Она представляет собой энергию, накапливаемую телом при деформации. Таким образом, для стержня постоянного сечения при продольной силе, имеющей одно и то же значение во всех поперечных сечениях, потенциальная энергия при растяжении (сжатии) определяется по формуле:

$$U = -W_{\text{в}} = \frac{F_n^2 l}{2EA} = \frac{EA\Delta l^2}{2l} \quad (2.3.59)$$

Потенциальная энергия, отнесенная к единице объема материала, называется удельной потенциальной энергией:

$$u_p = \frac{U}{v} = U(Al) = -\frac{F_n^2 l}{2EA^2 l} = \frac{\sigma^2}{2E} \quad (2.3.60)$$

или

$$u_p = \frac{E\varepsilon^2}{2}, \text{ (так как } \sigma = E\varepsilon\text{),}$$

или

$$u_p = \frac{\sigma\varepsilon}{2} \quad (2.3.61)$$

При *объемном* напряженном состоянии удельная потенциальная энергия получится как сумма трех слагаемых:

$$u_p = \frac{(\sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2 + \sigma_3\varepsilon_3)}{2} \quad (2.3.62)$$

Используя обобщенный закон Гука, получаем:

$$u_p = \frac{\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \right]}{2E}. \quad (2.3.63)$$

Из этой формулы, как частный случай, при равенстве нулю одного из главных напряжений, легко получить формулу для *плоского* напряженного состояния.

2.4. СДВИГ

2.4.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Если на гранях элементарного выделенного из бруса элемента действуют только касательные напряжения (рис. 2.4.1), то такой вид напряженного состояния называется *чистым сдвигом*. Площадки, по которым действуют только касательные напряжения, называются *площадками чистого сдвига*.

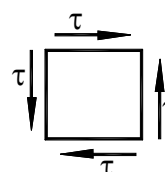


Рис. 2.4.1

Пусть, например, к брусу приложены перпендикулярно его оси две равные по модулю, но противоположно направленные силы F , действующие весьма близко друг от друга (рис. 2.4.2, а). При достаточной величине этих сил произойдет *срез* – отделение левой части бруса от правой по некоторому сечению AB .

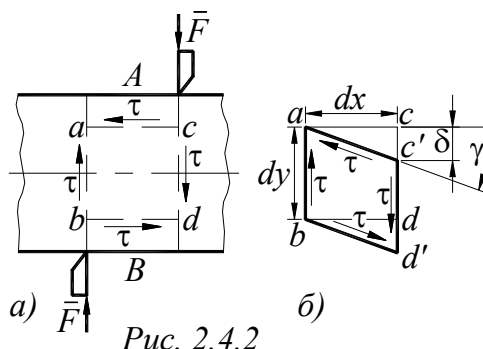


Рис. 2.4.2

Деформации среза в зоне действия усилий предшествует перекашивание прямых углов параллелепипеда $abcd$ (рис. 2.4.2, б). Эту деформацию называют *сдвигом*. На гранях параллелепипеда возникают касательные напряжения, направление которых определяется законом парности касательных напряжений. Величина касательного напряжения:

$$\tau = \frac{F}{A}, \quad (2.4.1)$$

где A – площадь поперечного сечения бруса.

Под действием касательных напряжений грань cd смещается относительно грани ab вниз и занимает новое положение $c'd'$. Величина δ сдвига cc' относительно плоскости ab носит название *абсолютного* или *линейного сдвига*. Величина абсолютного сдвига зависит от расстояния между параллельными плоскостями.

Величину $\frac{\delta}{dx}$ называют *относительным сдвигом*.

Угол γ , на который поворачиваются сечения ac и bd в процессе деформации, носит название *угла сдвига*. Угол сдвига в пределах упругой деформации очень мал, поэтому тангенс угла может быть заменен самим углом:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\delta}{dx} \approx \gamma \quad (2.4.2)$$

Следовательно, угол сдвига γ характеризует *относительную деформацию* при сдвиге.

Для деформации чистого сдвига закон Гука выражается соотношением:

$$\tau = G\gamma, \quad (2.4.3)$$

где G – коэффициент пропорциональности, называемый *модулем упругости второго рода*;

γ – относительный сдвиг.

Линейная зависимость между τ и γ справедлива до тех пор, пока касательные напряжения не превзойдут предела пропорциональности при сдвиге.

Модуль упругости второго рода имеет размерность напряжения, так как относительный сдвиг является величиной безразмерной.

Для *стали* модуль сдвига равен:

$$G = \frac{2 \times 10^5}{2(1+0,3)} \approx 8 \times 10^4 \text{ МПа.}$$

Подставив в формулу (2.4.3) значение касательного напряжения из уравнения (2.4.1) и относительный сдвиг из уравнения (2.4.2), получим еще один вариант формулы закона Гука для сдвига:

$$\delta = \frac{Fdx}{GA}. \quad (2.4.4)$$

Конструкцию на прочность при деформации сдвига рассчитывают так, чтобы действительные касательные напряжения были меньше допускаемых.

Условие прочности при срезе имеет вид:

$$\tau = \frac{F}{A} \leq \tau_p. \quad (2.4.5)$$

Допускаемое напряжение при срезе обычно принимается как некоторая часть допускаемого напряжения того же материала при растяжении.

Для стали, меди и алюминия:

$$\tau_p = (0,5 - 0,6)\sigma_p; \quad (2.4.6)$$

для чугуна:

$$\tau_p = (0,75 - 0,80)\sigma_p. \quad (2.4.7)$$

2.4.2. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ПРИ СДВИГЕ. ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ ТРЕМЯ УПРУГИМИ ПОСТОЯННЫМИ

Вычислим потенциальную энергию при сдвиге.

Для простоты предположим, что грань ab элемента неподвижна (рис. 2.4.2). Тогда при смещении правой грани сила τbdy (где b – толщина элемента) совершит работу на перемещении γdx . Следовательно, потенциальная энергия деформации, накопленная в элементе, равна:

$$dU = \tau y b dy \frac{dx}{2}.$$

Удельная потенциальная энергия:

$$u_p = \frac{dU}{dV} = \frac{\tau \gamma}{2}.$$

Выразив γ через τ по закону Гука (2.4.3), получим:

$$u_p = \frac{\tau^2}{2G}. \quad (2.4.8)$$

Множитель $\frac{1}{2}$ принят потому, что сила прямо пропорциональна смещению.

С другой стороны, потенциальная энергия может быть выражена через главные нормальные напряжения. Из формулы (2.3.63) для плоского напряженного состояния, каким является чистый сдвиг, полагая $\sigma_2 = 0$, получаем:

$$u_p = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - 2\mu\sigma_1\sigma_3}{2E}. \quad (2.4.9)$$

Но главные напряжения при сдвиге равны

$$\sigma_1 = \tau,$$

$$\sigma_3 = -\tau,$$

следовательно,

$$u_p = \tau^2(1 + \mu)E. \quad (2.4.10)$$

Так как величина энергии не должна зависеть от ориентирования граней элемента, то, приравнивая правые части выражений (2.4.8) и (2.4.9), получаем:

$$\frac{\tau^2}{2G} = \frac{\tau^2(1 + \mu)}{E}. \quad (2.4.11)$$

Отсюда найдем зависимость между модулем сдвига G , модулем упругости первого рода E и коэффициентом Пуассона μ :

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (2.4.12)$$

2.5. ИЗГИБ

2.5.1. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ О ДЕФОРМАЦИИ ИЗГИБА

Значительное количество деталей механизмов или элементы этих деталей в процессе работы подвергаются воздействию нагрузки, перпендикулярной к продольной оси, или внешних пар, действующих в плоскости, проходящей через указанную ось (рис. 2.5.1).

При этом в поперечных сечениях деталей или их элементов возникают *изгибающие моменты*, то есть *внутренние моменты*, действующие в плоскости, перпендикулярной к плоскости поперечного сечения. Такой вид нагружения называют *изгибом*. При действии такой нагрузки ось стержня искривляется. Стержни, работающие в основном на изгиб, принято называть *балками*.

Изгиб называют *чистым*, если *изгибающий момент* является *единственным* внутренним усилием, возникающим в поперечном сечении стержня (в поперечном сечении *отсутствуют поперечные силы*).

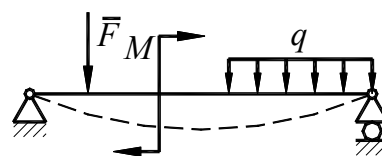


Рис. 2.5.1

Если в поперечных сечениях стержня наряду с изгибающими моментами *возникают* и *поперечные силы*, то такой изгиб называют *поперечным*.

Если плоскость действия изгибающего момента (силовая плоскость) проходит через одну из главных центральных осей поперечного сечения стержня, изгиб называют *простым* или *плоским*. При этом ось балки после деформации остается в силовой плоскости.

Если плоскость действия изгибающего момента в сечении не совпадает ни с одной из главных осей сечения, изгиб называют *косым*.

При косом изгибе плоскость деформации не совпадает с силовой плоскостью.

Деформацию изгиба легко проследить на модели, представляющей собой прямолинейный призматический брус, длина которого значительно превышает его поперечные размеры. На боковые грани бруса нанесены равноотстоящие горизонтальные и вертикальные линии (рис. 2.5.2, а). В плоскости симметрии $abcd$ к концам бруса приложены два равных противоположно направленных момента M , под действием которых брус изгибается, как показано на (рис. 2.5.2, б). Рассмотрение изогнутого бруса позволяет установить следующие основные *признаки чистого изгиба*.

1. Плоские поперечные сечения бруса остаются плоскими и поворачиваются на некоторый угол одно относительно другого.

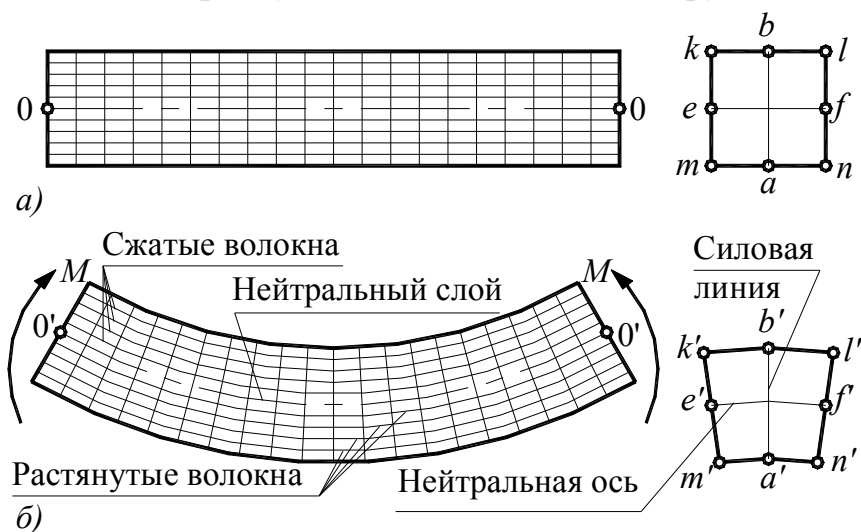


Рис. 2.5.2

2. Плоские продольные сечения искривляются, о чем можно судить по тому, что продольные горизонтальные прямые, нанесенные на боковые грани, становятся кривыми линиями.

3. Волокна на *вогнутой* стороне бруса *укорачиваются*, что свидетельствует об их сжатии, а на *выпуклой* стороне – *удлиняются, растягиваются*.

4. Как показывает опыт, одна из горизонталей на боковой грани бруса своей длины не изменяет (линия 00 на рис. 2.5.2, б). Это позволя-

ет сделать вывод о существовании у бруса слоя, которые не испытывают ни растяжения, ни сжатия. Такой слой называют *нейтральным слоем*.

5. След $e'f'$ нейтрального слоя на плоскости поперечного сечения называют *нейтральной осью* (рис. 2.5.2, б). *Нейтральная ось 00 при изгибе своей длины не изменяет*.

6. След $a'b'$ силовой плоскости на поперечном сечении балки называют *силовой линией*.

Таким образом, здесь наблюдаются те же явления, что и при простом растяжении и сжатии, когда знак поперечной деформации противоположен знаку продольной деформации, то есть продольное растяжение сопровождается поперечным сжатием и продольное сжатие приводит к поперечному растяжению.

Из рис. 2.5.2 следует, что величина деформации волокон, как в продольном, так и в поперечном направлении тем больше, чем дальше они расположены от нейтрального слоя или нейтральной оси.

2.5.2. ТИПЫ ОПОР БАЛОК

Опоры балок, рассматриваемых как плоские системы, бывают трех основных типов.

1. *Подвижная шарнирная опора* (рис. 2.5.3, а).

Такая опора не препятствует вращению конца балки и его перемещению вдоль плоскости качения. В ней может возникнуть только *одна реакция*, которая перпендикулярна плоскости качения и проходит через центр катка.

Подвижные опоры дают возможность балке беспрепятственно изменять свою длину при изменении температуры и тем самым устраняют возможность появления температурных напряжений.

2. *Неподвижная шарнирная опора* (рис. 2.5.3, б).

Такая опора допускает вращение конца балки, но устраняет поступательное перемещение ее в любом направлении. Возникающую в ней реакцию можно разложить на *две составляющие* – горизонтальную и вертикальную.

3. *Жесткая заделка, или защемление* (рис. 2.5.3, в).

Такое закрепление не допускает ни линейных, ни угловых перемещений опорного сечения. В этой опоре может в общем случае возникнуть реакция, которую обычно раскладывают на *две составляющие* (вертикальную и горизонтальную) и *реактивный момент*.

Для того чтобы балка могла воспринимать нагрузку в одной плоскости и оставалась бы при этом в целом неподвижной по отношению к

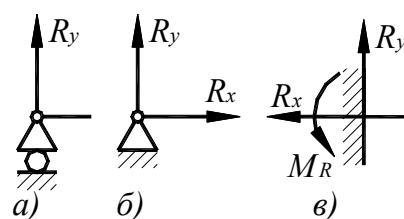


Рис. 2.5.3

основанию, наименьшее число связей, налагаемых опорами, должно быть равно *трем*.

Если опорные реакции могут быть найдены только из *уравнений статики*, то балки называют *статически определенными*.

Для таких балок возможны следующие варианты крепления:

1) защемление балки одним концом (балка с одним заделанным концом называется *консольной балкой* или просто *консолью*);

2) крепление одного конца балки при помощи неподвижной шарнирной опоры, а другого конца – при помощи подвижной шарнирной опоры (балки, имеющие две опоры, называют *двухопорными*).

Такие опоры исключают возможность возникновения продольных усилий при деформации, вызванной изменением температуры.

Если же *число неизвестных опорных реакций больше, чем число уравнений статики*, возможных для данной задачи, то балки называют *статически неопределимыми*. Для определения реакций в таких балках необходимо составлять дополнительные уравнения – уравнения перемещений.

В данном курсе статически неопределимые балки не рассматриваются.

2.5.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПОРНЫХ РЕАКЦИЙ

Определение *опорных реакций* производят при помощи *уравнений статики*. Методику их определения рассмотрим на примерах.

В *первом* примере определим опорные реакции *консольной балки* (рис. 2.5.4).

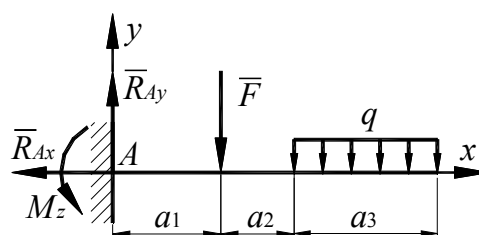


Рис. 2.5.4

Реакцию заделки разложим на две составляющие силы $\overline{R_{Ax}}$ и $\overline{R_{Ay}}$, направленные вдоль осей x и y , и реактивный момент M_{Az} ,

Составим *уравнения равновесия балки*.

1. Приравняем нулю сумму проекций на ось x всех сил, действующих на балку:

$$\sum F_x = 0.$$

Получаем:

$$R_{Ax} = 0.$$

При отсутствии горизонтальной нагрузки горизонтальная составляющая реакции R_{Ax} равна нулю.

2. Приравняем нулю сумму проекций на ось y всех сил, действующих на балку:

$$\sum F_y = 0.$$

Равномерно распределенную нагрузку q заменяем *равнодействующей* qa_3 , приложенной в середине участка a_3 :

$$R_{Ay} - F_1 - qa_3 = 0,$$

откуда:

$$R_{Ay} = F_1 + qa_3.$$

Вертикальная составляющая реакции в консольной балке равна сумме сил, приложенных к балке.

3. Составляем третье уравнение равновесия.

Приравняем нулю сумму моментов всех сил относительно какой-нибудь точки, например, относительно точки A :

$$\sum M_{Az} = 0;$$

$$-M_{Az} - F_1 a_1 - qa_3 \left(a_1 + a_2 + \frac{a_3}{2} \right) = 0,$$

откуда:

$$M_{Az} = -F_1 a_1 - qa_3 \left(a_1 + a_2 + \frac{a_3}{2} \right) = 0.$$

Знак «минус» показывает, что принятое вначале направление реактивного момента следует изменить на обратное.

Реактивный момент в заделке равен сумме моментов внешних сил относительно заделки.

Во *втором* примере рассмотрим определение опорных реакций *двухопорной* балки (рис. 2.5.5).

$$1. \sum F_{Ax} = -R_{Ax} - F \cos \alpha = 0;$$

$$R_{Ax} = -F \cos \alpha.$$

$$2. \sum M_{Bz} = -R_{Ay} (a + b + c + d) + (b + c + d) F \sin \alpha +$$

$$+ \frac{q(c + d)^2}{2} - M = 0.$$

$$R_{Ay} = \frac{(b + c + d) F \sin \alpha + \frac{q(c + d)^2}{2} - M}{a + b + c + d}.$$

$$2. \sum F_y = R_{Ay} - F - q(c + d) + R_{By} = 0;$$

$$R_{By} = -R_{Ay} + F + q(c + d).$$

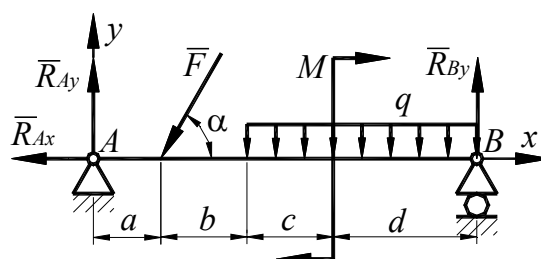


Рис. 2.5.5

2.5.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ ПРИ ИЗГИБЕ

Как было отмечено в разделе 2.5.1, при *плоском поперечном* изгибе в поперечных сечениях балки возникают два внутренних силовых фактора:

- *изгибающий момент* M_x ,
- *поперечная сила* F_{Rt} .

Для их определения применим *метод сечений*.

В рассматриваемом месте сделаем мысленный разрез балки, например, на расстоянии x от левой опоры (рис. 2.5.6, а). Отбросим одну из частей балки, например правую, и рассмотрим равновесие левой части.

Взаимодействие частей балки заменим *внутренними* усилиями, действующими в этом сечении: изгибающим моментом M_x и поперечной силой F_{Rt} (рис. 2.5.6, б).

Для определения величин M_x и F_{Rt} используем два уравнения равновесия:

$$1. \sum M_0 = R_{Ay}x - F_1(x - a_1) - M_x = 0;$$

$$M_x = R_{Ay}x - F_1(x - a_1).$$

$$2. \sum F_y = R_{Ay} - F_1 + F_{Rt} = 0;$$

$$F_{Rt} = F_1 - R_{Ay}.$$

Следовательно:

1) *поперечная сила* F_{Rt} в поперечном сечении балки численно равна *алгебраической* сумме проекций на плоскость сечения всех *внешних* сил, действующих по *одну* сторону от сечения;

2) *изгибающий момент* в поперечном сечении балки численно равен *алгебраической* сумме моментов (вычисленных *относительно центра тяжести сечения*) *внешних* сил, действующих по *одну* сторону от данного сечения.

Правило знаков для изгибающих моментов и поперечных сил

Поперечная сила в сечении балки mn (рис. 2.5.7, а) считают *положительной*, если равнодействующая внешних сил слева от сечения направлена *снизу вверх*, а *справа* — *сверху вниз*, и *отрицательной* — в *противо-*

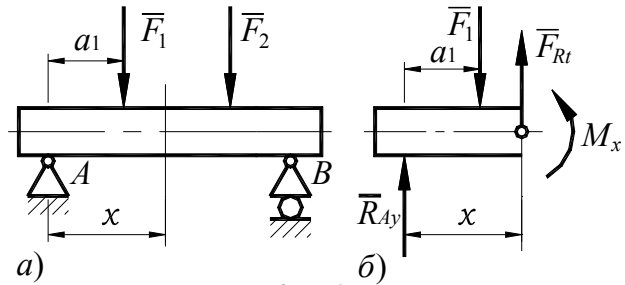


Рис. 2.5.6

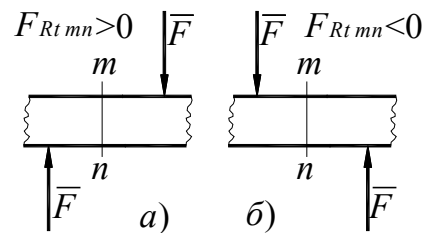


Рис. 2.5.7

положном случае (рис. 2.5.7, б).

Изгибающий момент в сечении балки, например, в сечении mn (рис. 2.5.8, а), положителен, если равнодействующий момент внешних сил слева от сечения направлен по часовой стрелке, а справа – против часовой стрелки, и отрицателен – в противоположном случае (рис. 2.5.8, б).

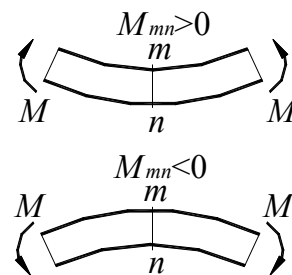


Рис. 2.5.8

Моменты, изображенные на рис. 2.5.8, а, изгибают балку выпуклостью вниз, а моменты, изображенные на рис. 2.5.8, б, изгибают балку выпуклостью вверх.

Отсюда следует другое, более удобное для запоминания правило знаков для изгибающего момента.

Изгибающий момент считается положительным, если в рассматриваемом сечении балка изгибается выпуклостью вниз.

2.5.5. ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ ИЗГИБАЮЩИМ МОМЕНТОМ, ПОПЕРЕЧНОЙ СИЛОЙ И ИНТЕНСИВНОСТЬЮ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКИ

Установим зависимость между изгибающим моментом, поперечной силой и интенсивностью распределенной нагрузки. Рассмотрим балку, нагруженную произвольной нагрузкой (рис. 2.5.9). Определим поперечную силу F_{Rt} в сечении, отстоящем от левой опоры на расстоянии x . Проектируя на вертикаль силы, расположенные левее сечения, получаем:

$$F_{Rt} = R_{Ay} - F_1 + qx. \quad (2.5.1)$$

Аналогично вычислим поперечную силу в смежном сечении, расположенном на расстоянии $x + dx$ от левой опоры:

$$F_{Rt} + dF_t = R_{Ay} - F_1 + q(x + dx). \quad (2.5.2)$$

Вычитая (2.5.1) из (2.5.2), получаем:

$$dF_{Rt} = qdx,$$

откуда:

$$q = \frac{dF_{Rt}}{dx}, \quad (2.5.3)$$

то есть производная от поперечной силы по абсциссе сечения балки равна интенсивности распределенной нагрузки.

Вычислим теперь изгибающий момент в сечении с абсциссой x , взяв сумму моментов сил, приложенных слева от сечения. Для этого

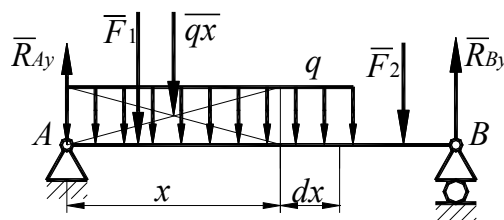


Рис. 2.5.9

распределенную нагрузку на участке длиной x заменяем ее равнодействующей, равной qx и приложенной в середине участка, на расстоянии $\frac{x}{2}$ от сечения:

$$M_x = R_{Ay}x - F_1(x - b) + qx \frac{x}{2}. \quad (2.5.4)$$

Аналогично вычислим изгибающий момент в смежном сечении, отстоящем от левой опоры на расстоянии $x + dx$:

$$M_x + dM_x = R_{Ay}(x + dx) - F_1(x + dx - b) + \frac{q(x + dx)^2}{2}. \quad (2.5.5)$$

Вычитая (2.5.4) из (2.5.5), получаем величину приращения изгибающего момента:

$$dM_x = R_{Ay}dx - F_1dx + qxdx = dx(R_{Ay} - F_1 + qx).$$

Выражение в скобках последнего уравнения представляет собой поперечную силу F_t . Следовательно,

$$dM_x = F_{Rt}dx,$$

откуда:

$$F_{Rt} = \frac{dM_x}{dx}, \quad (2.5.6)$$

то есть *производная от изгибающего момента по абсциссе сечения балки равна поперечной силе (теорема Журавского)*.

Взяв производную от обеих частей равенства (2.5.6), получим:

$$\frac{dF_{Rt}}{dx} = \frac{d^2M_x}{dx^2} = q, \quad (2.5.7)$$

то есть *вторая производная от изгибающего момента по абсциссе сечения балки равна интенсивности распределенной нагрузки*.

Полученные зависимости будем использовать в дальнейшем, главным образом, при построении эпюр изгибающих моментов и поперечных сил.

2.5.6. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ И ПОПЕРЕЧНЫХ СИЛ

Для наглядного представления о характере изменения изгибающего момента и поперечной силы по длине балки и для нахождения опасных сечений строят эпюры M_x и F_{Rt} . Методику построения этих эпюр рассмотрим на следующих примерах.

В *первом* примере рассмотрим построение эпюр M_x и F_{Rt} для *консольной* балки, изображенной на рис. 2.5.10, а.

Проводим сечение справа от силы на расстоянии x_1 от правого конца балки (сечение $I-I$), x_1 – величина переменная, индекс «1» обозначает номер участка, на котором сделано сечение.

Изгибающий момент в сечении $I-I$ проще всего определить, составив уравнение суммы моментов внешних сил, расположенных, в данном случае, *справа* от сечения:

$$M_{x_1} = 0;$$

$$0 \leq x_1 \leq a_2.$$

Изгибающий момент в любом поперечном сечении балки на участке BC отсутствует.

Изгибающий момент в сечении $II-II$ на участке AB так же вычислим, как сумму моментов всех сил, расположенных *справа* от сечения (в этом случае нет необходимости в определении опорных реакций в заделке):

Получим:

$$M_{x_2} = -F(x_2 - a_2);$$

$$a_2 \leq x_2 \leq (a_1 + a_2).$$

Знак «минус» взят потому, что балка изгибается выпуклостью вверх.

Полученное уравнение является уравнением наклонной *прямой* линии. Поэтому для построения эпюры на участке AB достаточно вычислить *два* значения M_x :

$$M_{x_2=a_2} = 0;$$

$$M_{x_2=a_1+a_2} = -Fa_1.$$

Величину Fa_1 в выбранном масштабе откладываем вниз от оси эпюры. Эпюра M_x представлена на рис. 2.5.10, б).

Наибольший изгибающий момент возникает в сечении у заделки:

$$M_{x_{\max}} = -Fa_1.$$

Вычислим теперь *поперечную силу* в сечении $I-I$.

Проектируя на вертикальную ось силы, расположенные *справа* от сечения, получаем, что:

$$F_{Rt_{x_1}} = 0;$$

$$0 \leq x_1 \leq a_2$$

Для сечения $II-II$ тем же путем получим:

$$F_{Rt_{x_2}} = F;$$

$$a_2 \leq x_2 \leq (a_1 + a_2).$$

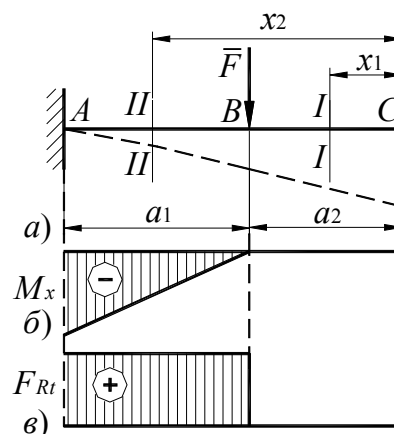


Рис. 2.5.10

Знак «плюс» взят потому, что внешняя сила справа от сечения направлена сверху вниз.

Эпюра F_{Rt} показана на рис. 2.5.10, в.

Во *втором* примере рассмотрим построение эпюр M_x и F_{Rt} для *двухопорной* балки, изображенной на рис. 2.5.11, а.

Используя уравнения равновесия, определим *реакции* R_{Ay} и R_{By} .

Изгибающий момент в сечении с абсциссой x_1 определяем как сумму моментов от сил, расположенных *слева* от сечения:

$$M_{x_1} = -R_{Ay}x_1 - \frac{q_1x_1^2}{2};$$

$$0 \leq x_1 \leq l_1.$$

Уравнение момента M_{x_1} описывает *параболу*. Поэтому двух фиксированных точек для построения эпюры недостаточно. Эпюру строим по *трем* точкам:

$$x'_1 = 0;$$

$$M'_{x_1} = 0;$$

$$x''_1 = \frac{l_1}{2};$$

$$M''_{x_1} = -\frac{R_{Ay}l_1}{2} - \frac{q_1l_1^2}{8};$$

$$x'''_1 = l_1;$$

$$M'''_{x_1} = -R_{Ay}l_1 - \frac{q_1l_1^2}{2}.$$

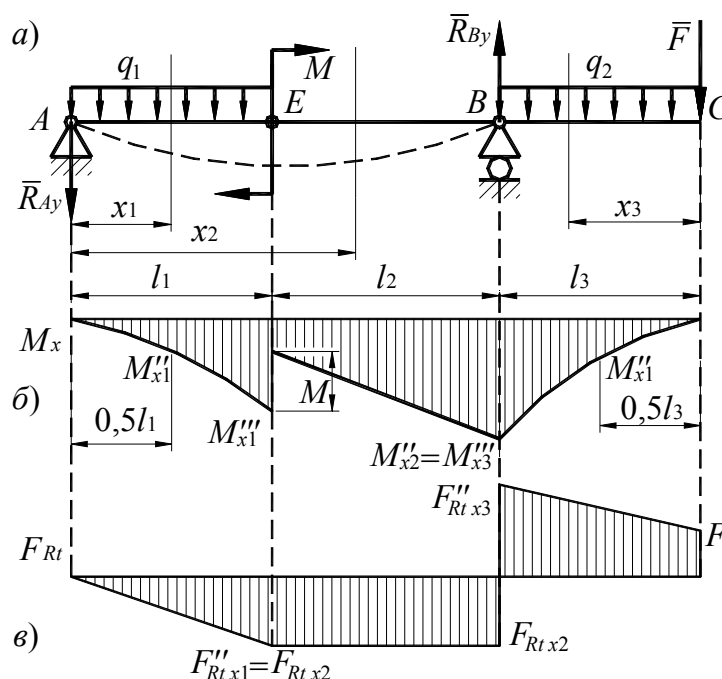


Рис. 2.5.11

По этим данным строим эпюру M_x на участке AE .

Определяем изгибающий момент в сечении с абсциссой x_2 от всех нагрузок, действующих слева от этого сечения:

$$M_{x_2} = -R_{Ay}x_2 - q_1l_1\left(x_2 - \frac{l_1}{2}\right) + M;$$

$$l_1 \leq x_2 \leq (l_1 + l_2).$$

Второй член этого выражения представляет собой изгибающий момент от равнодействующей распределенной нагрузки q_1 , действующей на участке AE .

Уравнение M_{x_2} описывает наклонную *прямую* линию. Поэтому для построения эпюры достаточно вычислить *два* значения M_{x_2} :

$$x'_2 = l_1;$$

$$M'_{x_2} = -R_{Ay}l_1 - \frac{q_1l_1^2}{2} + M;$$

$$x''_2 = l_1 + l_2;$$

$$M''_{x_2} = -R_{Ay}(l_1 + l_2) - q_1l_1\left(\frac{l_1}{2} + l_2\right) + M.$$

По этим данным построим эпюру M_x на участке BE .

Определяем изгибающий момент в сечении, отстоящем на расстоянии x_3 от *правого* конца балки.

Так как справа от указанного сечения внешних силовых факторов меньше, чем слева, то M_{x_3} проще вычислить как сумму моментов от сил, расположенных *справа* от сечения:

$$M_{x_3} = -Fx_3 - \frac{q_2x_3^2}{2};$$

$$0 \leq x_3 \leq l_3.$$

Первый член в уравнении M_{x_3} представляет собой изгибающий момент от силы F , а второй – изгибающий момент от распределенной нагрузки q_2 , действующей *правее* рассматриваемого сечения.

Уравнение момента M_{x_3} описывает *параболу*. Эпюру строим по *трем* точкам:

$$x'_3 = 0;$$

$$M'_{x_3} = 0;$$

$$x''_3 = \frac{l_3}{2};$$

$$M''_{x_3} = -\frac{Fl_3}{2} - \frac{q_2l_3^2}{8};$$

$$x'''_3 = l_3;$$

$$M'''_{x_3} = -Fl_3 - \frac{q_2l_3^2}{2}.$$

По этим данным строим эпюру M_x на участке BC .

Поперечную силу F_{Rt} определяем, проектируя на вертикаль силы, действующие на отсеченную часть:

$$F_{Rtx1} = -R_{Ay} - q_1x_1;$$

$$0 \leq x_1 \leq l_1.$$

Уравнение $F_{Rt x1}$ является уравнением наклонной *прямой* линии.

$$x_1' = 0;$$

$$F_{Rt x1}' = 0;$$

$$x_1'' = l_1;$$

$$F_{Rt x1}'' = -R_{Ay} - q_1 l_1.$$

Поперечная сила в произвольном сечении участка *EB*:

$$F_{Rt x2} = -R_{Ay} - q_1 l_1.$$

Величина $F_{Rt x2}$ не зависит от текущей координаты x_2 , поэтому ее эпюра имеет вид горизонтальной *прямой* линии.

На третьем участке:

$$F_{Rt x3} = F + q_2 x_3;$$

$$0 \leq x_3 \leq l_3.$$

Уравнение $F_{Rt x3}$ является уравнением наклонной *прямой* линии на участке *BC*.

$$x_3' = F;$$

$$F_{Rt x3}' = 0;$$

$$x_3'' = l_3;$$

$$F_{Rt x3}'' = F + q_2 l_3.$$

Скачки в эпюре F_{Rt} равны по величине приложенным в соответствующих сечениях балки сосредоточенным силам R_{Ay} , R_{By} , F .

2.5.7. НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ. РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ

2.5.7.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Как было показано в разделе 2.5.1, наибольшую деформацию растяжения (или сжатия) претерпевают периферийные слои изгибаемой балки. Очевидно, что эти деформации тем больше, чем больше изгибающий момент. Следовательно, при *изгибе* величина *нормальных* напряжений зависит от величины *изгибающего момента*. Величина же *касательных* напряжений зависит от величины *поперечной силы*.

Изгибающий момент или поперечная сила в любом сечении балки могут быть определены с помощью эпюр рассмотренными выше методами.

При расчетах на прочность большое значение имеет *распределение* нормальных и касательных *напряжений по сечению*. Длительная практика эксплуатации изогнутых балок показывает, что *наиболее опасной*, опреде-

ляющей работоспособность конструкции, является точка, расположенная на крайних растянутых волокнах.

Лишь в некоторых специфических случаях касательное напряжение может оказаться решающим фактором, определяющим прочность изогнутой балки. Тогда производят *полный* расчет балки по эквивалентным напряжениям.

Установим зависимость между изгибающим моментом, действующим в сечении, и возникающими при этом нормальными напряжениями, а также определим закон распределения нормальных напряжений по сечению. Пусть прямолинейная балка, имеющая продольную вертикальную плоскость симметрии, подвергается *чистому* изгибу под влиянием силовых факторов, действующих в этой плоскости (рис. 2.5.12). Указанную плоскость будем называть *плоскостью изгиба*.

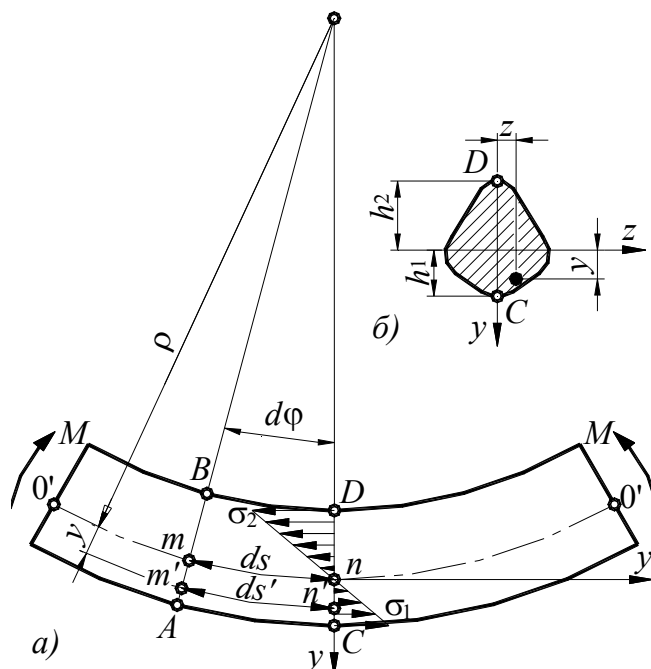


Рис. 2.5.12

Выделим элемент балки, ограниченный двумя поперечными сечениями, находящимися на бесконечно малом расстоянии ds друг от друга.

При изгибе ось балки (линия пересечения нейтрального слоя с плоскостью изгиба) искривляется (рис. 2.5.12, а), а сечения, ограничивающие выделенный элемент балки, поворачиваются вокруг нейтральных осей, проходящих через точки m и n , и, заняв положения AB и CD , образуют угол $d\varphi$. При этом можно считать, что указанные сечения остаются плоскими, а расстояния между продольными слоями балки не меняются.

Дуга mn , принадлежащая нейтральному слою, сохраняет свою первоначальную длину ds , а длина дуги $m'n'$, отстоящей на расстоянии y от нейтрального слоя, принимает новое значение ds'' . Радиус кривизны дуги mn изогнутой оси балки можно считать постоянным. Обозначив его через ρ , получим:

$$ds = \rho d\varphi;$$

$$ds' = (\rho + y)d\varphi.$$

Относительное удлинение дуги:

$$\varepsilon = \frac{ds' - ds}{ds} = \frac{(\rho + y)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{y}{\rho}. \quad (2.5.8)$$

По закону Гука напряжение в слое, отстоящем на расстоянии y от нейтрального равно:

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{y}{\rho}. \quad (2.5.9)$$

Таким образом, нормальные напряжения в поперечном сечении изогнутой балки прямо пропорциональны расстояниям от рассматриваемых точек до нейтральной оси (рис. 2.5.12, б), т. е. изменение напряжений по сечению в плоскости изгиба подчиняется линейному закону (рис. 2.5.12, а).

Из равенства (2.5.9) следует:

$$\sigma = 0 \text{ при } y = 0;$$

$$\sigma = \sigma_{\max} \text{ при } y = y_{\max},$$

то есть *нормальное напряжение равно нулю на нейтральной оси* и достигает максимальных значений в наиболее удаленных от этой оси волокнах.

Рассматривая y как алгебраическую величину, имеющую положительное значение для растянутых и отрицательное для сжатых волокон, получим для напряжений в этих волокнах соответственно положительные и отрицательные значения.

На выделенный элемент $ABCD$ (рис. 2.5.12, а) действуют со стороны правой части балки распределенные по сечению CD силы:

$$dF = \sigma dA = \frac{Ey}{\rho} dA,$$

где dA – элементарная площадка, расположенная на расстоянии y от нейтральной оси.

Эта система элементарных сил эквивалентна системе внешних сил, действующих на правую часть балки, сводящихся в данном случае к одному изгибающему моменту $M_{\text{и}}$ (поперечная сила $F_{Rt} = 0$, так как рассматривается чистый изгиб). Таким образом, главный вектор распределенных по сечению CD сил равен нулю, а главный момент их относительно любого центра равен изгибающему моменту в этом сечении. Поэтому при выбранной системе осей:

$$\Sigma F_x = 0;$$

$$\Sigma F_x = \Sigma dF = \int_A \frac{E}{\rho} y dA = \frac{E}{\rho} \int_A y dA = 0;$$

$$\Sigma M_z = -\Sigma y dF = -\int_A \frac{E}{\rho} y^2 dA = -\frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = -M_{\text{и}},$$

где $\int_A y dA = S_z$ — *статический момент площади сечения* относительно

нейтральной оси;

$\int_A y^2 dA = J_z$ — *момент инерции площади сечения* относительно

нейтральной оси.

Отсюда, так как $\frac{E}{\rho} \neq 0$:

$$S_z = 0. \quad (2.5.10)$$

Кроме того:

$$\frac{EJ_z}{\rho} = M_{из}. \quad (2.5.11)$$

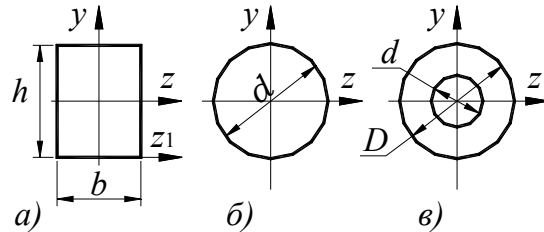


Рис. 2.5.13

Из уравнения (2.5.10) следует, что *нейтральная ось проходит через центр тяжести сечения* и для симметричных сечений она является одной из главных центральных осей инерции.

Для наиболее распространенных сечений (рис. 2.5.13) величины моментов инерции равны:

1. прямоугольник высотой h и шириной b :

$$J_z = \frac{bh^3}{12}; \quad J_y = \frac{hb^3}{12}; \quad (2.5.12)$$

для того же прямоугольника момент инерции *относительно оси, проходящей через основание*:

$$J_{z_1} = \frac{bh^3}{3}; \quad (2.5.13)$$

2. круг диаметром d :

$$J_z = J_y = \frac{\pi d^4}{64} \approx 0,05d^4; \quad (2.5.14)$$

3. круговое кольцо с наружным диаметром D и внутренним d :

$$J_z = J_y = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64} \approx 0,05(D^4 - d^4). \quad (2.5.15)$$

Уравнение (2.5.11) можно представить в виде:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_{из}}{EJ_z} \quad (2.5.16)$$

Величина $\frac{1}{\rho}$ представляет собой *кривизну изогнутой оси балки* и характеризует *величину деформации при изгибе*.

Произведение модуля упругости E , характеризующего механические свойства материала балки, на момент инерции сечения J_z , характеризующий форму и размеры сечения, называют *жесткостью при изгибе*. Из соотношения (2.5.16) следует, что величина деформации изогнутой оси балки прямо пропорциональна изгибающему моменту $M_{из}$ и обратно пропорциональна жесткости при изгибе EJ_z .

Таким образом: *жесткость при изгибе характеризует способность балки из данного материала с заданной формой и размерами поперечного сечения сопротивляться воздействию изгибающего момента.*

Подставляя в уравнение (2.5.9) выражение $\frac{1}{\rho}$ из уравнения (2.5.16), получим:

$$\sigma = E\gamma \frac{M_{из}}{EJ_z} = \frac{M_{из}\gamma}{J_z}. \quad (2.5.17)$$

Наибольшие по абсолютной величине напряжения возникают на наиболее удаленных от нейтральной оси волокнах, то есть при:

$$\gamma = \gamma_{max}.$$

Формула (2.5.17) выведена для *чистого* изгиба. С достаточной для практики точностью она может применяться и при *поперечном* изгибе.

Обозначим:

$$\frac{J_z}{\gamma_{max}} = W_z. \quad (2.5.18)$$

Величину W_z называют *осевым моментом сопротивления сечения*. Момент сопротивления является *геометрической* характеристикой поперечного сечения балки, определяющей ее *прочность при изгибе*.

2.5.7.2. УСЛОВИЯ ПРОЧНОСТИ ПО НОРМАЛЬНЫМ НАПРЯЖЕНИЯМ

Для обеспечения прочности балки необходимо, чтобы наибольшие растягивающие и наибольшие сжимающие напряжения при изгибе в опасном сечении, то есть в сечении, где $M_{из}$ имеет наибольшее значение, не превосходили соответствующих допускаемых напряжений (рассматриваются только балки с постоянным по всей длине поперечным сечением).

Обозначим (рис. 2.5.12):

h_1 – расстояние от нейтральной оси до наиболее удаленного растянутого волокна,

h_2 – расстояние от нейтральной оси до наиболее сжатого волокна.

Тогда:

- наибольшее растягивающее напряжение при изгибе равно:

$$\sigma_{p\max} = \frac{M_{\text{и}} h_1}{J_x}, \quad (2.5.19)$$

- наибольшее сжимающее напряжение (по абсолютной величине):

$$\sigma_{c\max} = \frac{M_{\text{и}} h_2}{J_x} \quad (2.5.20)$$

Для *хрупких* материалов (например; чугуна) допускаемые напряжения на растяжение и сжатие различны: σ_{cp} в 3-5 раз больше σ_{pp} , поэтому для балок из таких материалов обычно применяют сечения, не симметричные относительно нейтральной оси. При этом сечение располагают таким образом, чтобы $h_1 < h_2$, то есть, чтобы обеспечивалось неравенство $\sigma_{p\max} < \sigma_{c\max}$.

В указанных случаях нужно составлять *два условия прочности*:

- по наибольшим растягивающим напряжениям:

$$\sigma_{p\max} = \frac{M_{\text{и}} h_1}{J_z} = \frac{M_{\text{и}}}{W_{zp}} \leq \sigma_{pp} \quad (2.5.21)$$

- по наибольшим сжимающим напряжениям:

$$\sigma_{c\max} = \frac{M_{\text{и}} h_2}{J_z} = \frac{M_{\text{и}}}{W_{zc}} \leq \sigma_{cp} \quad (2.5.22)$$

где W_{zp} и W_{zc} – моменты сопротивления растянутого и сжатого волокон.

В формулы (2.5.21), (2.5.22) надо подставлять наибольшее (по абсолютной величине) значение $M_{\text{и}}$.

Если сечение балки симметрично относительно нейтральной оси (такие сечения целесообразно применять для балок из *пластичных* материалов), то есть:

$$h_1 = h_2 = \frac{h}{2},$$

то вместо двух формул (2.5.19) и (2.5.20) получим одну:

$$\sigma = \frac{M_{\text{и}} h}{J_z 2}. \quad (2.5.23)$$

Обозначив:

$$W_z = \frac{2J_z}{h}, \quad (2.5.24)$$

получим при *одинаковых* допускаемых напряжениях на растяжение и сжатие σ_p следующее *условие прочности*:

$$\sigma = \frac{M_{\text{и}}}{W_z} \leq \sigma_p. \quad (2.5.25)$$

Величина W_z называется *осевым моментом сопротивления* или *моментом сопротивления при изгибе*.

Момент сопротивления является *геометрической* характеристикой поперечного сечения балки, определяющей ее прочность при изгибе.

Для наиболее распространенных сечений (рис. 2.5.13) величины моментов сопротивления равны:

1. Прямоугольник высотой h и шириной b :

$$W_z = \frac{bh^2}{6}; \quad W_y = \frac{h^2b}{6} \quad (2.5.26)$$

2. Круг диаметром d :

$$W_z = W_y = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3. \quad (2.5.27)$$

3. Круговое кольцо с наружным диаметром D и внутренним d :

$$W_z = W_y = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32D} \approx 0,1 \frac{D^4 - d^4}{D}. \quad (2.5.28)$$

4. Для *прокатных* сечений (двутавры, швеллеры и т.п.) значения W_z приведены в таблицах сортамента.

Определение минимально допускаемого поперечного сечения балки при его заданной форме при изгибе рассмотрим на примере, в котором требуется построить эпюры $M_{из}$ и F_{Rt} для *двухопорной* балки, находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки (рис. 2.5.14, а, б, в) и подобрать сечение балки двутаврового профиля при данных l , q и σ_p .

Вследствие симметрии нагружения балки опорные реакции равны между собой:

$$R_{Ay} = R_{By} = \frac{ql}{2}.$$

Изгибающий момент в сечении с абсциссой x равен:

$$M_x = R_{Ay}x - \frac{qx^2}{2} = \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2}.$$

$$0 \leq x \leq l.$$

Первый член в вышеприведенном уравнении представляет собой *изгибающий момент* от реакции, взятый со знаком «плюс», так как, мысленно закрепив балку в рассматриваемом сечении, можно убедиться, что от действия реакции часть балки слева от сечения изогнется выпуклостью вниз.

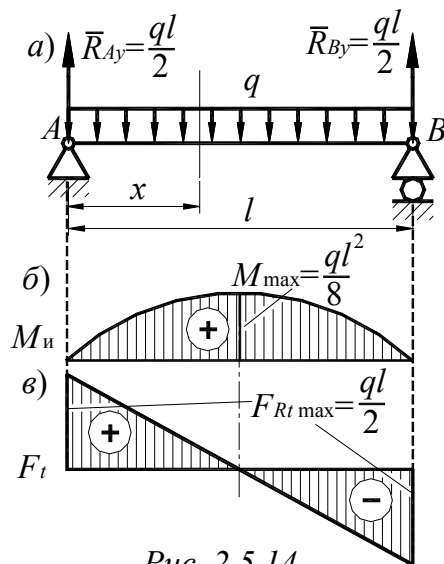


Рис. 2.5.14

Второй член представляет собой изгибающий момент от равномерно распределенной нагрузки, расположенной левее проведенного сечения. Равнодействующая этой нагрузки равна qx и приложена в середине участка, то есть на расстоянии $0,5x$ от сечения. Следовательно, момент от этой нагрузки равен $\frac{qx^2}{2}$ со знаком «минус», так как такая нагрузка изогнет балку (мысленно закрепленную в сечении) выпуклостью вверх.

Полученное уравнение для изгибающего момента есть уравнение *параболы*.

Вычисляем три ординаты эпюры $M_{и}$:

$$x' = 0;$$

$$M'_x = 0;$$

$$x'' = \frac{l}{2};$$

$$M''_x = \frac{ql^2}{8};$$

$$x''' = l;$$

$$M'''_x = 0;$$

По этим данным строим эпюру $M_{и}$.

Максимальный изгибающий момент (в середине балки) равен:

$$M_{\max} = -\frac{ql^2}{8}.$$

Продифференцировав выражение для M_x и приравняв первую производную нулю, убедимся в том, что максимум $M_{и}$ действительно имеет место посередине пролета балки.

Поперечная сила в сечении (как сумма сил, расположенных слева от сечения):

$$F_{Rt} = \frac{ql}{2} - qx;$$

$$0 \leq x \leq l.$$

$$x' = 0;$$

$$F'_{Rt} = \frac{ql}{2};$$

$$x' = l;$$

$$F''_{Rt} = -\frac{ql}{2}.$$

Тот же результат получается и по формуле (2.5.6).

Строим эпюру F_t .

Требуемый момент сопротивления:

$$W_z = \frac{M_{\max}}{\sigma_p} = \frac{ql^2}{8\sigma_p}.$$

Из таблиц сортамента выбираем двутавр, у которого момент сопротивления ближайший больший относительно определенного по последней формуле расчета.

2.5.7.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

В общем случае изгиба (при *поперечном* изгибе) в поперечных сечениях балки возникают изгибающие моменты и поперечные силы. Наличие изгибающего момента связано с возникновением в поперечных сечениях балки нормальных напряжений, для определения которых можно пользоваться

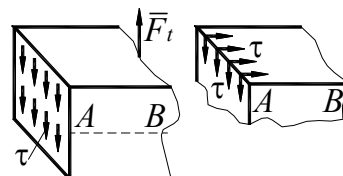


Рис. 2.5.15

формулой (2.5.17). Наличие поперечной силы связано с возникновением касательных напряжений в поперечных сечениях балки, а по закону парности касательных напряжений – и в ее продольных сечениях (рис. 2.5.15).

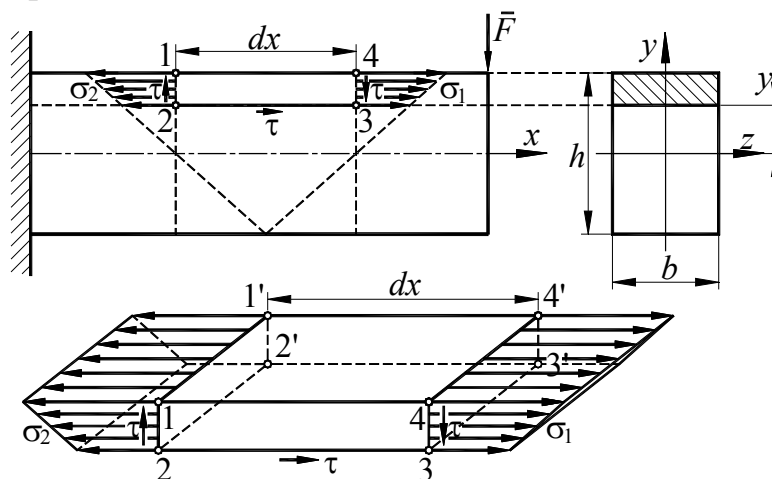


Рис. 2.5.16

Для определения касательных напряжений рассмотрим вначале балку прямоугольного сечения небольшой ширины (рис. 2.5.16).

Вырежем из балки элемент длиной dx и шириной, равной ширине b балки. На этот элемент действуют следующие силы:

— по грани 344'3' действуют нормальные напряжения, которые согласно формуле (2.5.17) равны:

$$\sigma_1 = \frac{M_1 y}{J_z}, \quad (2.5.29)$$

где M_1 – изгибающий момент в сечении 344'3'.

Кроме того, в указанном сечении действуют не известные пока касательные напряжения τ , которые ввиду незначительной ширины сече-

ния балки можно считать равномерно распределенными по ширине сечения (это допущение носит название *гипотезы Журавского*);

— по грани 122'1' действуют нормальные напряжения:

$$\sigma_2 = \frac{M_2 y}{J_z}; \quad (2.5.30)$$

— касательные напряжения τ ;

— по грани 322'3' действуют только касательные напряжения, по закону парности равные касательным напряжениям, действующим по вертикальным граням.

Составим уравнение равновесия отсеченного элемента балки. Спроектируем силы, действующие на элемент, на горизонтальную ось. Очевидно, касательные усилия, действующие по вертикальным граням, в указанное уравнение не войдут. Касательное усилие по грани 233'2' спроецируется в истинную величину $\tau b dx$. Нормальные усилия, действующие по грани 344'3', имеют равнодействующую:

$$F_{N_1} = \int_{A_{\text{отс}}} \sigma_1 dA.$$

Нормальные усилия, действующие по грани 122'1', имеют равнодействующую:

$$F_{N_2} = \int_{A_{\text{отс}}} \sigma_2 dA.$$

Интегралы должны быть взяты по площади отсеченной части, то есть по площади граней 122'1' и 344'3'.

Используя уравнение равновесия $\sum F_x = 0$, получаем:

$$-F_{N_2} + F_{N_1} + \tau b dx = 0$$

или

$$-\int_{A_{\text{отс}}} \sigma_2 dA + \int_{A_{\text{отс}}} \sigma_1 dA + \tau b dx = 0.$$

Используя выражения (2.5.29) и (2.5.30), имеем:

$$-\frac{M_2}{J_z} \int_{A_{\text{отс}}} y dA + \frac{M_1}{J_z} \int_{A_{\text{отс}}} y dA + \tau b dx = 0.$$

Выражение

$$\int_{A_{\text{отс}}} y dA = S_z^{\text{отс}}$$

представляет собой *статический момент площади* отсеченной части сечения относительно нейтральной оси. Следовательно,

$$\frac{S_z^{\text{отс}}}{J_z}(M_2 - M_1) = \tau b dx.$$

Но $M_2 - M_1 = dM_x$ – приращение изгибающего момента на длине dx . Поэтому предыдущую формулу можно переписать в виде:

$$\frac{S_z^{\text{отс}} dM_x}{J_z} = \tau b dx,$$

откуда:

$$\tau = \frac{S_z^{\text{отс}} dM_x}{J_z b dx}.$$

Используя зависимость (2.5.6), окончательно получаем:

$$\tau = \frac{F_t S_z^{\text{отс}}}{J_z b}. \quad (2.5.31)$$

Эта зависимость впервые была установлена Д.И.Журавским и поэтому называется *зависимостью (формулой) Журавского*.

Исследуем закон *распределения касательных напряжений по сечению* для балки прямоугольного сечения (рис. 2.5.17). Этот закон определяется законом изменения $S_z^{\text{отс}}$, так как остальные величины для данного сечения постоянны, причем:

$$J_z = \frac{bh^3}{12}.$$

Статический момент заштрихованной площади относительно оси x :

$$S_z^{\text{отс}} = b \left(\frac{h}{2} - y \right) \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y \right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

Это уравнение является уравнением *параболы*.

Касательное напряжение равно:

$$\tau = \frac{F_n b \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) 12}{bh^3 2b} = \frac{6F_n}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

Построим эпюру τ по трем точкам:

$$y' = \frac{h}{2};$$

$$\tau' = 0;$$

$$y'' = 0;$$

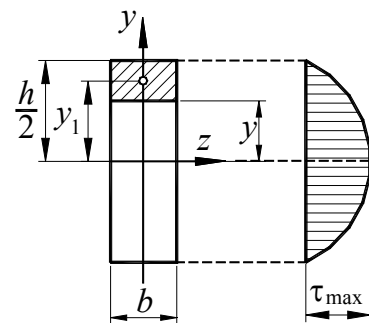


Рис. 2.5.17

$$\tau'' = \frac{3F_n}{2A};$$

$$y''' = -\frac{h}{2};$$

$$\tau''' = 0.$$

Эпюра τ показана на рис. 2.5.17.

Наибольшее касательное напряжение для балки прямоугольного сечения имеет место на уровне нейтральной оси и равно:

$$\tau_{\max} = \frac{3F_t}{2A} \quad (2.5.32)$$

то есть в 1,5 раза больше того напряжения, которое получилось бы в предположении равномерного распределения касательных напряжений по сечению.

С известным приближением формулу Журавского можно применять для вычисления касательных напряжений в балках при поперечных сечениях другой формы.

Для *круглого* сечения получим аналогичным способом эпюру τ , показанную на рис. 2.5.18, с максимальным значением на нейтральной оси:

$$\tau_{\max} = \frac{4F_t}{3A} \quad (2.5.33)$$

Для *кольцевого* сечения:

$$\tau_{\max} = \frac{2F_t}{A} \quad (2.5.34)$$

По формуле Журавского определяются касательные напряжения, параллельные поперечной силе F_t , то есть в данном случае вертикальные τ или τ_{xy} (рис. 2.5.18).

Полные же касательные напряжения должны быть направлены по касательной к контуру сечения.

Рассмотрим, например, точку C вблизи контура круглого сечения (рис. 2.5.18). Если предположить, что по формуле Журавского найдено полное напряжение τ , то, раскладывая его, получим две составляющие:

- по нормали к контуру — τ_n ;
- по касательной к контуру — τ_t .

Однако по условиям нагружения поверхность стержня свободна от напряжений и поэтому τ_n должно быть равно нулю.

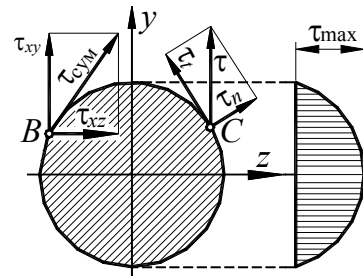


Рис. 2.5.18

Следовательно, напряжение τ , найденное по формуле Журавского, не может быть полным касательным напряжением, оно представляет собой лишь его вертикальную составляющую τ_{xy} (рис. 2.5.18, точка B).

Горизонтальная составляющая полного напряжения τ_{xz} и само полное напряжение $\tau_{\text{сум}}$ в таких точках контура остаются неизвестными, так как они не могут быть найдены методами сопротивления материалов.

Анализ точных решений теории упругости показывает, что в большинстве случаев горизонтальные составляющие касательных напряжений невелики.

Для балок двутаврового сечения эпюра τ имеет ступенчатый вид из-за резкого изменения ширины балки (рис. 2.5.19, a). Следует иметь в виду, что часть эпюры, относящаяся к полкам балки, имеет весьма условный характер, так как гипотеза о равномерности распределения касательных напряжений по ширине сечения здесь неприменима. Учитывая это, эпюру τ в поперечных сечениях двутавровых балок, как правило, строят лишь в пределах стенки).

Максимальное касательное напряжение в двутавровом сечении возникает в точках нейтральной оси и определяется по формуле Журавского, при этом следует брать статический момент заштрихованной площади (полусечения). В таблицах сортамента приведены значения статического момента площади полусечения для двутавров и швеллеров. На рис. 2.5.19, b , в показаны эпюры τ для некоторых других сечений.

Условие прочности по касательным напряжениям записывается в виде:

$$\tau_{\text{max}} \leq \tau_p,$$

где τ_p — допускаемое касательное напряжение.

Для *стальных* балок:

$$\tau_p \approx 0,6\sigma_p.$$

Некоторые материалы (например, дерево вдоль волокон) очень плохо сопротивляются сдвигу, поэтому для балок, изготовленных из таких материалов, проверка прочности по касательным напряжениям является обязательной.

Изложенная теория определения касательных напряжений справедлива лишь для сплошных сечений.

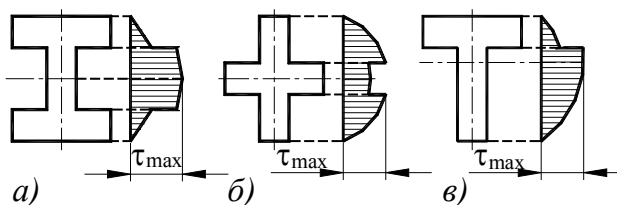


Рис. 2.5.19

В тонкостенных стержнях, как уже было упомянуто, даже при совпадении силовой плоскости с одной из главных центральных осей сечения может наблюдаться явление закручивания. Чтобы лучше понять это, рассмотрим консольную балку корытного профиля (рис. 2.5.20, а).

Отрежем плоскостью I часть балки с грузом и посмотрим на отсеченную часть со стороны заделки: увидим сечение, показанное на рис. 2.5.20, б. В вертикальной стенке касательные напряжения τ_y определяются по формуле Журавского (2.5.31). Если пренебречь (по малости) касательными напряжениями τ_y в полках, то равнодействующая касательных напряжений τ_y в стенке дает силу R_2 , равную F_t (рис. 2.5.20, в).

В горизонтальных полках возникают касательные напряжения τ_z . Если принять, что они распределены по толщине стенки (ввиду малой ее величины) равномерно, то для их определения также можно использовать формулу Журавского (2.5.31).

В какой-либо точке K сечения (рис. 2.5.20, б) касательные напряжения равны:

$$\tau_z = \frac{F_t S_z^{\text{отс}}}{J_z \delta},$$

где δ — толщина полки в точке K ;

$$S_z^{\text{отс}} = \frac{F_{\text{отс}} h_1}{2} \quad \text{— статический}$$

момент относительно оси отсеченной площади полки $F_{\text{отс}}$;

J_z — момент инерции сечения;

F_t — поперечная сила в сечении.

Наибольшее напряжение в полке $\tau_{z \max}$ будет в месте соединения полки со стенкой.

Для этого случая:

$$S_z^{\text{отс}} = \frac{b_1 \delta h_1}{2}.$$

Следовательно,

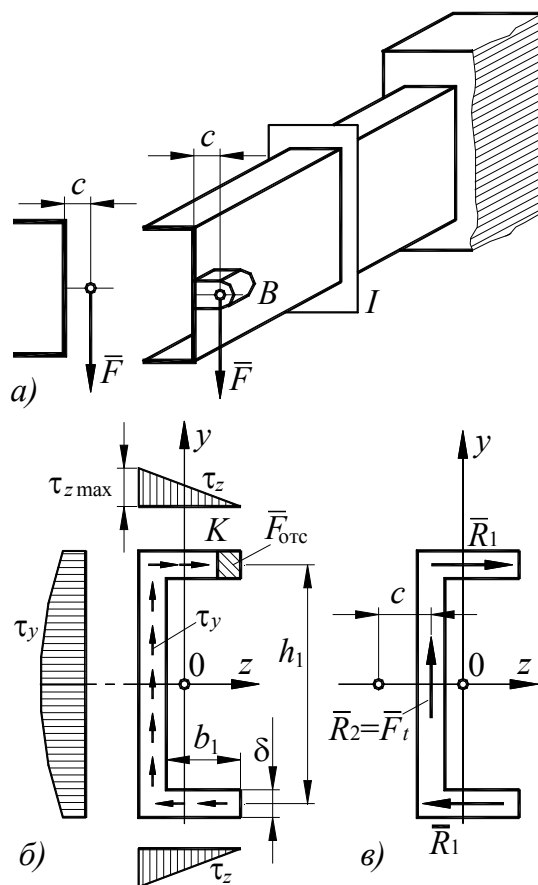


Рис. 2.5.20

$$\tau_{z \max} = \frac{F_t b_1 h_1}{2J_z}.$$

Равнодействующая касательных напряжений в полке R_1 равна произведению площади эпюры касательных напряжений на толщину полки:

$$R_1 = \tau_{z \max} \frac{\delta b_1}{2} = \frac{F_t b_1^2 h_1 \delta}{4J_z}.$$

На нижнюю полку действует такая же сила R_1 , но направленная в противоположную сторону. Две силы R_1 образуют пару с моментом:

$$M_1 = R_1 h_1 = \frac{F_t b_1^2 h_1^2 \delta}{4J_z}.$$

Следовательно, в сечении швеллера наряду с вертикальной поперечной силой $F_t = R_2$ возникает также крутящий момент $T_k = M_1$, который закручивает балку (рис. 2.5.20, в).

Существует такая точка B сечения, относительно которой момент касательных сил в сечении при изгибе равен нулю. Эта точка называется *центром изгиба*. Положение этой точки можно найти из уравнения:

$$\sum M_B = T_k - F_t c = 0,$$

откуда:

$$c = \frac{T_k}{F_t}.$$

Подставляя значение $T_k = M_1$, найдем:

$$c = \frac{b_1^2 h_1^2 \delta}{4J_z}.$$

Следовательно, для того чтобы при изгибе не возникало кручения, необходимо внешнюю силу прикладывать в центре изгиба (рис. 2.5.20, а). В этом случае сумма моментов внешних и внутренних сил относительно любой точки поперечного сечения равна нулю. Если сечение имеет две оси симметрии, центр изгиба совпадает с центром тяжести сечения.

2.5.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИ ИЗГИБЕ

2.5.8.1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ИЗОГНУТОЙ ОСИ БАЛКИ

Под действием нагрузки балка изгибается. Сечения балки перемещаются перпендикулярно первоначальной прямой оси балки и одновременно поворачиваются (рис. 2.5.21).

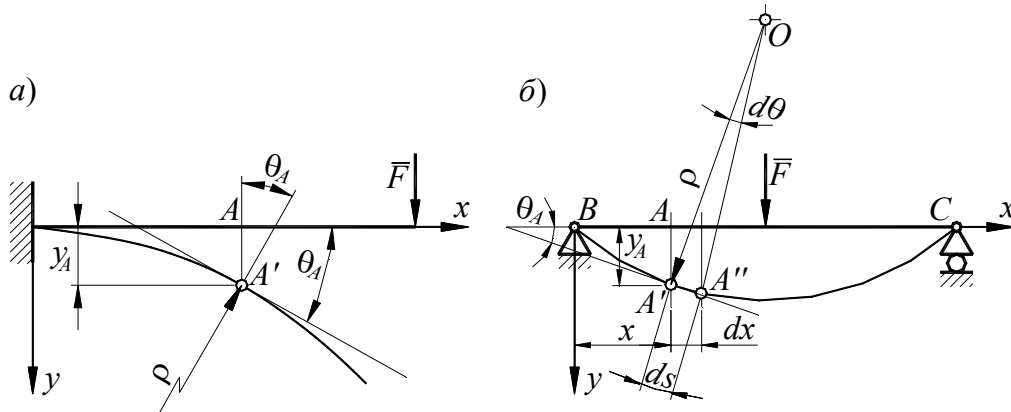


Рис. 2.5.21

Перемещение центра тяжести сечения по направлению, перпендикулярному оси балки, называется *прогибом* балки в данной точке (сечении) и обозначается буквой y .

Угол θ , на который сечение поворачивается по отношению к своему первоначальному положению, называется *углом поворота сечения*.

Учитывая, что повернувшееся сечение перпендикулярно изогнутой оси балки, вместо определения угла поворота сечения можно определить равный ему угол между касательной к данной точке изогнутой оси и первоначальной осью балки (рис. 2.5.21, где прогиб и угол поворота сечения даны для точки A).

Для определения деформации балки воспользуемся уравнением (2.5.16), связывающим кривизну K оси балки с изгибающим моментом $M_{из}$ и жесткостью сечения балки EJ :

$$K = \frac{1}{\rho} = \frac{M_{из}}{EJ}. \quad (2.5.35)$$

Следует учесть, что формула (2.5.16) была выведена для *чистого* изгиба, то есть в предположении, что кривизна изогнутой оси в любой точке зависит только от величины изгибающего момента $M_{из}$ в этой точке (незначительным влиянием поперечной силы на кривизну изогнутой оси пренебрегаем).

Чтобы вывести выражение, устанавливающее зависимость между кривизной и формой кривой, мы рассмотрим две смежных точки A' и A'' , находящиеся на изогнутой оси на расстоянии ds одна от другой (рис. 2.5.21, б). Если угол, который касательная в точке A' образует с осью x , обозначить через θ_A , то угол между нормальными, к кривой в точках A' и A'' будет $d\theta$. Точка O пересечения этих нормалей дает центр кривизны и определяет длину ρ радиуса кривизны. Тогда:

$$ds = \rho d\theta \quad (2.5.36)$$

и

$$\frac{1}{\rho} = \left| \frac{d\theta}{ds} \right|. \quad (2.5.37)$$

По уравнению (2.5.37) можно определить только абсолютное значение кривизны. Относительно знака следует заметить, что изгибающий момент в уравнении (2.5.35) принимается положительным, если он вызывает искривление, направленное вогнутостью вверх. Следовательно, кривизна положительна, когда центр кривизны находится выше кривой, как на рис. 2.5.21, б). Однако легко заметить, что при такой кривизне угол θ_A уменьшается при перемещении точки A' по кривой от B к C . Следовательно, положительному приращению ds соответствует отрицательное приращение $d\theta$. Таким образом, чтобы иметь надлежащий знак, уравнение (2.5.37) необходимо написать в виде:

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{d\theta}{ds}. \quad (2.5.38)$$

Фактические значения прогибов очень малы и значения углов поворота сечений балки достигают всего лишь порядка тысячных долей радиана, то есть изогнутая ось балки является весьма пологой кривой. В таком случае можно с достаточной точностью принять, что:

$$ds \approx dx \quad (2.5.39)$$

и

$$\theta_A \approx \text{tg} \theta_A = \frac{dy}{dx}. \quad (2.5.40)$$

Подставляя в уравнение (2.5.38) вместо ds и θ_A их значения из (2.5.39) и (2.5.40), получаем:

$$K = \frac{1}{\rho} = -\frac{d^2\theta}{dx^2}. \quad (2.5.41)$$

Подставив в уравнение (2.5.35) вместо $\frac{1}{\rho}$ его значение из (2.5.41), получим в общем виде *приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки*:

$$\pm EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = M_{\text{и}}. \quad (2.5.42)$$

Очевидно, что знак в уравнении (2.5.42) зависит от направления координатных осей. Для системы координат, принятой на рис. 2.5.22, а, имеем одинаковые знаки для кривизны $K \approx \frac{d^2 y}{dx^2}$

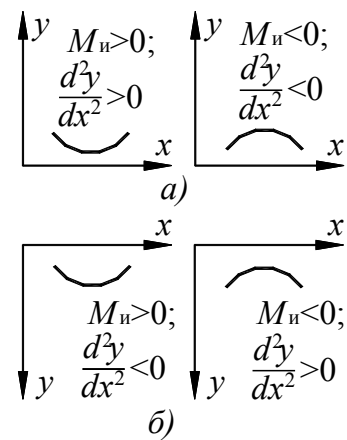


Рис. 2.5.22

и для момента $M_{и}$ и в этой системе координат следует пользоваться уравнением (2.5.42) в виде:

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = M_{и} \quad (2.5.43)$$

Для системы координат, принятой на рис. 2.5.22, б, имеем разные знаки для кривизны $K \approx \frac{d^2 y}{dx^2}$ и для момента $M_{и}$. Следовательно, в этом случае:

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -M_{и} \quad (2.5.44)$$

Чтобы найти деформации балки (углы поворота θ и прогибы y), уравнение (2.5.42) нужно проинтегрировать в каждом частном случае. Проинтегрировав уравнение (2.5.39), получим *уравнение углов поворота*:

$$EJ \frac{dy}{dx} = \int M_{и} dx + C, \quad (2.5.45)$$

где C – постоянная интегрирования.

Интегрируя уравнение (2.5.39) второй раз, получаем *уравнение прогибов*:

$$EJy = \int dx \int M_{и} dx + Cx + C_1, \quad (2.5.46)$$

где C_1 – вторая постоянная интегрирования.

Постоянные интегрирования C и C_1 определяются из условий опирания балки (*граничных условий*). Например, для балки, заделанной одним концом (рис. 2.5.21, а), в месте заделки должны быть равны нулю и прогиб, и угол поворота сечения, а для балки, опертой по концам (рис. 2.5.21, б), прогиб должен быть равен нулю и на левом, и на правом конце. Определив постоянные интегрирования, из уравнений (2.5.45) и (2.5.46) можно определить *угол поворота* и *прогиб* любого сечения.

Во многих случаях по эксплуатационным соображениям максимальные прогибы балок ограничиваются определенной величиной – *допускаемым прогибом* y_p . Обычно:

$$y_p = (0,001 - 0,003)l.$$

2.5.8.1.1. ДЕФОРМАЦИЯ ДВУХОПОРНОЙ БАЛКИ, НАГРУЖЕННОЙ РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКОЙ

Для двухопорной равномерно нагруженной балки (рис. 2.5.23) изгибающий момент в каком-либо поперечном сечении, отстоящем на расстоянии x от левой опоры, равняется:

$$M_{и} = \frac{qlx}{2} - \frac{qx_2^2}{2}$$

и дифференциальное уравнение (2.5.44) получается в виде:

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{qly}{2} + \frac{qx^2}{2}. \quad (2.5.47)$$

Умножая обе части уравнения (2.5.47) на dx и, после этого, интегрируя его, получим:

$$EJ \frac{dy}{dx} = -\frac{qlx^2}{4} + \frac{qx^3}{6} + C, \quad (2.5.48)$$

где C – постоянная интегрирования

Постоянную интегрирования определим следующим образом. Для данной частной задачи угол наклона касательной к кривой θ в середине пролета вследствие симметрии системы равен нулю.

Полагая:

$$\theta = \frac{dy}{dx} = 0 \text{ при } x = \frac{l}{2}$$

получаем:

$$C = \frac{ql^3}{24}.$$

Тогда уравнение (2.5.47) преобразуется к виду:

$$EJ \frac{dy}{dx} = -\frac{qlx^2}{4} + \frac{qx^3}{6} + \frac{ql^3}{24}. \quad (2.5.49)$$

Второе интегрирование уравнения (2.5.47) приводит к уравнению:

$$EJy = -\frac{qlx^3}{12} + \frac{qx^4}{24} + \frac{ql^3x}{24} + C_1. \quad (2.5.50)$$

Постоянная интегрирования C_1 определяется из условия, что прогиб на опорах равен нулю.

Подставляя в уравнение (2.5.50) $y = 0$ при $x = 0$, получаем:

$$C_1 = 0.$$

Тогда из уравнения (2.5.50) получаем:

$$y = \frac{q}{24EJ} (x^4 - 2lx^3 + l^3x). \quad (2.5.51)$$

Очевидно, что наибольший прогиб этой балки имеет место посередине пролета.

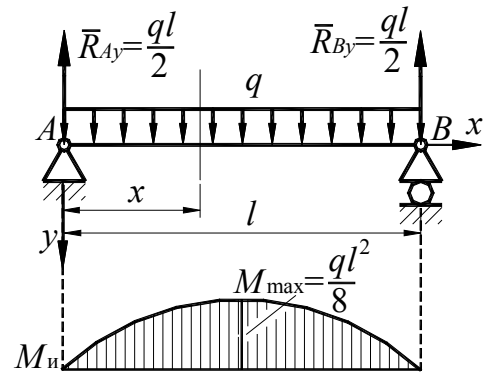


Рис. 2.5.23

Подставляя в последнее уравнение (2.5.51) вместо x его значение, равное $\frac{l}{2}$, получим:

$$y_{\max} = \frac{5ql^4}{384EJ}. \quad (2.5.52)$$

Наибольший угол наклона касательной к кривой θ_{\max} имеет место на левом конце балки. Путем подстановки в уравнение (2.5.49), полученное после первого интегрирования, значения x , равного нулю, получаем:

$$\theta_{\max} = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{\max} = \frac{ql^3}{24EJ}. \quad (2.5.53)$$

2.5.8.1.2. ДЕФОРМАЦИЯ КОНСОЛЬНОЙ БАЛКИ, НАГРУЖЕННОЙ РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКОЙ

В случае равномерно нагруженной консольной балки (рис. 2.5.24) изгибающий момент в поперечном сечении балки, отстоящем на расстоянии x от левого конца, равняется:

$$M = -\frac{qx^2}{2}$$

и уравнение (2.5.42) примет вид:

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{qx^2}{2}. \quad (2.5.54)$$

Первое интегрирование последнего уравнения приводит к выражению:

$$EJ \frac{dy}{dx} = \frac{qx^3}{6} + C. \quad (2.5.55)$$

Постоянная интегрирования C находится из условия, что угол наклона касательной к кривой в заделанном конце равен нулю, то есть:

$$\theta = \frac{dy}{dx} = 0 \text{ при } x = l.$$

Подставляя эти значения в уравнение (2.5.55), получаем:

$$C = \frac{ql^3}{6}.$$

Второе интегрирование уравнения (2.5.54) дает:

$$EJy = \frac{qx^4}{24} - \frac{ql^3x}{6} + C_1. \quad (2.5.56)$$

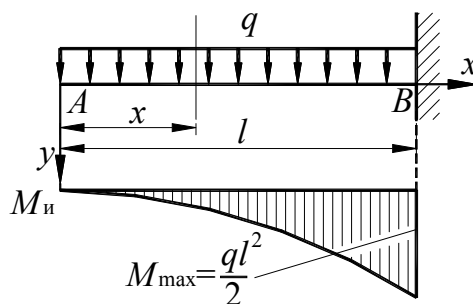


Рис. 2.5.24

Постоянная C_1 найдем из условия, что прогиб в заделанном конце балки равен нулю. Таким образом, подставляя в уравнение (2.5.56) значения $x = l$, $y = 0$, получаем:

$$C_1 = \frac{ql^4}{8}.$$

Подставляя это значение в уравнение (2.5.56), находим:

$$y = \frac{q}{24EJ} (x^4 - 4l^3x + 3l^4). \quad (2.5.56)$$

Это уравнение представляет изогнутую ось равномерно нагруженной консольной балки.

Максимальное значение прогиба y_{\max} будет при $x = 0$:

$$y_{\max} = \frac{ql^4}{8EJ}. \quad (2.5.57)$$

2.5.8.1.3. ДЕФОРМАЦИЯ ДВУХОПОРНОЙ БАЛКИ, НАГРУЖЕННОЙ СОСРЕДОТочЕННОЙ СИЛОЙ

В этом случае имеются два различных выражения для изгибающего момента, соответствующих двум участкам балки (рис. 2.5.25). Поэтому уравнение (2.5.42) для изогнутой оси должно быть написано для каждого участка.

Таким образом, получаем:

при $0 \leq x \leq a$:

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{Fb}{a+b} x; \quad (2.5.58)$$

при $a \leq x \leq (a+b)$:

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{Fb}{a+b} x + F(x-a). \quad (2.5.59)$$

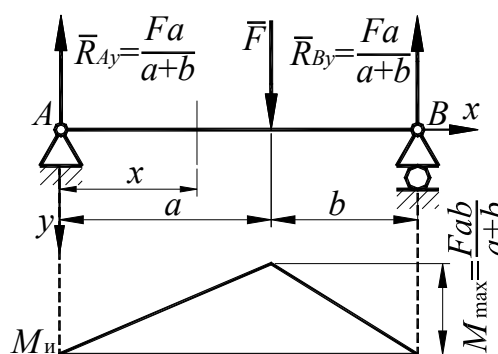


Рис. 2.5.25

Интегрируя уравнения (2.5.58) и (2.5.59), получим:

при $0 \leq x \leq a$:

$$EJ \frac{dy}{dx} = -\frac{Fbx^2}{2(a+b)} + C; \quad (2.5.60)$$

при $a \leq x \leq (a+b)$:

$$EJ \frac{dy}{dx} = -\frac{Fbx^2}{2(a+b)} + \frac{F(x-a)^2}{2} + C_1. \quad (2.5.61)$$

Так как обе ветви изогнутой оси должны иметь общую касательную в точке приложения силы F , выражения (2.5.60) и (2.5.61) для углов наклона касательных к оси изогнутой балки должны быть равны при $x = a$. Из этого мы заключаем, что постоянные интегрирования равны между собой, то есть:

$$C = C_1.$$

Выполняя второе интегрирование и, подставляя C вместо C_1 , получаем:

при $0 \leq x \leq a$:

$$EJy = -\frac{Fbx^3}{6(a+b)} + Cx + C_2; \quad (2.5.62)$$

при $a \leq x \leq (a+b)$:

$$EJy = -\frac{Fbx^3}{6(a+b)} + \frac{F(x-a)^3}{6} + Cx + C_3. \quad (2.5.63)$$

Так как обе ветви изогнутой оси имеют общий прогиб в точке приложения груза, то выражения (2.5.62) и (2.5.63) должны быть идентичны при $x = a$. Из этого следует, что:

$$C_2 = C_3.$$

Окончательно необходимо определить только две постоянные C и C_2 . Для этого есть два условия, а именно: прогиб на каждом из двух концов балки равняется нулю.

Подставляя в выражение (2.5.62) $x = 0$ и $y = 0$, получаем:

$$C_2 = C_3 = 0. \quad (2.5.64)$$

Подставляя в выражение (2.5.63) $x = a+b$ и $y = 0$, получаем:

$$C = \frac{Fb(a+b)}{6} - \frac{Fb^2}{6(a+b)} = \frac{Fb[(a+b)^2 - b^2]}{6(a+b)}. \quad (2.5.65)$$

Подставляя значения постоянных C из уравнения (2.5.65), C_2 , C_3 из уравнения (2.5.64) в уравнения (2.5.62) и (2.5.63) для изогнутой оси, получаем:

при $0 \leq x \leq a$:

$$EJy = \frac{Fbx[(a+b)^2 - b^2 - x^2]}{6(a+b)}; \quad (2.5.66)$$

$$y = \frac{Fbx[(a+b)^2 - b^2 - x^2]}{6(a+b)EJ}. \quad (2.5.67)$$

при $a \leq x \leq (a+b)$:

$$EJy = \frac{Fbx \left[(a+b)^2 - b^2 - x^2 \right]}{6(a+b)} + \frac{F(x-a)^3}{6}; \quad (2.5.68)$$

$$y = \frac{Fbx \left[(a+b)^2 - b^2 - x^2 \right] + F(a+b)(x-a)^3}{6(a+b)EJ}. \quad (2.5.69)$$

Подставляя значение (2.5.65) в уравнения (2.5.60) и (2.5.61), получаем:
при $0 \leq x \leq a$:

$$EJ \frac{dy}{dx} = \frac{Fb \left[(a+b)^2 - b^2 - 3x^2 \right]}{6(a+b)}; \quad (2.5.70)$$

при $a \leq x \leq (a+b)$:

$$EJ \frac{dy}{dx} = \frac{Fb \left[(a+b)^2 - b^2 - 3x^2 \right]}{6(a+b)} + \frac{F(x-a)^2}{2}. \quad (2.5.71)$$

Так как:

$$\theta = \frac{dy}{dx},$$

то:

при $0 \leq x \leq a$:

$$\theta = \frac{Fb \left[(a+b)^2 - b^2 - 3x^2 \right]}{6(a+b)EJ}; \quad (2.5.72)$$

при $a \leq x \leq (a+b)$:

$$\theta = \frac{Fb \left[(a+b)^2 - b^2 - 3x^2 \right] + 3F(a+b)(x-a)^2}{6(a+b)EJ}. \quad (2.5.73)$$

По уравнениям (2.5.72) и (2.5.73) можно вычислить угол наклона касательной к оси балки в любой точке изогнутой оси.

Часто для расчетов нужны значения углов наклона на концах балки. Подставляя $x=0$ в уравнение (2.5.72), а $x=a+b$ – в уравнение (2.5.73), получаем:

$$\theta_A = \frac{Fab(a+2b)}{6(a+b)EJ}; \quad (2.5.74)$$

$$\theta_B = -\frac{Fab(2a+b)}{6(a+b)EJ}. \quad (2.5.75)$$

Наибольший прогиб имеет место в точке, где касательная к изогнутой оси горизонтальна. Если $a > b$, как на схеме, представленной на рис. 2.5.25, то наибольший прогиб будет, очевидно, на левом участке балки. Мы можем найти положение этой точки, приравняв нулю выражение (2.5.72).

Тогда получим:

$$x = \sqrt{\frac{a(a+2b)}{3}}. \quad (2.5.76)$$

Для того чтобы найти наибольший прогиб y_{\max} , подставим значение x из выражения (2.5.76) в уравнение (2.5.67). После преобразований получим:

$$y_{\max} = 0,06415 \frac{Fb\sqrt{a^3(a+2b)^3}}{(a+b)EJ}. \quad (2.5.77)$$

Если сила F приложена в середине балки (при длине балки l , равной $2a$), то наибольший прогиб будет, очевидно, также в середине балки:

$$y_{\max_{a=b}} = \frac{Fa^3}{6EJ}. \quad (2.5.78)$$

2.5.8.1.4. ДЕФОРМАЦИЯ КОНСОЛЬНОЙ БАЛКИ, НАГРУЖЕННОЙ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛОЙ F

Рассмотрим определение y_{\max} и θ_{\max} для консольной балки, нагруженной сосредоточенной силой F на ее конце (рис. 2.5.26).

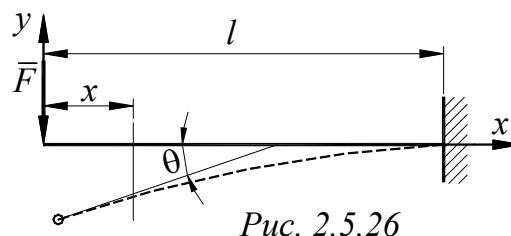


Рис. 2.5.26

Начало координат поместим на левом конце балки. Изгибающий момент в сечении с абсциссой x определяем как момент внешних сил, расположенных между данным сечением и началом координат:

$$M_x = -Fx.$$

Следовательно,

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -Fx. \quad (2.5.79)$$

Интегрируем уравнение (2.5.79) первый раз:

$$EJ \frac{dy}{dx} = -\frac{Fx^2}{2} + C. \quad (2.5.80)$$

После второго интегрирования получаем:

$$EJy = -\frac{Fx^3}{6} + Cx + C_1. \quad (2.5.81)$$

Для определения C и C_1 имеем следующие условия:

1) при $x = l$:

$$y=0;$$

2) при $x = l$:

$$\theta = \frac{dy}{dx} = 0.$$

При втором условии из уравнения (2.5.80) получаем:

$$C = \frac{Fl^2}{2}.$$

При первом условии из уравнения (2.5.81) получаем:

$$0 = -\frac{Fl^3}{6} + \frac{Fl^3}{2} + C_1,$$

откуда:

$$C_1 = -\frac{Fl^3}{3}.$$

Определяем y_{\max} и θ_{\max} . Очевидно, что y_{\max} и θ_{\max} имеют место при $x = 0$. Полагая в формулах (2.5.80) и (2.5.81) $x = 0$, получаем:

$$\frac{dy}{dx}_{\max} = \theta_{\max} = \frac{Fl^2}{2EJ}. \quad (2.5.82)$$

$$y_{\max} = -\frac{Fl^3}{3EJ}. \quad (2.5.83)$$

Нагружая образец по схеме, представленной на рис. 2.5.26, можно достаточно просто определить модуль упругости материала E .

Пусть при заданной нагрузке F прогиб конца образца, измеренный каким-либо прибором, равен y_0 . Тогда по формуле (2.5.83) получим значение модуля упругости E :

$$E = \frac{Fl^3}{3Jy_0}. \quad (2.5.84)$$

2.5.8.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИ НЕСКОЛЬКИХ УЧАСТКАХ НАГРУЖЕНИЯ И ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ БАЛОК. УНИВЕРСАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Если на балку действует сложная нагрузка (рис. 2.5.27), то в этом случае на разных участках закон изменения изгибающих моментов будет выражаться различными уравнениями. Дифференциальное уравнение изогнутой оси придется составлять для каждого участка. Число постоянных интегрирования будет равно удвоенному числу участков. Для определения этих постоянных всегда можно составить достаточное чис-

ло уравнений, используя условия на опорах балки и условия на концах смежных участков, где прогибы и углы поворота равны между собой. Однако такой способ решения очень сложен.

Более простой способ решения получается, если вместо неопределенного интегрирования уравнения применить способ *определенного* интегрирования. При этом удастся достигнуть удобной графоаналитической интерпретации решения.

Используем систему координат по рис. 2.5.22, а.

Проинтегрируя дифференциальное уравнение (2.5.43) один раз в пределах от 0 до x при $EJ = \text{const}$ и учитывая,

что $\theta = \frac{dy}{dx}$, получим:

$$EJ \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_0^x M_{\text{и}} dx = \int_{A(0)}^{A(x)} dA, \quad (2.5.85)$$

где $dA = M_{\text{и}} dx$ – дифференциал площади эпюры $M_{\text{и}}$ (рис. 2.5.28);

$A(0)$ – отсеченная площадь эпюры $M_{\text{и}}$ для сечения, проходящего через начало координат, очевидно равная нулю.

Выполнив интегрирование, получим из (2.5.85):

$$EJ\theta = EJ\theta_0 + A(x) - A(0) = EJ\theta_0 + A^{\text{отс}} - A(0)$$

или

$$EJ\theta = EJ\theta_0 + A^{\text{отс}}, \quad (2.5.86)$$

где $A^{\text{отс}}$ – отсеченная площадь эпюры $M_{\text{и}}$, то есть площадь эпюры, расположенной между началом координат и текущим сечением, в котором определяются перемещения;

Запишем уравнение (2.5.86) в виде:

$$EJ \frac{dy}{dx} = EJ\theta_0 + A(x). \quad (2.5.87)$$

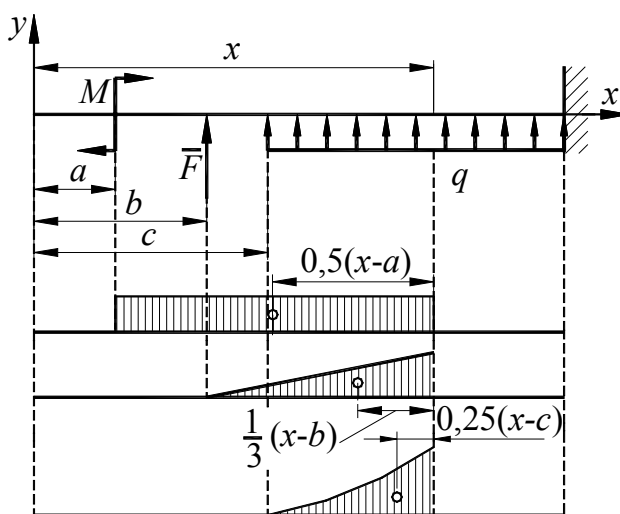


Рис. 2.5.27

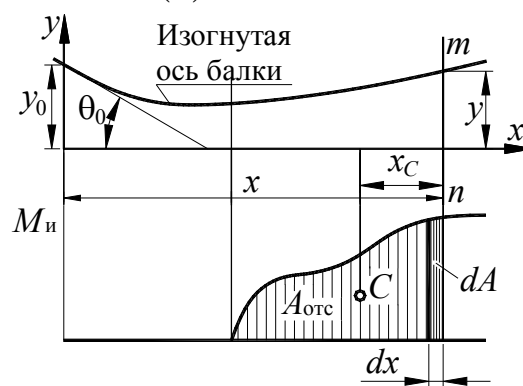


Рис. 2.5.28

Проинтегрируем последнее уравнение от 0 до z :

$$EJ \int_{y_0}^y dy = EJ\theta_0 \int_0^x dx + \int_0^x A(x) dx = EJ\theta_0 \int_0^x dx + \int_{S(0)}^{S(x)} dS, \quad (2.5.88)$$

где $dS = A(x)dx$ – дифференциал статического момента отсеченной площади эпюры $M_{\text{и}}$.

После интегрирования из (2.5.88) получим:

$$EJy = EJy_0 + EJ\theta_0 x + S(x) - S(0) = EJy_0 + EJ\theta_0 x + S_{\text{тек}}^{\text{отс}} \quad (2.5.89)$$

где $S(x) \equiv S_{\text{тек}}^{\text{отс}} = A^{\text{отс}} x_c$ – статический момент отсеченной площади эпюры $M_{\text{и}}$ относительно текущего сечения;

$S(0)$ – статический момент отсеченной площади эпюры $M_{\text{и}}$ относительно сечения, проходящего через начало координат. $S(0)$ равен нулю, так как $A(0) = 0$.

Таким образом, для определения угловых и линейных перемещений при изгибе имеем формулы (2.5.86) и (2.5.89).

Если балка имеет различную жесткость на разных участках, то вместо формул (2.5.86) и (2.5.89) аналогично получим:

$$\frac{dy}{dx} = \theta = \theta_0 + A_{\text{пр}}^{\text{отс}}; \quad (2.5.90)$$

$$y = y_0 + \theta_0 z + S_{\text{тек.пр}}^{\text{отс}} \quad (2.5.91)$$

где $A_{\text{пр}}^{\text{отс}}$ – приведенная отсеченная площадь эпюры моментов, то есть эпюры, ординаты которой поделены на EJ ;

$S_{\text{тек.пр}}^{\text{отс}}$ – статический момент относительно текущего сечения приведенной отсеченной площади эпюры моментов.

Правило знаков при пользовании формулами (2.5.86) и (2.5.89), а также формулами (2.5.90) и (2.5.91) следующее:

— площадь $A^{\text{отс}}$ принимается положительной, если эпюра $M_{\text{и}}$ положительна;

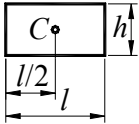
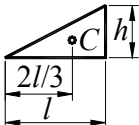
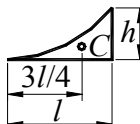
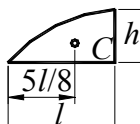
— площадь $A^{\text{отс}}$ принимается отрицательной, если эпюра $M_{\text{и}}$ отрицательна;

— статический момент $S_{\text{тек}}^{\text{отс}}$ принимается положительным, если $A^{\text{отс}}$ положительна;

— статический момент $S_{\text{тек}}^{\text{отс}}$ считается отрицательным, если $A^{\text{отс}}$ отрицательна.

В табл. 2.5.1 приведены наиболее часто встречающиеся эпюры изгибающих моментов $M_{из}$ с указанием величины их площади и положения центра тяжести x_c .

Таблица 2.5.1

Вид эпюры	Площадь эпюр	Расстояние до центра тяжести
	hl	$\frac{1}{2}l$
	$\frac{1}{2}hl$	$\frac{2}{3}l$
 Квадратичная парабола	$\frac{1}{3}hl$	$\frac{3}{4}l$
 Квадратичная парабола	$\frac{2}{3}hl$	$\frac{5}{8}l$

Если жесткость балки постоянна, то формулы (2.5.86) и (2.5.89) можно представить в аналитической форме. Сделаем это для трех типов внешних сил, представленных на рис. 2.5.24. Эпюры изгибающих моментов от каждой нагрузки построим отдельно.

По формулам (2.5.86) и (2.5.89) получим непосредственно следующие формулы, вычисляя площади и статические моменты (относительно текущего сечения) отсеченных площадей эпюр:

$$EJ\theta = EJ\theta_0 + M(x-a) + \frac{F(x-b)^2}{2} + \frac{q(x-c)^3}{6} \quad (2.5.92)$$

$$EJy = EJy_0 + EJ\theta_0 x + \frac{M(x-a)^2}{2} + \frac{F(x-b)^3}{6} + \frac{q(x-c)^4}{24} \quad (2.5.93)$$

При *одновременном действии нескольких внешних сил* уравнения для определения углов поворота и прогибов (на основании принципа независимости действия сил) имеют следующий вид:

$$EJ \frac{dy}{dx} \equiv EJ\theta = EJ\theta_0 + \sum M(x-a) + \sum \frac{F(x-b)^2}{2} + \sum \frac{q(x-c)^3}{6} \quad (2.5.94)$$

$$EJy = EJy_0 + EJ\theta_0 x + \sum \frac{M(x-a)^2}{2} + \sum \frac{F(x-b)^3}{6} + \sum \frac{q(x-c)^4}{24} \quad (2.5.95)$$

Эти уравнения называют *универсальными уравнениями изогнутой оси* балки.

В универсальные уравнения включены со своими знаками все внешние силы (включая опорные реакции), расположенные между началом координат и сечением с абсциссой x , в котором определяются перемещения.

Внешние силы, показанные на рис. 2.5.27, включают в универсальные уравнения со знаком «плюс», противоположно направленные внешние силы – со знаком «минус».

Следует отметить, что последний член универсальных уравнений справедлив только в том случае, если распределенная нагрузка *не обрывается* ранее того сечения, где определяется y или θ . Если же нагрузка обрывается, то следует продолжить ее до данного сечения, одновременно добавив нагрузку, равную по величине, но обратного направления (рис. 2.5.29). Добавленная таким образом нагрузка показана штриховыми линиями.

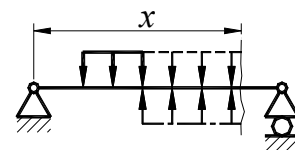


Рис. 2.5.29

Недостаток *универсальных уравнений* состоит в том, что их *нельзя* непосредственно использовать для определения перемещений в балках, имеющих *различную жесткость EJ* на *разных* участках.

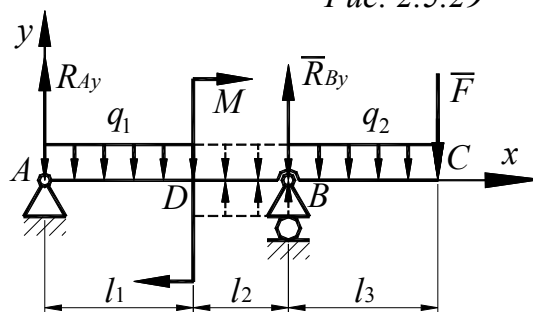


Рис. 2.5.30

В этих случаях следует пользоваться формулами (2.5.90) и (2.5.91).

В качестве *примера* определим прогибы в точках D и C балки, изображенной на рис. 2.5.30, для которой:

J – момент инерции поперечного сечения балки;

E – модуль упругости;

M – изгибающий момент;

q_1 – распределенная нагрузка на участке длиной l_1 ;

q_2 – распределенная нагрузка на участке длиной l_3 .

Определим опорные реакции:

$$\sum M_B = -R_{Ay}(l_1 + l_2) + \frac{q_1 l_1 \left(\frac{l_1}{2} + l_2 \right)}{2} - M - \frac{q_2 l_3^2}{2} - Fl_3 = 0;$$

$$R_{Ay} = \frac{\frac{q_1 l_1 \left(\frac{l_1}{2} + l_2 \right)}{2} - M - \frac{q_2 l_3^2}{2} - Fl_3}{(l_1 + l_2)} = 0;$$

$$\Sigma F_y = R_{Ay} - q_1 l_1 + R_{By} - q_2 l_3 - F = 0;$$

$$R_{By} = -R_{Ay} + q_1 l_1 + q_2 l_3 + F.$$

Помещаем начало координат на левой опоре.

Тогда:

$$y_0 = 0.$$

Угол θ_0 определяем из условия, что при $x = (l_1 + l_2)$ $y = 0$. Так как распределенная нагрузка обрывается в точке D , то согласно сказанному ранее, продолжаем ее до конца, введя компенсирующую нагрузку обратного направления на участке DB (ее и учитывает последний член нижеприведенного уравнения). На чертеже указанные преобразования показаны штриховыми линиями.

По универсальному уравнению для прогибов при $x = (l_1 + l_2)$ получим:

$$EJy_{x=l_1+l_2} = EJ\theta_0(l_1 + l_2) + \frac{Ml_2^2}{2} + \frac{R_{Ay}(l_1 + l_2)^3}{6} - \frac{q_1(l_1 + l_2)^4}{24} + \frac{q_1 l_2^4}{24} = 0,$$

откуда:

$$\theta_0 = \frac{-12Ml_2^2 - 4R_{Ay}(l_1 + l_2)^3 + q_1[(l_1 + l_2)^4 - l_2^4]}{24EJ(l_1 + l_2)}.$$

Определяем прогибы:

в точке C ($x = l_1 + l_2 + l_3$):

$$EJy_C = EJ\theta_0(l_1 + l_2 + l_3) + \frac{M(l_2 + l_3)^2}{2} + \frac{R_{Ay}(l_1 + l_2 + l_3)^3}{6} + \frac{R_{By}l_3^3}{6} - \frac{q_1(l_1 + l_2 + l_3)^4}{24} + \frac{q_1(l_2 + l_3)^4}{24} - \frac{q_2 l_3^4}{24}$$

$$y_C = \theta_0(l_1 + l_2 + l_3) + \frac{12M(l_2 + l_3)^2 + 4[R_{Ay}(l_1 + l_2 + l_3)^3 + R_{By}l_3^3]}{24EJ} - \frac{q_1[(l_1 + l_2 + l_3)^4 - (l_2 + l_3)^4] - q_2 l_3^4}{24EJ};$$

в точке D ($x = l_1$):

$$EJy_D = EJ\theta_0 l_1 + \frac{R_{Ay}l_1^3}{6} - \frac{q_1 l_1^4}{24},$$

$$y_D = \theta_0 l_1 + \frac{4R_{Ay} l_1^3 - q_1 l_1^4}{24EJ}.$$

2.6. КРУЧЕНИЕ

2.6.1. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР КРУТЯЩИХ МОМЕНТОВ

Стержень испытывает *кручение*, если в его поперечных сечениях возникают крутящие моменты, то есть моменты, лежащие в плоскости сечения. Обычно эти крутящие моменты T_k возникают под действием внешних моментов T (рис. 2.6.1).

Внешние моменты передаются на вал, как правило, в местах посадки на него шкивов, зубчатых колес и т.п. Однако и поперечная нагрузка, смещенная относительно оси стержня, вызывает крутящие моменты (рис. 2.6.2), но в этом случае в поперечных сечениях наряду с крутящими моментами возникают и другие внутренние усилия – *поперечные силы и изгибающие моменты*.

Стержни, работающие на *кручение*, называют *валами*.

В расчетах вместо аксонометрического изображения чаще применяют плоское изображение, как более простое. Внешние скручивающие и внутренние крутящие моменты изображают иногда в виде линии с двумя окружностями. В одной из них ставят точку, обозначающую начало стрелки (направленной на наблюдателя), в другом – крестик, обозначающий конец стрелки, направленный от наблюдателя (рис. 2.6.3, а). Иногда вышеуказанные моменты изображают эллипсной стрелкой (рис. 2.6.3, б).

Для определения крутящих моментов T_k , возникающих в сечениях вала под действием внешних скручивающих моментов или поперечной нагрузки, применяют *метод сечений*.

Сделаем мысленный разрез стержня (рис. 2.6.3), например по *a-a*, отбросим одну часть стержня (в данном случае – левую) и рассмотрим равновесие оставшейся правой части (рис. 2.6.3, в). Взаимодействие частей стержня заменим крутящим моментом T_k , уравнивающим внешний момент T . Для равновесия отсеченной части необходимо, что-

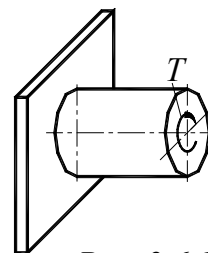


Рис. 2.6.1

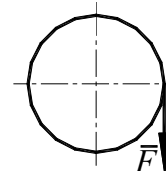


Рис. 2.6.2

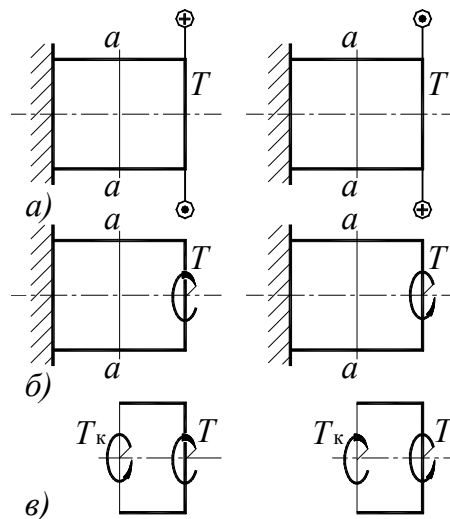


Рис. 2.6.3

бы алгебраическая сумма всех моментов, действующих на нее, была равна нулю. Отсюда в рассматриваемом случае получим, что:

$$T_k = T.$$

Если на отсеченную часть будет действовать несколько внешних моментов, то, проведя аналогичные рассуждения, можно убедиться, что *крутящий момент в сечении численно равен алгебраической сумме внешних скручивающих моментов, действующих по одну сторону от сечения*.

Для наглядного представления о характере распределения и величине крутящих моментов по длине стержня строят эпюры (графики) этих моментов. Построение их вполне аналогично по строению эпюр продольных сил при растяжении или сжатии. Для построения эпюр необходимо условиться о правиле знаков. Общепринятого правила знаков для крутящих моментов не существует. Может быть принято любое правило знаков. Важно лишь принятое правило выдержать на всем протяжении эпюры. Примем следующее *правило знаков* (рис. 2.6.4).

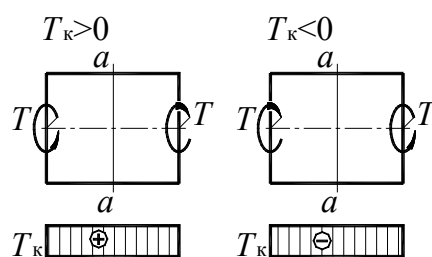


Рис. 2.6.4

Крутящий момент в сечении $a-a$ считается *положительным*, когда внешний момент вращает отсеченную часть *против часовой стрелки*, если смотреть на отсеченную часть со стороны сечения.

Если же внешний момент вращает отсеченную часть *по часовой стрелке* (при взгляде со стороны сечения), то крутящий момент в сечении будем считать *отрицательным*.

Построение эпюры крутящих моментов поясним на следующем *примере* (рис. 2.6.5): рассмотрим вал CD , опирающийся на подшипники B и A и находящийся в равновесии под действием приложенных к нему в сечениях E , K и L моментов.

Сделав сечение $a-a$ где-либо на участке DL и рассмотрев равновесие правой отсеченной части, убедимся, что $T_k = 0$.

Если мы сделаем затем сечение $b-b$ в любом месте участка LK , то из условия равновесия правой от сечения части получим:

$$T_k = 2 \text{ кНм}.$$

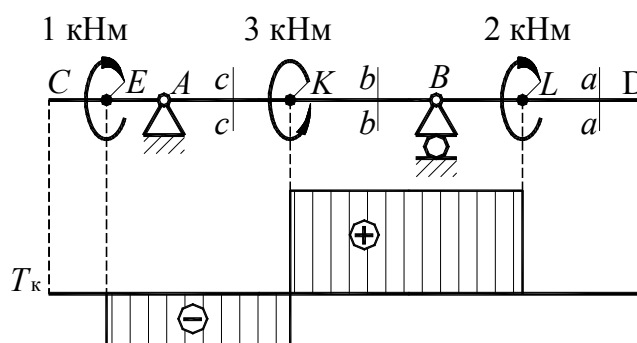


Рис. 2.6.5

Момент считаем положительным в соответствии с принятым правилом знаков.

Сделав сечение $c-c$ на участке KE из условия равновесия правой части, получаем:

$$2 - 3 - T_k = 0 ,$$

откуда:

$$T_k = -1 \text{ кНм} .$$

Получившаяся эпюра имеет форму двух прямоугольников.

Важно заметить, что в местах приложения внешних моментов ординаты эпюры скачкообразно изменяются на величину приложенного здесь внешнего момента.

Если заданы поперечные нагрузки, вызывающие кручение стержня (рис. 2.6.2), то предварительно вычисляют внешние скручивающие моменты, создаваемые этими силами.

В случае, представленном на рис. 2.6.2, внешний вкручивающий момент от силы F равен:

$$T = Fr .$$

После определения внешних моментов определяют внутренние крутящие моменты и строят эпюры, как указано выше.

2.6.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В СТЕРЖНЯХ КРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ

Крутящие моменты, о которых шла речь выше, представляют лишь равнодействующие внутренние усилия. Фактически в поперечном течении скручиваемого стержня действуют непрерывно распределенные внутренние касательные напряжения, к определению которых теперь и перейдем.

Ознакомимся с результатами опытов. Если на поверхности стержня круглого сечения нанести прямоугольную сетку (рис. 2.6.6, а), то после деформации (рис. 2.6.6, б):

— прямоугольная сетка превратится в сетку, состоящую из параллелограммов, что свидетельствует о наличии касательных напряжений в поперечных сечениях бруса, а по закону парности касательных напряжений — и в продольных его сечениях;

— расстояния между окружностями, например между I и II , не изменятся. Не изменится длина стержня и его диаметр. Естественно до-

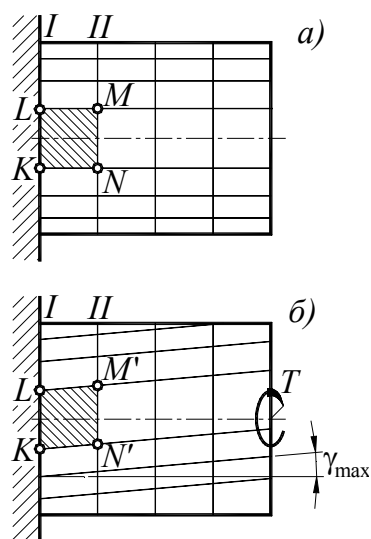


Рис. 2.6.6

пустить, что каждое поперечное сечение поворачивается в своей плоскости на некоторый угол, как жесткое целое (гипотеза плоских и жестких сечений). На основании этой гипотезы можно считать, что радиусы всех поперечных сечений будут поворачиваться (на разные углы), оставаясь прямолинейными.

На основании вышеизложенного можно сделать вывод о том, что *при кручении* в поперечных сечениях стержня действуют только *касательные напряжения*, то есть напряженное состояние в точках скручиваемого стержня представляет собой *чистый сдвиг*.

Формулы, полученные на основе этого допущения, подтверждаются опытами. Точка D переместится по дуге DD' , точка C – по меньшей дуге CC' (рис. 2.6.7).

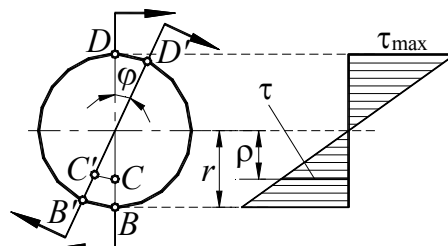


Рис. 2.6.7

Для установления закона распределения касательных напряжений по поперечному сечению скручиваемого стержня рассмотрим более детально деформации стержня (рис. 2.6.6 и рис. 2.6.8).

На рис. 2.6.8 в более крупном масштабе изображена часть стержня между сечениями I и II и показана одна сторона KN элемента $KLMN$ (рис. 2.6.6).

Угол сдвига для элемента $KLML$, лежащего на поверхности стержня, равен отношению отрезка NN' к длине элемента dx (рис. 2.6.8):

$$\gamma_{\max} = \frac{rd\varphi}{dx}. \quad (2.6.1)$$

Выделяя мысленно из рассматриваемой части бруса цилиндр произвольного радиуса ρ и повторяя те же рассуждения, получим угол сдвига для элемента, отстоящего на расстоянии ρ от оси стержня:

$$\gamma = \frac{\rho d\varphi}{dx}. \quad (2.6.2)$$

На основании закона Гука при сдвиге имеем:

$$\tau = G\gamma = G\mu \frac{d\varphi}{dx}. \quad (2.6.3)$$

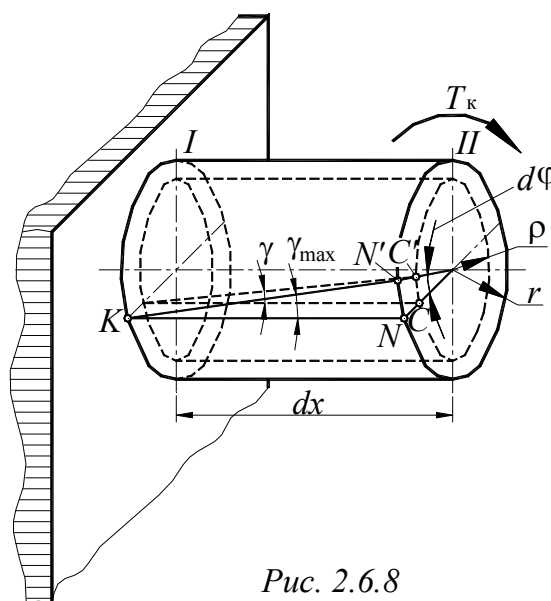


Рис. 2.6.8

Очевидно, что *при кручении* деформации сдвига и касательные напряжения прямо пропорциональны расстоянию от центра тяжести сечения.

Эпюра касательных напряжений по поперечному сечению стержня представлена на рис. 2.6.7. В центре тяжести круглого сечения касательные напряжения равны нулю. Наибольшие касательные напряжения будут в точках сечения, расположенных у поверхности стержня.

Зная закон распределения касательных напряжений, можно определить их величину из условия, что крутящий момент в сечении представляет собой равнодействующий момент касательных напряжений в сечении:

$$T_k = \int_A \tau \rho dA, \quad (2.6.4)$$

где $\tau \rho dA$ – элементарный крутящий момент внутренних сил, действующих по площадке dA .

Подставив в (2.6.4) значение напряжений из формулы (2.6.3), получим:

$$T_k = G \frac{d\varphi}{dx} \int_A \rho^2 dA. \quad (2.6.5)$$

Величина $\int_A \rho^2 dA$ называется *полярным моментом инерции* сечения и обозначается J_p .

Для круглого сплошного сечения:

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32}. \quad (2.6.6)$$

Тогда:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{T_k}{GJ_p}. \quad (2.6.7)$$

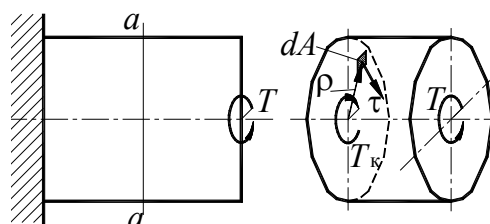


Рис. 2.6.9

Подставляя значение $\frac{d\varphi}{dx}$ в формулу (2.6.3), получим:

$$\tau = \frac{T_k \rho}{J_p}.$$

В частном случае, когда на стержень действует один внешний скручивающий момент T (рис. 2.6.9), из условия равновесия отсеченной части стержня получим:

$$T_k = T.$$

Таким образом, окончательная формула для определения касательных напряжений при кручении имеет вид:

$$\tau = \frac{T \rho}{J_p}. \quad (2.6.8)$$

Как видно из этой формулы, в точках, одинаково удаленных от центра сечения, напряжения τ одинаковы.

Наибольшие напряжения в точках у контура сечения равны:

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\text{к}} r}{J_p} = \frac{T_{\text{к}}}{W_p}, \quad (2.6.9)$$

где:

$$W_p = \frac{J_p}{r} \quad (2.6.10)$$

Геометрическая характеристика W_p называется *полярным моментом сопротивления* или *моментом сопротивления при кручении*.

Для круглого сплошного сечения:

$$W_p = \frac{J_p}{r} = \frac{\pi d^4}{32d} = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3. \quad (2.6.11)$$

Для кольцевого сечения:

$$W_p = \frac{2J_p}{D} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D} = \frac{\pi D^3}{16}(1 - c^4) \approx 0,2D^3(1 - c^4) \quad (2.6.12)$$

где $c = \frac{d}{D}$.

Условие статической прочности вала при кручении имеет вид:

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\text{к}}}{W_p} \leq \tau_p, \quad (2.6.13)$$

где τ_p – допускаемое касательное напряжение.

При действии статической нагрузки принимают (без учета концентрации напряжений и других факторов, снижающих прочность)

$$\tau_p = (0,5 - 0,6)\sigma_{pp}. \quad (2.6.14)$$

Кроме проверки прочности, по этой формуле можно также подбирать диаметр вала или определять допускаемый крутящий момент при известных остальных величинах.

Так как для круглого сплошного сечения:

$$W_p \approx 0,2d^3,$$

получаем:

$$d = \sqrt[3]{\frac{T_{\text{к}}}{0,2\tau_p}} = 1,72 \sqrt[3]{\frac{T_{\text{к}}}{\tau_p}} \quad (2.6.15)$$

По этой формуле определяют *диаметр вала по условию прочности*.

Допускаемый из условия прочности крутящий момент определяют по формуле:

$$T_{кр} = W_p \tau_p.$$

2.6.3. ДЕФОРМАЦИИ И ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПРИ КРУЧЕНИИ ВАЛОВ

2.6.3.1. РАСЧЕТ ДЕФОРМАЦИЙ И ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИ КРУЧЕНИИ

Для вычисления деформаций вала при кручении воспользуемся формулой (2.6.6):

$$d\varphi = \frac{T_k dx}{GJ_p} \quad (2.6.16)$$

Деформация вала на длине z (взаимный угол поворота сечений) равна:

$$\varphi = \int_0^x \frac{T_k dx}{GJ_p} \quad (2.6.17)$$

Если крутящий момент и величина GJ_p , называемая *жесткостью вала при кручении*, постоянны на всем участке интегрирования, то:

$$\varphi = \frac{T_k x}{GJ_p} \quad (2.6.18)$$

Аналогично, для вала длиной l получим:

$$\varphi = \frac{T_k l}{GJ_p} \quad (2.6.19)$$

Эта формула по своей структуре аналогична формуле для определения деформаций при растяжении-сжатии.

Угол закручивания, приходящийся на единицу длины, называют *относительным углом закручивания*. Он равен:

$$\psi = \frac{\varphi}{l} = \frac{T_k}{GJ_p} \quad (2.6.20)$$

Для обеспечения требуемой жесткости вала необходимо, чтобы наибольший относительный угол закручивания θ не превосходил допускаемого значения ψ_p :

$$\psi = \frac{\varphi}{l} = \frac{T_k}{GJ_p} \leq \psi_p \quad (2.6.21)$$

В формуле (2.6.21) ψ_p – допускаемый относительный угол закручивания в *радианах* на единицу длины вала.

Эта формула выражает *условие жесткости вала при кручении*.

В большинстве случаев допускаемый *относительный угол закручивания* задают в *градусах* на 1 м длины, тогда взамен формулы (2.6.21) получим:

$$\psi = \frac{180^\circ}{\pi} \frac{T_k}{GJ_p} \leq \psi_p \quad (2.6.22)$$

Угол ψ_p выбирают в зависимости от назначения вала и его размеров. Для валов средних размеров рекомендуется принимать допускаемый угол закручивания ψ_p равным $0,5^\circ$ на 1 м длины.

Из условия (2.6.22) можно *определить диаметр вала* по заданной *жесткости*. Учитывая, что:

$$J_p \approx 0,1d^4,$$

получаем:

$$d = \sqrt[4]{\frac{180^\circ T_k}{\pi G 0,1 \psi_p}} \quad (2.6.23)$$

2.6.3.2. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР УГЛОВЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИ КРУЧЕНИИ

Имея формулы для определения деформаций и зная условия закрепления стержня, нетрудно определить угловые перемещения сечений стержня и построить эпюры этих перемещений. Если имеется вал, у которого нет неподвижных сечений, то для построения эпюры угловых перемещений принимают какое-либо сечение за условно неподвижное.

Рассмотрим конкретный пример (рис. 2.6.10, а).

На рис. 2.6.10, б приведена эпюра T_k .

Примем сечение в точке А за *условно неподвижное*. Определим поворот сечения В по отношению к сечению А.

По формуле (2.6.19) найдем:

$$\varphi_{BA} = \frac{T_{BA} l_{AB}}{GJ_p},$$

где T_{AB} – крутящий момент на участке АВ;

l_{AB} – длина участка АВ.

Примем следующее правило знаков для углов поворо-

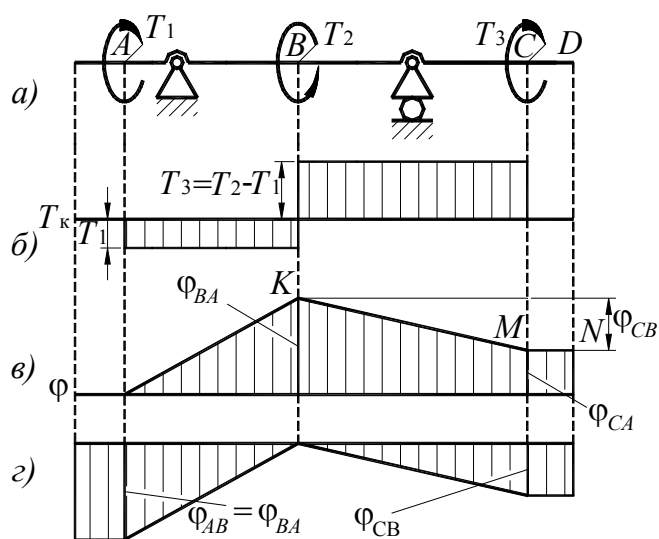


Рис. 2.6.10

та сечений: углы φ будем считать *положительными*, когда сечение поворачивается (если смотреть вдоль оси справа налево) *против часовой стрелки*.

В данном случае φ_{BA} будет положительным.

В принятом масштабе отложим ординату φ_{BA} (рис. 2.6.10, в). Полученную точку K , соединяем прямой точкой E , так как на участке AB углы изменяются по закону прямой линии (см. формулу (2.6.18), в которую абсцисса сечения z входит в первой степени).

Вычислим теперь угол поворота сечения C по отношению к сечению B . Учитывая принятое правило знаков для углов закручивания, получаем:

$$\varphi_{CB} = -\frac{T_{BC}l_{BC}}{GJ_p}.$$

Так как сечение B не неподвижное, то угол поворота сечения C по отношению к сечению A равен:

$$\varphi_{CA} = \varphi_{CB} + \varphi_{BA} = -\frac{T_{BC}l_{BC}}{GJ_p} + \varphi_{BA}.$$

Угол закручивания φ_{CA} может получиться положительным, отрицательным и, в частном случае, равным нулю.

Предположим, что в данном случае угол φ_{CA} получился положительным.

Тогда, отложив эту величину в принятом масштабе вверх от оси эпюры, получим точку M .

Соединяя точку M с точкой K , получим график углов закручивания φ на участке BC .

На участке CD скручивания не происходит, так как крутящие моменты на этом участке равны нулю, поэтому там все сечения поворачиваются на столько же, на сколько поворачивается сечение C .

Участок MN эпюры φ здесь горизонтален.

Если за неподвижное принять сечение B , то эпюра углов закручивания будет иметь вид, представленный на рис. 2.6.10, г.

Рассмотрим *пример* определения диаметра стального вала, вращающегося с угловой скоростью ω , и передающего мощность P . Допускаемое напряжение τ_p . Допускаемый угол закручивания равен θ_p . Модуль сдвига равен G .

Момент, передаваемый валом, определим по формуле:

$$T = \frac{P}{\omega}.$$

Диаметр вала по прочности на кручение определяем по формуле (2.6.15).

Диаметр вала из условия жесткости определяем по формуле (2.6.23).

Для дальнейшего проектирования вала принимается больший из этих двух значений диаметра (округленный в большую сторону до стандартной величины).

2.7. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

2.7.1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

До сих пор изучались расчеты на прочность для простых видов деформации – когда материал находится или в *одноосном* напряженном состоянии (*растяжение, сжатие*), или *простейшем двухосном*, когда главные напряжения в каждой точке равны между собой по величине и противоположны по знаку (*сдвиг, кручение*).

На практике нередки случаи, когда в поперечных сечениях бруса возникают сразу *несколько внутренних силовых факторов*, например, кручение с изгибом и другие, более сложные, случаи напряженного состояния. Такие случаи принято называть *сложным сопротивлением*.

На рис. 2.7.1 изображен общий случай трехосного напряженного состояния. На этом рисунке показана площадка действия максимального касательного напряжения.

Ранее (см. раздел 2.2.2) было принято следующее правило обозначения *главных* напряжений:

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3,$$

где величины σ – алгебраические величины.

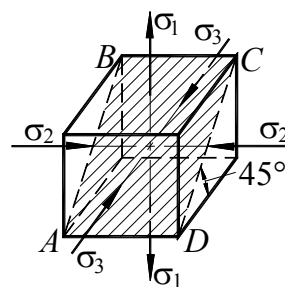


Рис. 2.7.1

2.7.2. ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ

Одной из важнейших задач инженерного расчета является *оценка прочности* детали по известному *напряженному состоянию в опасной точке поперечного сечения*.

Для *простых* видов деформаций эта задача решается сравнительно просто: по известным формулам определяют максимальные напряжения, которые затем сравнивают с опасными (предельными) для данного материала напряжениями, устанавливаемыми экспериментально.

Для обеспечения прочности материала требовалось, чтобы наибольшее нормальное напряжение (при растяжении, сжатии) или наибольшее

касательное напряжение (при кручении) не превосходило соответствующего *предельного* напряжения, значение которого установлено по полученному опытным путем, соответствующему *пределу текучести* (для пластичных материалов) или *пределу прочности* (для хрупких материалов).

В случае необходимости реализовать требуемый коэффициент безопасности максимальные напряжения сравнивают с *допускаемыми*.

Указанный подход к оценке прочности является вполне обоснованным, так как при растяжении и сжатии бруса имеет место однородное линейное напряженное состояние, а при прямом поперечном изгибе наиболее нагруженные точки также находятся, как правило, в условиях линейного напряженного состояния.

Для *сложного* напряженного состояния подобный метод оценки прочности непригоден. Дело в том, что для одного и того же материала, как показывают опыты, *опасное* состояние может наступить при *различных предельных значениях главных напряжений* σ_1 , σ_2 и σ_3 в зависимости от *соотношений* между ними. Экспериментально установить предельные величины главных напряжений в зависимости от соотношений между ними очень сложно не только из-за трудности постановки опытов, но и вследствие большого объема испытаний.

В случае *сложного* напряженного состояния конструкции, как правило, расчеты на прочность производят на основании теоретических разработок с использованием данных о механических свойствах материалов, получаемых при испытании на растяжение и сжатие (иногда используют также результаты опытов на кручение). Только в отдельных случаях для оценки прочности конструкции или ее элементов прибегают к моделированию. В исключительных, особо ответственных случаях вопрос о прочности решается натурными испытаниями опытных образцов конструкции.

Все существующие теоретические методы расчета основаны на гипотезах о преимущественном влиянии того или иного фактора на процесс перехода материала в предельное состояние. Суть применения этих гипотез для оценки прочности материала заключается в замене *фактического* напряженного состояния *эквивалентным* (равноопасным) ему линейным напряженным состоянием.

Эквивалентными (равноопасными и равнопрочными) называют такие два каких-либо напряженных состояния, которые при пропорциональном увеличении главных напряжений одновременно становятся *предельными*. В этом случае коэффициент безопасности для обоих напряженных состояний при указанных условиях будет одинаковым.

Приведение *сложного* напряженного состояния к *эквивалентному* ему *линейному* осуществляется заменой главных напряжений σ_1 , σ_2 и σ_3

эквивалентным напряжением, которое надо создать в *растянутом* образце, чтобы получить напряженное состояние, *эквивалентное заданному*.

Прочность оценивают при помощи сравнения *эквивалентных* напряжений с *предельными* при *растяжении* (*сжатии*) или непосредственно с *допускаемыми* напряжениями.

Выбранную за основу гипотезу о преимущественном влиянии на прочность материала того или иного фактора часто называют *теорией прочности*.

Существует множество теорий прочности, но для наиболее распространенных конструкционных материалов используются *пять теорий*:

— теория наибольших нормальных напряжений (первая теория прочности);

— теория наибольших относительных линейных деформаций (вторая теория прочности);

— теория наибольших касательных напряжений (третья теория прочности);

— энергетическая теория формоизменения (четвертая теория прочности);

— теория прочности Мора (пятая теория прочности).

2.7.2.1. ПЕРВАЯ ТЕОРИЯ ПРОЧНОСТИ

За *критерий прочности* принимается *наибольшее нормальное напряжение*.

Первая теория прочности может быть сформулирована следующим образом: *предельное состояние материала при сложном напряженном состоянии наступает тогда, когда наибольшее нормальное напряжение достигает величины предельного напряжения при одноосном напряженном состоянии*:

$$\sigma_{1п} = \sigma_{п}, \quad (2.7.1)$$

где $\sigma_{1п}$ – предельное значение наибольшего (из трех) нормального напряжения (в момент разрушения),

$\sigma_{п}$ – предельное напряжение при одноосном сжатии или растяжении (предел прочности).

Условие прочности:

$$\sigma_1 \leq \sigma_p \quad (2.7.2)$$

где σ_1 – фактическое значение наибольшего главного напряжения, возникающего в опасной точке детали;

σ_p – допускаемое значение нормального напряжения, принимаемое для одноосного растяжения или сжатия.

Прочность материала при сложном напряженном состоянии обеспечивается, если наибольшее нормальное напряжение не превосходит допускаемого нормального напряжения, установленного для одноосного напряженного состояния.

Эта гипотеза учитывает лишь влияние наибольшего главного напряжения, пренебрегая влиянием двух других главных напряжений на прочность материала.

Первая теория прочности подтверждается экспериментальными данными для *хрупких* материалов.

Если материал имеет *различные* допускаемые напряжения на *растяжение* и *сжатие*, то вместо одного условия прочности (2.7.2) будем иметь два условия – по наибольшим растягивающим и сжимающим напряжениям:

$$\sigma_{p \max} \leq \sigma_{pp} \quad (2.7.3)$$

$$\sigma_{c \max} \leq \sigma_{cp} \quad (2.7.4)$$

2.7.2.2. ВТОРАЯ ТЕОРИЯ ПРОЧНОСТИ

Согласно второй гипотезе *основной причиной разрушения* материала является *наибольшая относительная линейная деформация*.

Предполагается, что нарушение прочности в общем случае напряженного состояния наступит тогда, когда наибольшая по абсолютной величине линейная деформация ε_{\max} достигнет опасного значения, соответствующего предельному состоянию данного материала при растяжении или сжатии.

Условие *прочности* в рассматриваемом случае записывается так:

$$\varepsilon_{\max} \leq \varepsilon_p \quad (2.7.5)$$

Используя формулы (2.3.49) обобщенного закона Гука, выразим условие прочности (2.7.5) в напряжениях.

Так как из трех деформаций ε_1 , ε_2 и ε_3 наибольшей в алгебраическом смысле будет деформация ε_1 , то:

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_1 = \frac{\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)}{E}.$$

Имея в виду, что:

$$\varepsilon_p = \frac{\sigma_p}{E},$$

окончательно получим:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq \sigma_p \quad (2.7.6)$$

Из условия прочности (2.7.6) видно, что с допускаримым напряжением нужно сравнивать не какое-либо из главных напряжений, а их комбинацию, которая представляет собой некоторое напряжение, называемое эквивалентным.

Вторая теория учитывает влияние на прочность всех трех главных напряжений, однако применима она только для хрупких материалов (например, для легированного чугуна, высокопрочных сталей после низкого отпуска и т.д.).

2.7.2.3. ТРЕТЬЯ ТЕОРИЯ ПРОЧНОСТИ

В качестве фактора, определяющего прочность материала, здесь принимается величина *наибольшего касательного напряжения*.

Предполагается, что прочность материала при сложном напряженном состоянии считается обеспеченной, если *наибольшее касательное напряжение не превосходит допускаримого касательного напряжения, установленного для одноосного напряженного состояния*:

$$\tau_{\max} \leq \tau_p \quad (2.7.7)$$

В разделе 2.3.7.3 было показано, что при двухосном напряженном состоянии наибольшие касательные напряжения имеют место в сечениях под углом $\alpha=45^\circ$ к направлению главных напряжений и равны полуразности этих напряжений.

В случае объемного напряженного состояния максимальные касательные напряжения имеют место в плоскости $ABCD$; их величина равна (рис. 2.7.1):

$$\tau'_{\max} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2}.$$

Допускаемое касательное напряжение τ_p при одноосном напряженном состоянии связано с допускаримым нормальным напряжением σ_p соотношением, вытекающим из предыдущей формулы, если положить в ней σ_3 равные нулю:

$$\tau_p = \frac{\sigma_p}{2}.$$

Таким образом, условие прочности по третьей гипотезе, выраженное в нормальных напряжениях, имеет вид:

$$\sigma_{\text{экр}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_p \quad (2.7.8)$$

Выражение, стоящее в левой части неравенства (2.7.8), представляет собой некоторое напряжение, называемое эквивалентным.

Его следует понимать как *напряжение*, которое следует создать в растянутом (или сжатом) образце, чтобы его прочность была одина-

ковой с прочностью образца, находящегося в условиях сложного напряженного состояния.

Чтобы сравнить эту гипотезу с опытными данными, напишем по третьей гипотезе также условие перехода материала в предельное состояние:

$$\sigma_{1п} - \sigma_{3п} = \sigma_{п} \quad (2.7.9)$$

где $\sigma_{1п}$ и $\sigma_{3п}$ – значения главных напряжений в предельном состоянии; $\sigma_{п}$ – предельное напряжение одноосного сжатия или растяжения.

Для случая часто встречающегося на практике случая *плоского напряженного состояния* (рис. 2.7.2), для которого:

$$\sigma_{\alpha} = \sigma,$$

$$\tau_{\alpha} = \tau,$$

$$\sigma_{\beta} = 0.$$

Тогда, на основании формулы (2.3.44):

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2},$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

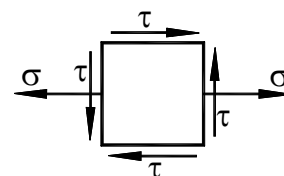


Рис. 2.7.2

Условие прочности (2.7.7) можно записать в следующем виде:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq \sigma_p. \quad (2.7.10)$$

Для случая чистого сдвига (кручения), когда $\sigma_1 = \tau$ и $\sigma_3 = -\tau$, по формуле (2.7.9) получаем:

$$2\tau_T = \sigma_T$$

или

$$\tau_T = 0,5\sigma_T,$$

где τ_T – предел текучести при чистом сдвиге;

σ_T – предел текучести при одноосном растяжении (сжатии).

Опыты для большинства сталей дают значение:

$$\tau_T \approx 0,6\sigma_T.$$

Третья теория прочности хорошо подтверждается экспериментальными данными для *пластичных* материалов, *одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию*. Ее недостатком является то, что она *неприменима* при расчете деталей из *хрупких* материалов.

2.7.2.4. ЧЕТВЕРТАЯ ТЕОРИЯ ПРОЧНОСТИ

Предполагается, что прочность материала при сложном напряженном состоянии обеспечивается в том случае, если *удельная потенциаль-*

ная энергия формоизменения не превосходит допустимой удельной потенциальной энергии формоизменения, установленной для одноосного напряженного состояния:

$$u_{\phi} \leq u_{\phi p} \quad (2.7.11)$$

Удельная потенциальная энергия деформации при объемном напряженном состоянии равна (см. раздел 2.3.8):

$$u_p = \frac{\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \right]}{2E}. \quad (2.7.12)$$

Эта величина всегда положительна. Поэтому энергетическая гипотеза, так же как и третья, не учитывает различия между растяжением и сжатием, другими словами, пользуясь этой гипотезой, приходится принимать:

$$\sigma_{pp} = \sigma_{cp} = \sigma_p.$$

Допускаемая удельная потенциальная энергия при одноосном напряженном состоянии при $\sigma_1 = \sigma_p$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ определяется по той же формуле (2.7.12):

$$u_{pp} = \frac{\sigma_p^2}{2E}. \quad (2.7.13)$$

Подставив значения u_p из формулы (2.7.12) и u_{pp} из формулы (2.7.13) в формулу (2.7.11), получим:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \leq \sigma_p^2$$

или

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)} \leq \sigma_p. \quad (2.7.14)$$

Опыты показывают, что лучшие результаты получаются, если в качестве критерия прочности принимать *не всю* энергию деформации, а *лишь ту ее часть, которая связана с изменением формы тела*. Это условие проще всего записать, полагая в формуле (2.7.14) $\mu=0,5$, так как при $\mu=0,5$ объем тела не изменяется (см. раздел 2.3.7.5). Тогда *условие прочности* (в данном случае это – *условие пластичности*) по энергетической теории формоизменения (четвертой теории прочности) примет вид:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1} \leq \sigma_p. \quad (2.7.15)$$

В частном случае для плоского напряженного состояния ($\sigma_3=0$) получим:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} \leq \sigma_p. \quad (2.7.16)$$

Для сопоставления с опытными данными напишем предельное условие по этой гипотезе для плоского напряженного состояния:

$$\sigma_{1п}^2 + \sigma_{2п}^2 - \sigma_{1п}\sigma_{2п} = \sigma_{п}^2, \quad (2.7.17)$$

где $\sigma_{1п}$ и $\sigma_{2п}$ – предельные значения главных напряжений;

$\sigma_{п}$ – предельное значение напряжения при одноосном растяжении (сжатии).

Для случая *плоского* напряженного состояния из (2.7.17) получим:

$$3\tau_{т}^2 = \sigma_{т}^2,$$

откуда:

$$\tau_{т} \approx 0,58\sigma_{т},$$

что близко совпадает с опытными данными.

Уравнение прочности принимает вид:

$$\sigma_{экр} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq \sigma_p \quad (2.7.18)$$

Четвертая теория прочности дает для *пластичных* материалов более точное, по сравнению с *третьей* теорией, совпадение теоретических расчетов с экспериментальными данными, благодаря чему она получила большое распространение.

Для расчета деталей из *хрупких* материалов данная теория прочности *неприменима*.

2.7.2.5. ПЯТАЯ ТЕОРИЯ ПРОЧНОСТИ

Рассматриваемые выше теории прочности дают удовлетворительные результаты:

- только для *хрупкого* разрушения (*первая* теория),
- только для *вязкого* (*третья* или *четвертая* теории).

Но все они не учитывают различной прочности материалов на растяжение и сжатие.

Пятая теория прочности (теория прочности Мора) позволяет учесть различное сопротивление материалов растяжению и сжатию.

Условие прочности, по теории Мора, имеет вид:

$$\sigma_{экр} = \sigma_1 - \nu\sigma_3 \leq \sigma_{pp} \quad (2.7.19)$$

где $\nu = \frac{\sigma_{п.р}}{\sigma_{п.с}}$;

$\sigma_{п.р}$ – предельное напряжение при растяжении;

$\sigma_{п.с}$ – предельное напряжение при сжатии.

Для *пластичных* материалов *предельные напряжения* равны соответствующим *пределам текучести*.

$$\sigma_{п.р} = \sigma_{т.р};$$

$$\sigma_{п.с} = \sigma_{т.с}.$$

Для *хрупких* материалов *предельные напряжения равны пределам прочности*:

$$\sigma_{п.р} = \sigma_{пч.р};$$

$$\sigma_{п.с} = \sigma_{пч.с}.$$

Таким образом, теория Мора может рассматриваться и как теория пластичности, и как теория разрушения.

При $\nu=1$ теория прочности Мора совпадает с третьей теорией.

Для *хрупких* материалов теория Мора дает удовлетворительные результаты, хотя и приводит к завышенным размерам сечений.

Наилучшие результаты дает теория Мора при $\sigma_1 > 0$ и $\sigma_3 < 0$.

2.7.2.6. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПРИМЕНЕНИЮ ТЕОРИЙ ПРОЧНОСТИ

На основании имеющихся опытных данных можно считать, что для *пластичных* материалов при трехосном напряженном состоянии удовлетворительные результаты дают *четвертая* и *третья* теории прочности.

Что же касается *хрупких* материалов, то для них рекомендуется *пятая* теория прочности (теория прочности Мора).

2.7.3. РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ СЛОЖНОМ СОПРОТИВЛЕНИИ

Рекомендуется следующий порядок решения таких задач.

Вначале с помощью *метода сечений* определяют *внутренние силовые факторы*, возникающие в поперечных сечениях стержня.

При *сложной* нагрузке рекомендуется строить *эпюры* внутренних усилий, позволяющие определить положение *опасного сечения*.

В некоторых случаях по эпюрам внутренних усилий не представляется возможным с полной уверенностью установить, какое сечение является опасным, при этом по эпюрам устанавливают два (а иногда и более) *предположительно опасных* сечения и для каждого из них производят расчет.

После этого на основании принципа независимости действия сил (см. раздел 2.2.4) определяют *нормальные* и *касательные* напряжения от *каждого* внутреннего усилия *отдельно*, пользуясь полученными в предыдущих разделах формулами.

Исследуя *распределение* напряжений по *сечению*, устанавливают *опасную* (или *предположительно опасную*) точку, для которой и составляют *условие прочности*.

Если окажется, что в опасной точке имеет место *одноосное* напряженное состояние (одноосное растяжение или сжатие), то для расчета на прочность достаточно сопоставить возникающее в этой точке суммарное (то есть от всех внутренних усилий) нормальное напряжение с допускаемым σ_{pp} или σ_{cp} .

В случае же, если напряженное состояние в опасной точке является *двухосным* (при расчете бруса случаи трехосного напряженного состояния не встречаются), расчет следует выполнять, применяя ту или иную *теорию прочности*.

Выбор теории прочности определяется в первую очередь состоянием материала (*пластическое* или *хрупкое*).

При необходимости определения того или иного перемещения также используется *принцип независимости действия сил* (сложение перемещения производится, как правило, геометрически).

2.7.3.1. ИЗГИБ В ДВУХ ПЛОСКОСТЯХ (КОСОЙ ИЗГИБ)

Косой изгиб возникает в том случае, когда внешние силы, перпендикулярные оси стержня, не лежат в плоскости, проходящей через главную ось его поперечного сечения (рис. 2.7.3). В этом случае возникающий в поперечном сечении изгибающий момент можно разложить на два изгибающих момента, действующих в плоскостях, проходящих через главные оси сечения. Таким образом, косой изгиб можно рассматривать как сочетание двух плоских изгибов во взаимно перпендикулярных плоскостях.

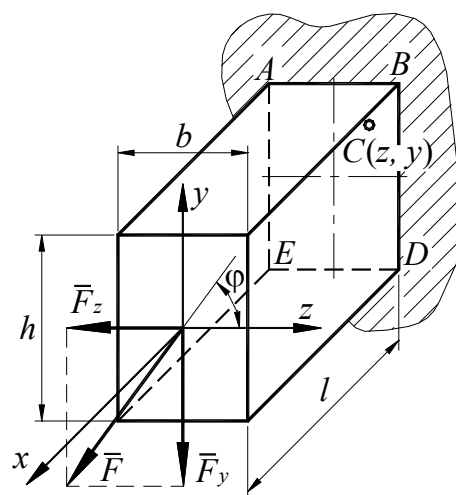


Рис. 2.7.3

При косом изгибе нормальные напряжения в любой точке поперечного сечения будут равны *алгебраической* сумме напряжений от изгиба в обеих плоскостях. Рассмотрим, например, точку *C* опорного сечения, имеющую координаты *z* и *y*, относительно главных осей.

В этом сечении:

а) изгибающий момент, возникающий при изгибе стержня в вертикальной плоскости с нейтральной осью *z*, равен:

$$M_z = F_y l = Fl \sin \varphi \quad (2.7.20)$$

б) изгибающий момент, возникающий при изгибе стержня в горизонтальной плоскости с нейтральной осью *y*, равен:

$$M_y = F_z l = Fl \cos \varphi, \quad (2.7.21)$$

где F_y и F_z – вертикальная и горизонтальная составляющие силы F ;
 l – длина балки;
 φ – угол наклона силовой плоскости относительно оси x .

При изгибе в вертикальной плоскости в верхней половине балки (в том числе и в точке C) возникают растягивающие напряжения, в нижней половине балки – сжимающие, так как выпуклая сторона балки будет наверху. Величину напряжений в точке C определяем по следующей формуле, уже известной из теории плоского изгиба:

$$\sigma_1 = \frac{M_z y}{J_z}, \quad (2.7.22)$$

где y – расстояние от нейтральной оси z до точки C ;
 J_y – момент инерции поперечного сечения балки относительно оси y .

Вследствие изгиба в горизонтальной плоскости в правой половине балки, следовательно, и в точке C возникают растягивающие напряжения, а в левой половине балки – сжимающие, так как выпуклая сторона балки при изгибе в горизонтальной плоскости будет справа.

Величина напряжений в точке C при этом будет определяться по формуле:

$$\sigma_2 = \frac{M_y z}{J_y}, \quad (2.7.23)$$

где z – расстояние от оси y (нейтральной оси при изгибе в горизонтальной плоскости) до точки C ,

J_y – момент инерции поперечного сечения балки относительно оси y .

Суммарное напряжение в точке C равно:

$$\sigma = \frac{M_z y}{J_z} + \frac{M_y z}{J_y} \quad (2.7.24)$$

Эта формула справедлива и при любой другой форме сечения балки.

Если сечение имеет выступающие угловые точки, для которых z_{\max} и y_{\max} достигаются одновременно (прямоугольник, двутавр), то наибольшие по абсолютной величине напряжения возникают в этих точках:

$$\sigma = \pm \frac{M_z}{W_z} \pm \frac{M_y}{W_y} \quad (2.7.25)$$

где $W_z = \frac{2J_z}{h}$ – момент сопротивления сечения относительно оси x ;

$W_y = \frac{2J_y}{b}$ – момент сопротивления сечения относительно оси y .

Очевидно, что опасными будут те угловые точки сечения, где суммируются напряжения одного знака.

Для случая, изображенного на рис. 2.7.3, такими точками будут точки B и E , при этом точка B находится в растянутой зоне, а точка E – в сжатой.

Поэтому напряжения в точках B и E равны:

$$\sigma_B = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y};$$

$$\sigma_E = -\frac{M_z}{W_z} - \frac{M_y}{W_y}.$$

Для сечения произвольного очертания, не имеющего выступающих угловых точек, необходимо предварительно найти «опасные» точки, то есть те точки сечения, в которых будут действовать наибольшие по величине растягивающие и сжимающие напряжения (рис. 2.7.4). Это производится следующим образом.

Вначале определяется положение нулевой линии при косом изгибе, то есть определяется геометрическое место точек сечения, в которых нормальные напряжения равны нулю. Другими словами, определяется линия, разделяющая растянутую и сжатую части сечения. Пусть это будет линия $n-n$.

При изгибе напряжения возрастают по мере удаления от нулевой линии. Это видно из того, что уравнение (2.7.24) представляет собой уравнение плоскости, проходящей через нулевую линию. Ордината, замеренная по нормали от поперечного сечения до этой плоскости, численно равна напряжению в данной точке. Она будет наибольшей для той точки, которая дальше всех отстоит от нулевой линии. Учитывая это, заключаем, что точками, в которых следует проверять напряжения, будут точки, наиболее удаленные от нулевой линии, то есть точки K и L . При материале, одинаково работающем на растяжение и сжатие, опасной является та из указанных точек, в которой возникает большее (по модулю) напряжение.

Уравнение нулевой линии получим, приравняв правую часть формулы (2.7.24) нулю:

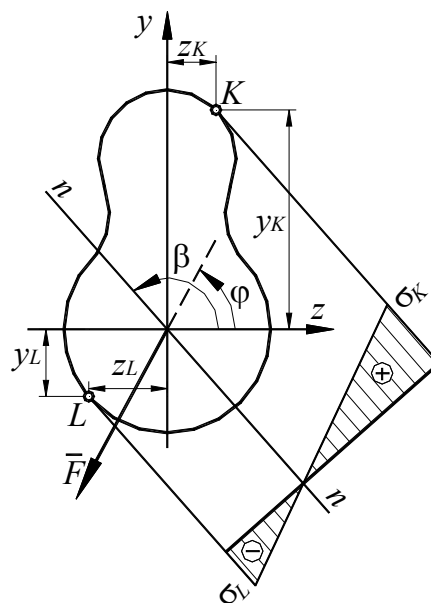


Рис. 2.7.4

$$\frac{M_z y_0}{J_z} + \frac{M_y x_0}{J_y} = 0$$

или

$$M_z \left(\frac{y_0}{J_z} + K \frac{z_0}{J_y} \right) = 0, \quad (2.7.26)$$

где в соответствии с формулами (2.7.20) и (2.7.21):

$$K = \frac{M_y}{M_z} = \operatorname{ctg} \varphi, \quad (2.7.27)$$

z_0 и y_0 – текущие координаты точек нулевой линии.

Так как:

$$M_z \neq 0,$$

то:

$$\frac{y_0}{J_z} + K \frac{z_0}{J_y} = 0. \quad (2.7.28)$$

Это уравнение является уравнением нулевой линии, проходящей через начало координат. Разделив обе части уравнения на z_0 , получим:

$$\frac{y_0}{z_0 J_z} + \frac{K}{J_y} = 0. \quad (2.7.29)$$

Но отношение

$$\frac{y_0}{z_0} = \operatorname{tg} \beta$$

есть тангенс угла наклона нулевой линии к оси z , то есть ее угловой коэффициент. Следовательно,

$$\frac{\operatorname{tg} \beta}{J_z} + \frac{K}{J_y} = 0$$

или

$$k = \operatorname{tg} \beta = -K \frac{J_z}{J_y} = -\frac{J_z}{J_y} \operatorname{ctg} \varphi. \quad (2.7.30)$$

Как видно из уравнения (2.7.30), при $J_z \neq J_y$ угол β не равен углу φ , то есть нулевая линия не перпендикулярна силовой линии, как это имело место при плоском (простом) изгибе. Только в частном случае, когда $J_z = J_y$ (круг, квадрат и т. п.), имеем:

$$\operatorname{tg} \beta = -\operatorname{ctg} \varphi = -\operatorname{tg} (90^\circ - \varphi) = \operatorname{tg} (\varphi - 90^\circ),$$

откуда:

$$\beta = \varphi - 90^\circ.$$

Следовательно, в этом частном случае ($J_z = J_y$) нулевая линия перпендикулярна силовой линии, то есть имеет место плоский изгиб.

Нулевая и силовая линии размещаются в смежных квадрантах.

Если, например, силовая линия проходит через I и III квадранты ($0 < \varphi < 90^\circ$), то в соответствии с формулой (2.7.30) получим для β значение меньше 90° со знаком «минус». Это означает, что угол β следует отложить от оси z по часовой стрелке, то есть нулевая линия пройдет через IV к II квадранты.

Определив положение нулевой линии и найдя наиболее удаленные от нулевой линии точки поперечного сечения (опасные точки), можно произвести проверку прочности сечения.

Если материал балки по разному сопротивляется растяжению и сжатию, то проверку прочности следует производить для обеих точек, наиболее удаленных от нулевой линии (точки K и L на рис. 2.7.4).

В указанном случае, считая что стержень представляет консоль, как на рис. 2.7.3, условия прочности запишутся в виде:

$$\sigma_K = +\frac{M_z y_K}{J_z} + \frac{M_y z_K}{J_y} \leq \sigma_{pp}, \quad (2.7.31)$$

$$\sigma_L = -\frac{M_z y_L}{J_z} - \frac{M_y z_L}{J_y} \leq \sigma_{cp}. \quad (2.7.32)$$

При равенстве $\sigma_{pp} = \sigma_{cp}$, то есть для пластичных материалов, расчет, как уже указывалось, выполняется для одной точки, например, в случае, представленном на рис. 2.7.4 для точки K , так как $\sigma_K > \sigma_L$.

Для сечений типа прямоугольника, двутавра и т.п. условие прочности получим на основании формулы (2.7.25):

$$\sigma = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \leq \sigma_p. \quad (2.7.33)$$

В случае хрупкого материала, например чугуна, в формулу (2.7.33) следует подставить допускаемое напряжение на растяжение σ_{pp} .

Определение требуемых размеров поперечного сечения выполняют, используя (в зависимости от формы сечения) формулы (2.155), (2.7.32) или (2.7.33), при этом обычно расчет приходится выполнять способом повторных попыток.

Приняв какие-либо размеры сечения, проверяют, удовлетворяются ли условия прочности: формулы (2.7.31), (2.7.32) или (2.7.33). Если расхождение между рабочими и допускаемыми напряжениями значитель-

но, принимают другие размеры сечения и повторяют расчет. Указанные попытки производят до тех пор, пока расхождение между σ_{\max} и σ_p не будет превышать (5-10)%. При подборе сечений прокатных балок используют таблицы сортамента.

Подбор *круглого* сечения производится по формуле простого (плоского) изгиба, по суммарному изгибающему моменту:

$$M_{\text{сум}} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2},$$

поскольку для круга нулевая линия перпендикулярна линии действия $M_{\text{сум}}$.

Практический интерес представляет задача о выборе такой формы поперечного сечения, при которой расход материала при косом изгибе будет минимальным.

Для *прямоугольного* сечения (рис. 2.7.3) минимальный расход материала (минимальная площадь сечения) получится при условии:

$$\frac{h}{b} = \frac{M_z}{M_y}. \quad (2.7.34)$$

Однако прямоугольное сечение не является наивыгоднейшим при косом изгибе. Наиболее выгодными являются коробчатые, тонкостенные сечения. Например, при одинаковой несущей способности при изгибе площадь поперечного сечения полого вала с отношением внутреннего диаметра к наружному $c = \frac{d}{D} = 0,9$ в 2,76 раза меньше, чем у сплошного вала. Из этого примера очевидно, что благодаря применению рациональных сечений можно значительно сократить расход материала.

Прогибы при *косом* изгибе определяются отдельно в каждой плоскости:

— или путем интегрирования дифференциального уравнения изогнутой оси,

— или по универсальному уравнению,

— или по методу Мора.

Суммарный прогиб определяется как геометрическая сумма составляющих прогибов:

$$y_{\text{сум}} = \sqrt{y_{\Gamma}^2 + y_{\text{В}}^2}, \quad (2.7.35)$$

где y_{Γ} и $y_{\text{В}}$ – прогибы в горизонтальной и вертикальной плоскостях.

Условие жесткости имеет вид:

$$y_{\max} \leq y_p,$$

где y_p – допускаемый прогиб.

2.7.3.2. ИЗГИБ С КРУЧЕНИЕМ

В конструкциях различных механизмов очень часто встречаются детали, работающие на совместное действие изгиба и кручения. Характерным примером таких деталей являются валы самых разнообразных устройств.

Силы, которые передаются на вал механизма, в общем случае приводят к появлению в поперечных сечениях вала крутящего момента $T_k = T_x$, изгибающих моментов M_x и M_y , а также поперечных сил F_{tx} и F_{ty} . Под действием указанных силовых факторов в сечениях возникают нормальные (от изгиба) и касательные (от изгиба и кручения) напряжения. Величиной касательных напряжений от изгиба обычно пренебрегают, поскольку она незначительна по сравнению с величиной касательных напряжений от кручения. Так же пренебрегают сжимающих сил на прочность вала. Поэтому фактически рассматривают сочетание *кручения с чистым изгибом*.

Рассмотрим вал-червяк круглого поперечного сечения (рис. 2.7.5).

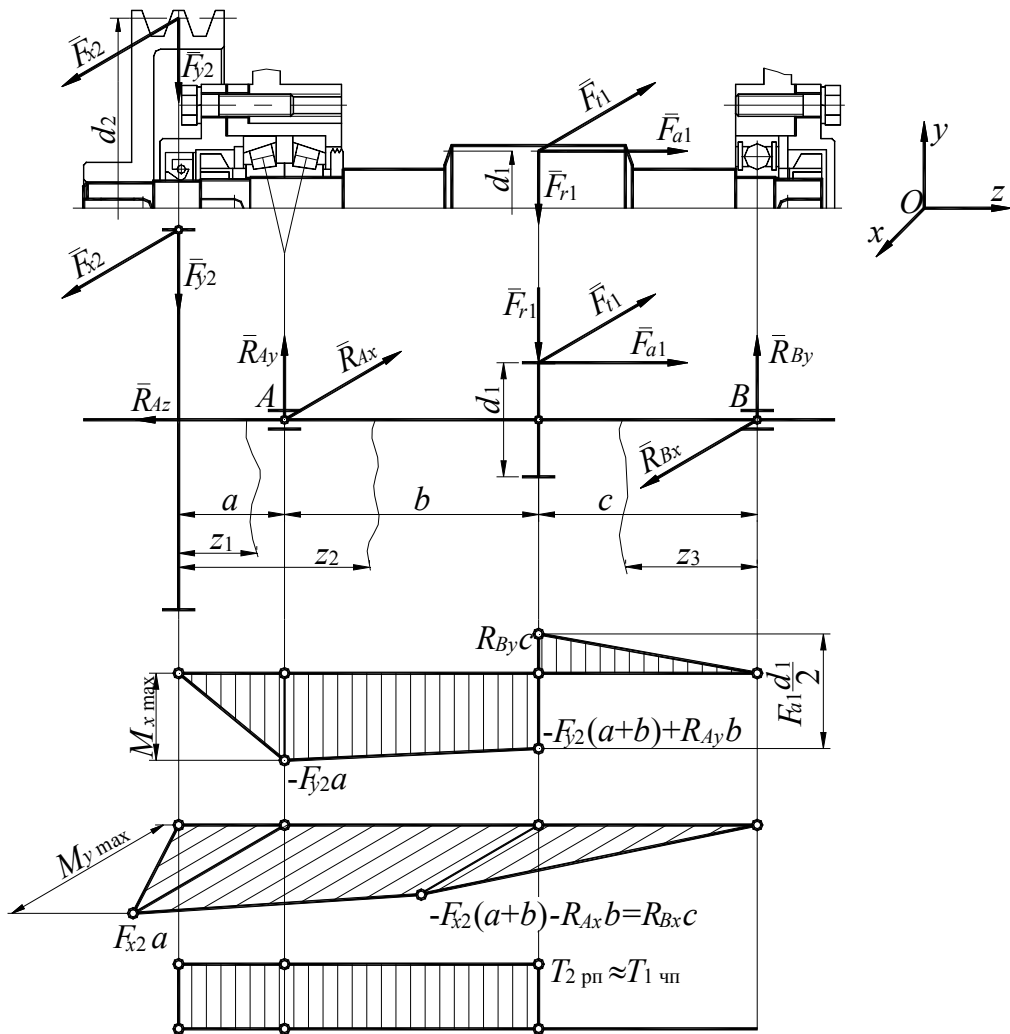


Рис. 2.7.5

Решение этой задачи производим с использованием принципа независимости действия сил.

2.7.3.2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОСТАВЛЯЮЩИХ РЕАКЦИЙ В ОПОРАХ

Силовую картину рассмотрим отдельно в плоскостях:

- вертикальной (YOZ);
- горизонтальной (XOZ).

Плоскость YOZ :

1. Составим уравнение моментов, действующих на вал относительно опоры A , исходя из условия равновесия системы.

Единого правила знаков при решении подобных задач не существует. Условимся, для определенности, при решении подобных задач, считать *положительным* момент, действующий *по часовой стрелке*, и *отрицательным* – действующий *против часовой стрелки*.

Тогда:

$$\Sigma M_A = -F_{y2}a + F_{r1}b + F_{a1} \frac{d_1}{2} - R_{By}(b + c) = 0, \quad (2.7.36)$$

откуда:

$$R_{By} = \frac{-F_{y2}a + F_{r1}b + F_{a1} \frac{d_1}{2}}{b + c}. \quad (2.7.37)$$

2. Исходя из условия равновесия системы, составим уравнение суммы сил, действующих на вал:

$$\Sigma F_y = -F_{y2} + R_{Ay} - F_{r1} + R_{By} = 0, \quad (2.7.38)$$

откуда:

$$R_{Ay} = F_{r1} - R_{By} + F_{y2}. \quad (2.7.39)$$

$$\Sigma F_z = F_{a1} - R_{Az} = 0, \quad (2.7.40)$$

откуда:

$$F_{a1} = R_{Az}. \quad (2.7.41)$$

Плоскость XOZ :

1. Составим уравнение моментов, действующих на вал относительно опоры A , исходя из условия равновесия системы.

$$\Sigma M_A = -F_{x2}a - F_{t1}b + R_{Bx}(b + c) = 0, \quad (2.7.42)$$

откуда:

$$R_{Bx} = \frac{F_{x2}a + F_{t1}b}{b + c}. \quad (2.7.43)$$

2. Исходя из условия равновесия системы, составим уравнение суммы сил, действующих на вал:

$$\Sigma F_x = F_{x2} - R_{Ax} - F_{t1} + R_{Bx} = 0, \quad (2.7.44)$$

откуда:

$$R_{Ax} = F_{x2} - F_{t1} + R_{Bx}. \quad (2.7.45)$$

2.7.3.2.2. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ

Определим изгибающие моменты в сечениях вала, которые численно равны алгебраической сумме изгибающих моментов всех внешних сил, действующих по одну сторону от рассматриваемого сечения.

Плоскость YOZ :

$$\Sigma M_{z1} = -F_{y2}z_1, \quad (2.7.46)$$

где $0 \leq z_1 \leq a$.

При $z_1=0$ $M_{z1}=0$;

при $z_1=a$ $M_{z1}=-F_{y2}a$;

$$\Sigma M_{z2} = -F_{y2}z_2 + R_{Ay}(z_2 - a), \quad (2.7.47)$$

где $a \leq z_2 \leq a + b$.

При $z_2 = a$ $M_{z_2} = -F_{y2}a$;

при $z_2 = a + b$ $M_{z_2} = -F_{y2}(a + b) + R_{Ay}b$;

$$\Sigma M_{z_3} = R_{By}z_3, \quad (2.7.48)$$

где $0 \leq z_3 \leq c$.

При $z_3 = 0$ $M_{z_3} = 0$;

при $z_3 = a$ $M_{z_3} = R_{By}c$;

По полученным данным строится эпюра M_x .

Плоскость XOZ :

$$\Sigma M_{z_1} = -F_{x2}z_1, \quad (2.7.49)$$

где $0 \leq z_1 \leq a$.

При $z_1 = 0$ $M_{z_1} = 0$;

при $z_1 = a$ $M_{z_1} = -F_{x2}a$;

$$\Sigma M_{z_2} = F_{x2}z_2 - R_{Ax}(z_2 - a), \quad (2.7.50)$$

где $a \leq z_2 \leq a + b$.

При $z_2 = a$ $M_{z_2} = F_{x2}a$;

при $z_2 = a + b$ $M_{z_2} = F_{x2}(a + b) - R_{Ax}b$;

$$\Sigma M_{z_3} = R_{Bx}z_3, \quad (2.7.51)$$

где $0 \leq z_3 \leq c$.

При $z_3 = 0$ $M_{z_3} = 0$;

при $z_3 = a$ $M_{z_3} = R_{Bx}c$.

По полученным данным строится эпюра M_y .

2.7.3.2.3. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР КРУТЯЩИХ МОМЕНТОВ

Определим крутящие моменты в сечениях вала, которые численно равны алгебраической сумме крутящих моментов, действующих по одну сторону от рассматриваемого сечения.

$$\Sigma T_{z_1} = T_{2 \text{ рп}}, \quad (2.7.52)$$

где $0 \leq z_1 \leq a$.

При $z_1 = 0$ $T_{z_1} = T_{z \text{ рп}}$;

при $z_1 = a$ $T_{z_1} = T_{z \text{ рп}}$;

$$\Sigma T_{z_2} = T_{2 \text{ рп}}, \quad (2.7.53)$$

где $a \leq z_2 \leq a + b$.

При $z_2 = a$ $T_{z_2} = T_{z \text{ рп}}$;

при $z_2=a+b$ $T_{z_2} = T_{z_{\text{рп}}}$;

$$\Sigma T_{z_3} = 0, \quad (2.7.54)$$

где $0 \leq z_3 \leq c$.

При $z_3=0$ $T_{z_3}=0$;

при $z_3=a$ $T_{z_3}=0$;

По полученным данным строится эпюра крутящих моментов T .

2.7.3.2.4. ПРОВЕРКА ПРОЧНОСТИ ВАЛА

Сопоставляя полученные эпюры, находим, что наиболее опасным являются сечение под подшипником A .

В каждом сечении круглого вала имеет место прямой изгиб от действия *результатирующего* изгибающего момента:

$$M_{\text{и}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}. \quad (2.7.55)$$

Нормальные напряжения от этого момента достигают наибольших значений в крайних волокнах вала и определяются по формуле:

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_{\text{и}}}{W} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{W}. \quad (2.7.56)$$

В любой точке контура поперечного сечения вала действуют также максимальные касательные напряжения от кручения, связанные с величиной крутящего момента соотношением:

$$\tau_{\text{max}} = \frac{T}{W_p} = \frac{T}{2W}. \quad (2.7.57)$$

В формулах (2.7.56) и (2.7.57):

W – осевой момент сопротивления сечения вала.

Прочность вала в опасном сечении проверяют по формулам приемлемых теорий прочности.

Воспользуемся, например, условием прочности (2.7.10), исходя из третьей теории.

Подставив в это условие выражения (2.7.56) и (2.7.57) для напряжений σ и τ , получим:

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{\sqrt{M_{\text{и}}^2 + T^2}}{W} \leq \sigma_p. \quad (2.7.58)$$

Если исходить из четвертой теории прочности, то согласно условию (2.7.18), после подстановок (2.7.56) и (2.7.57) получим:

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{\sqrt{M_{\text{и}}^2 + 0,75T^2}}{W} \leq \sigma_p. \quad (2.7.59)$$

При проверочных расчетах, когда диаметр вала известен, коэффициент безопасности определяется, как:

$$S = \frac{\sigma_T}{\sigma_{\text{ЭКВ}}}, \quad (2.7.60)$$

где σ_T — предел текучести.

По третьей теории прочности значение $\sigma_{\text{ЭКВ}}$ определяется выражением (2.7.10). Для этого случая:

$$S = \frac{\sigma_T}{\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{\sigma_T^2} + \frac{\tau^2}{(0,5\sigma_T)^2}}}.$$

В соответствии с третьей теорией $\tau_T = 0,5\sigma_T$, поэтому:

$$S = \frac{1}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{\sigma_T^2} + \frac{\tau^2}{\tau_T^2}}}. \quad (2.7.61)$$

Формула (2.7.61) после преобразований принимает вид:

$$S = \frac{S_\sigma S_\tau}{\sqrt{S_\sigma^2 + S_\tau^2}}, \quad (2.7.62)$$

где $S_\sigma = \frac{\sigma_T}{\sigma}$ — коэффициент безопасности по нормальным напряжениям;

$S_\tau = \frac{\tau_T}{\tau}$ — коэффициент безопасности по касательным напряжениям.

Следует отметить, что зависимости (2.7.61) и (2.7.62) остаются в силе и для четвертой теории прочности, только в этом случае:

$$\tau_T \approx 0,58\sigma_T. \quad (2.7.63)$$

2.8. РАСЧЕТ ТОНКОСТЕННЫХ СОСУДОВ

В технике часто встречаются сосуды, стенки которых воспринимают давление жидкостей, газов и сыпучих тел (паровые котлы, резервуары, рабочие камеры двигателей, цистерны и т.п.).

Если сосуды имеют форму тел вращения и толщина стенок их незначительна, а нагрузка осесимметрична, то определение напряжений, возникающих в их стенках под нагрузкой, производится весьма просто. В таких случаях, без большой погрешности можно принять, что в стенках возникают только нормальные напряжения (растягивающие или

сжимающие) и что эти напряжения распределяются равномерно по толщине стенки. Расчеты, основанные на таких допущениях, хорошо подтверждаются опытами, если толщина стенки не превосходит примерно одной десятой минимального радиуса кривизны стенки.

Вырежем из стенки сосуда элемент с размерами dl_1 и dl_2 ; толщину стенки обозначим δ (рис. 2.8.1). Радиусы кривизны поверхности сосуда в данном месте ρ_1 и ρ_2 . Нагрузка на элемент – внутреннее давление – p , нормальное к поверхности элемента.

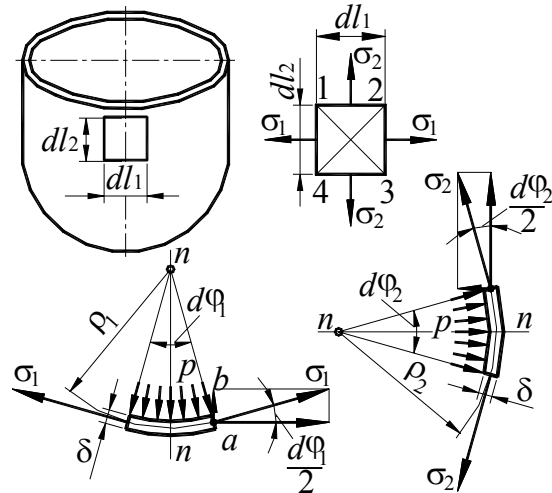


Рис. 2.8.1

Заменим взаимодействие элемента с оставшейся частью сосуда внутренними силами, интенсивность которых равна σ_1 и σ_2 . Поскольку толщина стенок незначительна, как уже было отмечено, можно считать эти напряжения равномерно распределенными по толщине стенки.

Составим условие равновесия элемента, для чего спроектируем силы, действующие на элемент, на направление нормали $n-n$ к поверхности элемента. Проекция нагрузки равна:

$$pdl_1dl_2.$$

Проекция напряжения σ_1 на направление нормали $n-n$ представится отрезком ab , равным:

$$\sigma_1 \sin \frac{d\varphi_1}{2}.$$

Проекция усилия, действующего на грани 14 и 23, равна:

$$2\sigma_1\delta dl_2 \sin \frac{d\varphi_1}{2}.$$

Аналогично, проекция усилия, действующего по грани 12 и 43, равна:

$$2\sigma_2\delta dl_1 \sin \frac{d\varphi_2}{2}.$$

Спроектировав все силы, приложенные к выделенному элементу, на направление нормали $n-n$, получим:

$$pdl_1dl_2 - 2\sigma_1\delta dl_2 \sin \frac{d\varphi_1}{2} - 2\sigma_2\delta dl_1 \sin \frac{d\varphi_2}{2} = 0.$$

Ввиду малости размеров элемента можно принять:

$$\sin \frac{d\varphi_1}{2} \approx \frac{d\varphi_1}{2}$$

и

$$\sin \frac{d\varphi_2}{2} \approx \frac{d\varphi_2}{2}.$$

С учетом этого из уравнения равновесия получим:

$$pdl_1dl_2 - \sigma_1\delta dl_2d\varphi_1 - \sigma_2\delta dl_1d\varphi_2 = 0.$$

Учитывая, что:

$$d\varphi_1 = \frac{dl_1}{\rho_1}$$

и

$$d\varphi_2 = \frac{dl_2}{\rho_2},$$

получим:

$$pdl_1dl_2 - \sigma_1dl_1dl_2 \frac{\delta}{\rho_1} - \sigma_2\delta dl_1dl_2 \frac{\delta}{\rho_2} = 0.$$

Сократив на dl_1dl_2 и разделив на δ , получим:

$$\frac{\sigma_1}{\rho_1} + \frac{\sigma_2}{\rho_2} = \frac{p}{\delta}. \quad (2.8.1)$$

Формула (2.8.1) называется *уравнением Лапласа*.

Рассмотрим расчет двух видов сосудов, наиболее часто встречающихся на практике: *сферического* и *цилиндрического*. При этом ограничимся случаями действия *внутреннего* газового давления.

1. *Сферический сосуд*.

В этом случае:

$$\rho_1 = \rho_2 = r$$

и

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma.$$

Из формулы (2.8.1) следует:

$$\frac{2\sigma}{r} = \frac{p}{\delta},$$

откуда:

$$\sigma = \frac{pr}{2\delta}. \quad (2.8.2)$$

Так как в данном случае имеет место *плоское* напряженное состояние, то для расчета на прочность необходимо применить ту или иную теорию прочности.

Главные напряжения имеют следующие значения:

$$\sigma_1 = \sigma; \sigma_2 = \sigma; \sigma_3 = 0.$$

По *третьей* гипотезе прочности:

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_p.$$

Подставляя

$$\sigma_1 = \sigma \text{ и } \sigma_3 = 0.$$

получаем:

$$\sigma = \frac{pr}{2\delta} \leq \sigma_p,$$

то есть проверка прочности ведется, как в случае одноосного напряженного состояния.

По *четвертой* гипотезе прочности:

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} \leq \sigma_p.$$

Так как в данном случае

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma \text{ и } \sigma_3 = 0,$$

то

$$\sigma = \frac{pr}{2\delta} \leq \sigma_p$$

то есть то же условие, что и по третьей гипотезе прочности.

2. Цилиндрический сосуд.

В этом случае (рис. 2.8.2, а):

$\rho_1 = r$ (радиус цилиндра),

$\rho_2 = \infty$ (радиус кривизны образующей цилиндра).

Из уравнения Лапласа получаем:

$$\frac{\sigma_1}{r} = \frac{p}{\delta},$$

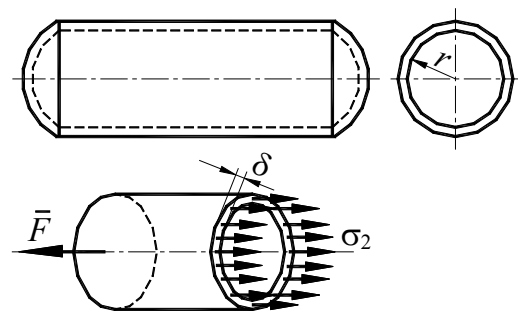


Рис. 2.8.2

откуда:

$$\sigma_1 = \frac{pr}{\delta} \tag{2.8.3}$$

Для определения напряжения σ_2 разрежем сосуд плоскостью, перпендикулярной его оси, и рассмотрим условие равновесия одной из частей сосуда (рис. 2.8.2, б).

Проектируя на ось сосуда все силы, действующие на отсеченную часть, получаем:

$$-F + \sigma_2 2\pi r \delta = 0,$$

где $F = \pi r^2 p = 0$ – равнодействующая сил давления газа на днище сосуда.

Таким образом,

$$-pr^2 + \sigma_2 2\pi r \delta = 0,$$

откуда:

$$\sigma_2 = \frac{pr}{2\delta}. \quad (2.8.4)$$

Заметим, что в силу тонкостенности кольца, представляющего собой сечение цилиндра, по которому действуют напряжения σ_2 , площадь его подсчитана как произведение длины окружности на толщину стенки.

Сравнивая σ_1 и σ_2 в цилиндрическом сосуде, видим, что:

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_1}{2}.$$

Условие прочности по *третьей* гипотезе прочности для цилиндрического сосуда:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 = \frac{pr}{\delta} \leq \sigma_p. \quad (2.8.5)$$

Условие прочности по *четвертой* гипотезе прочности:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} \leq \sigma_p.$$

Подставив значения σ_1 и σ_2 из формул (2.8.3) и (2.8.4), получим из предыдущей формулы:

$$\sigma_{\text{экв}} = 0,86 \frac{pr}{\delta} \leq \sigma_p. \quad (2.8.6)$$

Разница в результатах, получаемых по формулам (2.8.5) и (2.8.6), составляет 14%.

Рекомендуется применять формулу, основанную на четвертой гипотезе прочности.

2.9. РАСЧЕТ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ (ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ)

2.9.1. УСТОЙЧИВЫЕ И НЕУСТОЙЧИВЫЕ ФОРМЫ РАВНОВЕСИЯ

Равновесие абсолютно твердого тела может быть *устойчивым*, *безразличным* и *неустойчивым*. Например, шар, лежащий на вогнутой поверхности, находится в состоянии *устойчивого* равновесия.

Если ему сообщить небольшое отклонение от этого положения и отпустить, то он

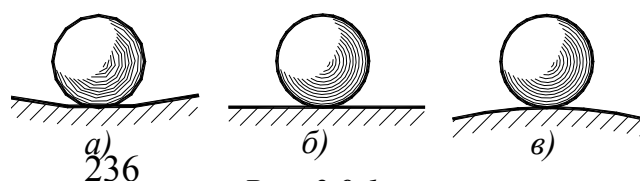


Рис. 2.9.1

снова возвратится в свое исходное положение (рис. 2.9.1, а).

Шар, лежащий на горизонтальной поверхности, находится в состоянии *безразличного* равновесия (рис. 2.9.1, б). Будучи отклоненным от этого положения, он в исходное положение не возвращается, но движение его прекращается.

Наконец, шар, лежащий на выпуклой поверхности, находится в состоянии *неустойчивого* равновесия (рис. 2.9.1, в). Будучи отклоненным от первоначального положения, он продолжает двигаться дальше.

Аналогичные примеры можно привести и из области равновесия деформирующихся тел.

Так, длинный стержень при действии сравнительно небольшой осевой сжимающей силы (меньшей некоторого критического значения) находится в состоянии *устойчивого* равновесия (рис. 2.9.2, а).

Если незначительно изогнуть его какой-нибудь поперечной нагрузкой и затем эту нагрузку убрать, то стержень вновь распрямится, примет первоначальную форму равновесия. Искривленная форма равновесия стержня при этом оказывается *неустойчивой*.

При значении сжимающей силы, превосходящей определенную критическую величину, прямолинейная форма равновесия становится неустойчивой и поэтому сменяется криволинейной формой равновесия, которая оказывается при этом *устойчивой* (рис. 2.9.2, б).

Наименьшее значение сжимающей силы, при котором сжатый стержень теряет способность сохранять прямолинейную форму равновесия, называется *критической силой* и обозначается через $F_{кр}$.

По определению Эйлера, *критической силой* называется сила, требующаяся для самого малого наклона колонны.

Рассмотренная схема работы центрального сжатого стержня носит теоретический характер. На практике приходится считаться с тем, что сжимающая сила может действовать с некоторым эксцентриситетом, а стержень может иметь некоторую (хотя бы и небольшую) начальную кривизну. Поэтому с самого начала продольного нагружения стержня наблюдается его изгиб.

Пока сжимающая сила меньше критической, прогибы стержня будут небольшими, но при приближении значения силы к критическому они начинают неограниченно возрастать (рис. 2.9.2, в).

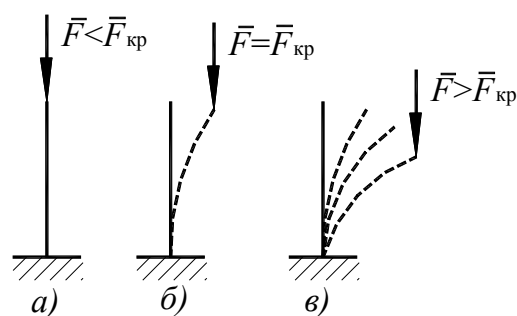


Рис. 2.9.2

Этот критерий (неограниченный рост прогибов при ограниченном росте сжимающей силы) и может быть принят за *критерий потери устойчивости*.

Определив критическую силу, необходимо установить допускаемую нагрузку на сжатый стержень. В целях безопасности *допускаемая нагрузка*, естественно, должна быть меньше критической:

$$F_p = \frac{F_{кр}}{S_{ур}} \quad (2.9.1)$$

где $S_{ур}$ – коэффициент запаса устойчивости.

Величина коэффициента запаса устойчивости принимается такой, чтобы была обеспечена надежная работа стержня. При этом коэффициент запаса устойчивости принимается несколько большим коэффициента безопасности, так как учитываются дополнительные неблагоприятные обстоятельства: начальная кривизна стержня, возможный эксцентриситет действия нагрузки и др. Величина *нормативного* коэффициента запаса устойчивости $S_{ур}$ при расчете строительных конструкций принимается в пределах:

- для стали – от 1,8 до 3,0;
- для чугуна – от 5 до 5,5.

Значения $S_{ур}$, принимаемые при расчете ответственных элементов машиностроительных конструкций принимают большими по сравнению с указанными выше (например, для стальных ходовых винтов металлорежущих станков принимают $S_{ур}=4-5$).

Чтобы лучше учесть конкретные условия работы сжатых стержней, рекомендуется применять не один общий коэффициент запаса устойчивости, а *систему частных коэффициентов*, так же как и при расчете на прочность.

Потеря устойчивости упругого равновесия возможна также при кручении, изгибе и сложных деформациях.

2.9.2. ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА ДЛЯ КРИТИЧЕСКОЙ СИЛЫ

Рассмотрим сжатый стержень в критическом состоянии, когда сжимающая сила достигла критического значения, то есть примем, что стержень слегка изогнут (рис. 2.9.3).

Если моменты инерции относительно двух главных центральных осей поперечного сечения не равны между собой, то продольный изгиб произойдет в плоскости наименьшей жесткости, то есть поперечные сече-

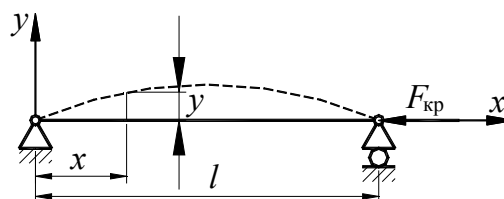


Рис. 2.9.3

ния стержня будут поворачиваться вокруг той оси, относительно которой момент инерции имеет минимальное значение. В этом легко убедиться, сжимая гибкую линейку.

Для изучения продольного изгиба и определения критической силы используем приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки (2.5.85):

$$EJ_{\min} \frac{d^2 y}{dx^2} = \pm M_{\text{и}} \quad (2.9.2)$$

Изгибающий момент относительно центра тяжести сечения B в изогнутом состоянии равен:

$$M_{\text{и}} = -F_{\text{кр}} y. \quad (2.9.3)$$

Знак «минус» берется потому, что стержень изгибается выпуклостью вверх, а ордината y положительна. Если бы стержень изогнулся выпуклостью вниз, то момент был бы положительным, но ординаты y были бы отрицательными, и мы снова получили бы тот же результат (2.9.3).

С учетом (2.9.3) уравнение (2.9.2) принимает вид:

$$EJ_{\min} \frac{d^2 y}{dx^2} = -F_{\text{кр}} y \quad (2.9.4)$$

Обозначая

$$\alpha^2 = \frac{F_{\text{кр}} y}{EJ_{\min}}, \quad (2.9.5)$$

получаем:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \alpha^2 y = 0. \quad (2.9.6)$$

Это линейное дифференциальное уравнение второго порядка. Его общее решение, как известно из математики, имеет вид:

$$y = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x \quad (2.9.7)$$

Здесь A и B – постоянные интегрирования, для определения которых используем известные условия на концах стержня:

- 1) при $x=0$ $y=0$,
- 2) при $x=l$ $y=0$.

Из первого условия получим

$$A = 0.$$

Следовательно, стержень изгибается по синусоиде:

$$y = B \sin \alpha x.$$

Из второго условия получим:

$$B \sin \alpha l = 0.$$

Это соотношение справедливо в двух случаях.

1-й случай.

$$B=0.$$

Но если $A=0$ и $B=0$, то, как следует из уравнения (2.9.5), прогибы стержня равны нулю, что противоречит исходной предпосылке.

2-й случай.

$$\sin \alpha l = 0.$$

Это условие выполняется, когда αl принимает следующий бесконечный ряд значений:

$$\alpha l = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots, n\pi,$$

где n – любое целое число.

Отсюда:

$$\alpha = \frac{n\pi}{l},$$

а так как:

$$\alpha = \sqrt{\frac{F_{\text{кр}}}{EJ_{\text{min}}}},$$

то:

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ_{\text{min}} n^2}{l^2}.$$

Таким образом, получается бесчисленное множество значений критических сил, соответствующих различным формам искривления стержня.

С практической точки зрения интерес представляет лишь наименьшее значение критической силы, при котором происходит потеря устойчивости стержня.

Первый корень $n=0$ не дает решения задачи.

При $n=1$ получаем наименьшее значение критической силы:

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ_{\text{min}}}{l^2} \quad (2.9.8)$$

Уравнение (2.9.8) называется *формулой Эйлера*.

Критической силе, определяемой по формуле (2.9.8), соответствует изгиб стержня по синусоиде с одной полуволной:

$$y = B \sin \frac{\pi}{l} x$$

Следующие корни дают большие значения критической силы, и мы их рассматривать не будем. Им соответствует изгиб стержня по синусоиде с несколькими полуволнами, который получается в том случае, если изгиб по синусоиде с одной полуволной почему-либо невозможен, например, из-за наличия промежуточных связей.

2.9.3. ВЛИЯНИЕ СПОСОБА ЗАКРЕПЛЕНИЯ КОНЦОВ СТЕРЖНЯ НА ВЕЛИЧИНУ КРИТИЧЕСКОЙ СИЛЫ

Чаще всего концы стержня закрепляют одним из четырех способов, показанных на рис. 2.9.4. Второй способ – шарнирное закрепление обоих концов – рассмотрен нами при выводе формулы Эйлера.

При других способах закрепления *обобщенная формула Эйлера* для определения критической нагрузки имеет вид:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(\nu l)^2} \quad (2.9.9)$$

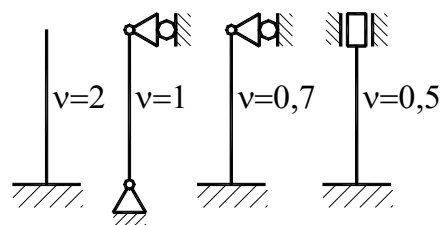


Рис. 2.9.4

где ν – коэффициент приведения длины стержня (коэффициент Ясинского), зависящий от способа закрепления концов стержня (рис. 2.9.4);

$l_{прив} = \nu l$ – приведенная длина стержня.

Как видно из формулы (2.9.9), чем меньше ν , тем больше критическая, а, следовательно, и допускаемая нагрузка стержня. Например, нагрузка стержня, заделанного двумя концами, может быть в 16 раз больше нагрузки стержня, заделанного одним концом. Поэтому там, где возможно, следует осуществлять жесткую заделку обоих концов стержня.

2.9.4. ПРЕДЕЛЫ ПРИМЕНИМОСТИ ФОРМУЛЫ ЭЙЛЕРА

Формулой Эйлера не всегда применима. При ее выводе использовалось дифференциальное уравнение упругой линии, вывод которого основан на законе Гука. Закон Гука справедлив до тех пор, пока напряжения не превосходят *предела пропорциональности*. Чтобы установить пределы применимости формулы Эйлера, определим *критическое напряжение* $\sigma_{кр}$, то есть напряжение, возникающее в поперечном сечении стержня при действии критической нагрузки:

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(\nu l)^2 A} \quad (2.9.10)$$

где A – площадь поперечного сечения стержня.

Но

$$j_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}},$$

где j_{\min} – минимальный радиус инерции поперечного сечения стержня.

Поэтому формулу (2.9.10) можно записать в виде:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{\nu l}{j_{\min}}\right)^2}.$$

Величина $\frac{\nu l}{j_{\min}}$ характеризует влияние размеров стержня и способа закрепления концов: она называется *гибкостью стержня* и обозначается λ . Гибкость λ – величина безразмерная.

Таким образом, обозначая:

$$\lambda = \frac{\nu l}{j_{\min}},$$

получаем:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}.$$

Чтобы можно было пользоваться формулой Эйлера, необходимо, чтобы удовлетворялось следующее условие:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{\pi}, \quad (2.9.11)$$

где σ_{π} – предел пропорциональности материала стержня.

Записывая формулу (2.9.11) относительно гибкости, получаем условие применимости формулы Эйлера в виде:

$$\lambda \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\pi}}}. \quad (2.9.12)$$

Например, для стали Ст. 3:

$$\sigma_{\pi} = 200 \text{ МПа}$$

и

$$\lambda \geq \sqrt{\frac{3,14^2 \times 2 \times 10^5}{200}} = 100.$$

Таким образом, для стержней из малоуглеродистой стали формула Эйлера применима, если их гибкость больше 100.

Аналогичным образом получим условия применимости формулы Эйлера для чугуна: $\lambda > 80$.

Для средне— и высокоуглеродистых, а также для легированных деталей формула Эйлера применима и при гибкости, меньшей указанной. Например, для стержней из хромомолибденовой стали формула Эйлера применима при $\lambda > 70$.

2.9.5. ЭМПИРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КРИТИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ

Если, как это очень часто случается на практике, гибкость стержней будет меньше указанных в разделе 2.9.4 величин, то формула Эйлера становится неприменимой, так как критические напряжения превзойдут предел пропорциональности и закон Гука потеряет силу,

Существуют приближенные теоретические методы определения критических сил при потере устойчивости в неупругой стадии, но их рассмотрение выходит за рамки настоящего курса.

В этих случаях обычно пользуются следующей эмпирической формулой Ясинского, полученной экспериментально:

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda \quad (2.9.13)$$

где a и b – коэффициенты, зависящие от материала.

Для стали Ст. 3 при гибкостях $\lambda=40-100$ коэффициенты a и b могут быть приняты равными:

$$a=310 \text{ МПа}, b=1,14 \text{ МПа}.$$

При гибкостях $\lambda < 40$ стержни можно рассчитывать на прочность без учета опасности продольного изгиба.

2.9.6. ПРАКТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ РАСЧЕТА НА УСТОЙЧИВОСТЬ

Вместо двух формул (Эйлера и Ясинского), каждая из которых пригодна для определенного диапазона гибкостей, удобнее использовать одну формулу для любой гибкости стержня.

Эта практическая формула, широко применяющаяся при расчете строительных конструкций, имеет вид:

$$F_p = \varphi \sigma_{ср} A \quad (2.9.14)$$

где $\sigma_{ср}$ – основное допускаемое напряжение на сжатие;

φ – коэффициент уменьшения основного допускаемого напряжения (или коэффициент продольного изгиба); величина φ зависит от материала и гибкости стержня, его значения приведены в табл. 2.9.1;

A – площадь поперечного сечения стержня.

Таблица 2.9.1

Гибкость λ	φ			
	стали Ст 1, Ст 2, Ст 3, Ст 4	сталь Ст 5	стали повышенного качества $\sigma_T > 320$ МПа	чугун
0	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,93	0,97	0,97

20	0,96	0,95	0,95	0,91
30	0,94	0,92	0,91	0,81
40	0,92	0,89	0,87	0,69
50	0,89	0,86	0,83	0,57
60	0,86	0,82	0,79	0,44
70	0,81	0,76	0,72	0,34
80	0,75	0,70	0,65	0,26
90	0,69	0,62	0,55	0,20
100	0,60	0,51	0,43	0,16
110	0,52	0,43	0,35	-
120	0,45	0,37	0,30	-
130	0,40	0,33	0,26	-
140	0,36	0,29	0,23	-
150	0,32	0,26	0,21	-
160	0,29	0,24	0,19	-
170	0,26	0,21	0,17	-
180	0,23	0,19	0,15	-
190	0,21	0,17	0,14	-
200	0,19	0,16	0,13	-

Величина $\varphi\sigma_{cp}$ может рассматриваться как допускаемое напряжение при расчете на устойчивость, то есть:

$$\sigma_{yp} = \varphi\sigma_{cp}. \quad (2.9.15)$$

Условие прочности сжатых стержней (см. раздел 2.3):

$$\sigma_{cp} = \frac{\sigma_{пр}}{S_p},$$

где $\sigma_{пр}$ – предельное напряжение, принимаемое равным пределу текучести для пластичных материалов и пределу прочности для хрупких материалов.

Связь между коэффициентом φ , критическим напряжением $\sigma_{кр}$, предельным напряжением $\sigma_{пр}$ и коэффициентами безопасности S_p и устойчивости S_{yp} можно установить следующим образом:

$$\sigma_{yp} = \varphi\sigma_{cp} = \frac{\sigma_{кр}}{S_{yp}}, \quad (2.9.16)$$

откуда:

$$\varphi = \frac{\sigma_{кр}}{\sigma_{ср} S_{ур}}. \quad (2.9.17)$$

Используя формулу (2.3.23), получим:

$$\varphi = \frac{\sigma_{кр} S_p}{\sigma_{пр} S_{ур}}. \quad (2.9.18)$$

Для подбора сечения формулу (2.9.14) приводят к следующему виду:

$$A = \frac{F_p}{\varphi \sigma_{ср}}.$$

При этом величиной φ приходится задаваться, так как гибкость λ неизвестна, ибо неизвестна величина площади сечения A , а гибкость зависит от нее. В качестве первого приближения рекомендуется принимать $\varphi_1=0,5$. Затем определяют величины A , J_{\min} , i_{\min} , λ и по таблице находят соответствующее значение φ'_1 . Если получается большая разница между значениями φ_1 и φ'_1 , то следует повторить расчет, задавшись новым значением φ_2 :

$$\varphi_2 = \frac{(\varphi_1 + \varphi'_1)}{2}$$

и т.д., пока различие между последовательными значениями не будет превышать (4-6)%.

Для стержней, сечения которых имеют значительные ослабления (например, от отверстий), кроме расчета на устойчивость должен производиться и обычный расчет на *прочность* по формуле:

$$\sigma = \frac{F}{A_{\text{нетто}}} \leq \sigma_{ср},$$

где $A_{\text{нетто}}$ – рабочая (чистая) площадь сечения стержня.

При расчете на *устойчивость* берется полная площадь сечения $A_{\text{брутто}}$.

В некоторых случаях (например, при расчете элементов машиностроительных конструкций) значения коэффициентов запаса устойчивости $S_{ур}$, предусмотренные при составлении таблиц коэффициентов φ ($S_{ур}=1,8$), недостаточны. В этих случаях расчет следует вести, исходя непосредственно из требуемого коэффициента $S_{ур}$ и пользуясь формулой Эйлера или Ясинского. Так же следует поступать при расчете на устойчивость стержней из материалов, которые не отражены в вышеприведенной таблице коэффициентов φ .

В сопротивлении стержней продольному изгибу основную роль играет гибкость стержня. Поэтому вопрос о форме поперечного сечения

является не менее существенным, чем вопрос о величине площади сечения. Как показывает практика, наиболее выгодными являются кольцевые, а также коробчатые тонкостенные сечения. Сплошные прямоугольные и двутавровые сечения применять нерационально.

Что касается выбора материала, то для стержней *большой* гибкости применять сталь повышенной прочности нецелесообразно. Это следует из того, что в данном случае модуль упругости E является единственной механической характеристикой, определяющей сопротивляемость стержня потере устойчивости [см. формулу (2.9.9)], а для различных сортов стали его величина практически одинакова.

Для стержней *малой* гибкости применение высококачественных сталей оказывается выгодным, так как с увеличением предела текучести повышаются критические напряжения, а, следовательно, и запас устойчивости.

2.10. МЕСТНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

2.10.1. ВИДЫ МЕСТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Изложенные в предыдущих разделах методы расчетов на прочность для различных видов деформаций предполагают определенную схематизацию элементов конструкций и внешней нагрузки. Так, внешняя нагрузка переносится на ось бруса и прикладывается к ней в виде сил и пар. Полученная таким образом нагрузка на ось может, очевидно, соответствовать действительным способам приложения внешних сил к поверхности бруса. Однако распределение напряжений внутри бруса в том и другом случаях будет не везде одинаковым.

При решении практических задач указанной выше схематизацией пользуются весьма широко. Расчетные зависимости позволяют достаточно точно определять основные напряжения в бруске и дают *погрешности* только в тех областях бруса, которые *непосредственно прилегают к месту приложения нагрузок*.

Дополнительные напряжения, накладывающиеся на основные в отмеченных областях, носят название *местных напряжений*.

2.10.2. КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ

Резкое изменение размеров сечения, ослабления его всякого рода отверстиями и выточками также приводят к довольно значительным местным отклонениям от общего закона распределения напряжений. Это явление носит общее название *концентрации напряжений*, а причина, вызвавшая его (отверстие, выточка и т.д.), – *концентратор напряжений*.

Определение напряжений в местах концентрации производится экспериментально или методами теории упругости. Поскольку аналити-

ческое решение указанной задачи довольно сложно и не является предметом данного курса, рассмотрим лишь основные результаты исследований применительно к каждому из основных видов деформаций.

Предварительно остановимся на некоторых понятиях и определениях, встречающихся при расчетах на прочность с учетом концентрации напряжений.

Номинальным называют такое напряжение, которое определяется по общим формулам сопротивления материалов в предположении, что концентрация напряжений отсутствует.

Например, для полосы с отверстием:

$$\sigma = \frac{F}{A}, \quad (2.10.1)$$

где A – площадь ослабленного сечения.

Количественной характеристикой концентрации напряжений является *коэффициент концентрации*.

Различают *теоретический* и *эффективный* коэффициенты концентрации.

Отношение максимального местного напряжения к номинальному называется *теоретическим коэффициентом концентрации напряжений*:

$$\alpha_{\text{к}\sigma} = \frac{\sigma_{\text{max}}}{\sigma}, \quad (2.10.2)$$
$$\alpha_{\text{к}\tau} = \frac{\tau_{\text{max}}}{\tau}.$$

Теоретический коэффициент концентрации напряжений, определяемый в предположении, что для материала при деформации выполняется закон Гука, во многих случаях не дает правильного представления о влиянии концентрации напряжений на прочность детали, так как он зависит только от вида концентратора и его размеров и не учитывает свойств материала.

Опыты показывают, что для большинства материалов снижение прочности при наличии концентрации напряжений получается меньше чем в $\alpha_{\text{к}}$ раз. Это снижение определяется экспериментально, как отношение предела прочности $\sigma_{\text{в}}$ детали без концентрации напряжений к пределу прочности $\sigma_{\text{в.к}}$ детали, имеющей заданный концентратор напряжений:

$$k_{\sigma} = \frac{\sigma_{\text{в}}}{\sigma_{\text{в.к}}}, \quad (2.10.3)$$
$$k_{\tau} = \frac{\tau_{\text{в}}}{\tau_{\text{в.к}}}.$$

Коэффициент k называется *эффективным коэффициентом концентрации напряжений*.

Опыты показывают, что при *статических* нагрузках для деталей из *пластичных* материалов практически $k=1$, то есть для таких нагрузок концентрация напряжений должна учитываться лишь при расчете деталей из *хрупких* или *малопластичных* материалов.

При действии *переменной* нагрузки (расчет на выносливость) концентрация напряжений учитывается для *всех* материалов.

Значения α_k и k приводятся в справочниках.

2.10.2.1. КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ (СЖАТИИ)

На рис. 2.10.1, *а* показана эпюра нормальных растягивающих напряжений в сечении широкой полосы, ослабленном небольшим круглым отверстием, а на рис. 2.10.1, *б* – в сечении, ослабленном полукруглыми выкружками.

Максимальное напряжение у края отверстия σ_{\max}

(рис. 2.10.1, *а*) в три раза больше среднего (номинального), вычисленного по формуле:

$$\sigma = \frac{F}{A}.$$

Для широкой полосы с небольшими полукруглыми ослаблениями по краям максимальное напряжение в два раза больше номинального (рис. 2.10.1, *б*). При этом чем меньше радиус, тем в большей степени максимальные напряжения отличаются от номинальных.

Чтобы уменьшить влияние концентрации напряжений на прочность элементов конструкций, следует по возможности избегать глубоких выточек, выкружек, резких переходов сечений и т.п. Необходимо также стремиться к тщательной обработке поверхностей деталей, особенно изготовленных из высокопрочных закаленных сталей.

2.10.2.2. КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ИЗГИБЕ

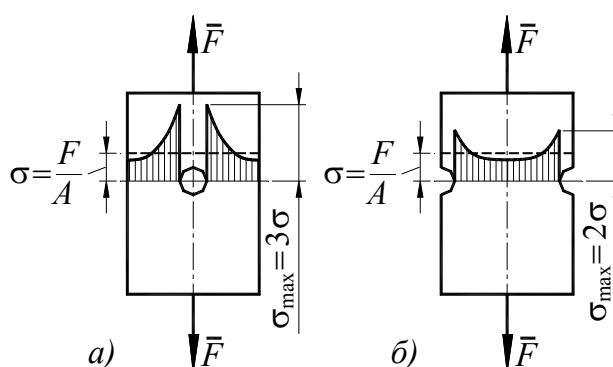


Рис. 2.10.1

В местах резкого изменения формы или размеров поперечных сечений балки наблюдается концентрация напряжений. На рис. 2.10.2 приведены эпюры нормальных напряжений, возникающих в балке при отсутствии концентрации напряжений (рис. 2.10.2, а) и при наличии концентрации (рис. 2.10.2, б).

В последнем случае вследствие резкого изменения сечения в его крайних волокнах действуют максимальные напряжения:

$$\sigma_{\max} = \alpha_{\text{к}\sigma} \sigma_{\text{н}},$$

где $\sigma_{\text{н}} = \frac{M_x}{W_x} = \frac{Fl}{W_x}$ [см. формулу (2.5.25)].

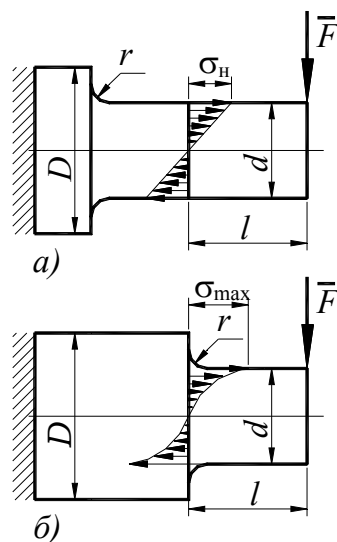


Рис. 2.10.2

Величина *теоретического* коэффициента концентрации напряжений в данном случае зависит от соотношения диаметров d и D сопрягаемых участков балки, а также от радиуса закругления r в месте сопряжения этих участков.

Для определения величины *эффективного* коэффициента концентрации проводят испытания на изгиб специальных образцов. Установив значения временного сопротивления материала образца без концентрации напряжений ($\sigma_{\text{в.и}}$) и с концентрацией ($\sigma_{\text{в.и.к}}$), находят k :

$$k_{\sigma} = \frac{\sigma_{\text{в.и.к}}}{\sigma_{\text{в.и}}}.$$

Чтобы уменьшить концентрацию напряжений в деталях, испытывающих деформацию изгиба, необходимо предусматривать плавные переходы от одного размера сечения к другому, закругления в углах, уменьшение жесткости более массивной части детали в месте перехода, и т.п. Все это приводит к заметному снижению коэффициента концентрации и, следовательно, благоприятно сказывается на прочности деталей.

2.10.2.3. КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ КРУЧЕНИИ

Местное увеличение напряжений при кручении вызывается резким изменением контура поперечного или продольного сечения вала (наличием отверстия, резьбы, выточки, канавки и т.д.).

Как при растяжении или изгибе, величина максимального касательного напряжения в зоне концентрации определяется произведением номинального напряжения $\tau_{\text{н}}$ на коэффициент $\alpha_{\text{к}\tau}$, то есть:

$$\tau_{\max} = \alpha_{\text{к}\tau} \tau_{\text{н}}.$$

Значение τ_H вычисляют для наименьшего сечения по обычным формулам сопротивления материалов. Например, при расчете круглых валов используется зависимость (2.6.9):

$$\tau_{\max} = \frac{T_K}{W_p}, \quad (2.10.4)$$

Рассмотрим концентрацию напряжений у продольных шпоночных пазов. Если шпоночный паз имеет прямоугольное сечение (рис. 2.10.3), то в выступающих углах m касательные напряжения равны нулю, а во входящих углах n напряжения теоретически бесконечно велики (практически же их величина ограничена пределом текучести – если вал изготовлен из пластичного материала).

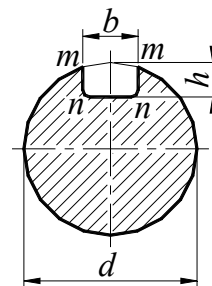


Рис. 2.10.3

Как показали исследования, коэффициент концентрации напряжений для паза при заданных глубине его и размерах вала зависит главным образом от кривизны поверхности по дну паза. Поэтому углы n необходимо скруглять, причем с увеличением радиуса скругления концентрация напряжений будет уменьшаться. Так, с увеличением радиуса от 0,1 до 0,5 глубины паза коэффициент α_K снижается более чем в 2 раза.

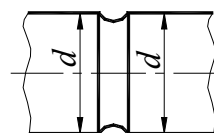


Рис. 2.10.4

Если вал имеет поперечную кольцевую выточку полукруглого сечения с очень малым радиусом (рис. 2.10.4), то касательное напряжение в глубине выточки вдвое больше, чем на поверхности вала без выточки.

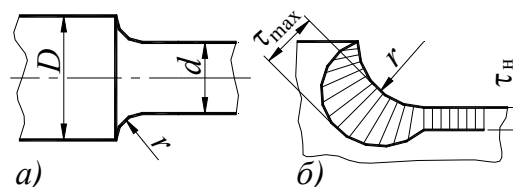


Рис. 2.10.5

На практике часто применяют цилиндрические валы с различными диаметрами на разных участках, причем участки сопрягаются кольцевыми выкружками (рис. 2.10.5, а). При кручении таких валов в начале закругления имеет место высокая концентрация напряжений (эпюра касательных напряжений в зоне концентрации показана на рис. 2.10.5, б). Для случая, когда $\frac{D}{d} = 2$ и $\frac{2r}{d} = 0,04$, величина теоретического коэффициента концентрации $\alpha_K = 2,4$.

Чтобы уменьшить концентрацию напряжений, следует избегать резких изменений контура сечения, применяя в местах ступенчатого изменения диаметра вала переходные кривые возможно большего радиуса. Влияние концентрации напряжений на прочность деталей машин, испытывающих деформацию растяжения (сжатия), изгиба или кручения, проявляется примерно одинаково.

Опыты показывают, что для *пластичных* материалов концентрация напряжений при статических нагрузках не представляет опасности, поскольку за счет текучести в зоне концентрации происходит перераспределение (выравнивание) напряжений. Величина эффективного коэффициента концентрации k в этом случае близка к единице.

Хрупкие материалы, напротив, весьма чувствительны к концентрации напряжений. Например, разрушение при кручении ступенчатого вала, изготовленного из закаленной стали, может произойти и при статической нагрузке, так как вследствие концентрации напряжений в местах перехода двух смежных диаметров возможно появление трещин. Поэтому в расчетах на статическую прочность деталей из хрупких и малопластичных материалов необходимо учитывать концентрацию напряжений, причем для таких материалов эффективный коэффициент концентрации k весьма близок по своему значению к теоретическому α_k .

В случае *динамических* нагрузок концентрация напряжений существенно снижает прочность деталей как из хрупких, так и пластичных материалов, что необходимо учитывать в практических расчетах.

2.10.3. КОНТАКТНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

При взаимном сжатии двух соприкасающихся тел в зоне контакта возникают *местные* напряжения. Вследствие деформации материала в месте соприкосновения возникает *площадка* контакта, по которой и происходит передача давления. Материал вблизи такой площадки, не имея возможности свободно деформироваться, испытывает объемное напряженное состояние. Если *первоначальный* контакт тел происходит в *точке* или по *линии*, то такие напряжения называют *контактными*.

В результате деформации контактирующих тел начальный точечный или линейный контакт переходят в контакт по некоторой малой площадке. Давление, передаваемое от одной детали к другой, распределено по контактной площадке неравномерно.

Определение контактных напряжений и деформаций производится методами теории упругости при следующих *допущениях*:

- а) в зоне контакта возникают только упругие деформации, следующие закону Гука;
- б) линейные размеры площадки контакта малы по сравнению с радиусами кривизны соприкасающихся поверхностей;
- в) силы давления, распределенные по поверхности контакта, нормальны к этим поверхностям;
- г) на поверхности контакта возникают только нормальные напряжения.

Как доказывается в теории упругости, при этих допущениях силы давления распределяются по площадке контакта, имеющей в общем случае форму эллипса. Максимальное давление возникает в центре площадки контакта.

Контактные напряжения играют основную роль при расчете шариковых и роликовых подшипников, зубчатых колес, элементов кулачковых механизмов и т. д.

Ниже приведены (без вывода) некоторые расчетные формулы для частных случаев контактной деформации. Коэффициент Пуассона μ принят равным 0,3.

1. При взаимном давлении *двух упругих шаров* диаметрами d_1 и d_2 (рис. 2.10.6) образуется круглая площадка контакта, радиус которой a может быть определен по формуле:

$$a = 0,698\sqrt[3]{F \frac{d_1 d_2}{d_1 + d_2} \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2}} \quad (2.10.5)$$

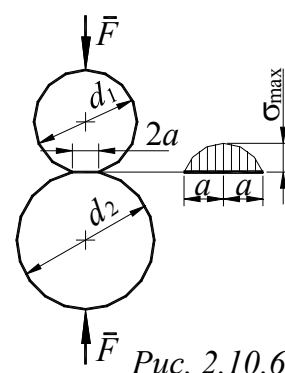


Рис. 2.10.6

Максимальное давление, следовательно, и сжимающее напряжение у поверхности контактирующих тел в центре площадки определяется по формуле:

$$\sigma_{\max} = 0,978\sqrt[3]{F \frac{(d_2 + d_1)^2}{d_1^2 d_2^2} \frac{E_1^2 E_2^2}{(E_1 + E_2)^2}} \quad (2.10.6)$$

Формула (2.10.6) справедлива и для случая, когда *шар* диаметром d_1 *лежит на вогнутой шаровой поверхности* диаметром d_2 (рис. 2.10.7), только в этом случае значение d_2 следует взять с *обратным* знаком. В результате получим:

$$\sigma_{\max} = 0,978\sqrt[3]{F \frac{(d_2 - d_1)^2}{d_1^2 d_2^2} \frac{E_1^2 E_2^2}{(E_1 + E_2)^2}} \quad (2.10.7)$$

По сравнению с предыдущим случаем напряжения получаются меньшими.

В случае давления *шара на плоскость* напряжения определяют по формуле (2.10.6), если принять в ней значение d_2 бесконечно большим:

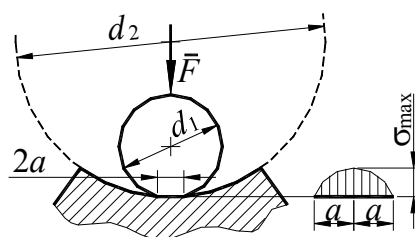


Рис. 2.10.7

$$\sigma_{\max} = 0,9783 \sqrt{F \frac{1}{d^2} \frac{E_1^2 E_2^2}{(E_1 + E_2)^2}} \quad (2.10.8)$$

2. Контакт цилиндрических тел с параллельными образующими бесконечно большой длины (рис. 2.10.8).

При равномерно распределенной нагрузке q площадка касания имеет вид узкого прямоугольника, ширина которого равна:

$$b = 2,15 \sqrt{q \frac{r_1 r_2}{r_2 + r_1} \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2}}. \quad (2.10.9)$$

Максимальное напряжение сжатия определяется по формуле:

$$\sigma_{\max} = 0,418 \sqrt{q \frac{r_2 + r_1}{r_1 r_2} \frac{2E_1 E_2}{E_1 + E_2}}. \quad (2.10.10)$$

В случае давления цилиндра на деталь с вогнутой цилиндрической поверхностью (рис. 2.10.9) значение σ_{\max} определяют по формуле:

$$\sigma_{\max} = 0,418 \sqrt{q \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \frac{2E_1 E_2}{E_1 + E_2}}. \quad (2.10.11)$$

Подставив в формулу (2.10.10) величину $R_2 = \infty$, получим выражение для σ_{\max} в случае взаимного давления цилиндра и детали с плоской поверхностью (рис. 2.10.10):

$$\sigma_{\max} = 0,418 \sqrt{\frac{q}{r_1} \frac{2E_1 E_2}{E_1 + E_2}}. \quad (2.10.12)$$

На основании формул для определения σ_{\max} нетрудно установить, что контактные напряжения не являются линейной функцией нагрузки, с ростом сил они возрастают все медленнее. Это объясняется тем, что с увеличением нагрузки увеличивается и площадка контакта.

Следует обратить внимание на следующее: если размеры площадки контакта окажутся сопоставимыми с величиной радиусов кривизны со-

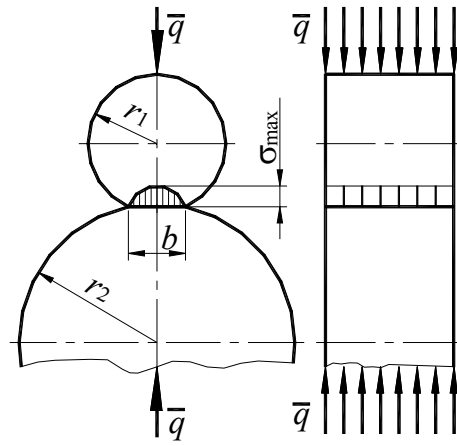


Рис. 2.10.8

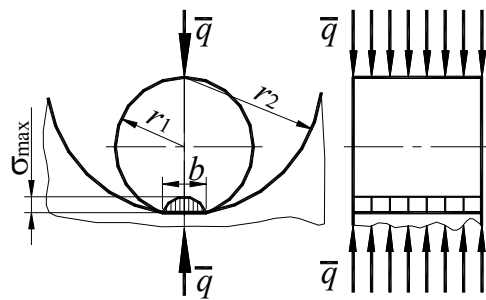


Рис. 2.10.9

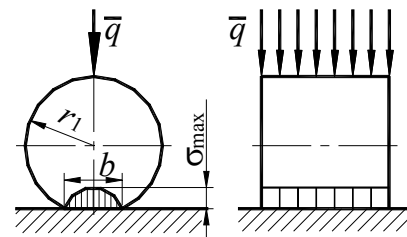


Рис. 2.10.10

прикасающихся поверхностей, то приведенные выше расчетные зависимости применять нельзя.

Если начальный контакт происходит по некоторой *площадке* конечных размеров, то возникающие напряжения называют принято *напряжениями смятия* (рис. 2.10.11).

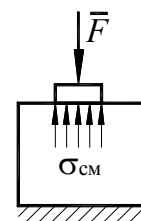


Рис. 2.10.11

Аналогичная картина имеет место при контакте между поверхности тела болта или заклепки и цилиндрической поверхности отверстия. В этом случае обычно принимают, что напряжения *смятия* распределены по площадке контакта (смятия) равномерно.

Учитывая указанное допущение, получим следующую формулу для определения напряжения смятия:

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{F}{A_{\text{см}}}, \quad (2.10.13)$$

где $A_{\text{см}}$ — площадь смятия.

Уравнение прочности при смятии:

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{F}{A_{\text{см}}} \leq \sigma_{\text{см} p}, \quad (2.10.14)$$

На основании опытных данных в расчетах на прочность допускаемые напряжения на смятие принимают в 2-2,5 раза больше допускаемых напряжений на обычное сжатие:

$$\sigma_{\text{см} p} = (2 - 2,5) \sigma_{\text{сж}}. \quad (2.10.15)$$

Усталостное выкрашивание является наиболее распространенным видом повреждения рабочих поверхностей зубьев колес, дорожек качения подшипников и др. Этот вид разрушения происходит при одновременном наличии двух условий:

- относительное *качение* контактирующих *сжатых* тел происходит с их относительным *проскальзыванием*;
- наличие *жидкой* смазки в зоне контакта.

Рассмотрим контакт двух тел, удовлетворяющий вышеуказанным условиям (рис. 2.10.12).

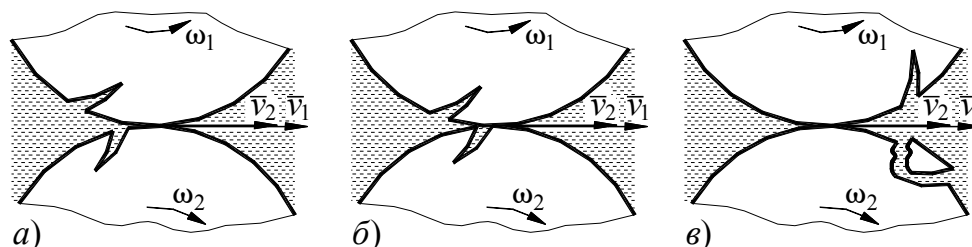


Рис. 2.10.12

Линейная скорость тела 1 в точке контакта несколько больше линейной скорости тела 2, т.е. соблюдается условие:

$$v_1 > v_2. \quad (2.10.16)$$

Для этого случая поверхность 1 является *опережающей* в относительном движении, а поверхность 2 – *отстающей*.

Под действием переменных сил трения первоначальные трещины ориентируются относительно поверхности так, как показано на рис. 2.10.12, а.

На *опережающем* теле 1 трещины ориентированы так, что в зоне наибольших контактных давлений масло из трещины выдавливается и роста трещины не происходит.

На *отстающем* теле 2 трещины ориентируются неблагоприятно. При встрече с сопряженной поверхностью края трещины соединяются и это препятствует истечению масла из трещины. В результате давление в трещине резко возрастает (рис. 2.10.12, б). Этим обусловлено расклинивающее действие, способствующее постепенному развитию трещины и выходу ее на поверхность (выламывание частичек металла) (рис. 2.10.12, в).

Из рассмотренного очевидно, что в большей степени контактному выкрашиванию подвержена *отстающая* в относительном движении поверхность.

Выкрашивание металла с поверхности контактирующих деталей может носить *ограниченный* или *прогрессирующий* характер.

Ограниченное выкрашивание возникает на деталях тогда, когда из-за погрешностей изготовления или монтажа нагрузка первоначально концентрируется только на отдельных участках площадки контакта. В результате начального выкрашивания, локального пластического деформирования и т. п. общая поверхность контакта возрастает, концентрация нагрузки уменьшается и усталостное выкрашивание прекращается.

Если выкрашивание начинается при *нормальном* прилегании контактирующих поверхностей, то оно обычно оказывается *прогрессирующим*.

Контактная усталость деталей определяется:

- физико-механическими свойствами материалов;
- скоростью смещения (качения, скольжения);
- режимом нагружения;
- шероховатостью поверхностей;
- характеристиками и способом подачи смазки в зону контакта и др.

Наиболее существенное влияние на контактную прочность деталей оказывает *твердость поверхностей контакта*. Установлено, что пределы выносливости деталей из различных материалов прямо пропорциональны твердости рабочих поверхностей, т.е.:

$$\sigma_{H \text{ lim}} = C_B \cdot HB; \quad (2.10.17)$$

$$\sigma_{H \text{ lim}} = C_R \cdot HRC, \quad (2.10.18)$$

где C_B и C_R – коэффициенты, зависящие от материала и термообработки;

HB и HRC – твердости соответственно по Бринеллю и по Роквеллу.

Для повышения контактной выносливости необходимо, в первую очередь, увеличивать твердость поверхностей контактирующих деталей (в большей степени для отстающих поверхностей).

2.11. ПРОЧНОСТЬ МАТЕРИАЛОВ ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ

2.11.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ОБ УСТАЛОСТНОЙ ПРОЧНОСТИ

Ранее были рассмотрены вопросы, связанные с расчетом на прочность упругих элементов конструкций, испытывающих действие *статических* нагрузок. При этом считалось, что прочность элементов будет обеспечена, если максимальные напряжения в их опасных сечениях не превышают предельных значений.

Однако, в случае действия на элементы конструкций нагрузок, *периодически изменяющихся во времени* по величине или по величине и направлению, разрушение материала происходит при напряжениях, значительно меньших предельных значений. С подобными действиями нагрузок встречаются при расчетах движущихся элементов машин и механизмов.

Нагрузки, вызывающие появление в поперечных сечениях периодически изменяющихся напряжений, называют *циклическими* нагрузками.

Совокупность всех значений напряжений за время одного периода их изменения носит название *цикла напряжений*.

Частота изменения напряжений характеризуется числом циклов в единицу времени, а продолжительность цикла во времени определяет *период цикла*.

Характер разрушения материала от воздействия на него циклических нагрузок существенно отличается от характера разрушения при статических нагрузках. Разрушение начинается обычно с образования *микротрещин*, которые прогрессивно развиваются вглубь материала, уменьшая тем самым площадь поперечного сечения детали. Разрушение всегда происходит внезапно, после того как площадь сечения сократится настолько, что не может выдержать заданной нагрузки. На поверхности излома всегда можно видеть две характерные зоны: зону постепенного разрушения от

развития трещин (с гладкой поверхностью) и зону внезапного разрушения (имеющую вид крупнозернистого хрупкого излома).

Накопление необратимых механических изменений в материале при приложении циклических нагрузок называют *усталостью*, а разрушение в результате постепенного развития трещины – *усталостным разрушением*.

Способность материала воспринимать многократное действие переменных напряжений без разрушения носит название *выносливости*, или *циклической прочности*.

Максимальные переменные напряжения, при которых материал способен сопротивляться, не разрушаясь, при любом произвольно большом числе циклов нагружения, называют *пределом выносливости*.

Законы изменения переменных напряжений могут быть самыми разнообразными. На рис. 2.11.1 приведена кривая изменения во времени нормальных напряжений в коленчатом валу дизельного двигателя за один оборот. Напряжения изменяются по очень сложному закону, но имеют периодический (циклический) характер.

Влияние формы кривой изменения напряжений на усталостную прочность деталей изучено недостаточно,

но имеющиеся данные позволяют считать, что это влияние невелико, а решающую роль играют значения максимального и минимального напряжения цикла и их отношение. Поэтому в дальнейшем будет предполагать, что изменение напряжений во времени происходит по закону, близкому к *синусоиде* (рис. 2.11.2).

Цикл переменных напряжений характеризуется:

- максимальным по алгебраической величине напряжением σ_{\max} ;
- минимальным по алгебраической величине напряжением σ_{\min} ;

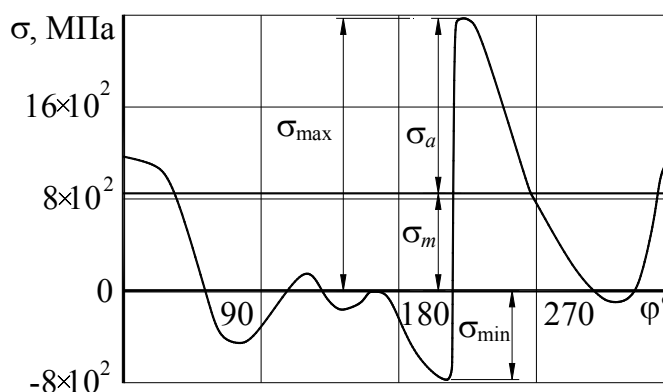


Рис. 2.11.1

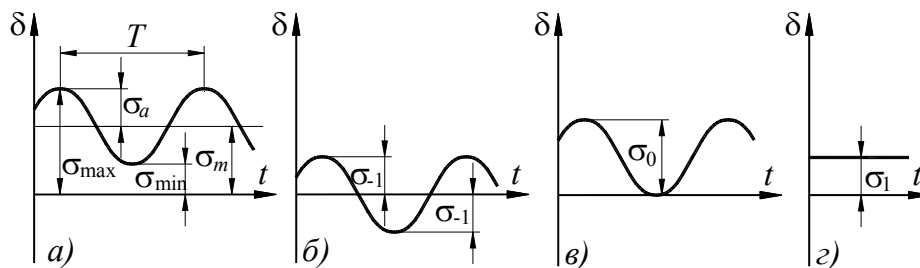


Рис. 2.11.2

— средним напряжением σ_m (постоянной во времени (статической) составляющей цикла (положительной или отрицательной));

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}, \quad (2.11.1)$$

— амплитудой цикла (наибольшим (положительным) значением переменной составляющей цикла напряжений);

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}, \quad (2.11.2)$$

— коэффициентом асимметрии цикла:

$$r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} \quad (2.11.3)$$

Циклы, имеющие одинаковые значения r , называют *подобными*.

Из формул (2.11.1), (2.11.2), а также из рис. 2.11.2 очевидно, что:

$$\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a; \quad (2.11.4)$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_m - \sigma_a. \quad (2.11.5)$$

Если:

$$\sigma_{\max} = -\sigma_{\min},$$

то такой цикл напряжений называется *симметричным* (рис. 2.11.2, б).

Для *симметричного* цикла:

$$\sigma_m = 0,$$

$$\sigma_a = \sigma_{-1},$$

$$r = -1.$$

Цикл напряжений, показанный на рис. 2.11.2, в, называют *отнулевым* или *пульсирующим*. Для этого случая:

$$\sigma_{\max} = \sigma_0, \quad \sigma_{\min} = 0,$$

$$\sigma_m = \sigma_a = \frac{\sigma_0}{2}, \quad r = 0.$$

Постоянное статическое напряжение (рис. 2.11.2, г) можно рассматривать как частный случай переменного цикла с характеристиками:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\min} = \sigma_m = \sigma_1,$$

$$\sigma_a = \sigma_1, r = 1.$$

Любой *асимметричный* цикл переменных напряжений можно представить как сумму *симметричного* цикла с максимальным напряжением, равным амплитуде заданного цикла, и *постоянного* напряжения, равного среднему напряжению заданного цикла (рис. 2.11.2, а).

Из рассмотренных циклов напряжений наиболее опасным является *симметричный* цикл, поскольку именно для него предел выносливости имеет минимальное значение.

В случае переменных касательных напряжений остаются в силе все приведенные здесь термины и соотношения, с заменой σ на τ .

2.11.2. ПРЕДЕЛ ВЫНОСЛИВОСТИ ПРИ СИММЕТРИЧНОМ ЦИКЛЕ. ДИАГРАММА ПРЕДЕЛОВ ВЫНОСЛИВОСТИ

Величину предела выносливости при симметричном цикле определяют на основании опытных данных. Для этого испытывают серию одинаковых образцов, каждый из которых подвергают действию переменных напряжений. Целью испытаний является определение числа циклов N , при котором разрушается каждый образец. Кривую, построенную по экспериментальным данным в координатах (σ_{\max}, N) , называют *кривой выносливости* (рис. 2.11.3).

Для большинства металлов характерной особенностью кривой выносливости является наличие горизонтальной асимптоты. Последняя является следствием того, что при некотором значении наибольшего напряжения цикла образец может выдержать теоретически бесконечно большое число циклов нагружения.

Это напряжение, как отмечалось, носит название *предела выносливости* и обозначается в общем случае σ_r , где r — коэффициент асимметрии цикла.

При *симметричном* цикле $r = -1$, а потому $\sigma_r = \sigma_{-1}$.

Для *черных* металлов за предел выносливости принимают то предельное значение наибольшего напряжения, при котором не происходит разрушения после прохождения 10^7 циклов. Это число циклов называют *базовым* и обозначают, как N_0 .

Для *цветных* металлов и для *закаленных* сталей не удастся установить такое число циклов, выдержав которое, образец не разрушился бы

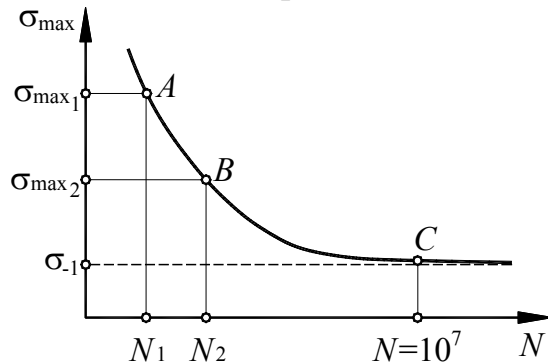


Рис. 2.11.3

в дальнейшем. Для этих случаев введено понятие *предела ограниченной выносливости*, как наибольшего по величине максимального напряжения цикла, при котором образец способен выдержать определенное число циклов (обычно $N=10^8$).

Число циклов, выдерживаемых образцом до разрушения при напряжениях, превышающих предел выносливости, определяет его *долговечность*.

Экспериментально установлено, что между пределами выносливости при изгибе (σ_{-1}), кручении (τ_{-1}) и растяжении-сжатии (σ_{-1p}) в случае симметричных циклов имеют место для некоторых материалов определенные соотношения.

Примерные их значения следующие:

при *растяжении-сжатии*:

$$\sigma_{-1p} = 0,7\sigma_{-1} \text{ (для сталей)}$$

$$\sigma_{-1p} = 0,65\sigma_{-1} \text{ (для чугуна);}$$

при *кручении*:

$$\tau_{-1} = 0,55\sigma_{-1} = 0,55\sigma_{-1} \text{ (для сталей и легких сплавов)}$$

$$\tau_{-1} = 0,8\sigma_{-1} \text{ (для чугуна).}$$

Зная величину временного сопротивления σ_B , можно найти приближенные значения предела выносливости σ_{-1} по следующим эмпирическим соотношениям:

$$\text{для углеродистой стали } \sigma_{-1} = (0,40-0,45)\sigma_B;$$

$$\text{для легированной стали } \sigma_{-1} = (0,40-0,45)\sigma_B + (70-80) \text{ Н/мм}^2;$$

$$\text{для чугуна } \sigma_{-1} = 0,4\sigma_B;$$

$$\text{для цветных металлов } \sigma_{-1} = (0,24-0,50)\sigma_B;$$

У большинства металлов предел выносливости при симметричном цикле ниже предела упругости; только для мягкого железа и красной меди он оказывается выше.

2.11.3. ДИАГРАММА ПРЕДЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Для полной характеристики усталостной прочности материала необходимо иметь данные о его пределах выносливости при различных циклах напряжений.

Экспериментальные исследования показывают, что значительное влияние на величину предела выносливости оказывает *асимметрия цикла*. *Наименьшее* значение предел выносливости имеет при *симметричном* цикле напряжений и *наибольшее* – при *постоянном*. В последнем случае величина предела выносливости равна пределу прочности.

Циклы напряжений, у которых наибольшее напряжение равно пределу выносливости, называют *предельными*.

Для определения предела выносливости при действии напряжений с *асимметричными* циклами строятся диаграммы различных типов. Наиболее распространенной из них являются – *диаграмма предельных напряжений* в координатах $\sigma_{\max} - \sigma_m$ (диаграмма *Смита*) (рис. 2.11.4), в которой *предельное напряжение* цикла, соответствующее пределу выносливости, откладывается по *вертикальной оси*, *среднее напряжение* – по *горизонтальной оси*.

Вначале на ось σ_{\max} наносится точка *C*, ордината которой представляет собой предел выносливости при симметричном цикле σ_{-1} (при симметричном цикле среднее напряжение σ_m равно нулю). Затем экспериментально определяют предел выносливости для какой-нибудь асимметричной нагрузки, например для отнулевой, у которой максимальное напряжение σ_{\max} всегда в два раза больше среднего σ_m .

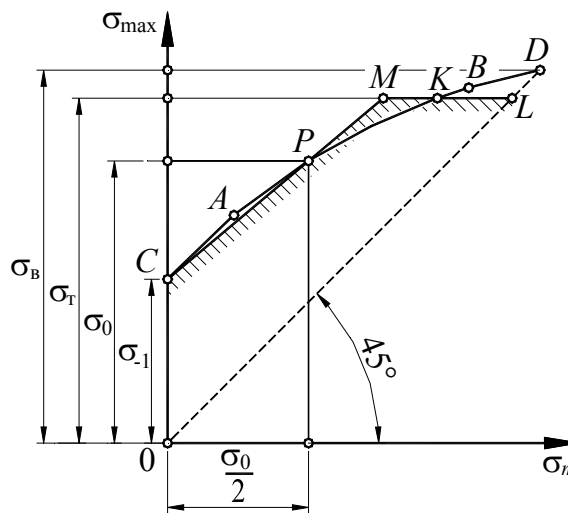


Рис. 2.11.4

На диаграмму нанесем точку *P*, ордината которой представляет собой предел выносливости для отнулевого цикла σ_0 . Для многих материалов значения σ_{-1} и σ_0 определены и приводятся в справочниках.

Аналогично опытным путем определяют предел выносливости для асимметричных циклов с другими параметрами.

Результаты наносят на диаграмму в виде точек *A*, *B* и т.д., ординаты которых есть пределы выносливости для соответствующих циклов напряжений. Точка *D*, лежащая одновременно и на биссектрисе *OD*, характеризует предельное напряжение (предел прочности) для постоянной нагрузки, у которой $\sigma_{\max} = \sigma_m$.

Так как для пластичных материалов опасным напряжением является также предел текучести σ_T , то на диаграмме наносится горизонтальная линия *KL*, ордината которой равна σ_T . (Для пластичных материалов, диаграмма растяжения которых не имеет площадки текучести, роль σ_T играет условный предел текучести $\sigma_{0,2}$.) Следовательно, диаграмма предельных напряжений окончательно имеет вид *SAPKL*.

Обычно эту диаграмму упрощают, заменяя ее двумя прямыми CM и ML , причем прямую CM проводят через точку C (соответствующую симметричному циклу) и точку P (соответствующую отнулевому циклу).

Указанный способ схематизации диаграммы предельных напряжений предложен С.В.Серенсенем и Р.С.Кинасошвили.

В этом случае в пределах прямой CM предельное напряжение цикла (предел выносливости) выражается уравнением:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{-1} + \frac{\sigma_0 - \sigma_{-1}}{\frac{\sigma_0}{2}} \sigma_m = \sigma_{-1} + (1 - \psi_\sigma) \sigma_m \quad (2.11.6)$$

или

$$\sigma_a = \sigma_{\max} - \sigma_m = \sigma_{-1} + \psi_\sigma \sigma_m, \quad (2.11.7)$$

где

$$\psi_\sigma = \frac{(2\sigma_{-1} - \sigma_0)}{\sigma_0}. \quad (2.11.8)$$

Аналогично:

$$\tau_{\max} = \tau_{-1} + \frac{\tau_0 - \tau_{-1}}{\frac{\tau_0}{2}} \tau_m = \tau_{-1} + (1 - \psi_\tau) \tau_m \quad (2.11.9)$$

или

$$\tau_a = \tau_{\max} - \tau_m = \tau_{-1} + \psi_\tau \tau_m, \quad (2.11.10)$$

где

$$\psi_\tau = \frac{(2\tau_{-1} - \tau_0)}{\tau_0}. \quad (2.11.11)$$

Коэффициенты ψ_σ и ψ_τ характеризует чувствительность материала к асимметрии цикла. Значения ψ_σ и ψ_τ приведены в нижеприведенной таблице 2.11.1.

Таблица 2.11.1

Коэффициенты	σ_B , МПа				
	320-420	400-500	600-750	700-1050	1050-1250
ψ_σ (изгиб, растяжение, сжатие)	0	0	0,05	0,10	0,20
ψ_τ (кручение)	0	0	0	0,05	0,10

2.11.4. ФАКТОРЫ, ВЛИЯЮЩИЕ НА ВЕЛИЧИНУ ПРЕДЕЛА ВЫНОСЛИВОСТИ

На выносливость элементов конструкций, находящихся в реальных условиях эксплуатации, влияет ряд факторов, которые при обычном статическом расчете не играют существенной роли. Опыт показывает, что на величину предела выносливости существенно влияют следующие факторы:

- концентрация напряжений,
- размеры деталей,
- состояние поверхности,
- характер технологической обработки и др.

2.11.4.1. ВЛИЯНИЕ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ

В местах резкого изменения поперечных размеров детали, у отверстий, надрезов, выточек и т.п. возникает, как известно, местное повышение напряжений, снижающее предел выносливости по сравнению с таковым для гладких цилиндрических образцов. Это снижение учитывается *эффективным коэффициентом концентрации напряжений* k , который определяется *экспериментальным* путем. Указанный коэффициент представляет собой отношение предела выносливости гладкого образца при симметричном цикле к пределу выносливости образца тех же размеров, но имеющего тот или иной концентратор напряжений:

для *нормальных* напряжений:

$$k_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1к}} \quad (2.11.12)$$

для *касательных* напряжений:

$$k_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\tau_{-1к}} \quad (2.11.13)$$

Значения k_{σ} и k_{τ} приводятся в справочниках.

В тех случаях, когда экспериментальные данные по определению эффективного коэффициента концентрации напряжений отсутствуют, а известны значения теоретического коэффициента концентрации напряжений, можно использовать для определения k_{σ} и k_{τ} следующие эмпирические формулы:

$$k_{\sigma} = 1 + q_{\sigma} (\alpha_{\sigma} - 1) \quad (2.11.14)$$

$$k_{\tau} = 1 + q_{\tau} (\alpha_{\tau} - 1) \quad (2.11.15)$$

где q_{σ} , q_{τ} — коэффициенты чувствительности материала к местным напряжениям.

Для конструкционных сталей в среднем величина q_σ равна 0,6–0,8. Более подробные данные о величине коэффициента чувствительности материала к местным напряжениям для стали приведены в справочниках.

Значения теоретических коэффициентов α_σ и α_τ определяются либо теоретически (методом теории упругости), либо экспериментально путем сравнения пределов прочности образцов без концентрации напряжений и для образцов с концентрацией напряжений.

2.11.4.2. ВЛИЯНИЕ РАЗМЕРОВ ДЕТАЛЕЙ

Экспериментально установлено, что с увеличением размеров испытуемого образца предел выносливости его понижается.

Это объясняется тем, что:

- на образцах больших размеров более вероятны дефекты материала,
- при изготовлении малых образцов имеет место упрочнение (наклеп) поверхностного слоя на относительно большую глубину, чем у образцов больших размеров.

Влияние размеров деталей на величину предела выносливости учитывается коэффициентом ε , представляющим собой отношение предела выносливости детали заданных размеров (диаметром d) к пределу выносливости лабораторного образца подобной конфигурации, имеющего малые размеры ($d_0=6-12$ мм). Это отношение называют *коэффициентом влияния абсолютных размеров сечения* или *масштабным фактором*.

Для *нормальных* напряжений:

$$\varepsilon_\sigma = \frac{(\sigma_{-1})_d}{(\sigma_{-1})_{d_0}}; \quad (2.11.16)$$

Для *касательных* напряжений:

$$\varepsilon_\tau = \frac{(\tau_{-1})_d}{(\tau_{-1})_{d_0}}. \quad (2.11.17)$$

Масштабные коэффициенты можно определять и на образцах с концентрацией напряжений.

Коэффициенты влияния абсолютных размеров сечения могут определяться и на образцах *с концентрацией напряжений*. В этом случае:

для *нормальных* напряжений:

$$\varepsilon_{\sigma_k} = \frac{(\sigma_{-1k})_d}{(\sigma_{-1k})_{d_0}}; \quad (2.11.18)$$

для *касательных* напряжений:

$$\varepsilon_{\tau k} = \frac{(\tau_{-1k})_d}{(\tau_{-1k})_{d_0}}. \quad (2.11.19)$$

При этом как деталь размером d , так и образец размером d_0 должны иметь геометрически подобную конфигурацию. Данные о значениях ε_{σ} приведены в справочниках. Из-за отсутствия достаточного количества экспериментальных данных о коэффициентах ε_{τ} (при кручении) можно приближенно принимать, что $\varepsilon_{\tau} \approx \varepsilon_{\sigma}$.

2.11.4.3. ВЛИЯНИЕ СОСТОЯНИЯ ПОВЕРХНОСТИ

Состояние поверхности деталей зависит от качества механической обработки. Так как разрушение материала от периодически изменяющихся нагрузок начинается с образования на поверхности микроскопических трещин, то очевидно, что их образованию способствует наличие на поверхности острых рисок и царапин. Последнее приводит, естественно, к уменьшению предела выносливости материала.

Для оценки влияния качества поверхности на предел выносливости вводится *коэффициент состояния поверхности* β , равный отношению предела выносливости детали с данной обработкой поверхности к пределу выносливости тщательно полированного образца:

для *нормальных* напряжений:

$$\beta_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1п}}{\sigma_{-1}}, \quad (2.11.20)$$

для *касательных* напряжений:

$$\beta_{\tau} = \frac{\tau_{-1п}}{\tau_{-1}}. \quad (2.11.21)$$

В справочной литературе приведены графики значений β в зависимости от предела прочности σ_b стали и способа упрочнения поверхностного слоя.

2.11.4.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛА ВЫНОСЛИВОСТИ ПРИ СИММЕТРИЧНОМ ЦИКЛЕ

Учитывая изложенное выше, общий коэффициент изменения предела выносливости при симметричном цикле можно записать как:

для *нормальных* напряжений:

$$k_{\sigma-1} = \frac{k_{\sigma}}{\sigma_{\sigma}\beta_{\sigma}}, \quad (2.11.22)$$

для касательных напряжений:

$$k_{\tau-1} = \frac{k_{\tau}}{\sigma_{\tau}\beta_{\tau}}. \quad (2.11.23)$$

Действительные пределы выносливости реальной детали вычисляются по формулам:

для нормальных напряжений:

$$(\sigma_{-1k})_d = \frac{\sigma_{-1}}{k_{\sigma-1}} = \frac{\sigma_{-1}\varepsilon_{\sigma}\beta_{\sigma}}{k_{\sigma}}, \quad (2.11.24)$$

для касательных напряжений:

$$(\tau_{-1k})_d = \frac{\tau_{-1}}{k_{\tau-1}} = \frac{\tau_{-1}\varepsilon_{\tau}\beta_{\tau}}{k_{\tau}}. \quad (2.11.25)$$

2.11.5. РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ

Расчет элементов конструкций, находящихся под действием переменных нагрузок, обычно начинают со *статического* расчета, целью которого является *предварительное определение размеров*. Только после этого проводят *проверочный* расчет на выносливость, в результате которого определяют *фактический коэффициент безопасности*.

Коэффициент безопасности при *симметричном* цикле характеризуется отношением действительного предела выносливости детали к максимальному напряжению цикла σ_a :

для нормальных напряжений:

$$S_{\sigma} = \frac{(\sigma_{-1k})_d}{\sigma_a}; \quad (2.11.26)$$

для касательных напряжений:

$$S_{\tau} = \frac{(\tau_{-1k})_d}{\tau_a}. \quad (2.11.27)$$

При *сложном* напряженном состоянии коэффициент безопасности вычисляется обычно по формуле (2.7.62):

$$S = \frac{S_{\sigma}S_{\tau}}{\sqrt{S_{\sigma}^2 + S_{\tau}^2}}, \quad (2.11.28)$$

где S_{σ} и S_{τ} определяют по формулам (2.11.26) и (2.11.27).

Для определения коэффициента безопасности при *несимметричных* циклах в случае любого вида нагружения (изгиба, растяжения-сжатия, кручения) можно воспользоваться следующими зависимостями:

для *нормальных* напряжений:

$$S_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{K_{\sigma}\sigma_a}{\varepsilon_{\sigma}\beta_{\sigma}} + \psi_{\sigma}\sigma_m}; \quad (2.11.29)$$

для *касательных* напряжений:

$$S_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\frac{K_{\tau}\tau_a}{\varepsilon_{\tau}\beta_{\tau}} + \psi_{\tau}\tau_m}. \quad (2.11.30)$$

В уравнениях (2.11.29) и (2.11.30):

ψ_{σ} — коэффициент, характеризующий чувствительность материала к асимметрии цикла по *нормальным* напряжениям;

ψ_{τ} — коэффициент, характеризующий чувствительность материала к асимметрии цикла по *касательным* напряжениям.

Значения ψ_{σ} и ψ_{τ} приводятся в справочниках.

При *сложном* напряженном состоянии коэффициент безопасности вычисляется по формуле (2.11.28).

Определив коэффициент безопасности по сопротивлению *усталости*, необходимо сравнить его с коэффициентом безопасности по сопротивлению *пластическим* деформациям, которые определяются по формулам:

для *нормальных* напряжений:

$$S_{\sigma} = \frac{\sigma_T}{\sigma_{\max}} = \frac{\sigma_T}{\sigma_a + \sigma_m}, \quad (2.11.31)$$

для *касательных* напряжений:

$$S_{\tau} = \frac{\tau_T}{\tau_{\max}} = \frac{\tau_T}{\tau_a + \tau_m}, \quad (2.11.32)$$

При *сложном* напряженном состоянии коэффициент безопасности вычислить по формуле (2.11.28).

Прочность рассчитываемой детали оценивают по *наименьшему* из коэффициентов безопасности, полученных при расчетах по сопротивлению *усталости* и по сопротивлению *пластическим* деформациям.