

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования  
«ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

---

**В.В.Гурин, В.М.Замятин, А.М.Попов**

# **МЕХАНИКА**

Издательство  
Томского политехнического университета  
2010

УДК 621.81

ББК

Г95

**Гурин В.В.**

Г95       Механика: учеб. для вузов / В.В.Гурин, В.М.Замятин, А.М.Попов.— Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2010. — 581 с., ил.

Изложены теоретические основы анализа и синтеза механизмов, принципов их геометрического и прочностного расчетов.

Учебник условно разбит на пять разделов.

В первом из них рассмотрены общие вопросы теории механизмов.

Второй раздел посвящен основам сопротивления материалов – науке о прочности и жесткости инженерных конструкций.

В третьем разделе рассмотрены основы взаимозаменяемости.

В четвертом разделе расчеты и проектирование наиболее распространенных передаточных механизмов.

В пятом разделе основное внимание уделено прочностным расчетам деталей машин общего назначения.

Подготовлен на кафедре теоретической и прикладной механики Томского политехнического университета и кафедре прикладной механики Кемеровского технологического института пищевой промышленности, предназначен для студентов машиностроительных специальностей технических вузов.

УДК 621.81

ББК

Рекомендован к печати Редакционно-издательским советом  
Томского политехнического университета.

*Рецензенты:*

ISBN 0-00000-000-0

© Гурин В.В., Замятин В.В., Попов А.М., 2010

© Томский политехнический университет, 2010

© Оформление. Издательство Томского  
политехнического университета, 2010

## МЕСТО И ЗНАЧЕНИЕ КУРСА «МЕХАНИКА» В РЯДУ ОБЩЕИНЖЕНЕРНЫХ ДИСЦИПЛИН. ЗАДАЧИ КУРСА

Среди средств, обеспечивающих технологические процессы, важнейшая роль принадлежит машинам. В настоящее время нет такой отрасли, в которой машины не использовались бы в самых широких масштабах. Однако конкретные виды машин с развитием техники меняются. В настоящее время разработаны классификации машин, дающие возможность не только разобраться в огромном количестве уже находящихся в эксплуатации машин, но и прогнозировать машины будущего. Знание общих закономерностей процесса новых создания и модернизации существующих машин совершенно необходимо каждому современному инженеру, чтобы оптимально решать вопросы технологии, механизации и автоматизации производственных процессов. Инженер должен знать не только общие принципы устройства механизмов, но и принципы их расчетов и проектирования.

Комплекс указанных вопросов в той степени, в которой они необходимы инженерам немашиностроительных профилей, рассмотрен в данном учебнике, предназначенном для студентов технических вузов при изучении курса «Механика».

Курс состоит из пяти разделов.

В *первом* из них рассмотрены общие вопросы *теории механизмов*.

*Второй* раздел посвящен *основам сопротивления материалов* – науке о прочности и жесткости инженерных конструкций.

В *третьем* разделе рассмотрены *основы взаимозаменяемости*.

В *четвертом* разделе в рассмотрены расчеты и проектирование наиболее распространенных *передаточных механизмов*.

В *пятом* разделе основное внимание уделено прочностным расчетам *деталей машин*, базирующимся на методах сопротивления материалов и являющимся основой современного машиностроения.

Все разделы, тесно взаимосвязаны между собой и играют чрезвычайно большую роль в формировании современного инженера.

В зависимости от конкретной программы соответствующие части курса могут быть сокращены. Например, будущим инженерам-технологам не нужно изучать специфические детали приборных систем. Для студентов других специальностей, наоборот, знакомство с этими деталями может оказаться необходимым.

Таким образом, студент, пользующийся данным учебником, может выбрать тот материал, который соответствует программе изучаемого им курса.

# 1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ МЕХАНИЗМОВ

## 1.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

В разделе «Основы теории механизмов», структурно являющимся первой частью курса «Теория механизмов и машин и детали машин», изучается структура, кинематика и динамика механизмов независимо от их конкретного применения.

Раздел начинается с рассмотрения положений *общей* механики, применяемых при изучении механических систем, предназначенных для *преобразования движения* одного или нескольких тел в требуемые движения других тел в соответствии с функциями того устройства, основой которого является эта система и называемых *механизмами*. Главное *назначение* механизма – осуществление *технической операции в результате движения его элементов*. *Определенность движения* механизма может обеспечиваться *кинематическими* (конструктивными) средствами (механизмы с *полными* связями) или средствами *динамики* (механизмы с *неполными* связями). К механизмам с полными связями относится, например, механизм двигателя внутреннего сгорания, к механизмам с неполными связями – механизм вибрационного конвейера.

*Машиной* называют искусственное устройство, *выполняющее механические движения для преобразования энергии, материалов и информации*. При помощи машин различные формы движения (механическое движение, электричество, тепловая энергия) используются для облегчения физического и умственного труда человека, увеличения его производительности и расширения производственных возможностей. Использование какой-либо формы движения и совершение некоторой полезной работы являются *признаками* машины. Этим машина отличается от *сооружений и приборов*.

*Сооружение* – строительная конструкция, которая в идеальном случае должна представлять собой *неизменяемую* систему (ферму, раму и т.д.).

*Прибор* – устройство для *регистрации* параметров физических процессов, осуществления технических измерений и т.п., но *не для совершения работы* (часы, манометр, электроизмерительный приборы).

В технике так же находят широкое применение *механические приспособления*, назначение которых заключается в передаче и преобразовании сил (домкраты, рычажные и винтовые прессы и т.д.).

Из изложенного выше очевидно, что понятие «*механизм*» является более широким, чем понятие «*машина*», «*прибор*» или «*приспособление*», так как любое из вышеназванных устройств является одновременно и механизмом, но не наоборот. Таким образом, можно говорить о механизмах машин, приборов и приспособлений.

По *функциональному* назначению машины можно разделить на следующие группы.

1. *Машины-двигатели*, преобразующие один вид энергии в другой (электродвигатели, двигатели внутреннего сгорания и т.д.).

2. *Транспортные машины*, осуществляющие перемещение тел (автомобили, конвейеры, грузоподъемные машины).

3. *Технологические* или *рабочие машины*, изменяющие состояние, свойства или форму материала (металлообрабатывающие станки, проходческие и выемочные горные машины, дробилки, мельницы).

4. *Вычислительные машины*, выполняющие математические операции (компьютеры).

5. *Контрольно-управляющие машины*, осуществляющие контроль и автоматическую корректировку технологического процесса.

Обычно для обеспечения технологического процесса требуются наборы индивидуальных машин, каждая из которых обеспечивает определенную часть технологического процесса.

Набор индивидуальных машин, работающих согласованно в соответствии с требованиями технологического процесса, называют *комплектom машин*.

Совокупность кинематически связанных, но сохранивших свои индивидуальные особенности машин, с помощью которых комплексно механизмируют все основные операции технологического процесса, называют *комплексом машин*.

Совокупность нескольких взаимодействующих машин, связанных конструктивно, что приводит к изменению конструкции индивидуальных машин и потере ими своей обособленности, называют *машинным агрегатом*.

В классическом исполнении машинный агрегат состоит из трех устройств:

- двигательного,
- передаточного,
- рабочего.

Машинные агрегаты, выполняющие все операции без непосредственного участия человека, называются *машинами-автоматами*.

Комплекс машин-автоматов, осуществляющих заданный технологический процесс, называется *автоматической линией*.

Несколько автоматических линий при централизованном управлении образуют *автоматический цех* или *завод-автомат*.

## 1.2. СТРУКТУРА ЭЛЕМЕНТОВ МЕХАНИЗМОВ

### 1.2.1. ЗВЕНЬЯ МЕХАНИЗМОВ

Рассмотрим основные понятия и определения.

*Звеном* называют твердое тело, входящее в состав механизма и обладающее подвижностью относительно других звеньев. Звенья могут состоять из одной или нескольких жестко связанных между собой частей, называемых *деталью*.

На рис. 1.2.1 представлена схема передаточного механизма измерительного прибора. Конструкция шатуна 2 этого механизма, представленная на рис. 1.2.2, позволяет изменять его длину для установки стрелки прибора на нулевую отметку шкалы. Шатун состоит из двух стержней, двух цилиндрических втулок, соединительной муфты и двух гаек. При движении шатуна указанные детали перемещаются как единое целое, и, следовательно, образуют *одно* звено механизма.

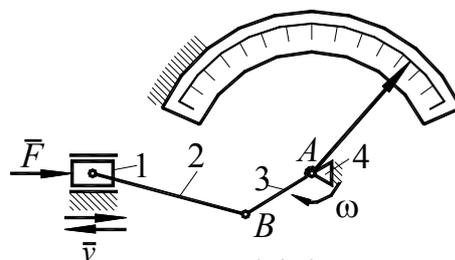


Рис. 1.2.1

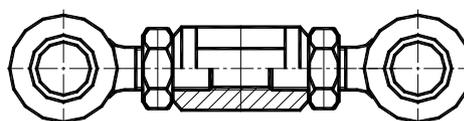


Рис. 1.2.2

Каждую деталь или группу деталей, образующих неизменяемую систему, называют *подвижным звеном*, а неподвижные детали механизма – *стойкой*. Все элементы, образующие стойку, на схеме механизма отмечены штриховкой. Места соединения (соприкосновения) звеньев друг с другом являются их геометрическими элементами. Шатун (рис. 1.2.1) имеет два таких элемента, представляющих собой цилиндрические поверхности. Одним геометрическим элементом шатун соединен с кривошипом (звеном 3), а вторым – с ползуном (звеном 1).

Для звена, подлежащего изучению в теории механизмов, характерным и главным являются *форма геометрических элементов* и их *взаимное расположение*, поскольку именно эти факторы определяют вид относительного движения звеньев. Все другие факторы, (материал звена, его конструкция, способ изготовления и т.д.) в теории механизмов не рассматривают. Кроме того, пренебрегают деформациями звеньев, а также не учитывают зазоры, возникающие в местах соединения звеньев вследствие износа соприкасающихся поверхностей и процессе работы механизма или неточности изготовления.

В зависимости от характера движения относительно неподвижного звена (называемого *стойкой* механизма), звенья называют:

— *кривошипом* – звено рычажного механизма, совершающее полный оборот вокруг оси, связанной со стойкой;

— *коромыслом* – звено рычажного механизма, совершающее неполный оборот вокруг оси, связанной со стойкой;

— *шатунном* – звено рычажного механизма, совершающее плоскопараллельное движение;

— *ползуном* – звено рычажного механизма, поступательно перемещающееся относительно стойки или другого звена;

— *кулисой* – подвижное звено рычажного механизма, являющееся направляющей для ползуна.

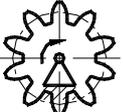
*Кулачок* – звено, профиль которого, имея переменную кривизну, определяет движение ведомого звена.

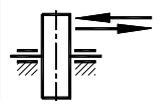
*Зубчатое колесо* – вращающееся звено, имеющее зубчатый контур.

Перечисленные звенья и их *условные изображения* представлены в табл. 1.2.1.

Таблица 1.2.1

*Основные типы звеньев механизмов*

<b>Наименование</b>	<b>Эскиз</b>	<b>Движение</b>	<b>Особенности</b>
Стойка		отсутствует	-
Кривошип		вращательное	полный оборот
Кулачок		вращательное	профиль определяет движение ведомого звена
		поступательное	
Колесо зубчатое		вращательное	зубчатый контур
Коромысло		колебательное	неполный оборот, возвратное движение
Шатун		плоскопараллельное	нет пар, связанных со стойкой
Ползун		поступательное	возвратное движение
Кулиса		колебательное, вращательное	направляющая для ползуна

Наименование	Эскиз	Движение	Особенности
Кулиса		поступательное	возвратное движение, направляющая для ползуна

*Входным* (ведущим) называют звено, которому сообщается движение, преобразуемое механизмом в требуемые движения ведомых звеньев.

*Выходным* (ведомым) называют звено, совершающее движение, для выполнения которого предназначен механизм.

В современном машиностроении широкое применение получили механизмы, в состав которых входят упругие, гибкие, жидкие и газообразные тела.

К *упругим* звеньям относят пружины, мембраны и другие звенья, упругие деформации которых оказывают существенное влияние на работу механизма.

К *гибким* звеньям относят ремни, цепи, канаты и др.

К *жидким* и *газообразным* звеньям относят масло, воду, расплавленный металл, газ, воздух и т.п., перемещаемые по специальным коммуникациям внутри машины или прибора.

*Примечание.*

1. В данном разделе изучаются механизмы только с *твердыми* звеньями. Изучение механизмов с *деформируемыми* звеньями выходит за рамки учебной программы раздела по теории механизмов. Этому вопросу посвящены специальные курсы.

### 1.2.3. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ПАРЫ И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

*Кинематической парой* называют соединение двух соприкасающихся звеньев, допускающее их относительное движение. Кинематическую пару могут образовать не только подвижные звенья, но и звенья, одно из которых неподвижно и служит в механизме стойкой.

Между входным и выходным звеньями могут быть расположены *промежуточные* звенья (например, ролики или шарики в подшипниках). Сложные соединения с промежуточными звеньями сохраняют кинематическую тождественность требуемого относительного движения звеньев и с точки зрения кинематики механизма эквивалентны обыкновенным кинематическим парам. Такие сложные совокупности пар называют *кинематическими соединениями*.

Звенья кинематической пары могут *соприкасаться поверхностями*, по линии и точками, называемыми *элементами кинематической пары*.

Если элементами кинематической пары являются *точки* или *линии*, то пары называют *высшими*, а если – *поверхности*, то – *низшими*.

В низших парах происходит относительное скольжение элементов при поступательном, вращательном или винтовом движениях, а в высших возможно качение и скольжение элементов этих пар.

Примеры *низших* кинематических пар — цилиндрического (а) и шарового (б) шарниров, сочленяющих звенья 1, 2 и 3, 4, представлены на рис. 1.2.3. Элементами пар здесь являются цилиндрические поверхности пальца звена 2 и охватывающей его втулки, сферические поверхности звеньев 3 и 4.

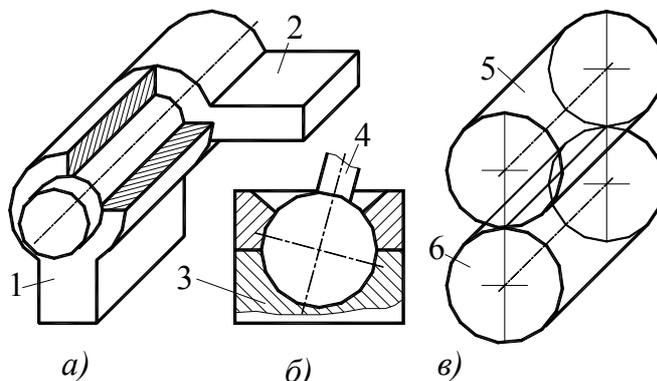


Рис. 1.2.3

*Высшая* пара показана на рис. 1.3, в. Элементами

*пары* являются линии контакта звеньев 5 и 6. При нарушении или изменении вида контакта между элементами кинематической пары она перестает существовать или преобразуется в пару иного вида.

Существование пары обеспечивается условиями замыкания, сохраняющими постоянство и характер контакта звеньев.

В *низших* парах обычно осуществляется *геометрическое замыкание*, обусловленное формой соприкасающихся поверхностей, например, хват втулкой пальца (рис. 1.2.3, а).

В *высших* кинематических парах часто используют *силовое замыкание*, при котором контакт элементов пары обеспечивают гравитационные силы или усилия, создаваемые пружинами.

Кинематические пары могут быть *плоскими* или *пространственными*.

В первом случае относительное движение сочлененных звеньев возможно лишь в *параллельных* плоскостях, во втором случае – и в *непараллельных* плоскостях. Примером пространственной пары является шаровой шарнир (рис. 1.2.3, б).

Прочность и износостойкость элементов кинематических пар зависят от формы и конструктивного исполнения их.

*Низшие* пары более износостойки, чем высшие. Это объясняется тем, что поверхности касания элементов низших пар всегда больше, чем в высших. Следовательно, передача одной и той же силы в низшей паре происходит при меньшем удельном давлении и меньших контактных напряжениях, чем в высшей (контактные напряжения возникают при контакте под нагрузкой двух тел в каждом из них). Износ при прочих

равных условиях пропорционален удельному давлению, поэтому элементы звеньев низших пар изнашиваются медленнее, чем высших.

Нагрузочная способность *высших* кинематических пар сравнительно невелика, поскольку усилия в ней передаются через малые контактные площадки, возникающие в местах соприкосновения звеньев под воздействием нагрузок. Однако эти пары оказываются более рациональными в отношении потерь мощности на преодоление трения, ввиду того, что трение скольжения в них полностью или частично можно заменить трением качения. *Высшие* пары имеют большое разнообразие форм элементов, поэтому механизмы, в состав которых входят, кроме *низших* пар, также и *высшие*, могут осуществлять требуемые производственные движения с меньшим числом звеньев, меньшими габаритами и при более простой конструкции, чем механизмы с одними *низшими* парами.

Так как требуемые законы движения ведомых звеньев обусловлены формой и конструкцией кинематических пар и их элементов, то для рационального проектирования новых типов машин необходимо знать теорию и классификацию кинематических пар. При проектировании механизмов необходимо отчетливо видеть взаимосвязь относительных движений звеньев и конструкций кинематических пар, образуемых этими звеньями. Кинематические пары можно классифицировать по числу условий связей, налагаемых на относительное движение двух звеньев, образующих пару, или по числу степеней свободы. При использовании такой классификации конструктор получает сведения о возможных относительных движениях звеньев и о характере взаимодействия сил между элементами пары. Каждое условие связи в кинематической паре не только устраняет относительную подвижность, но и позволяет передавать от звена к звену силу или момент.

Известно, что *свободное твердое тело в пространстве* имеет *6 степеней свободы* (рис. 1.2.4):

— *три поступательных* движения вдоль осей прямоугольной системы координат *xuz*;

— *три вращательных* движения вокруг осей *xuz*.

Если одно из звеньев кинематической пары связать с неподвижной системой координат *xuz*, то для второго звена, согласно геометрии элементов пары, установится число степеней свободы *w*, определяемое формулой:

$$w = 6 - s,$$

где *s* — *число связей*, налагаемых элементами пары на относительное движение ее звеньев.

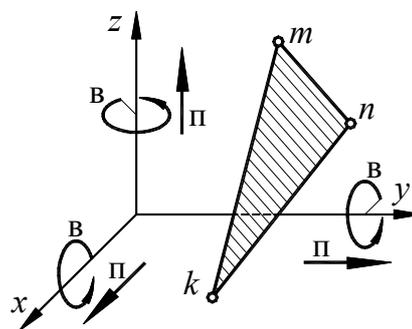


Рис. 1.2.4

Очевидны неравенства  $0 < s < 6$ , так как при  $s=0$  звено абсолютно свободно и пара отсутствует, а при  $s=6$  два тела жестко связаны и образуют одно звено.

Следовательно, число связи *пространственной* кинематической пары  $s$  может быть в пределах от 1 до 5.

Соответственно все кинематические пары по классификации И.И.Артоболевского подразделяют на *пять классов* по числу связей.

К *первому классу* относят пары, налагающие на относительное движение звеньев одну связь ( $s=1$ ).

Ко *второму классу* относят пары с двумя связями ( $s=2$ ).

К *третьему классу* относят пары, налагающие на относительное движение звеньев три связи ( $s=3$ ).

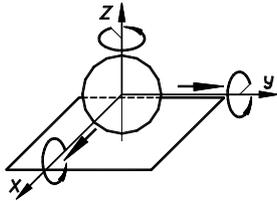
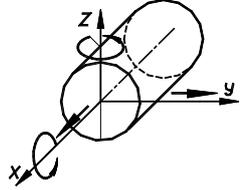
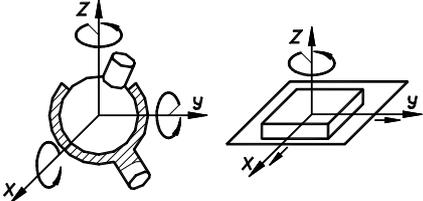
К *четвертому классу* относят пары, налагающие на относительное движение звеньев четыре связи ( $s=4$ ).

К *пятому классу* относят пары, налагающие на относительное движение звеньев пять связей ( $s=5$ ).

Классификация кинематических пар по числу связей  $s$  представлена в табл. 1.2.2, где приведены примеры пар всех классов. На эскизах кинематических пар стрелками указаны *возможные относительные перемещения* (поступательные и вращательные) по осям координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

Таблица 1.2.2

*Классификация кинематических пар по числу связей*

Класс и число связи $s$	Пример кинематической пары
I $s=1$	
II $s=2$	
III $s=3$	

Класс и число связи $s$	Пример кинематической пары
IV $s=4$	
V $s=5$	

В винтовой паре поступательное движение  $y$  вдоль оси  $y$  вращения винта неразрывно связано с вращательным движением  $\varphi$  функцией  $y = c\varphi$ , где  $c = \text{tg } \alpha$  – постоянный коэффициент, величина которого определяется углом  $\alpha$  наклона винтовой линии. Это дополнительное условие связи повышает на разряд *класс* пары и соответственно снижает ее *род*.

По числу  $w$  степеней свободы пары называют: *пяти-, четырех-, трех-, двух- и одноподвижная*.

Кинематическая пара является *обратимой*, если она реализует один и тот же вид относительного движения для каждого из образующих ее звеньев. Примером обратимой пары может служить *вращательная* пара. Действительно, вращение вала в неподвижном подшипнике или подшипника относительно неподвижного вала приводит к тому, что точки соприкасающихся поверхностей вала и подшипника описывают *одинаковые* траектории – окружности.

Свойством *обратимости* обладают *все низшие* кинематические пары.

*Все высшие* кинематические пары относятся к *необратимым*.

На рис. 1.2.5 показана *высшая* кинематическая пара, образованная окружностью 1 и прямой 2. Если точки

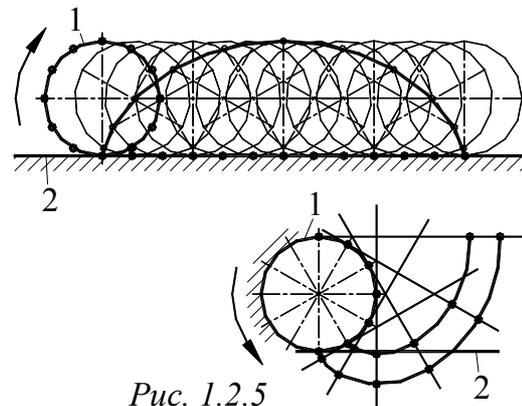


Рис. 1.2.5

окружности, катящегося по неподвижной прямой, описывают *циклоиды*, то точки прямой, перекатывающейся по неподвижной окружности, описывают *эвольвенты*. Рассматриваемая пара является *необратимой*.

Возможность реализации самых разнообразных движений путем соответствующего выбора профилей соприкасающихся звеньев является основным достоинством *высших* кинематических пар. Именно поэтому такие пары находят наиболее широкое применение в механизмах.

Пользуясь *условными изображениями* наиболее распространенных кинематических пар (табл. 1.2.1), составляют так называемые *структурные схемы* механизмов.

*Структурная схема* представляет собой *символический* чертеж механизма, позволяющий установить количество его звеньев, число и класс кинематических пар, а также вид движения, которое совершает каждое звено относительно стойки. Поскольку такая схема является как бы «скелетом» механизма, на ней не показывают никаких лишних деталей, затрудняющих понимание схемы.

Выполненную в *масштабе* структурную схему называют *кинематической схемой*.

#### 1.2.4. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

*Кинематической цепью* называют *связанную систему звеньев, образующих кинематические пары*.

Кинематические цепи подразделяют на:

- *открытые* и *замкнутые*,
- *простые* и *сложные*,
- *плоские* и *пространственные*.

*Открытой* кинематической цепью называют такую, в которой имеются звенья, входящие только в одну кинематическую пару (рис. 1.2.6, а).

В *замкнутой* кинематической цепи каждое звено входит не менее чем в две кинематические пары (рис. 1.2.6, б).

В машиностроении применяют, в основном, замкнутые кинематические цепи.

Кинематическую цепь называют *простой*, если каждое ее звено (1-4) входит не более чем в две кинематические пары (рис. 1.6, в).

В *сложной* цепи имеется хотя бы одно звено, образующее с другими звеньями более двух кинематических пар (рис. 1.6, б).

Если траектории точек всех звеньев цепи лежат в параллельных плоскостях, то такую цепь называют *плоской*.

В *пространственных* цепях указанные траектории либо представляют собой пространственные кривые, либо находятся в непараллельных плоскостях.

Если точки звеньев описывают траектории на сферах с единым неподвижным центром, механизм называют *сферическим*.

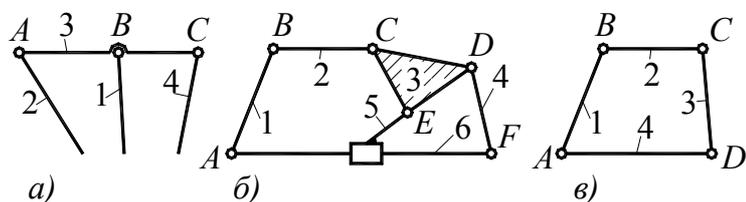


Рис. 1.2.6

*Рычажным* механизмом называют такой, в котором звенья образуют лишь *нижние* кинематические пары.

Механизм, имеющий только вращательные пары, называют *шарнирным*.

### 1.2.5. СТЕПЕНЬ ПОДВИЖНОСТИ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ ЦЕПИ

*Число степеней свободы кинематической цепи* относительно одного из ее звеньев условно называют *степенью подвижности кинематической цепи*.

Для определения степени подвижности любой кинематической цепи необходимо подсчитать число степеней свободы всех подвижных звеньев, полагая их не связанными между собой. Затем из этого числа следует вычесть число связей, наложенных на звенья кинематическими парами.

Пусть  $n$  – число звеньев пространственной кинематической цепи,  $p_k$  – число кинематических пар  $k$ -го класса ( $k=1, 2, \dots, 5$ ).

Общее число степеней свободы  $n$  звеньев без учета связей равно  $6n$ , а общее число связей, наложенных на звенья кинематическими парами  $k$ -го класса, равно  $kp_k$ . Поэтому *степень подвижности кинематической цепи* равна:

$$w = 6n - \sum_{k=1}^5 kp_k,$$

или в развернутом виде:

$$w = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1 \quad (1.2.1)$$

Равенство (1.2.1) носит название *формулы подвижности* или *структурной формулы пространственной кинематической цепи общего вида* – формулы *Сомова-Мальшева*.

*Связи*, налагаемые на движение звеньев кинематическими парами, подразделяют на *индивидуальные*, характерные для данного звена цепи, и *общие*, накладывающие одинаковые ограничения на движение всех звеньев. Например, кинематическая цепь (рис. 1.2.6, в), звенья которой соединены между собой с помощью лишь вращательных пар V-го класса с параллельными осями, является плоской. Звенья такой цепи движутся параллельно некоторой направляющей плоскости, перпендикулярной к осям вращательных пар. Следовательно, все звенья цепи не могут перемещаться вдоль оси, перпендикулярной к направляющей плоскости, и вращаться вокруг двух осей, определяющих эту плоскость, т.е. на звенья данной цепи наложены три *общие* связи.

*Структурная формула (1.2.1) в этом случае не применима.*

Число степеней свободы отдельно взятого звена такой цепи с учетом лишь общих связей равно трем, а суммарно для  $n$  звеньев –  $3n$ . Однако каждая пара ограничивает движение звеньев дополнительными связями, число которых для рассматриваемой цепи на три единицы меньше класса пары. Следовательно, кинематические пары I, II и III классов в данной цепи не могут быть, а пары IV и V классов накладывают соответственно одну и две связи.

Таким образом, в этом случае имеет место формула *Чебышева*:

$$w = 3n - 2p_5 - p_4 \quad (1.2.2)$$

Структурные формулы для кинематических цепей с другим числом общих связей могут быть получены по аналогии с формулой (1.2.2).

### 1.3. МЕХАНИЗМЫ И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

#### 1.3.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О МЕХАНИЗМЕ. СВОЙСТВА МЕХАНИЗМОВ

*Механизмом* в классической теории механизмов называют *кинематическую цепь*, в которой при заданном движении одного или нескольких звеньев все остальные звенья совершают вполне определенные движения относительно одного из них. Это определение применимо к механизмам, звенья которых можно рассматривать как *абсолютно твердые тела*.

Определение механизма в более широком понимании приведено в разделе 1.1.

Звенья, к которым приложены силы, приводящие механизм в движение, называют *входными (ведущими)*. При исследовании механизмов законы движения этих звеньев обычно являются заданными.

Все остальные подвижные звенья называют *ведомыми*. Законы движения ведомых звеньев однозначно определяются законами движения звеньев ведущих. Ведомые звенья, осуществляющие те движения, для воспроизведения которых создается тот или иной механизм, являются *рабочими*, или *исполнительными*.

Поскольку любой механизм представляет собой кинематическую цепь, то *степень его подвижности* определяют по структурной формуле соответствующей кинематической цепи в зависимости от числа общих связей, наложенных на движение звеньев. В этом плане механизмы подразделяют на пять *семейств*: при этом номер семейства (0, I, II, III, IV) соответствует числу общих связей.

Структурные формулы для механизмов всех пяти семейств приведены ниже.

Семейство механизма	Структурная формула
0	$w=6n-5p_5-4p_4-3p_3-2p_2-p_1$
I	$w=5n-4p_5-3p_4-2p_3-p_2$
II	$w=4n-3p_5-2p_4-p_3$
III	$w=3n-2p_5-p_4$
IV	$w=2n-p_5$

Около 75% всех известных механизмов являются *плоскими*, принадлежащими к семействам III или IV.

*Степень подвижности* механизма или число его степеней свободы должна быть равна тому количеству его ведущих звеньев, которое необходимо для определенности движения ведомых звеньев. Если, например, механизм обладает одной степенью подвижности, то в этом механизме должно быть одно ведущее звено. Если же степень подвижности равна трем ( $w=3$ ), то механизм должен иметь три звена с заданными законами движения.

### 1.3.2. КОНСТРУКТИВНО-ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ МЕХАНИЗМОВ

Для систематизированного изучения всего многообразия механизмов, используемых в современных машинах и приборах, обратимся к так называемой *практической классификации*, которая в общих чертах учитывает основные кинематические свойства и конструктивные особенности механизмов, а в некоторых случаях и их функциональное назначение. Согласно этой классификации механизмы можно разделить на пять основных видов:

- рычажные,
- фрикционные,
- кулачковые,
- зубчатые,
- с гибкими звеньями.

Кроме того, существует большое число различных составных или комбинированных механизмов, представляющих собой те или иные сочетания механизмов указанных выше пяти видов.

### 1.3.3. РЫЧАЖНЫЕ МЕХАНИЗМЫ

Среди механизмов этого вида широкое распространение получили плоские *кривошипно-шатунные* и *кривошипно-кулисные механизмы*.

На рис. 1.3.1 показаны схемы двух разновидностей *кривошипно-шатунных* механизмов.

Назначение механизма, показанного на рис. 1.3.1, а, – преобразование вращательного движения звена 1 в возвратно-поступательное движение звена 3, или наоборот. Звено 1, образующее со стойкой 4 вращательную кинематическую пару, называют *кривошипом*; звено 3, образующее со стойкой 4 поступательную кинематическую пару, – *ползуном*. Такой механизм называют *кривошипно-ползунным*. Если линия  $xx$  движения ползуна проходит через центр вращения кривошипа, то механизм называют *центральный* или *аксильным*, в противном случае – *дезаксильным*. Основная цель введения *дезаксила* (смещения) – уменьшение давления на направляющую  $xx$ .

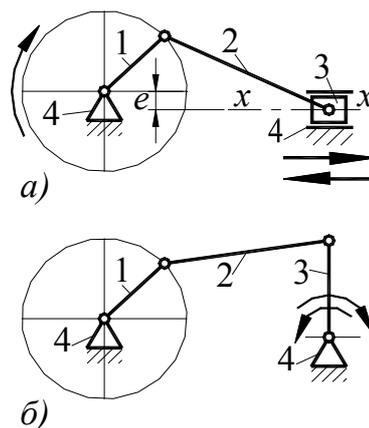


Рис. 1.3.1

Механизм, показанный на рис. 1.3.1, б, служит для преобразования вращательного движения кривошипа 1 в возвратно-вращательное движение звена 3 или наоборот. Качающееся звено 3 называют *коромыслом* или *балансиром*. Поэтому механизм называют *кривошипно-балансирным* или *кривошипно-коромысловым*.

В обоих механизмах звено 2 совершает сложное плоское движение и образует с другими подвижными звеньями вращательные кинематические пары. Такое звено называют *шатуном*.

На рис. 1.3.2 изображены *кривошипно-кулисные* механизмы.

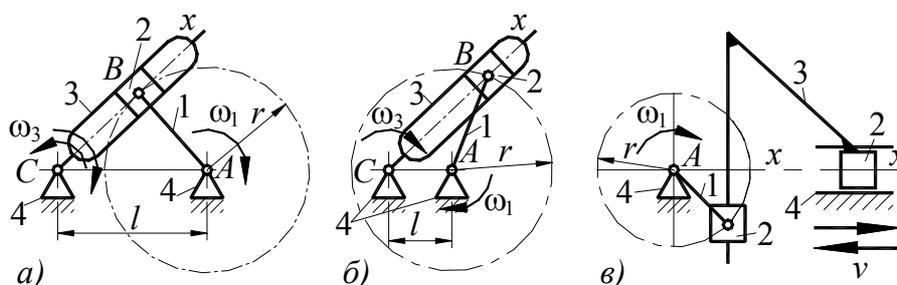


Рис. 1.3.2

Звено 3 этих механизмов, представляющее собой подвижную направляющую для звена 2, называют *кулисой*, а звено 2 – *кулисным камнем*. Все рассмотренные *плоские* рычажные механизмы принадлежат семейству III и обладают одной степенью подвижности.

В технике используются так же и *пространственные* рычажные механизмы.

### 1.3.4. КУЛАЧКОВЫЕ МЕХАНИЗМЫ

Кулачковые механизмы находят широкое применение, особенно в приборах и машинах автоматического действия. В большинстве случаев они предназначены для преобразования вращательного или возвратно-поступательного движения ведущего звена в возвратно-поступательное или возвратно-вращательное движение ведомого звена с остановками последнего заданной продолжительности. Иногда применяют *неподвижные* кулачки – в этом случае все движения совершает ведомое звено (см. раздел 3.2.1).

На рис. 1.3.3 приведены схемы простейших кулачковых механизмов. В зависимости от вида движения звено 2 называется либо *толкателем*, если оно совершает возвратно-поступательное движение (рис. 1.3.3, а, б, г), либо *коромыслом*, если его движение возвратно-вращательное (рис. 1.3.3, в).

Высшая кинематическая пара в кулачковых механизмах замыкается обычно с помощью *пружин* (рис. 1.3.4, а), однако встречаются механизмы и с *геометрическим замыканием* (рис. 1.3.4, б).

*Плоские* кулачковые механизмы принадлежат III семейству, поэтому степень их подвижности определяется по структурной формуле Чебышева.

Если толкатель снабжен *роликом*, то этот ролик не влияет на характер движения ведомого звена. Такие звенья, а также привносимые ими дополнительные степени свободы и связи, называют *лишними* и в структурных формулах не должны учитываться.

В технике находят применение также *пространственные* кулачковые механизмы (рис. 1.3.5).

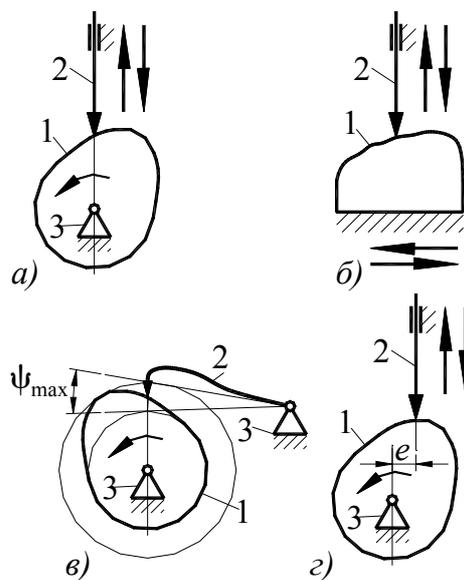


Рис. 1.3.3

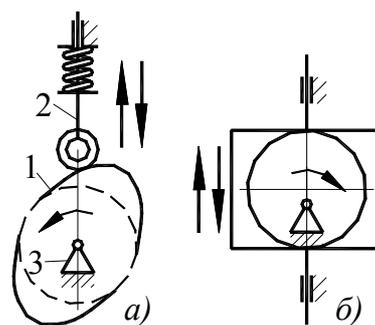


Рис. 1.3.4

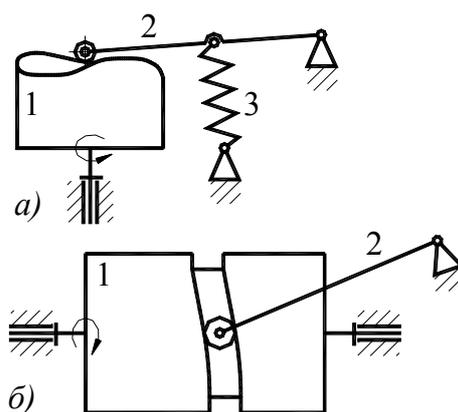


Рис. 1.3.5

Основным достоинством кулачковых механизмов является их кинематическая универсальность, т.е. способность воспроизведения практически любого требуемого закона движения толкателя (коромысла) за счет выбора соответствующего профиля кулачка.

Более подробно типы и структура кулачковых механизмов рассмотрены в разделе 3.2.1.

### 1.3.5. ФРИКЦИОННЫЕ МЕХАНИЗМЫ

В этих механизмах движение от ведущего звена к ведомому передается за счет сил трения, возникающих в местах контакта указанных звеньев.

Среди фрикционных механизмов особое место занимают механизмы с одной степенью подвижности, называемые *передачами*.

Простейшая фрикционная передача с параллельными осями состоит из трех звеньев: двух колес (катков) цилиндрической формы и стойки (рис. 1.3.6). Замыкание этой пары *силовое*, поэтому одну из опор выполняют *плавающей*.

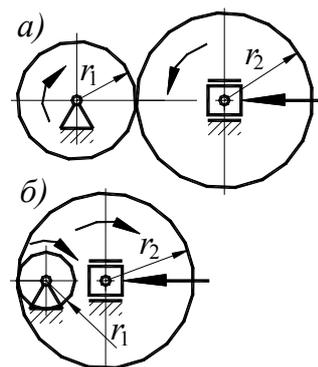


Рис. 1.3.6

Если точка контакта катков располагается *между* центрами их вращения, что соответствует *внешнему* или *наружному* касанию, направления вращения катков *противоположны* (рис. 1.3.6, а). В случае *внутреннего* касания катки вращаются *в одну* сторону (рис. 1.3.6, б).

Возможность *проскальзывания* катков во время их работы под нагрузкой – основной *недостаток* фрикционных механизмов. Иногда этот недостаток превращается в *достоинство* – при использовании фрикционной передачи в качестве *предохранительного* механизма от перегрузок рабочего механизма.

### 1.3.6. ЗУБЧАТЫЕ МЕХАНИЗМЫ

Зубчатые механизмы представляют собой передачи, в которых движение передается зацеплением зубьев ведущего и ведомого звеньев.

Если угловая скорость ведомого вала меньше, чем у ведущего, то передачу называют *понижающей* (*редуктором*); в противном случае ее называют *повышающей* (*мультипликатором*).

Различают передачи с *внешним* (рис. 1.3.7, а) и *внутренним* зацеплениями (рис. 1.3.7, б).

По *взаимному расположению геометрических осей валов* применяются зубчатые передачи с *параллельными* осями (цилиндрические передачи), с *пересекающимися* осями (конические передачи) и со *скрещи-*

вающимися осями (передачи винтовыми и гипоидными колесами, червячные передачи).

На рис. 1.3.7 показаны цилиндрические (рис. 1.3.7, а, б) и коническая (рис. 1.3.7, в) зубчатые передачи.

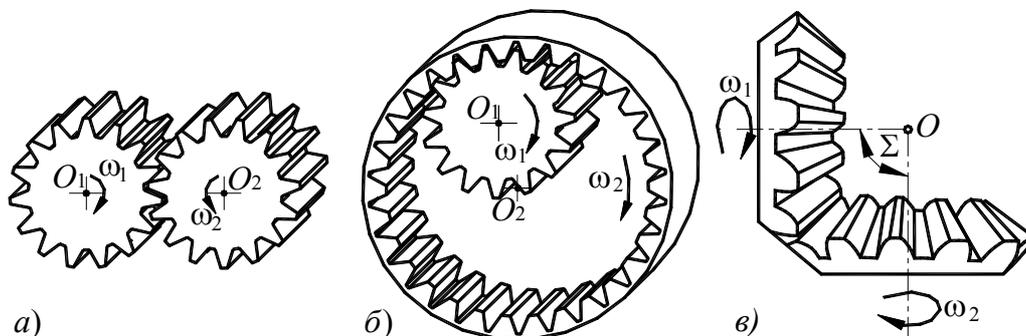


Рис. 1.3.7

### 1.3.7. ЧЕРВЯЧНАЯ ПЕРЕДАЧА

Червяк 1 представляет собой видоизмененное косозубое колесо с большим углом наклона зубьев (витков), в то время как угол наклона зубьев червячного колеса 2 сравнительно невелик (рис. 1.3.8).

Большинство применяемых червячных передач имеют угол перекрещивания осей, равный  $90^\circ$ . Такие передачи называют *ортогональными* червячными передачами.

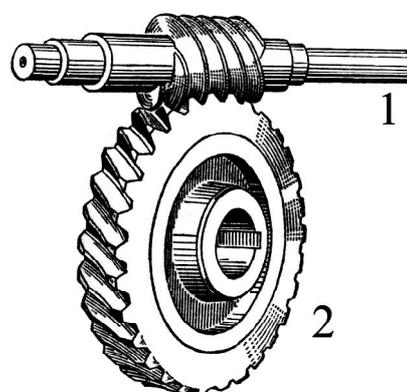


Рис. 1.3.8

### 1.3.8. ПЛАНЕТАРНЫЕ МЕХАНИЗМЫ

Планетарным называют механизм, в составе которого имеется хотя бы одно колесо с подвижной осью. Пример такого механизма, представлен на рис. 1.3.9.

В этом механизме зубчатое колесо  $b$  неподвижно, зубчатое колесо  $g$  имеет подвижную ось  $уу$ .

Звено  $H$  входит во вращательные пары со стойкой и с зубчатым колесом  $b$ . При вращении звена  $H$  с угловой скоростью  $\omega_H$  колесо  $g$  обегает неподвижное

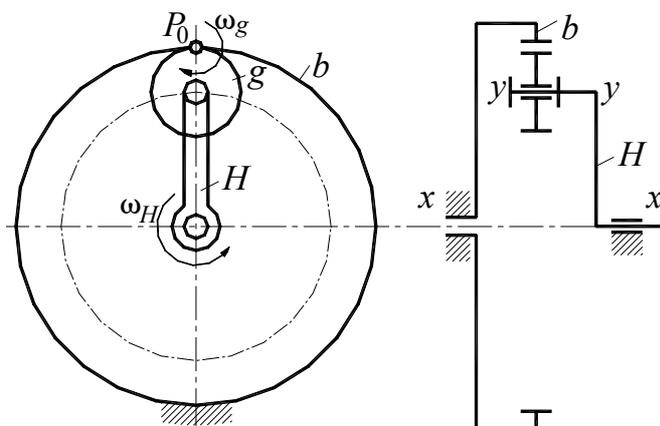


Рис. 1.3.9

колесо  $b$ , вращаясь с угловой скоростью  $\omega_g$  вокруг мгновенного центра вращения  $P_0$ . Колесо  $g$  называется *сателлитом*, звено  $H$ , с которым связана ось сателлита, — *водилом*, а центральную ось  $xx$ , вокруг которой вращается водило, — *основной осью планетарного механизма*.

Зубчатые колеса, с которыми сателлит образует внешнее или внутреннее зацепление, называют *центральными*. На рис. 1.3.9 буквой  $b$  обозначено центральное колесо *внутреннего* зацепления (*коронное колесо*). Буквой  $a$  обычно обозначают *центральное колесо внешнего* зацепления — *солнечную шестерню*. В общем случае центральные колеса обозначают буквой  $k$ .

Звенья механизма, оси вращения которых совпадают с основной осью  $xx$  механизма, называются *основными звеньями*. В планетарном *трехзвенном* механизме, представленном на рис. 1.3.9, основными звеньями являются колесо  $b$  и водило  $H$ .

Простейший *редуктор*, состоящий из *четырёх* звеньев, может быть получен из планетарного механизма, показанного на рис. 1.3.9, если в него ввести еще одно зубчатое колесо  $a$  с осью  $xx$ , входящее в зацепление с сателлитом  $g$  (рис. 1.3.10).

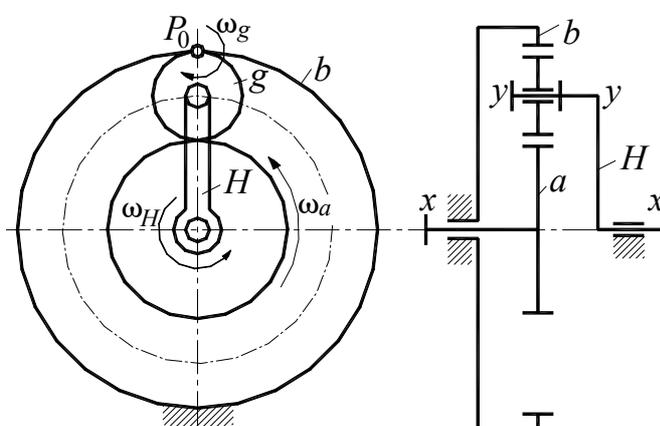


Рис. 1.3.10

Степень подвижности планетарных механизмов  $w$  определяют по структурной формуле Чебышева (1.2.2), так как рассматриваемые механизмы представляют собой *плоские кинематические цепи*.

Если степень подвижности планетарного механизма  $w = 1$ , то его называют *планетарной передачей*, если же  $w > 1$ , то его называют *дифференциалом*.

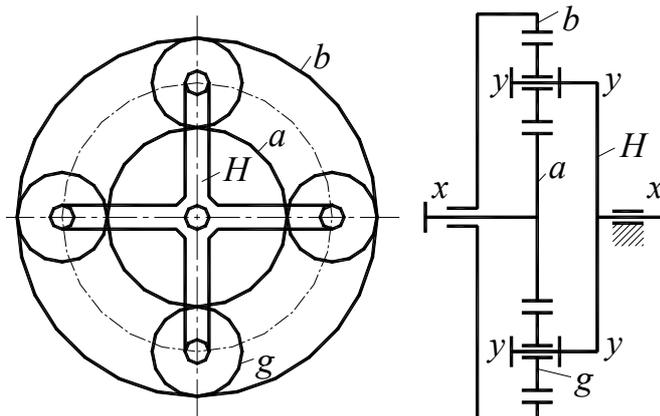


Рис. 1.3.11

В планетарном механизме, приведенном на рис. 1.3.11, *подвижными* звеньями являются солнечная шестерня  $a$ , коронное колесо  $b$ , водило  $H$  и четыре сателлита  $g$ . Кинематические пары V класса представля-

ют собой опоры подвижных звеньев, т.е. вращательные пары — подшипники, а парами IV класса являются зацепления колес.

Характер движения звеньев не изменится, если в механизме вместо *четырех* сателлитов, представленных на рис. 1.3.11, оставить *один*. Поэтому три сателлита являются *пассивными* (с точки зрения *структуры*) звеньями. Учитывая, что привносимые ими *пассивные* связи не должны учитываться в *структурной* формуле, имеем:

$$n=4, p_5=4, p_4=2;$$

отсюда

$$w = (3 \times 4) - (2 \times 4) - 2 = 2,$$

т.е. механизм является *дифференциалом*, а введение *пассивных* сателлитов позволяет разделить передаваемую механизмом мощность на ряд *параллельно* работающих зацеплений.

Все многообразие планетарных механизмов подразделяют на *простые* и *замкнутые передачи* и *дифференциалы*.

Основой для получения планетарных *передач* любой степени сложности служат, как правило, простейшие *дифференциалы*, схемы наиболее распространенных из которых представлены на рис. 1.3.12.

Чтобы получить *из простейшего дифференциала*, имеющего степень подвижности, равную двум, *планетарную передачу*, необходимо лишить его одной из степеней подвижности. Сделать это можно двумя способами.

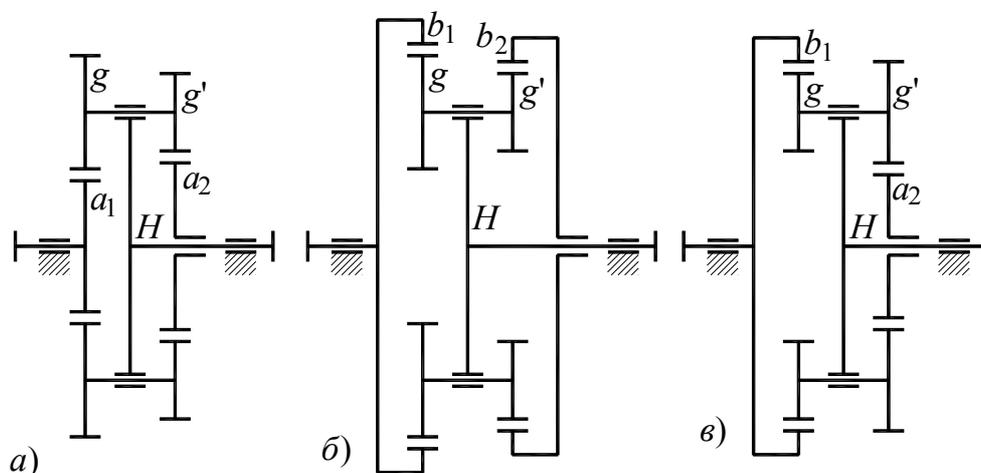


Рис. 1.3.12

*Первый способ* заключается в остановке (закреплении к стойке) одного из *основных* звеньев.

Указанным способом можно получить передачи *двух типов*:

1. если остановить одно из центральных колес, получится *простая планетарная* передача;
2. если остановить водило, получится *обычная* передача, у которой все колеса имеют *неподвижные* оси вращения.

Как в первом, так и во втором случаях для этих механизмов  $w=1$ .

По второму способу два каких-либо основных звена дифференциала соединяют между собой через зубчатую передачу (обычную или планетарную).

На рис. 1.3.13, б, в в качестве примера показаны две схемы замкнутых планетарных передач, при этом за исходный механизм выбран простейший трехзвенный дифференциал, представленный на рис. 1.3.11.

В первой схеме (рис. 1.3.13, б) два основных звена  $b_1$  и  $H_1$  исходного дифференциала связаны между собой обычной передачей ( $b_2 - g' - a_2$ ).

Во второй схеме (рис. 1.3.13, в) два основных звена  $b_1$  и  $H_1$  исходного дифференциала соединены простой планетарной передачей с неподвижным коронным колесом  $b_2$ .

Степень подвижности этих передач равна единице, что легко установить по формуле (1.2.2), полагая в ней  $n=5$ ;  $p_5=5$  и  $p_4=4$ .

### 1.3.9. МЕХАНИЗМЫ С ГИБКИМИ ЗВЕНЬЯМИ

Механизмы с *гибкими* звеньями применяют для передачи вращательного движения между валами при больших межосевых расстояниях как с постоянным, так и переменным соотношением их угловых скоростей. Ведущее и ведомое звенья таких механизмов не имеют между собой непосредственного контакта, а их относительное движение осуществляется посредством гибкого звена, которое может быть как замкнутым, так и разомкнутым.

По характеру соединения гибкого звена с ведущим и ведомым звеньями рассматриваемые механизмы подразделяют на:

- передачи *трением*,
- передачи *зацеплением*.

В передачах *трением* в качестве гибкого звена используют *плоские и клиновые ремни, стальные ленты, металлические канаты, шнуры*.

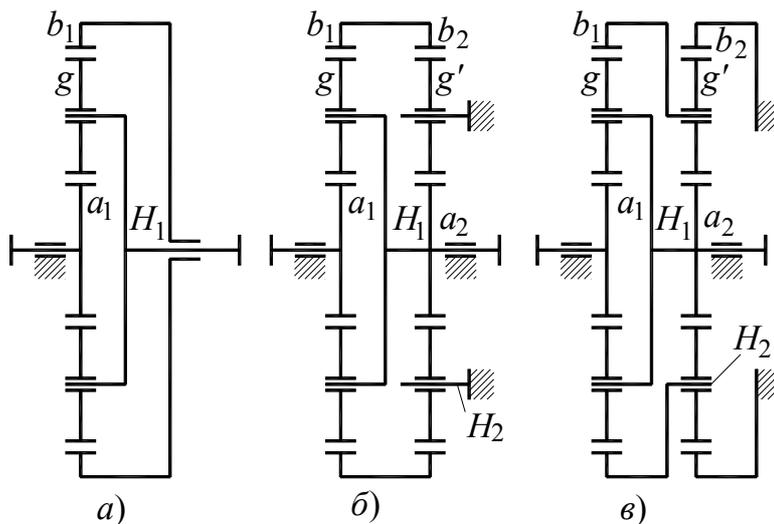


Рис. 1.3.13

Передача состоит из ведущего 1 и ведомого 2 шкивов, а также замкнутого звена 3, надетого на шкивы с предварительным натяжением (рис. 1.3.9, а).

Необходимым условием нормальной работы передач трением является *натяжение гибкой связи*, что достигается обычно при помощи натяжных роликов 4 (рис. 1.3.9, б).

В передачах *зацеплением* гибким звеном служит либо *цепь*, либо *зубчатый ремень*, либо *перфорированная лента*.

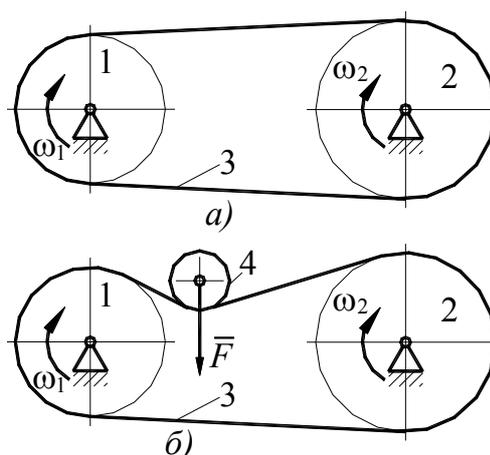


Рис. 1.3.14

Преимущества этих передач перед передачами трением соответствуют преимуществам зубчатых передач перед фрикционными.

Нередко гибкое звено используют и в качестве *рабочего органа* (например, ленточные, цепные и пластинчатые конвейеры).

## 1.4. КИНЕМАТИКА МЕХАНИЗМОВ

### 1.4.1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

*Кинематический анализ* механизмов в общем случае предусматривает решение *трех основных задач*, а именно:

- определение положений звеньев и построение траекторий отдельных точек;
- определение скоростей точек и угловых скоростей звеньев;
- определение ускорений точек и угловых ускорений звеньев.

Эти задачи могут быть решены *графическими*, *графоаналитическими* и *аналитическими* методами. Выбор того или иного метода зависит как от необходимой степени точности решения, так и от целевого назначения расчета.

Первые два метода уступают по точности третьему, однако они более наглядны и сравнительно просты.

### 1.4.2. СТРУКТУРНАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ПЛОСКИХ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

Как уже отмечалось выше, в любом механизме должно быть одно или несколько *ведущих* звеньев.

По классификации Ассура-Артоболевского каждое из таких звеньев и стойка образуют *начальный механизм I класса*. *Начальный* меха-

низм является *двухзвенным* и обладает *одной* степенью подвижности, поскольку его звенья 1 и 2 образуют либо одну вращательную (рис. 1.4.1, а), либо поступательную (рис. 1.4.1, б, в) кинематические пары V класса.

Двухзвенные механизмы, имеющие вращательную пару, достаточно широко представлены в технике. Это механизмы приборов роторного типа и таких машин, как электродвигатели, генераторы, турбины, центробежные насосы, вентиляторы и т.д.

Более сложные механизмы могут быть получены *присоединением* к одному или нескольким *начальным механизмам* так называемых *структурных групп*.

*Структурной группой* или *группой Ассура* называют *кинематическую цепь*, получающую *нулевую подвижность* после присоединения ее к стойке.

Таким образом, если учесть кинематические пары, образуемые звеньями данной группы между собой, а также со звеньями других групп или начального механизма, то для группы выполняется условие:

$$w=0.$$

Рассмотрим группы, содержащие только пары V класса, для которых:

$$w = 3n - 2p_5 = 0.$$

Тогда:

$$p_5 = \frac{3}{2}n \tag{1.4.1}$$

Так как число пар не может быть дробным, то число звеньев группы должно быть *четным*.

Очевидно, введение одной или нескольких структурных групп в механизм не отразится на степени его подвижности.

Структурную группу с  $n=2$  и  $p_5=3$  называют группой II класса второго порядка (двухповодковая группа, или диада).

В табл. 1.4.1 приведены пять модификаций (видов) таких групп, которые отличаются друг от друга последовательностью расположения *вращательных* (В) и *поступательных* (П) кинематических пар, а также их количественным соотношением.

В диаде первой модификации все пары *вращательные*.

Диада второй модификации отличается от диады третьей модификации лишь расположением *поступательной* пары.

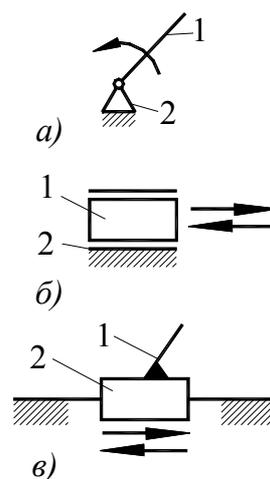


Рис. 1.4.1

В диадах четвертой и пятой модификаций из трех кинематических пар две – поступательные и диады различаются только расположением *вращательной* пары.

Таблица 1.4.1

Структурные группы II класса второго порядка

Модификация (вид) группы	Первая	Вторая	Третья	Четвертая	Пятая
Эскиз группы					
Символ группы	ВВВ	ВВП (ПВВ)	ВПВ	ПВП	ППВ (ВПП)

Кинематическая цепь из двух звеньев и трех поступательных пар не является структурной группой, так как в случае присоединения ее к стойке она образует клинчатый механизм IV семейства с одной степенью подвижности.

Сочетание диады *первой* модификации с *начальным* механизмом, подвижное звено которого образует со стойкой вращательную пару, дает *шарнирный четырехзвенник* (рис. 1.3.1, б). Последний в зависимости от соотношения длин звеньев может быть либо кривошипно-балансирным, либо двухкривошипным, либо двухбалансирным механизмом.

Присоединение диады *второй* модификации к аналогичному *начальному* механизму дает либо кривошипно-ползунный механизм (рис. 1.3.1, а), либо механизм с ведущей кулисой (рис. 1.3.2, б). В первом случае подвижное звено начального механизма образует с одним из звеньев группы вращательную пару, во втором – поступательную.

Диады остальных модификаций в сочетании с тем или иным начальным механизмом дают также кулисные механизмы.

Кинематическая цепь, состоящая из четырех звеньев ( $n=4$ ) и шести пар ( $p_5=6$ ), может дать структурную группу III класса третьего порядка (трехповодковая группа или триада), либо группу IV класса второго порядка. Отличительным признаком групп III класса (рис. 1.4.2, а) является треугольное звено 4, называемое *базисным*.

Для групп IV класса (рис. 1.4.2, б) ха-

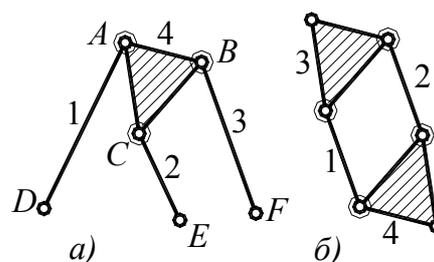


Рис. 1.4.2

рактарно наличие подвижного четырехстороннего контура.

На рис. 1.4.2 группы III и IV классов изображены с одними вращательными кинематическими парами.

Очевидно, можно получить различные модификации этих групп, если вращательные пары сочетать с поступательными.

Структурные группы более высоких классов в существующих механизмах находят весьма ограниченное применение.

Итак, *структурные группы* подразделяют на *классы* и *порядки*. *Класс группы с числом звеньев более двух ( $n > 2$  и  $p_5 > 3$ ) определяется наивысшим по классу замкнутым контуром, входящим в ее состав.*

Класс контура при этом соответствует числу внутренних для группы кинематических пар. Двухзвенные группы ( $n=2$  и  $p_5=3$ ), как уже было отмечено выше, относятся ко II классу.

На рис. 1.4.2 внутренние для группы кинематические пары обозначены двумя концентрическими окружностями.

*Порядок структурной группы* соответствует числу свободных геометрических элементов кинематических пар, с помощью которых группу можно присоединить к начальному механизму, стойке или звеньям других структурных групп.

Разложение кинематической цепи механизма на структурные группы и начальные механизмы называют *структурным анализом*.

Исследуя структуру механизма, необходимо определить число звеньев, число и класс кинематических пар, степень подвижности, а также установить класс и порядок структурных групп, входящих в его состав. Основой для такого исследования служит *структурная схема механизма*, не содержащая пассивных связей и лишних степеней свободы.

*Степень подвижности механизма* должна соответствовать количеству его ведущих звеньев, которые должны входить в кинематические пары со *стойкой*.

При исследовании *структуры* механизма рекомендуется:

— отсоединение структурных групп начинать со звеньев, наиболее удаленных от ведущих;

— стремиться к тому, чтобы отделять в первую очередь самые простые структурные группы – диады;

— следить за тем, чтобы степень подвижности кинематической цепи механизма до и после отделения каждой структурной группы оставалась неизменной;

— помнить о том, что каждая кинематическая пара и каждое звено могут входить только в одну структурную группу или в один начальный механизм.

Если в плоском механизме имеются высшие кинематические пары, то исследование его структуры выполняется по схеме заменяющего механизма.

Класс механизма соответствует классу наивысшей группы, входящей в его состав. В качестве примера рассмотрим структурную схему шестизвенного механизма (рис. 1.4.3).

Пять подвижных звеньев ( $n=5$ ) и стойка 6 этого механизма образуют семь кинематических пар V класса, из которых шесть являются вращательными и одна – поступательной.

Вращательные пары образованы звеньями 6 и 1, 1 и 2, 2 и 3, 3 и 4, 3 и 6, 4 и 5, а поступательная пара – ползуном 5 и направляющей (стойкой) 6.

Ведущим звеном механизма является звено 1.

Таким образом, степень подвижности механизма равна:

$$w = 3 \times 5 - 2 \times 7 = 1,$$

то есть механизм должен иметь *одно* ведущее звено.

Отсоединяем два звена 4 и 5, которые наиболее удалены от ведущего. Эти звенья с тремя кинематическими парами представляют собой структурную группу II класса второго порядка второй модификации. Поскольку оставшаяся часть механизма, состоящая из трех подвижных звеньев (1, 2, 3) и четырех вращательных пар, имеет одну степень подвижности, группа выделена правильно.

Следующие два звена 2 и 3 с тремя кинематическими парами  $B$ ,  $C$  и  $D$  образуют структурную группу II класса второго порядка первой модификации. После отделения этой группы остались кривошип 1 и стойка 6, представляющие собой начальный механизм.

Из-за того, что обе структурные группы II класса, то к этому же классу принадлежит и сам механизм.

### 1.4.3. ПЛАН ПОЛОЖЕНИЙ МЕХАНИЗМА

Кинематическому анализу рычажного механизма должно предшествовать исследование его *структуры*. Поэтому число и вид структурных групп, из которых состоит ведомая часть механизма, а также последовательность их присоединения известны.

Кроме того, заданными должны быть размеры всех звеньев.

Начинать расчет следует с группы, которая образует кинематические пары с *ведущим* звеном и *стойкой*. В этом случае положения геометрических элементов крайних пар группы оказываются известными, и

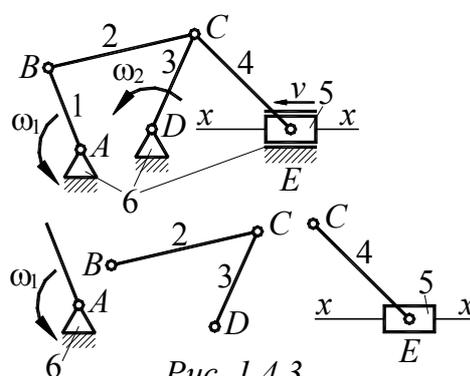


Рис. 1.4.3

задача сводится к определению аналогичных параметров точек, принадлежащих внутренним парам.

Указанное правило справедливо и для последующих групп механизма.

Построение планов *положений* механизма является *первой задачей кинематики* рычажного механизма, которую можно сформулировать следующим образом: *по известным размерам звеньев механизма, задаваясь положением его ведущего звена, найти положения всех остальных звеньев.*

Для получивших преимущественное распространение в технике механизмов II класса одним из методов решения этой задачи является *метод геометрических мест*. Суть этого метода рассмотрим на примерах определения положений звеньев диад трех модификаций.

На рис. 1.4.4 приведена диада с тремя вращательными парами  $B$ ,  $C$  и  $D$ .

Как уже было отмечено выше, положения точек  $B$  и  $D$ , принадлежащих крайним парам группы, должны быть известны. Следовательно, для определения положений звеньев достаточно найти положение точки  $C$  внутренней в группе кинематической пары.

С геометрической точкой  $C$  совпадают две физические точки  $C_2$  и  $C_3$ , принадлежащие соответственно звеньям 2 и 3. Геометрическим местом возможных положений точки  $C_2$  является окружность  $\alpha\alpha$  радиуса  $BC$  с центром в точке  $B$ , а точки  $C_3$  – окружность  $\beta\beta$  радиуса  $CD$  с центром в точке  $D$ . Положение точки  $C$  определится, очевидно, точкой пересечения окружностей  $\alpha\alpha$  и  $\beta\beta$ . Из двух возможных положений этой точки ( $C$  и  $C'$ ) истинное следует выбрать с учетом последовательности ее положений при движении механизма.

У диады второй модификации (рис. 1.4.5) известны положения точки  $B$  вращательной пары и направляющей  $xx$ , которая представляет собой геометрический элемент поступательной пары. Как и в предыдущей диаде, определив положение внутренней вращательной пары (точки  $C$ ), найдем положения звеньев группы. Геометрическим местом

положений точки  $C$  звена 2 будет окружность  $\alpha\alpha$  радиуса  $BC$  с центром в точке  $B$ . Поскольку точка  $C$  звена 3 находится на постоянном расстоянии  $h_3$  от направляющей  $xx$ , то геометрическим местом положений этой точки будет прямая  $\beta\beta$ , параллельная  $xx$ . Точки пересечения окружности  $\alpha\alpha$  с прямой  $\beta\beta$  дадут возможные положения точки  $C$ .

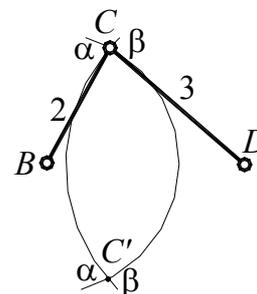


Рис. 1.4.4

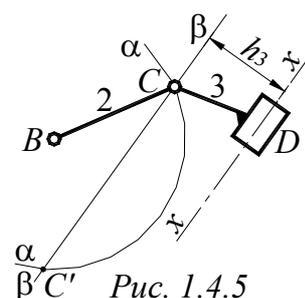


Рис. 1.4.5

В диаде третьей модификации (рис. 1.4.6) должны быть известными положения точек  $B$  и  $D$  вращательных пар, а также кратчайшие расстояния  $h_2$  и  $h_3$  от этих точек до направляющей  $xx$ . Необходимо определить положение направляющей, которое соответствует положению прямой, касательной к окружностям  $\alpha\alpha$  и  $\beta\beta$  радиусов  $h_2$  и  $h_3$ , проведенным из точек  $B$  и  $D$  как из центров. В диаде этой модификации задача по определению положений звеньев в общем случае также имеет несколько решений. Поэтому, определяя положение точки, принадлежащей внутренней паре, необходимо учитывать последовательность положений звеньев при движении механизма. Изображая кинематическую схему механизма, прежде всего, отмечают положения неподвижных геометрических элементов поступательных и вращательных кинематических пар. Затем ведущее звено устанавливают в заданное положение, и методами, изложенными выше, находят положения звеньев структурных групп.

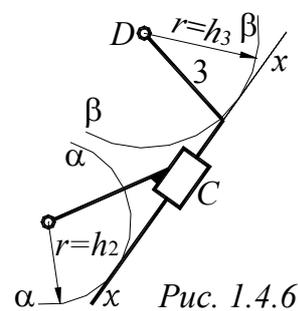


Рис. 1.4.6

На рис. 1.4.7 представлен ряд *последовательных* положений звеньев механизма, соответствующих полному циклу его движения, называемый *планом положений механизма*.

Непрерывные линии, соединяющие на плане последовательные положения одноименных точек, дают размеченные *траектории движения этих точек*.

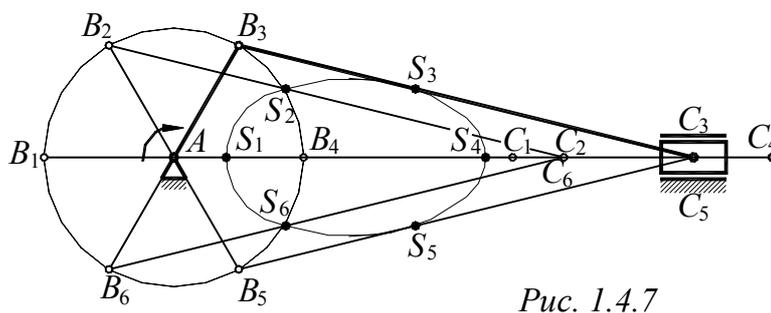


Рис. 1.4.7

Для большей наглядности и точности планы положений механизма рекомендуется строить в масштабе  $\mu_l$ . Под *масштабом* в теории механизмов понимается отношение какой-либо величины, измеренной в соответствующих единицах, к длине изображающего ее отрезка, измеренного в миллиметрах ( $\mu_l$  – масштаб длин и линейных перемещений).

#### 1.4.4. ПЛАНЫ СКОРОСТЕЙ И УСКОРЕНИЙ МЕХАНИЗМА

Целью *второй* и *третьей* задач кинематического анализа в общем случае является:

- определение скоростей точек и угловых скоростей звеньев;
- определение ускорений точек и угловых ускорений звеньев.

Так же как и при построении плана положений механизма построение планов скоростей и ускорений следует начинать с группы, которая образует кинематические пары с ведущим звеном и стойкой.

В этом случае скорости и ускорения геометрических элементов крайних пар группы оказываются известными, и задача сводится к определению аналогичных параметров точек, принадлежащих внутренним парам.

Указанное правило справедливо и для последующих групп механизма.

#### 1.4.4.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ ТОЧЕК ЗВЕНЬЕВ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ МЕТОДОМ ПЛАНОВ

Планом скоростей механизма называют векторные изображения скоростей характерных точек механизма, соответствующие заданному положению механизма, т.е. совокупности векторов, которые изображают *абсолютные* скорости точек звеньев, а отрезки, соединяющие концы векторов, – *относительные* скорости соответствующих точек звеньев при данном положении механизма. Векторы абсолютных скоростей на каждом плане откладывают от одной точки – *полюса*, обозначаемого на плане скоростей как  $p_v$ .

Определение скоростей звеньев механизмов методом планов отличается универсальностью и простотой. Так же преимуществом данного векторного метода является то, что в результате построения планов получают не только *величины*, но и *направления* скоростей заданных точек звеньев механизма.

Звенья плоских рычажных механизмов могут совершать поступательное, вращательное и сложное плоскопараллельное движение. Скорости точек этих звеньев определяются по формулам общей механики.

Рассмотрим звено  $BCD$  плоского механизма (рис. 1.4.8, а).

Пусть  $\underline{v}_B$ ,  $\underline{v}_C$ , и  $\underline{v}_D$  — скорости соответственно точек  $B$ ,  $C$  и  $D$ . Мгновенный центр скоростей звена (точка  $P_v$ ) находится в пересечении перпендикуляров, восставленных в этих точках к направлениям их скоростей. Поскольку отрезки  $p_vB$ ,  $p_vC$  и  $p_vD$  являются мгновенными радиусами вращения рассматриваемых точек, то *мгновенная угловая скорость звена* удовлетворяет условиям:

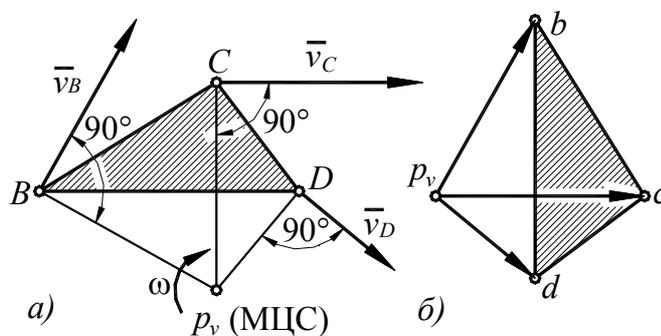


Рис. 1.4.8

$$\omega = \frac{v_B}{P_v B} = \frac{v_C}{P_v C} = \frac{v_D}{P_v D} \quad (1.4.2)$$

Выберем произвольную точку  $p_v$  (рис. 1.4.8, б) и проведем из нее лучи  $\overline{p_v b} = v_B$ ;  $\overline{p_v c} = v_C$ ;  $\overline{p_v d} = v_D$ .

Равенство  $\overline{p_v b} = v_B$ ; показывает, что вектор  $\overline{p_v b}$  изображает в некотором масштабе  $\mu_v \left( \frac{\text{м/с}}{\text{мм}} \right)$  вектор скорости точки  $B$ , т.е.  $v_B = \mu_v (p_v b)$ , где круглыми скобками обозначена длина отрезка в миллиметрах.

Соединяя концы лучей между собой, получаем фигуру  $p_v bcd$ , называемую *планом скоростей звена BCD*.

Точка  $p_v$  называется *полюсом плана*.

Как известно из общей механики:

$$\overline{v_C} = \overline{v_B} + \overline{v_{CB}}, \quad (1.4.3)$$

но

$$\overline{p_v c} = \overline{v_C}, \quad \overline{p_v b} = \overline{v_B},$$

следовательно, вектор скорости точки  $C$  в относительном вращательном движении звена вокруг точки  $B$ :

$$\overline{v_{CB}} = \overline{bc}.$$

Модуль этой скорости равен:

$$v_{CB} = \mu_v (bc).$$

Поскольку векторы  $\overline{p_v b}$ ,  $\overline{p_v c}$ , и  $\overline{p_v d}$  перпендикулярны соответствующим мгновенным радиусам вращения  $p_v B$ ,  $p_v C$  и  $p_v D$  и пропорциональны им, то фигура  $p_v bcd$  подобна фигуре  $p_v BCD$  и повернута относительно нее на  $90^\circ$  в сторону вращения звена.

*План скоростей звена* расположен сходственно со звеном, так как чередование букв при обходе треугольников  $bcd$  и  $BCD$  по контуру в одном и том же направлении одинаково.

Итак, *план скоростей звена* имеет следующие свойства:

1) векторы абсолютных скоростей точек звена своим началом имеют полюс плана;

2) векторы *относительных* скоростей соединяют на плане концы векторов *абсолютных* скоростей соответствующих точек;

3) план скоростей звена подобен его очертанию, сходственно с ним расположен, но повернут на  $90^\circ$  в сторону мгновенного вращения звена.

Планы скоростей, построенные из одного полюса для всех звеньев механизма в данном его положении, можно условно назвать *планом скоростей механизма*.

Однако *свойство подобия* к такому чертежу в целом *неприменимо*, хотя для отдельных звеньев оно остается в силе.

Для построения *планов скоростей механизма* необходимо знать размеры всех звеньев механизма и задан закон движения его ведущего звена.

Методику построения планов скоростей *характерных точек механизма* рассмотрим на примере построения указанных планов для шарнирного четырехзвенника (рис. 1.4.9, а).

Для заданного положения механизма шарнирного четырехзвенника построением планов скоростей и ускорений определим скорости характерных точек ( $B, C, D, E$ ) механизма, а также угловые скорости ( $\omega_2, \omega_3$ ) его звеньев.

Определяем скорость точки  $B$  кривошипа:

$$v_B = \omega_1 l_{AB}.$$

Из произвольного полюса  $p_v$  (рис. 1.4.9, б) проводим прямую  $p_v v$ , перпендикулярную кривошипу  $AB$ , в сторону его вращения. На прямой  $p_v v$  откладываем отрезок  $(p_v b)$ , изображающий в выбранном масштабе скорость точки  $B$ .

Далее переходим к построению плана скоростей для диады 2-3 первой модификации. Так как скорости точек  $B$  и  $D$  известны, остается найти скорость точки  $C$ . Но с точкой  $C$  совпадают две точки, из которых одна ( $C_2$ ) принадлежит шатуну, а другая ( $C_3$ ) – коромыслу. Очевидно:

$$\underline{v_{C_2}} = \underline{v_{C_3}} = \underline{v_C}.$$

Относя точку  $C$  сначала к звену 2, а затем к звену 3, получим:

$$\underline{v_C} = \underline{v_B} + \underline{v_{CB}};$$

$$\underline{v_C} = \underline{v_D} + \underline{v_{CD}},$$

откуда:

$$\underline{v_B} + \underline{v_{CB}} = \underline{v_D} + \underline{v_{CD}}. \quad (1.4.4)$$

Здесь и далее две черты под вектором показывают, что известны его *модуль* и *направление*, а одна черта – только *направление* вектора или *линия его действия*.

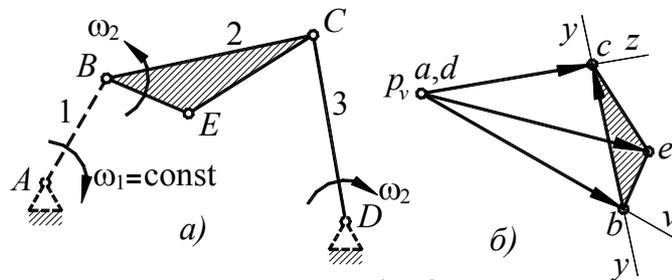


Рис. 1.4.9

Получено исходное векторное уравнение для построения плана скоростей структурных групп II класса второго порядка первой модификации.

Так как первый вектор левой части уравнения (1.4.4) уже построен, то через точку  $b$  плана проводим линию  $uu$  действия вектора  $v_{CB}$  перпендикулярно  $BC$ . Вектор  $\overline{v_D}$  равен нулю; следовательно, он обратился в точку  $d$ , совпадающую с полюсом плана.

Через точку  $d$  ( $p_v$ ) проводим линию  $p_vz$  действия вектора  $\overline{v_{CD}}$  перпендикулярно  $CD$ . Точка  $C$  пересечения прямых  $uu$  и  $p_vz$  определяет положение конца вектора скорости точки  $C$  механизма, а так как  $v_D = 0$ , то  $v_C = v_{CD}$ . Таким образом,

$$v_C = v_{CD} = \mu_v(p_v c);$$

$$v_{CB} = \mu_v(bc).$$

Абсолютная скорость точки  $E$  шатуна при известных скоростях его точек  $B$  и  $C$  определяется на основании свойства подобия плана скоростей. Для этого на отрезке  $(bc)$  плана как на основании необходимо построить треугольник  $bce$ , подобный треугольнику  $BCE$  и сходственно с ним расположенный. Соединив вершину  $e$  треугольника  $bce$  с полюсом  $p_v$ , получим вектор скорости точки  $E$ , модуль которой будет равен:

$$v_F = \mu_v(p_v e).$$

Угловую скорость шатуна 2 найдем по линейной скорости  $v_{CB}$  относительного движения точки  $C$  вокруг точки  $B$ :

$$\omega_2 = \frac{v_{CB}}{l_{BC}} = \frac{\mu_v(bc)}{\mu_l(BC)}.$$

Направление угловой скорости  $\omega_2$  определяется вектором  $\overline{v_{CB}}$ , если этот вектор, не меняя его направления, перенести с плана скоростей в точку  $C$  механизма.

Угловая скорость звена 3:

$$\omega_3 = \frac{v_{CD}}{l_{CD}} = \frac{\mu_v(p_v c)}{\mu_l(CD)}.$$

На рис. 1.4.9, *a* направления угловых скоростей  $\omega_2$  и  $\omega_3$  показаны круговыми стрелками.

#### 1.4.4.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЙ ТОЧЕК ЗВЕНЬЕВ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ МЕТОДОМ ПЛАНОВ

*Планом ускорений* механизма называют векторные изображения ускорений характерных точек механизма, соответствующие заданному

положению механизма, т.е. совокупности векторов, которые изображают *абсолютные* ускорения точек звеньев, а отрезки, соединяющие концы векторов, – *относительные* ускорения соответствующих точек звеньев *при данном положении механизма*.

Векторы абсолютных ускорений на каждом плане откладывают от одной точки – *полюса*, обозначаемого на плане скоростей буквой  $p_a$ .

Определение ускорений звеньев механизмов методом планов отличается универсальностью и простотой. Преимуществом этого векторного метода является то, что в результате построения планов получают не только *величины*, но и *направления* ускорений заданных точек звеньев механизма.

К построению плана *ускорений* можно приступить *после* определения *скоростей* точек механизма и *угловых скоростей* его звеньев.

Планом ускорений звена  $B CD$  (рис. 1.4.10, *а*) по аналогии с *планом скоростей* называется фигура  $p_a b c d$  (рис. 1.4.10, *б*), которую получим, если из произвольно выбранного полюса  $p_a$  проведем лучи  $\overline{p_a c} = \overline{a_C}$ ;  $\overline{p_a d} = \overline{a_D}$ ;  $\overline{p_a b} = \overline{a_B}$  и концы этих лучей соединим между собой.

*Свойства плана ускорений аналогичны свойствам плана скоростей.*

*Различие* заключается в том, что план ускорений повернут относительно звена не на прямой угол, а на угол  $180^\circ - \lambda$  в направлении мгновенного углового ускорения  $\varepsilon$  звена, причем:

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{a_B^\tau}{a_B^n} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2} \quad (1.4.5)$$

Нетрудно доказать, что  $\overline{a_{CB}} = \overline{bc}$  – полное ускорение точки  $C$  в относительном вращательном движении звена вокруг точки  $B$ . Модуль этого ускорения равен:

$$a_{CB} = \mu_a (bc),$$

где  $\mu_a \left[ \frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}} \right]$  – масштаб плана ускорений.

Полное ускорение точки  $C$  в относительном движении равно геометрической сумме *нормального* и *касательного* ускорений, т.е.:

$$\overline{a_{CB}} = \overline{a_{CB}^n} + \overline{a_{CB}^\tau}.$$

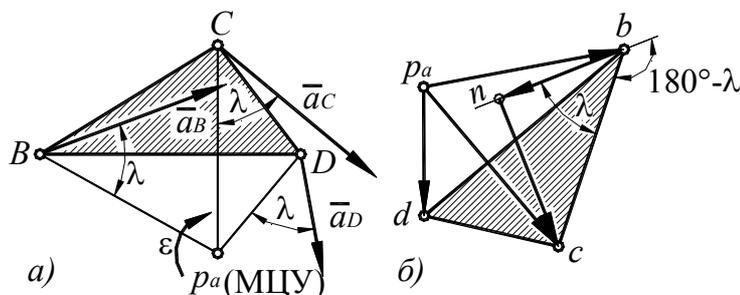


Рис. 1.4.10

При этом вектор  $\overline{a_{CB}^n}$  направлен вдоль  $BC$  от точки  $C$  к точке  $B$ , а линия действия вектора  $\overline{a_{CB}^\tau}$  перпендикулярна  $BC$ .

На плане ускорений соответственно имеем:

$$\overline{bc} = \overline{bn} + \overline{nc},$$

где  $\overline{bn} \perp BC$ , а  $\overline{nc} \perp BC$ .

Таким образом, абсолютное ускорение точки  $C$  звена  $BCD$ :

$$\overline{a_C} = \overline{a_B} + \overline{a_{CB}^n} + \overline{a_{CB}^\tau} \quad (1.4.6)$$

определяется из плана ускорений согласно векторному уравнению:

$$\overline{p_a c} = \overline{p_a b} + \overline{bn} + \overline{nc}.$$

Теорему о свойстве подобия плана ускорений нетрудно доказать, если учесть, что точка  $p_a$  на рис. 1.4.10,  $a$  представляет собой мгновенный центр ускорений. В этом случае векторы абсолютных ускорений  $\overline{a_B}$ ,  $\overline{a_C}$  и  $\overline{a_D}$  точек  $B$ ,  $C$  и  $D$  звена образуют с направлениями соответствующих мгновенных радиусов вращения  $p_a B$ ,  $p_a C$  и  $p_a D$  одинаковые углы  $\lambda$ .

Планы ускорений всех звеньев механизма в данном его положении, построенные при одном полюсе, называют планом ускорений механизма.

Основываясь на вышеизложенном, построим план ускорений для механизма, приведенного на рис. 1.4.9 (рис. 1.4.11,  $\epsilon$ ).

Пусть  $\omega_1 = \text{const}$ , тогда:

$$a_B = a_{BA}^n = \omega_1^2 l_{AB}.$$

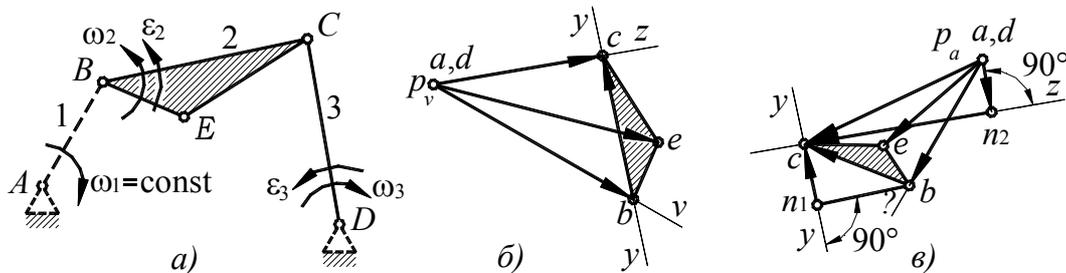


Рис. 1.4.11

Из произвольной точки  $p_a$  (рис. 1.4.11,  $\epsilon$ ) проводим прямую  $p_a v$  параллельно  $AB$  в направлении от  $B$  к  $A$ . Отрезок этой прямой ( $p_a b$ ) изображает в выбранном масштабе  $\mu_a$  ускорение точки  $B$ .

В структурной группе 2-3 известны абсолютные ускорения точек  $B$  и  $D$ .

Найдем ускорение точки  $C$ , имея в виду, что:

$$a_{C_2} = a_{C_3} = a_C.$$

Относя точку  $C$  сначала к звену 2, а затем к звену 3, имеем:

$$\overline{a_C} = \overline{a_B} + \overline{a_{CB}^n} + \overline{a_{CB}^\tau};$$

$$\overline{a_C} = \overline{a_D} + \overline{a_{CD}^n} + \overline{a_{CD}^\tau}.$$

Отсюда:

$$\overline{a_B} + \overline{a_{CB}^n} + \overline{a_{CB}^\tau} = \overline{a_D} + \overline{a_{CD}^n} + \overline{a_{CD}^\tau} \quad (1.4.7)$$

Получено исходное векторное уравнение для построения плана ускорений структурных групп II класса второго порядка первой модификации. В этом уравнении:

$$a_{CB}^n = \frac{v_{CB}^2}{l_{CB}} = \omega_2^2 l_{BC},$$

$$a_{CD}^n = \frac{v_{CD}^2}{l_{CD}} = \omega_3^2 l_{CD}.$$

На плане ускорений вектор  $\overline{a_{CB}^n}$  изображен отрезком  $(bn_1)$ , проведенным параллельно шатуну  $BC$  в направлении от  $C$  к  $B$ .

Линия  $uu$  действия вектора  $\overline{a_{CB}^\tau}$  проходит через точку  $n_1$  перпендикулярно  $BC$ .

Поскольку ускорение точки  $D$  равно нулю, то отрезок  $(p_a n_2)$  плана изображает вектор  $\overline{a_{CD}^n}$ , а линия  $zz$  действия вектора  $\overline{a_{CD}^\tau}$  проведена через точку  $n_2$ .

Точка пересечения прямых  $uu$  и  $zz$  определяет положение конца вектора ускорения точки  $C$  механизма.

Следовательно;

$$a_C = \mu_a(p_a c),$$

$$a_{CB}^\tau = \mu_a(n_1 c);$$

$$a_{CD}^\tau = \mu_a(n_2 c).$$

Так как:

$$\overline{a_{CB}} = \overline{a_{CB}^n} + \overline{a_{CB}^\tau},$$

$$\overline{a_{CD}} = \overline{a_{CD}^n} + \overline{a_{CD}^\tau},$$

то полные ускорения точки  $C$  во вращательном движении соответственно вокруг точек  $B$  и  $D$  определяются соотношениями:

$$a_{CB} = \mu_a(bc),$$

$$a_{CD} = \mu_a(dc).$$

На основании свойства подобия плана ускорений положение конца вектора абсолютного ускорения точки  $E$  шатуна найдем, если на отрезке  $(bc)$  плана построим треугольник  $bce$ , подобный треугольнику  $BCE$  и сходственно с ним расположенный.

Тогда:

$$a_T = \mu_a (p_a e).$$

Угловые ускорения  $\varepsilon_2$  шатуна и  $\varepsilon_3$  коромысла определим по касательным ускорениям  $a_{CB}^\tau$  и  $a_{CD}^\tau$ :

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{CB}^\tau}{l_{BC}} = \frac{\mu_a (n_1 c)}{\mu_l (BC)},$$

$$\varepsilon_3 = \frac{a_{CD}^\tau}{l_{CD}} = \frac{\mu_a (n_2 c)}{\mu_l (CD)}.$$

Векторы ускорений  $a_{CB}^\tau$  и  $a_{CD}^\tau$ , перенесенные с плана в точку  $C$  механизма, показывают направления угловых ускорений соответствующих звеньев на рис. 1.23, а направления  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_3$  обозначены круговыми стрелками.

## 1.4.5. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ МЕТОДОМ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ДИАГРАММ

### 1.4.5.1. ПОСТРОЕНИЕ ДИАГРАММ

*Кинематические диаграммы* представляют собой графическое изображение функциональной зависимости перемещения, скорости и ускорения точки или угла поворота, угловой скорости и углового ускорения вращающегося тела от заданного параметра. Если речь идет о движении точки или звена механизма, то этим параметром может быть либо время (кинематические диаграммы с параметром времени), либо обобщенная координата механизма – координата ведущей точки или угол поворота ведущего звена (кинематические диаграммы с параметром перемещений).

*Диаграммы перемещений* (линейных или угловых) могут быть получены в результате экспериментальных исследований или графических построений при решении задач по определению положений звеньев механизма за один цикл его движения.

*Кинематические диаграммы скоростей и ускорений* строят обычно либо по данным *планов скоростей и ускорений*, либо *графическим дифференцированием* диаграммы перемещений  $s = s(t)$  или  $\varphi = \varphi(t)$ . Рассмотрим этот метод исследования применительно к конкретному механизму.

Построим диаграммы  $s_C = s_C(t)$  и  $v_C = v_C(t)$  для точки  $C$  ползуна центрального кривошипно-ползунного механизма (рис. 1.4.12, *a*), кривошип  $AB$  которого вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega_1$ .

Способом, изложенным в разделе 1.4.3, размечаем траектории точек  $B$  и  $C$  механизма.

Отсчет перемещений точки  $C$  следует вести от одного из *крайних* положений ползуна, например, от левого.

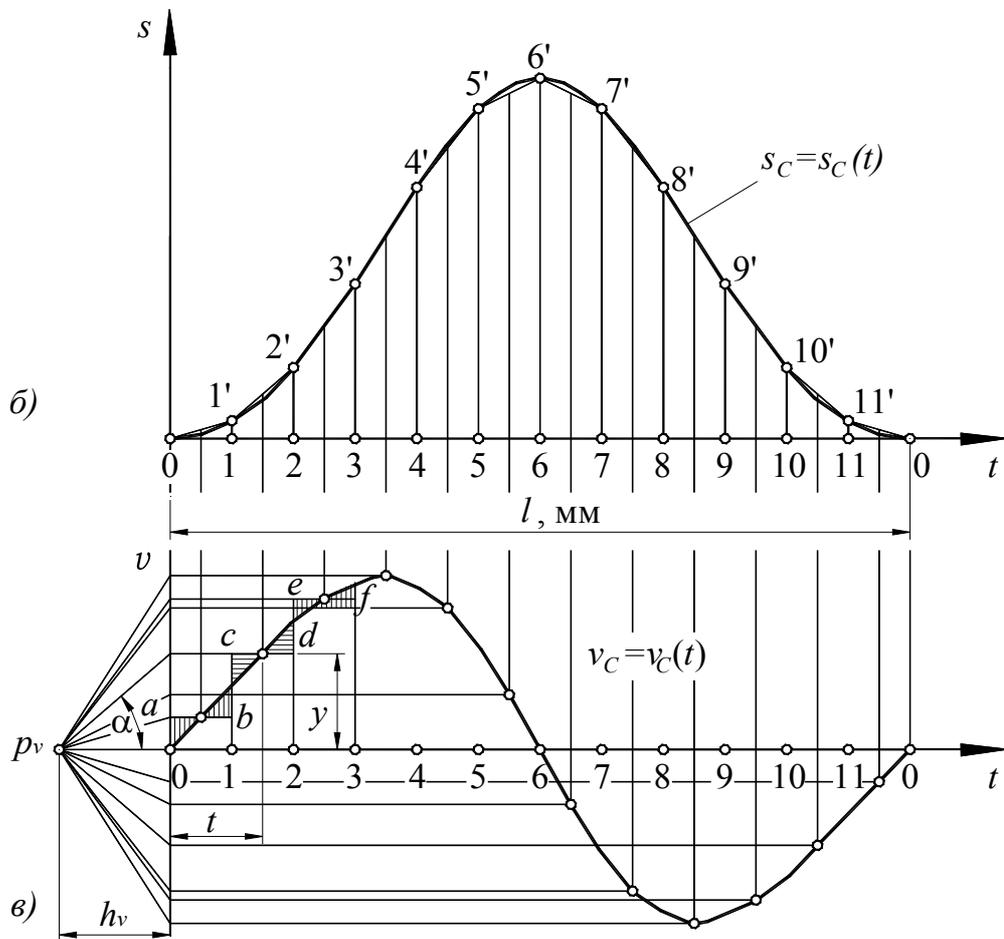
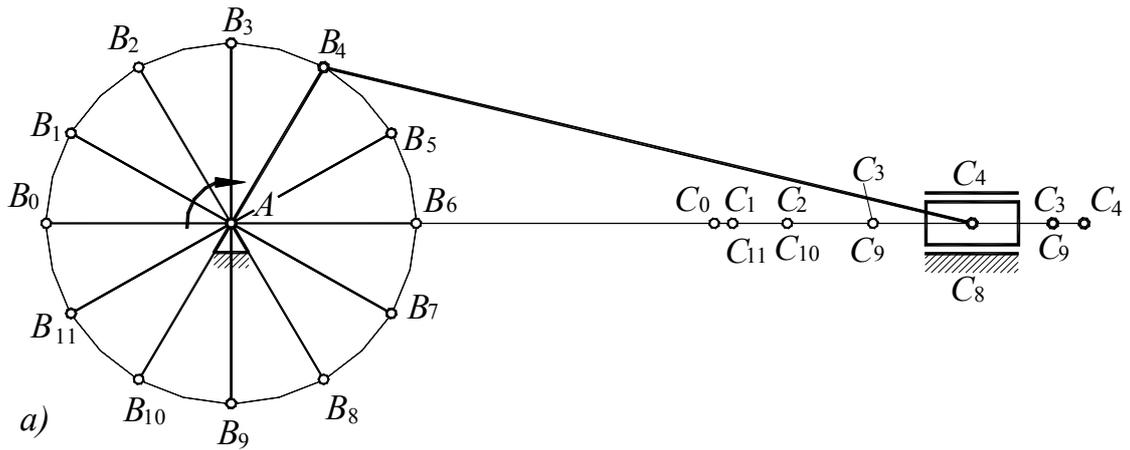


Рис. 1.4.12

По оси абсцисс системы координат  $s, t$  (рис. 1.4.12, б) отложим отрезок  $l$  (мм), изображающий в масштабе  $\mu_t$  [с/мм] время одного оборота кривошипа. Если угловая скорость кривошипа задана частотой  $n$  его вращения в минуту, то время одного оборота, выраженное в секундах:

$$T = \frac{60}{n}$$

и, следовательно, масштаб времени:

$$\mu_t = \frac{T}{l} = \frac{60}{nl}. \quad (1.4.8)$$

Отрезок  $l$  оси абсцисс делим на то же число равных частей, что и траекторию движения точки  $B$ .

Полученная кривая представляет собой диаграмму расстояний или удалений точки  $C$  от ее крайнего левого положения.

На ординатах, проведенных через точки 1, 2, 3, ... , откладываем соответствующие расстояния, пройденные точкой  $C$  (рис. 1.4.12, а) от крайнего левого положения  $C_0$  ползуна. Если отрезки  $C_0C_1$ ,  $C_0C_2$ , ... брать непосредственно со схемы, то масштаб  $\mu_s$  диаграммы  $s_C = s_C(t)$  по оси ординат будет равен масштабу  $\mu_l$  плана положений механизма.

Начиная с положения  $C_6$ , когда ползун займет крайнее правое положение, расстояния  $C_6C_7$ ,  $C_6C_8$ , ... вычитаем из ординаты  $(6-6')=C_0C_6$ .

Поскольку  $\omega_1 = \text{const}$ , то путь  $s_B$  точки  $B$  кривошипа, а также угол  $\varphi$  его поворота пропорциональны времени  $t$ . Следовательно, ось абсцисс на диаграмме будет также и осью линейного  $s_B$  и углового  $\varphi$  перемещений.

Таким образом, диаграмму  $s_C = s_C(t)$  можно рассматривать и как диаграммы  $s_C = s_C(s_B)$ ,  $s_C = s_C(\varphi)$ . Масштабы  $\mu_s$  и  $\mu_\varphi$  этих диаграмм по оси абсцисс соответственно равны:

$$\mu_s = \mu_l \frac{2\pi l_{AB}}{l},$$

$$\mu_\varphi = \frac{2\pi}{l}.$$

#### 1.4.5.2. ГРАФИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ (МЕТОД ХОРД)

На рис. 1.4.13 показан график функции  $s = s(t)$ , выражающей зависимость дуговой координаты движущейся точки от времени.

Координаты любой точки этой кривой, например точки  $a$ , могут быть выражены так:

$$t = \mu_t(OA);$$

$$s = \mu_s(Aa).$$

Определим среднюю скорость движения за промежуток времени  $\Delta t$ :

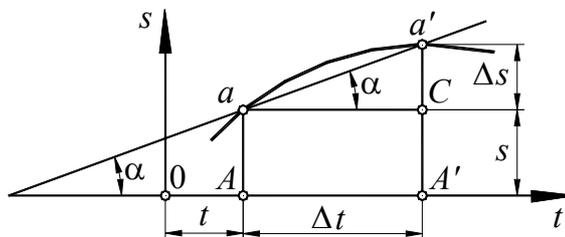


Рис. 1.4.13

$$v_{cp} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mu_s(a'c)}{\mu_t(AA')} = \frac{\mu_s}{\mu_t} \operatorname{tg} \alpha \quad (1.4.9)$$

где  $\alpha$  – угол, образуемый секущей (хордой)  $aa'$  с осью времени.

Аналогично по графику  $v = v(t)$  может быть найдено среднее за рассматриваемый интервал времени тангенциальное ускорение точки:

$$a_{cp}^{\tau} = \frac{\mu_v}{\mu_t} \operatorname{tg} \beta. \quad (1.4.10)$$

где  $\beta$  – угол на графике  $v = v(t)$ , соответствующий углу  $\alpha$  графика  $s = s(t)$ .

Итак, задана диаграмма  $s_C = s_C(t)$  (рис. 1.4.12, б). Требуется построить диаграмму  $v_C = v_C(t)$ . Эти диаграммы расположим одну под другой, принимая масштаб времени  $\mu_t$  для них общим. В пределах каждого из интервалов 0-1, 1-2, ... кривую  $s_C = s_C(t)$  заменим хордой.

На продолжении оси абсцисс диаграммы  $v_C = v_C(t)$  влево от начала 0 выбираем полюс  $p_v$ , и проводим через него лучи, параллельные хордам 01', 1'2', ... диаграммы  $s_C = s_C(t)$ . Лучи отсекают на оси 0v отрезки, пропорциональные средним скоростям точки C за промежутки времени соответственно 01, 12, ... . Принимая полученные отрезки за ординаты диаграммы  $(v, t)$ , построим ее в виде ступенчатой линии  $abcdef \dots$ .

Действительным графиком скорости является плавная кривая, пересекающая ступенчатую линию так, что одинаково заштрихованные на рис. 1.4.12, в площадки попарно равны.

Если промежутки времени 01, 12, ... достаточно малы, то можно считать, что точки кривой действительного графика скорости находятся на серединах соответствующих ступеней линии  $abcdef \dots$ .

Определим масштаб  $\mu_v$  скорости на диаграмме  $(v, t)$ . Допустим, что  $v$  – среднее значение скорости движущейся точки за промежутки времени 1-2; тогда:

$$v = \mu_v y = \mu_v h_v \operatorname{tg} \alpha.$$

С другой стороны, по формуле (1.4.9):

$$v = \frac{\mu_s}{\mu_t} \operatorname{tg} \alpha;$$

следовательно,

$$\mu_v h_v \operatorname{tg} \alpha = \frac{\mu_s}{\mu_t} \operatorname{tg} \alpha,$$

откуда:

$$\mu_v = \frac{\mu_s}{\mu_t h_v}. \quad (1.4.11)$$

Аналогичным образом по диаграмме  $(v, t)$  можно построить диаграмму  $(a, t)$ .

Масштаб  $\mu_a$  ускорения диаграммы  $(a, t)$  в соответствии с формулой (1.4.11) определится так:

$$\mu_a = \frac{\mu_v}{\mu_t h_a}. \quad (1.4.12)$$

В случае криволинейного движения точки путем графического дифференцирования можно получить лишь диаграмму тангенциальных (касательных) ускорений.

### 1.4.5.3. ГРАФИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Во многих случаях инженерной практики, например, при экспериментальном исследовании движения исполнительных органов машин, при проектировании кулачковых механизмов и т.д., приходится решать обратную задачу, а именно; *по диаграмме ускорений* строить диаграмму *скоростей* или диаграмму *перемещений*. Эту задачу можно решить методом *графического интегрирования*.

На рис. 1.4.14, *a* показана диаграмма ускорений  $(a, t)$ , причем масштабы  $\mu_a$  и  $\mu_t$  известны. Требуется построить диаграмму скоростей  $(v, t)$ .

Расположим диаграммы одну под другой так, как это показано на рис. 1.4.14.

Оси абсцисс обеих диаграмм разделим на малые промежутки  $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots$ , в течение которых движение можно рассматривать как равномерно-переменное с некоторым средним ускорением  $a'_1, a'_2, \dots$ . Величина этого ускорения должна быть такой, чтобы приращение скорости в течение каждого из промежутков соответствовало действительному, т.е. чтобы произведение, например  $a'_1 \Delta t_1$ , было равно площади криволинейной трапеции  $11'2'2$ , умноженной на произведение соответствующих масштабов. С этой целью криволинейную трапецию заменим прямоугольником, верхнюю сторону которого проводим так, чтобы заштрихованные площади, лежащие выше и ниже ее, были по возможности одинаковы. Высота каждого из прямоугольников, умноженная на масштаб  $\mu_a$ , даст соответствующее промежутку *среднее* ускорение  $a'$ .

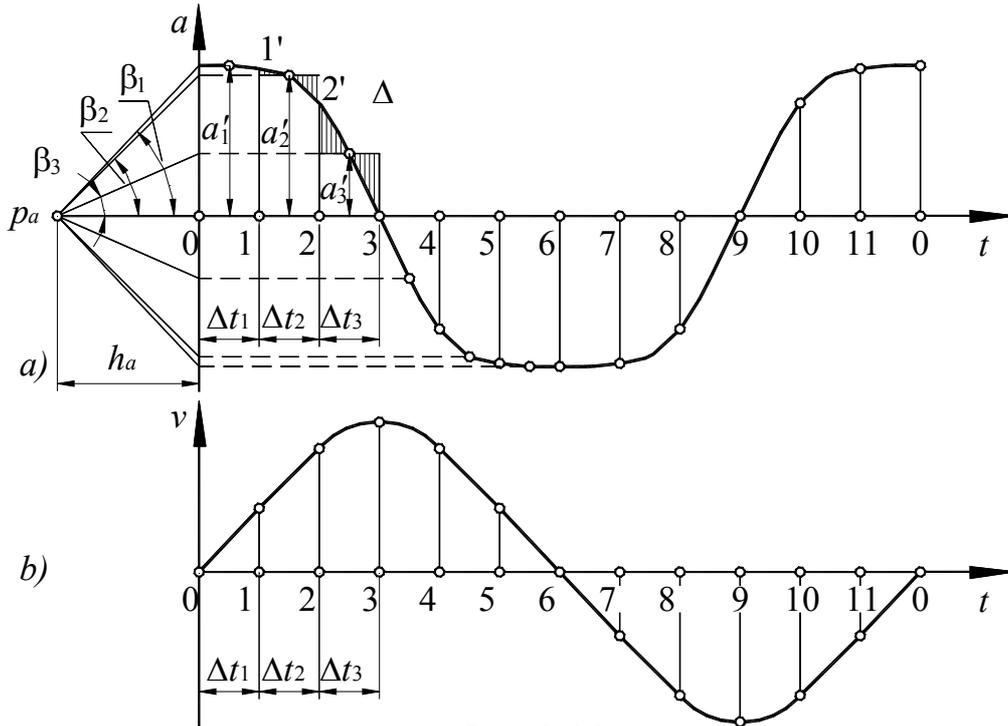


Рис. 1.4.14

Далее на некотором расстоянии  $h_a$  влево от начала 0 координатных осей графика  $(a, t)$  выбираем полюс  $p_a$ , из которого проводим лучи, отсекающие на оси  $0a$  отрезки  $a'_1, a'_2, \dots$ . Лучи образуют с осью  $0t$  углы  $\beta_1, \beta_2, \dots$ , тангенсы которых пропорциональны средним ускорениям  $a'_1, a'_2, \dots$ . Следовательно, углы  $\beta_1, \beta_2, \dots$  можно считать углами наклона графика скорости для соответствующих промежутков  $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots$ .

Поскольку истинное движение в течение каждого из этих промежутков рассматривалось как равномерно-переменное, то график скорости для любого промежутка представляет собой отрезок прямой линии, параллельной соответствующему лучу. Совокупность этих отрезков (рис. 1.4.14, б) дает ломаную линию  $01'2'3' \dots$ , заменяя которую плавной кривой, получаем диаграмму  $v = v(t)$ .

Масштаб  $\mu_v$  этой диаграммы при заданных масштабах  $\mu_a$  и  $\mu_t$  можно определить на основании формулы (1.4.12):

$$\mu_v = \mu_a \mu_t h_a. \quad (1.4.13)$$

Аналогично показанному по диаграмме  $(v, t)$  можно построить диаграмму  $(s, t)$  и на основании формулы (1.13) определить масштаб:

$$\mu_s = \mu_v \mu_t h_v. \quad (1.4.14)$$

Диаграммы  $(v, t)$  и  $(a, t)$  являются дифференциальными кривыми по отношению соответственно к диаграммам  $(s, t)$  и  $(v, t)$ .

С другой стороны, диаграммы  $(s, t)$  и  $(v, t)$  являются *интегральными кривыми* по отношению соответственно к диаграммам  $(v, t)$  и  $(a, t)$ .

При графическом дифференцировании и интегрировании необходимо иметь в виду, что экстремальной точке *интегральной* кривой соответствует точка пересечения *дифференциальной* кривой с осью абсцисс, а точке перегиба *интегральной* кривой соответствует экстремальная точка *дифференциальной* кривой.

#### 1.4.6. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ ДЛЯ ПЕРЕДАЧИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

##### 1.4.6.1. АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД КИНЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА КОЛЕСНЫХ МЕХАНИЗМОВ

###### 1.4.6.1.1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Основным кинематическим параметром любого колесного механизма (фрикционного или зубчатого) является *передаточное отношение*, представляющее собой отношение угловой скорости  $\omega_1$  звена ведущего к угловой скорости  $\omega_2$  звена ведомого, то есть:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \quad (1.4.15)$$

Передаточное отношение может быть выражено через конструктивные параметры механизма. Так, в случае фрикционной передачи с параллельными осями (рис. 1.3.6) передаточное отношение может быть выражено через радиусы  $r_1$  и  $r_2$  фрикционных катков.

В передаче *внешнего* касания (рис. 1.3.6, а) *направления вращения* ведущего 1 и ведомого 2 катков *противоположны*, поэтому угловую скорость одного из них можно рассматривать как положительную, а другого – как отрицательную величину.

*При отсутствии проскальзывания* скорость контактирующих точек обоих колес одинакова. Поэтому, обозначая указанную скорость через  $v$  и полагая, что  $\omega_1 > 0$ , а  $\omega_2 < 0$ , получаем:

$$v = \omega_1 r_1 = -\omega_2 r_2,$$

откуда:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{r_2}{r_1}. \quad (1.4.16)$$

При передаче *внутреннего* касания (рис. 1.3.6, б) *направления вращения* катков *одинаковы*, поэтому:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}. \quad (1.4.17)$$

В зубчатых передачах роль радиусов фрикционных катков играют радиусы  $r_1$  и  $r_2$  так называемых *начальных окружностей* находящихся в зацеплении зубчатых колес. Точки касания этих окружностей имеют *одинаковую* скорость. Кроме того, числа зубьев  $z_1$  и  $z_2$  указанных колес пропорциональны величинам  $r_1$  и  $r_2$  (**подробно эти зависимости рассмотрены в разделе 4.4**).

Поэтому:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \mp \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1}, \quad (1.4.18)$$

где «минус» относится к *внешнему*, а знак «плюс» – к *внутреннему* зацеплению.

#### 1.4.6.1.2. МЕХАНИЗМЫ С ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫМ СОЕДИНЕНИЕМ КОЛЕС

Особенность такого соединения (рис. 1.4.15, *a*) заключается в том, что на каждом валу имеется по одному колесу (1-3) и каждое промежуточное колесо касается двух других, находящихся на соседних валах.

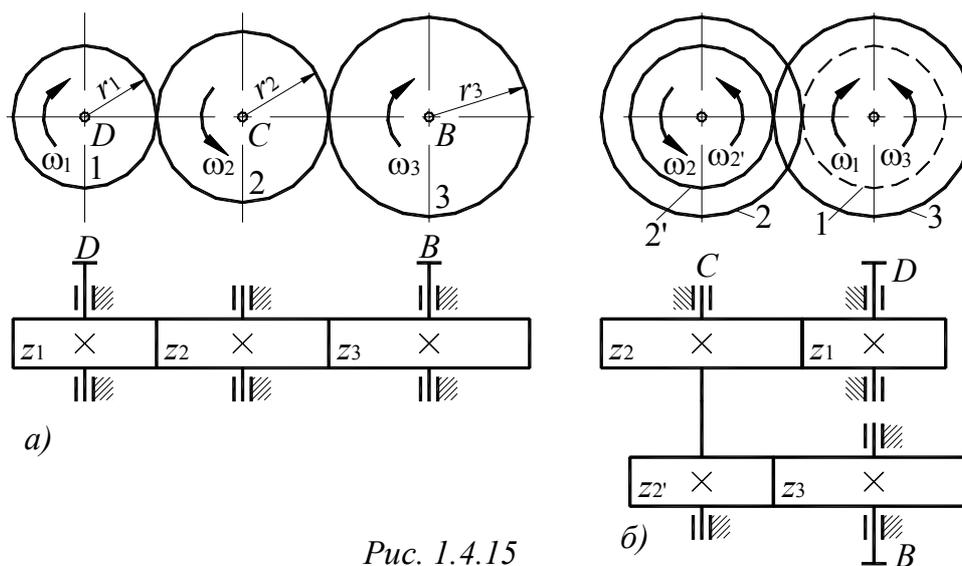


Рис. 1.4.15

Передаточное отношение от ведущего вала  $D$  к ведомому валу  $B$  выражается как:

$$i_{DB} = i_{13} = \frac{\omega_1}{\omega_3} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \frac{\omega_2}{\omega_3} = i_{12} i_{23}$$

или

$$i_{13} = \left( -\frac{r_2}{r_1} \right) \left( -\frac{r_3}{r_2} \right) = \frac{r_3}{r_1} = \frac{z_3}{z_1}.$$

В общем случае:

$$i_{1n} = (-1)^k \frac{r_n}{r_1} = (-1)^k \frac{z_n}{z_1}, \quad (1.4.19)$$

где  $k$  – число пар сопряженных колес внешнего касания (зацепления).

Из формулы (1.4.19) следует, что промежуточные колеса не влияют на величину передаточного отношения рассмотренного механизма. Поэтому такие колеса называют *паразитными*. Назначение *паразитных* колес сводится к *изменению направления* вращения *ведомого* звена механизма, а также к уменьшению габаритов последнего при значительных межосевых расстояниях.

#### 1.4.6.1.3. МЕХАНИЗМЫ СО СТУПЕНЧАТЫМ СОЕДИНЕНИЕМ КОЛЕС

При таком соединении (рис. 1.4.15, б) на каждом промежуточном валу закреплено по два колеса, а на ведущем  $D$  и ведомом  $B$  – по одному.

Передаточное отношение механизма с учетом того, что  $\omega_2 = \omega_2'$ , определяется как:

$$i_{DB} = i_{13} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \frac{\omega_2'}{\omega_3} = i_{12} i_{2'3},$$

или в общем случае:

$$\begin{aligned} i_{1n} &= \frac{\omega_1}{\omega_n} = i_{12} i_{2'3} i_{3'4} \dots i_{(n-1)'n} = (-1)^k \frac{r_2 r_3 r_4 \dots r_n}{r_1 r_2' r_3' \dots r_{(n-1)'}} = \\ &= (-1)^k \frac{z_2 z_3 z_4 \dots z_n}{z_1 z_2' z_3' \dots z_{(n-1)'}} \end{aligned} \quad (1.4.20)$$

где  $n$  – число пар сопряженных колес внешнего касания (зацепления).

Таким образом, *ступенчатое* соединение колес позволяет реализовать большое передаточное отношение, поскольку его величина оказывается равной *произведению* передаточных отношений отдельных ступеней.

#### 1.4.6.1.4. ПЛАНЕТАРНЫЕ ПЕРЕДАЧИ

Кинематическое исследование планетарных передач в общем случае сводится к установлению величины и знака передаточного отношения и к определению угловых скоростей звеньев.

В данном курсе рассмотрены наиболее распространенные типы планетарных передач:

$AA$  (редуктор Давида) — с двумя *внешними* зацеплениями (рис. 4.4.77, а);

$AJ$  — с одним *внешним*, одним *внутренним* зацеплением и *парным* блоком саттелитов (рис. 4.4.77, б);

$JJ$  (редуктор Давида) — с двумя внутренними зацеплениями (рис. 4.4.77, в);

$\overline{AJ}$  (редуктор Джеймса) — однородная планетарная передача с одним внешним, одним внутренним зацеплением и одиночным сателлитом (рис. 4.4.77, г).

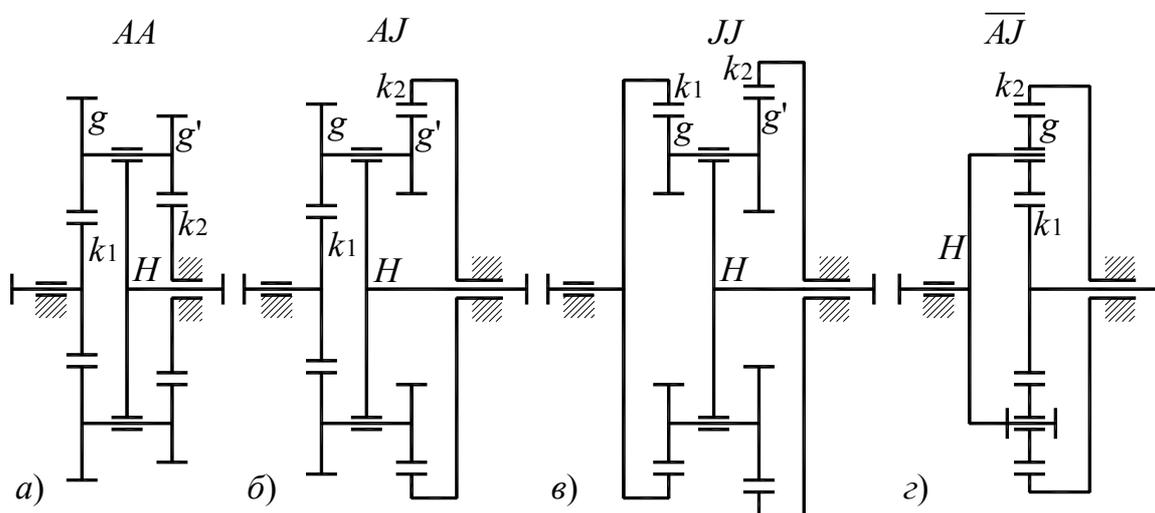


Рис. 1.4.16

Приведенные на рис. 4.4.77 механизмы могут обеспечить как понижение числа оборотов от ведущего звена к ведомому (редукторы), так и повышение числа оборотов (мультипликаторы).

Однако, вследствие возможного самоторможения или получения механизма с низким КПД, планетарные передачи в качестве мультипликаторов обычно не применяют.

Пусть каждое из зубчатых колес механизмов, изображенных на рис. 1.4.16, имеет:

— угловые скорости колес:  $\omega_{k_1}$ ,  $\omega_g = \omega_{g'} = \omega_{g,g'}$ ,  $\omega_{k_2}$ .

— угловую скорость водила  $\omega_H$ .

Для получения формулы, связывающей угловые скорости  $\omega_{k_1}$ ,  $\omega_{k_2}$ ,  $\omega_H$  звеньев  $k_1$ ,  $k_2$  и  $H$ , применим метод Виллиса, основанный на принципе приведения движения. Этот метод заключается в следующем.

Всем звеньям планетарного механизма сообщается дополнительное вращение с угловой скоростью, равной по величине, но противоположной по направлению угловой скорости водила  $H$ . Вследствие этого водило становится неподвижным, а планетарный механизм превращается в обычную передачу с неподвижными геометрическими осями валов. Относительное движение звеньев планетарной передачи при этом остается таким же, каким оно было до остановки водила.

Механизм, полученный вследствие приведения движения, называют *приведенным*.

Условимся в дальнейшем передаточное отношение обозначать буквой  $i$  с *тремя индексами*.

*Верхний* индекс в скобках соответствует действительно неподвижному звену или звену, угловая скорость которого принимается равной нулю. Этот индекс проставляется и у обозначения угловых скоростей звеньев передачи.

Два индекса *внизу* обозначают звенья, между которыми устанавливается передаточное отношение.

Из угловой скорости каждого звена вычтем угловую скорость водила  $\omega_H$ . В этом случае:

— водило  $H$  будет остановлено:

$$(\omega_H = 0),$$

— колесо  $k_1$  будет вращаться с угловой скоростью  $\omega_{k_1}^{(H)}$ :

$$\omega_{k_1}^{(H)} = \omega_{k_1} - \omega_H,$$

— саттелиты  $g$  и  $g'$  будут вращаться с угловой скоростью  $\omega_{g,g'}^{(H)}$ :

$$\omega_{g,g'}^{(H)} = \omega_{g,g'} - \omega_H,$$

— колесо  $k_2$  будет вращаться с угловой скоростью  $\omega_{k_2}^{(H)}$ :

$$\omega_{k_2}^{(H)} = \omega_{k_2} - \omega_H.$$

Следовательно, передаточное отношение *приведенного* механизма  $i_{k_1 k_2}^{(H)}$ , как обычного *рядового* механизма с *неподвижными* осями, равно:

$$i_{k_1 k_2}^{(H)} = \frac{\omega_{k_1}^{(H)}}{\omega_{k_2}^{(H)}} = \frac{\omega_{k_1} - \omega_H}{\omega_{k_2} - \omega_H}. \quad (1.4.21)$$

В формуле (1.4.21), называемой *формулой Виллиса*,  $\omega_{k_1}$ ,  $\omega_{k_2}$ ,  $\omega_H$  обозначают *фактические* угловые скорости вращения центральных колес  $k_1$  и  $k_2$  и водила  $H$  планетарного механизма.

При *неподвижном* звене  $k_2$  из формулы (1.4.21) получим:

$$i_{k_1 k_2}^{(H)} = 1 - \frac{\omega_{k_1}}{\omega_H}. \quad (1.4.22)$$

Так как отношение  $\frac{\omega_{k_1}}{\omega_H}$  является передаточным отношением планетарного механизма от зубчатого колеса  $k_1$  к водилу  $H$   $i_{k_1 H}^{(k_2)}$ , формула (1.4.22) может быть представлена в виде:

$$i_{k_1 H}^{(k_2)} = \frac{\omega_{k_1}}{\omega_H}. \quad (1.4.23)$$

или

$$i_{k_1 H}^{(k_2)} = 1 - i_{k_1 k_2}^{(H)}. \quad (1.4.24)$$

Передаточное отношение *приведенного* (рядового) механизма равно (см. разделы 1.4.6.2 и 1.4.6.3):

$$i_{k_1 k_2}^{(H)} = (-1)^n \frac{z_g z_{k_2}}{z_{k_1} z_{g'}}, \quad (1.4.25)$$

где  $n$  — число пар колес *внешнего* зацепления.

Для механизма  $\overline{AJ}$  в формуле (1.4.25) следует принять:

$$z_g = z_{g'}. \quad (1.4.26)$$

Передаточное отношение от водила  $H$  к зубчатому колесу  $k_1$  (при неподвижном зубчатом колесе  $k_2$ )  $i_{H k_1}^{(k_2)}$  равно:

$$i_{H k_1}^{(k_2)} = \frac{1}{i_{k_1 H}^{(k_2)}} = \frac{1}{1 - i_{k_1 k_2}^{(H)}}. \quad (1.4.27)$$

Поскольку передаточное отношение планетарного механизма равно

$$i_{k_1 H}^{k_2} = \frac{\omega_{k_1}}{\omega_H} = 1 - (-1)^n \frac{z_g z_{k_2}}{z_{k_1} z_{g'}}, \quad (1.4.28)$$

то при известных числах зубьев зубчатых колес и заданной угловой скорости  $\omega_H$  (или  $\omega_{k_1}$ ) легко находится угловая скорость  $\omega_{k_1}$  (или  $\omega_H$ ):

$$\omega_{k_1} = \omega_H \left[ 1 - (-1)^n \frac{z_g z_{k_2}}{z_{k_1} z_{g'}} \right] \quad (1.4.29)$$

$$\omega_H = \frac{\omega_{k_1}}{1 - (-1)^n \frac{z_g z_{k_2}}{z_{k_1} z_{g'}}}. \quad (1.4.30)$$

Угловая скорость сателлитов  $g$  и  $g'$  ( $\omega_{g, g'}$ ) находится по формуле (1.4.21):

$$i_{g'k_2}^{(H)} = \frac{\omega_{g'}^{(H)}}{\omega_{k_2}^{(H)}} = \frac{\omega_{g'} - \omega_H}{\omega_{k_2} - \omega_H}. \quad (1.4.31)$$

Учитывая, что в рассматриваемых планетарных передачах  $\omega_{k_2} = 0$ , из формулы (1.4.31) получим:

$$i_{g'k_2}^{(H)} = 1 - \frac{\omega_{g'}}{\omega_H}, \quad (1.4.32)$$

откуда:

$$\omega_{g'} = \omega_H \left( 1 - i_{g'k_2}^{(H)} \right). \quad (1.4.33)$$

Поскольку:

$$i_{g'k_2}^{(H)} = \mp \frac{z_{k_2}}{z_{g'}}, \quad (1.4.34)$$

где знак «-» — при *внешнем* зацеплении саттелита  $g'$  и центрального колеса  $k_2$ ;

знак «+» — при *внутреннем* зацеплении саттелита  $g'$  и центрального колеса  $k_2$ ,

формулу (1.4.33) можно представить в следующем виде:

$$\omega_{g'} = \omega_H \left( 1 \pm \frac{z_{k_2}}{z_{g'}} \right). \quad (1.4.35)$$

где знак «+» — при *внешнем* зацеплении саттелита  $g'$  и центрального колеса  $k_2$ ;

знак «-» — при *внутреннем* зацеплении саттелита  $g'$  и центрального колеса  $k_2$ .

*Теоретически* передаточные отношения, показанные на схеме механизмов, могут принимать значения, приведенные в табл. 1.4.2.

Таблица 1.4.2

Вид механизма	Передаточные отношения		
	$i_{k_1k_2}^{(H)}$	$i_{k_1H}^{(k_2)}$	$i_{Hk_1}^{(k_2)}$
$AA, JJ$	$>0$	$<1$	$<0; >1$
$AJ, \overline{AJ}$	$<0$	$>1$	$>0$

На величину передаточного отношения накладывают ограничения технологические соображения, число сателлитов  $K_{g,g'}$ , условие правильного зацепления, КПД механизма и некоторые другие факторы. Поэтому в табл. 1.4.3 приведены пределы передаточных отношений рассматриваемых механизмов, наиболее часто встречающиеся в практике.

Таблица 1.4.3

Механизм	Рекомендуемые пределы передаточных отношений	
$AA$	$-60 \leq i_{k_1 H}^{(k_2)} \leq -10$	$10 \leq i_{H, k_1}^{(k_2)} \leq 100$
$AJ$	$10 \leq i_{k_1, H}^{(k_2)} \leq 20$	$0,1 \leq i_{H, k_1}^{(k_2)} < 1$
$JJ$	$3 \leq i_{k_1, H}^{(k_2)} \leq 10$	$0,15 \leq i_{H, k_1}^{(k_2)} < 1$
$\overline{AJ}$	$20 \leq i_{k_1, H}^{(k_2)} \leq 100$	$8 \leq i_{H, k_1}^{(k_2)} \leq 30$

### 1.4.6.2. ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД КИНЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА КОЛЕСНЫХ МЕХАНИЗМОВ

#### 1.4.6.2.1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

В основе метода лежит построение планов (картин) линейных и угловых скоростей звеньев механизма.

Если твердое тело (рис. 1.4.17) вращается вокруг центра  $O$ , то скорости точек, лежащих на прямой  $OA$ , перпендикулярны к этой прямой и пропорциональны расстояниям до центра  $O$ , поэтому их концы располагаются на прямой  $\mathcal{Q}\mathcal{Q}$ , проходящей через этот центр.

Треугольник  $OBV'$  (или  $OAA'$ ) называется картиной линейных скоростей звена, а прямая  $\mathcal{Q}\mathcal{Q}$  – *тэта-линией* ( $\mathcal{Q}$ -линией).

Тангенс угла  $\theta$  наклона  $\mathcal{Q}$ -линии выражается так:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{(BB')}{(OB)} = \frac{\mu_l v_B}{\mu_v r_B} = \omega \frac{\mu_l}{\mu_v}. \quad (1.4.36)$$

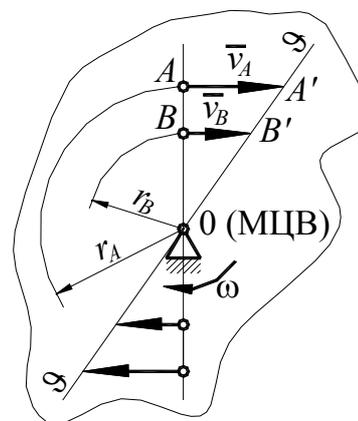


Рис. 1.4.17

#### 1.4.6.2.2. МЕХАНИЗМЫ С ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫМ СОЕДИНЕНИЕМ КОЛЕС

На рис. 1.4.18, а в некотором масштабе  $\mu_l$  изображена схема простой двухступенчатой передачи, для которой известны диаметры начальных окружностей всех колес и угловая скорость  $\omega_1$  ведущего вала  $D$ .

Справа от схемы (рис. 1.4.18, б) показана линия  $xx$ , на которой расположены центры вращения колес, снесенные в одну из направляющих плоскостей механизма.

На прямую  $xx$  проектируем характерные точки передачи – центры вращения  $O_1, O_{2,2'}, O_3$  и точки  $A, B$  контакта сопряженных колес.

Для ведущего звена:

$$v_{O_1} = 0,$$

$$v_A = \omega_1 r_1.$$

От точки  $A$  линии  $xx$  перпендикулярно последней откладываем отрезок  $(AA')$ , изображающий в выбранном масштабе  $\mu_v$  вектор  $\overline{v_A}$ . Соединяя точки  $O_1$  и  $A'$ , получим  $\mathcal{G}_1$  – линию звена 1 – геометрическое место концов скоростей всех точек отрезка  $O_1A$ .

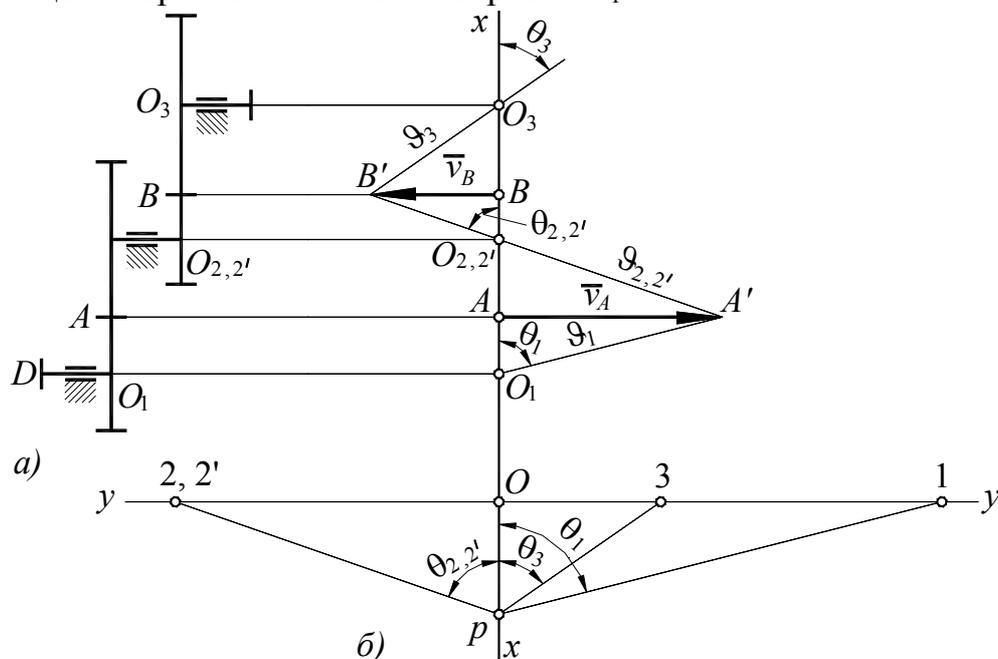


Рис. 1.4.18

Поскольку в точке  $A$  колеса 1 и 2 имеют одну и ту же линейную скорость  $\overline{v_A}$ , а в точке  $O_{2,2'}$  скорость колес 2 и 2' равна нулю, то для блока колес 2-2' также известны скорости двух точек. Соединяя точки  $A$  и  $O_{2,2'}$ , строим  $\mathcal{G}_{2,2'}$ -линию. Продолжая эту линию до пересечения с прямой, проведенной через точку  $B$  перпендикулярно  $xx$ , получаем отрезок  $BB'$ , изображающий в масштабе  $\mu_v$  линейную скорость точки  $B$  колеса 2', а следовательно,

и колеса 3. Для построения  $\mathfrak{V}_3$ -линии достаточно соединить точку  $B$  с точкой  $O_3$ . Таким образом, план линейных скоростей передачи построен. Заметим, что  $\mathfrak{V}$ -линия неподвижного звена передачи совпадает с прямой  $xx$ .

Для построения плана угловых скоростей проводим линию  $yy$  перпендикулярно прямой  $xx$ . От точки  $O$  пересечения прямых  $xx$  и  $yy$  по линии  $xx$  откладываем произвольный отрезок  $Op$  и через точку  $p$  проводим лучи, параллельные  $\mathfrak{V}$ -линиям звеньев передачи. Точки пересечения лучей с прямой  $yy$  обозначаем индексами соответствующих  $\mathfrak{V}$ -линий.

Полученная фигура (рис. 1.4.17, б) называется *планом*, или *картиной угловых скоростей* механизма, так как отрезки  $(O1)$ ,  $(O2)$ ,  $(O3)$  прямой  $yy$  пропорциональны угловым скоростям соответствующих звеньев механизма.

Из планов линейных и угловых скоростей соответственно имеем:

$$\omega_1 = \frac{\mu_v(AA')}{\mu_l(O_1A)} = \frac{\mu_v}{\mu_l} \operatorname{tg}\theta_1;$$

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{(O1)}{(Op)}.$$

Следовательно,

$$\omega_1 = \frac{\mu_v}{\mu_l(O_1A)}(O1).$$

Значение дроби одинаково для всех звеньев передачи и представляет собой масштаб  $\mu_\omega$  угловых скоростей, поэтому:

$$\omega_1 = \mu_\omega(O1);$$

$$\omega_{22'} = \mu_\omega(O2);$$

$$\omega_3 = \mu_\omega(O3).$$

#### 1.4.6.2.3. ПЛАНЕТАРНЫЕ ПЕРЕДАЧИ

Рассмотрим простую планетарную передачу (рис. 1.4.19). Ведущим в передаче является вал  $D$  солнечной шестерни  $a$ , ведомым — вал  $B$  водила  $H$ , неподвижным звеном — коронное колесо  $b$ .

Справа от схемы построим картины линейных и угловых скоростей.

Определив величину скорости точки 1 солнечной шестерни, отложим вектор этой скорости в виде отрезка  $(ll')$  и проведем  $\mathfrak{V}_a$ -линию, соединив точку  $l'$  с точкой  $O_a$ . Поскольку в точке  $l$  колесо  $a$  и сателлит  $g$  имеют одинаковую линейную скорость, а в точке  $t$  скорости колеса  $b$ , а значит и саттелита  $g'$  равны нулю, то, соединив точки  $l'$  и  $t$ ,

получим  $\mathfrak{D}_{g,g'}$ -линию блока сателлитных колес. Определив далее линейную скорость центра сателлитов, вектор которой изображен отрезком  $O_{g,g'}O'_{g,g'}$ , проведем  $\mathfrak{D}_H$ -линию водила.  $\mathfrak{D}$ -линия неподвижного звена (коронного колеса  $b$ ) совпадает на картине линейных скоростей с прямой  $xx$ , а на картине угловых скоростей — с отрезком  $pO$ .

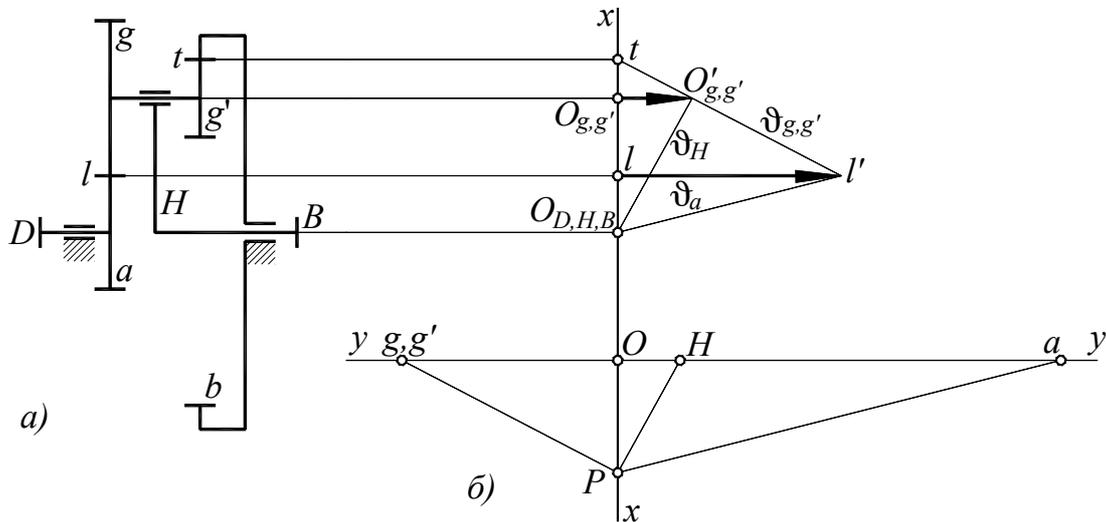


Рис. 1.4.19

Абсолютные угловые скорости звеньев отсчитывают от точки  $O$  прямой  $yy$ , а относительные — от точки той же прямой  $yy$ , соответствующей звену, по отношению к которому рассматривается движение. Так, угловая скорость  $\omega_g$  сателлита  $g$  в абсолютном движении изображается в масштабе  $\mu_\omega$  отрезком  $Og$ , а в движении относительно водила ( $\omega_g - \omega_H$ ) — отрезком  $Hg$ .

Построение картины линейных скоростей для замкнутых планетарных передач типа  $C-I$  (рис. 1.4.20) следует начинать с вала замыкания, хотя этот вал может и не быть ведущим, как это имеет место в рассматриваемом случае (начав построение картины скоростей с вала  $D$

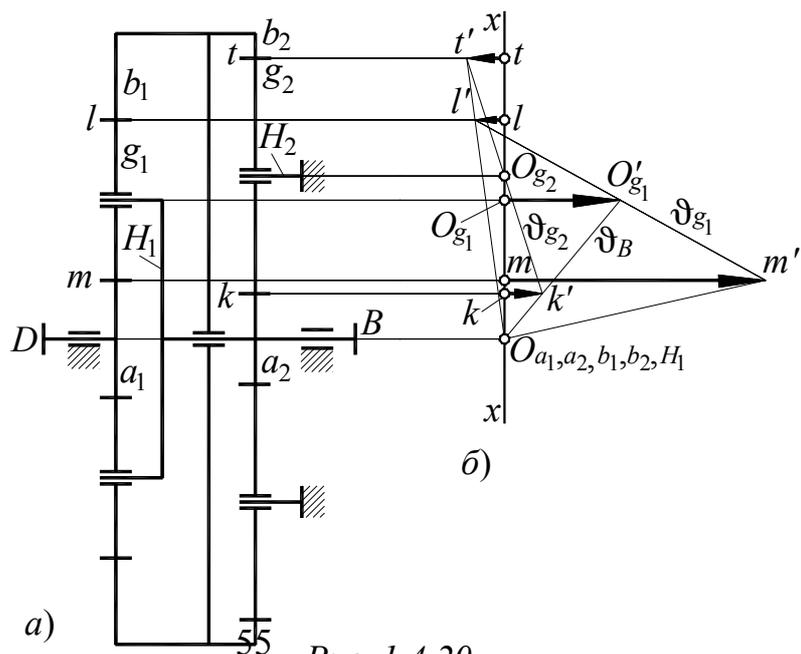


Рис. 1.4.20

солнечной шестерни  $a_1$ , нельзя определить линейную скорость второй точки для сателлита  $g_1$ , и дальнейшее построение окажется невозможным).

Через точку  $O_{H_1, a_2}$  под произвольным углом к линии  $xx$  проведем  $\mathfrak{S}_B$ -линию ведомого звена — вала замыкания. Обозначим на картине векторы окружных скоростей точек  $k$  и  $O_{g_1}$  этого звена, имея, конечно, в виду, что действительная величина скоростей этих точек пока неизвестна, поскольку неизвестен масштаб  $\mu_v$  картины. Построив далее  $\mathfrak{S}_{g_2}$ -линию, найдем скорость точки  $t$  блока коронных колес  $b_1 b_2$  и с помощью  $\mathfrak{S}_{b_1 b_2}$ -линии определим скорость точки  $l$ .

Таким образом, для сателлита  $g_1$  оказываются известными скорости двух точек:  $l$  и  $O_{g_1}$ . Через концы векторов скоростей этих точек проведена  $\mathfrak{S}_{g_1}$ -линия, посредством которой найдена скорость точки  $m$ , а, следовательно, и положение  $\mathfrak{S}_D$ -линии ведущего звена передачи.

Закончив построение картины линейных скоростей, можно определить и масштаб  $\mu_v$ , в котором она построена, так как отрезок  $mm'$  картины представляет собой вектор скорости полюса зацепления ведущей шестерни  $a_1$ :

$$\mu_v = \frac{v_m}{(mm')},$$

где

$$v_m = \omega_{a_1} r_{a_1} = \omega_D r_{a_1}.$$

## 1.5. ВВЕДЕНИЕ В ДИНАМИКУ МЕХАНИЗМОВ

### 1.5.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

*Динамика механизмов* является разделом механики, в котором изучается движение механизмов с учетом действующих на них сил. В этом разделе устанавливаются общие зависимости между кинематическими параметрами механизма (его обобщенными координатами, скоростями и ускорениями), массами его звеньев и действующими на него силами, выражающиеся дифференциальными уравнениями.

Пользуясь этими уравнениями, можно решать две основные задачи динамики механизмов.

*Первая задача* сводится к тому, что по заданному аналитически или графически закону движения механизма требуется определить силы, дейст-

вующие на механизм. *Аналитически* закон движения механизма задается уравнениями, выражающими зависимость его обобщенных координат (в случае механизма с одной степенью подвижности одной координаты) от времени. При *графическом* задании закона движения механизма эти зависимости задаются в виде соответствующих графиков.

*Вторая задача* заключается в том, что по заданным силам требуется определить закон движения механизма.

В данном курсе рассмотрены механизмы только с *жесткими* звеньями, обладающие *одной степенью* свободы. Именно такие механизмы имеют в настоящее время преимущественное распространение. Основные уравнения движения этих механизмов в конечной и дифференциальной форме вытекают из *теоремы об изменении кинетической энергии*. Эта теорема наряду с *принципом Даламбера* и дает возможность решать большой круг вопросов, которые ставит перед теорией механизмов современная техническая практика.

В некоторых случаях приходится применять и другие общие теоремы динамики системы (о количестве движения, кинетическом моменте, движении центра масс).

### 1.5.2. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ МЕХАНИЗМА. ПРИВЕДЕНИЕ МАСС В МЕХАНИЗМАХ

Кинетическая энергия является важнейшей динамической характеристикой механизма. Обозначая через  $W$  кинетическую энергию всего механизма, а через  $W_v$  – кинетическую энергию его звеньев, имеем:

$$W = \sum_{v=1}^n W_v,$$

где  $n$  – число подвижных звеньев механизма.

Если звенья механизма представляют собой твердые тела и совершают плоскопараллельное движение, то:

$$W_v = \frac{m_v v_v^2}{2} + \frac{J_v \omega_v^2}{2} \quad (v=1, 2, \dots, n),$$

где  $m_v$  – масса соответствующего звена;

$v_v$  – скорость его центра масс;

$J_v$  – момент инерции звена относительно центральной оси, перпендикулярной плоскости его движения;

$\omega_v$  – угловая скорость звена.

Если звено обладает только *поступательным* движением, то второе слагаемое в выражении его кинетической энергии обращается в нуль.

Если же звено совершает только *вращательное* движение вокруг неподвижной оси, то кинетическую энергию звена удобнее определять по формуле:

$$W_v = \frac{J_v \omega_v^2}{2},$$

где  $J_v$  – момент инерции звена относительно оси вращения.

Кинетическая энергия всего механизма:

$$W = \sum_{v=1}^n \left( \frac{m_v v_v^2}{2} + \frac{J_v \omega_v^2}{2} \right). \quad (1.5.1)$$

При решении ряда задач динамики механизм с одной степенью свободы можно заменить одной *эквивалентной* ему материальной точкой или вращающимся вокруг неподвижной оси телом. Хотя масса этой заменяющей точки и момент инерции этого заменяющего тела в общем случае и являются величинами переменными, тем не менее, такая замена позволяет получить динамические уравнения движения механизма в более простом и компактном виде и облегчает задачу составления указанных уравнений. Для осуществления такой замены вводим понятие *приведенной массы* и *приведенного момента инерции механизма*.

*Приведенной к данной точке массой механизма* называется воображаемая масса, сосредоточенная в данной точке данного звена, кинетическая энергия которой равна кинетической энергии всего механизма.

Пользуясь этим определением, для *кинетической* энергии механизма получаем следующее выражение:

$$W = \frac{m_{\text{пр}} v^2}{2} \quad (1.5.2)$$

где  $m_{\text{пр}}$  – приведенная масса механизма;

$v$  – скорость точки приведения.

В качестве точки приведения обычно выбирают точку ведущего звена (например, палец кривошипа кривошипно-ползунного механизма).

Из равенств (1.5.1) и (1.5.2) вытекает:

$$\frac{m_{\text{пр}} v^2}{2} = \sum_{v=1}^n \left( \frac{m_v v_v^2}{2} + \frac{J_v \omega_v^2}{2} \right),$$

откуда:

$$m_{\text{пр}} = \sum_{v=1}^n \left[ m_v \left( \frac{v_v}{v} \right)^2 + J_v \left( \frac{\omega_v}{v} \right)^2 \right]. \quad (1.5.3)$$

Аналогично приводятся движущиеся массы механизма к какому-либо его вращающемуся вокруг неподвижной оси звену, чаще всего ведущему. В этом случае вводится понятие *приведенного момента инерции*.

*Приведенным к данному звену моментом инерции механизма* называется такой момент инерции, обладая которым данное звено имело бы такую же кинетическую энергию, как и весь механизм в целом.

Обозначая приведенный момент инерции через  $J_{пр}$ , а угловую скорость звена приведения – через  $\omega$ , получим:

$$W = \frac{J_{пр} \omega^2}{2}, \quad (1.5.4)$$

где:

$$J_{пр} = \sum_{v=1}^n \left[ m_v \left( \frac{v_v}{\omega} \right)^2 + J_v \left( \frac{\omega_v}{\omega} \right)^2 \right]. \quad (1.5.5)$$

В общем случае *приведенная масса* является функцией дуговой координаты  $s$  точки приведения, а *приведенный момент инерции* – функцией угловой координаты  $\varphi$  звена приведения:

$$m_{пр} = \Phi(s);$$

$$J_{пр} = \Psi(\varphi).$$

Для большого класса механизмов  $m_{пр}$  и  $J_{пр}$  являются постоянными величинами (например, зубчатые механизмы с круглыми колесами).

Так как в выражения приведенной массы и приведенного момента инерции входят отношения скоростей, то абсолютные величины этих скоростей не влияют на величины  $m_{пр}$  и  $J_{пр}$ .

В качестве примера рассмотрим нахождение массы кривошипно-ползунного механизма, приведенной к пальцу  $A$  кривошипа (рис. 1.5.1).

Для этого механизма строим план скоростей (рис. 1.5.1, б), из которого, задаваясь скоростью точки  $A$ , получим скорость  $v_B$  ползуна и скорость  $\overline{v_s}$  центра тяжести шатуна.

Тогда:

$$m_{пр} = J_1 \left( \frac{\omega_1}{v_A} \right)^2 + m_2 \left( \frac{v_s}{v_A} \right)^2 + J_2 \left( \frac{\omega_2}{v_A} \right)^2 + m_3 \left( \frac{v_B}{v_A} \right)^2,$$

но

$$\frac{\omega_1}{v_A} = \frac{1}{l_{OA}};$$

$$\frac{v_s}{v_A} = \frac{(ps)}{(pa)};$$

$$\frac{\omega_2}{v_A} = \frac{v_{BA}}{l_{AB}v_A} = \frac{(ab)}{l_{AB}(pa)};$$

$$\frac{v_B}{v_A} = \frac{(pb)}{(pa)}.$$

Следовательно,

$$m_{\text{пр}} = \frac{J_1}{l_{OA}^2} + m_2 \left( \frac{ps}{pa} \right)^2 + \frac{J_2}{l_{AB}^2} \left( \frac{ab}{pa} \right)^2 + m_3 \left( \frac{pb}{pa} \right)^2.$$

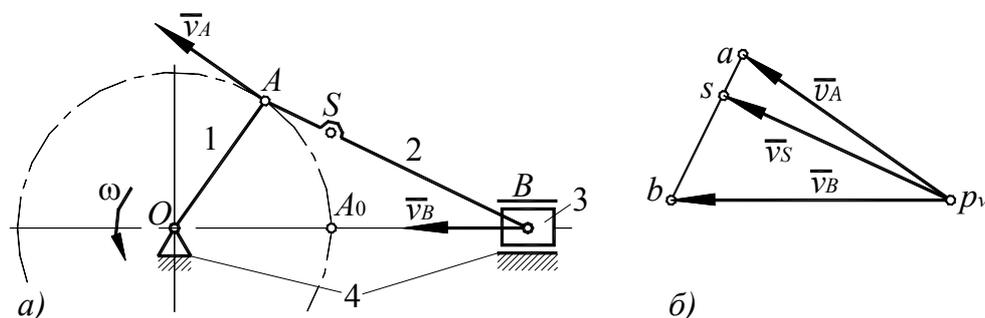


Рис. 1.5.1

### 1.5.3. КЛАССИФИКАЦИЯ СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА МЕХАНИЗМ. МЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

В теории механизмов применяют различные *классификации сил* в зависимости от характера решаемых задач.

Согласно *первой* классификации действующие на механическую систему силы подразделяют на *заданные (активные)* силы и на *реакции связей*.

Согласно *второй* классификации действующие на систему силы делят на *внешние* и *внутренние* по отношению к этой системе.

Согласно *третьей* классификации силы, действующие на механизм, подразделяют на *силы движущие* и *силы сопротивления*.

*Движущие силы* обеспечивают движение механизма, за промежуток времени, равный времени рабочего цикла двигателя, их работа положительна. Направления этих сил должны совпадать или составлять острые углы с направлениями скоростей точек их приложения. Вместе с тем на отдельных этапах *рабочего цикла* это условие может быть нарушено и движущие силы могут совершать отрицательную работу. Например, в двигателе внутреннего сгорания движущей силой является сила давления газов, действующая на поршень. При сжатии рабочей смеси работа этой силы становится отрицательной.

*Рабочим циклом* называется совокупность характерных процессов, происходящих в двигателе в определенной последовательности во время его работы. Для четырехтактного двигателя внутреннего сгорания рабочий цикл состоит из четырех тактов – впрыск горючей смеси, сжатие, рабочий ход, выпуск.

Если рабочий процесс в двигателе *не носит циклического характера*, а протекает *единообразно* (турбины, электродвигатели), то движущие силы все время совершают положительную работу.

*Силы сопротивления* делят на:

— *полезные* сопротивления, которые обусловлены технологическим процессом и для преодоления которых предназначен данный механизм,

— *вредные* сопротивления (силы трения в кинематических парах, гидродинамическое и аэродинамическое сопротивления).

Силы *полезных* сопротивлений в целом препятствуют движению механизма, работа этих сил за время рабочего цикла отрицательна, направления их образуют тупые углы с направлениями скоростей точек приложения (в частном случае – противоположны скоростям). Однако на отдельных этапах рабочего цикла последнее условие может быть нарушено и силы полезных сопротивлений могут совершать *положительную* работу. В общем случае силы движущие и силы сопротивления (или их моменты) являются функциями ряда кинематических параметров (дуговой или угловой координаты, линейной или угловой скорости, времени).

Зависимость движущей силы или силы сопротивления (или моментов этих сил) от кинематических параметров, заданная аналитически или графически, называется *механической характеристикой* соответственно двигателя или рабочей машины.

*Механическими характеристиками двигателя и рабочей машины* называются также зависимости от кинематических параметров мощностей движущих сил и сил сопротивления.

Чаще всего приходится иметь дело с характеристиками вида:

$$T = T(\omega),$$

где  $\omega$  – угловая скорость ведущего или ведомого вала машины;

$T$  – крутящий момент на валу.

Типичными являются механические характеристики электродвигателей *постоянного* тока с *параллельным* (рис. 1.5.2, а) и *последовательным* (рис. 1.5.2, б) возбуждением.

Функция  $T_d = T_d(\omega)$  в обоих случаях монотонно убывает, характеристика является нисходящей кривой. При указанной зависимости двигатель работает устойчиво на всей характеристике.

Увеличение нагрузки приводит к такому уменьшению угловой скорости двигателя, при котором двигатель способен преодолеть новую нагрузку за счет соответствующего увеличения момента движущих сил. Наоборот, уменьшение нагрузки приводит к увеличению угловой скорости двигателя.

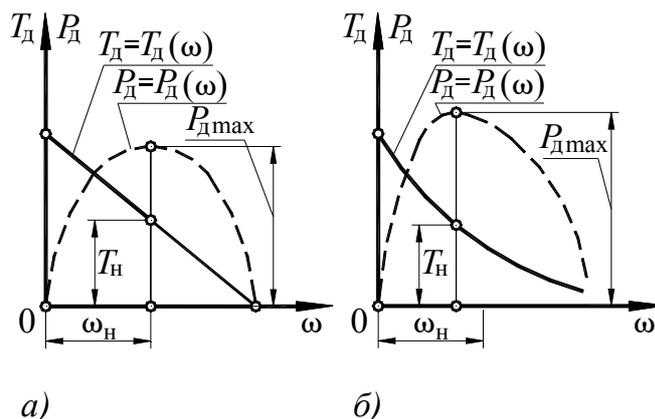


Рис. 1.5.2

Более сложной является характеристика *асинхронного* двигателя *трехфазного тока* (рис. 1.5.3, в), которая имеет восходящую и нисходящую части. Областью устойчивой работы двигателя при такой характеристике является ее нисходящая часть. Если момент сопротивления становится больше максимального момента движущих сил, называемого опрокидывающим моментом, то двигатель останавливается (опрокидывается).

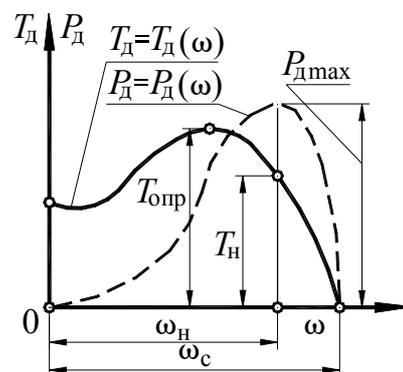


Рис. 1.5.3

Аналогичную характеристику имеет *двигатель внутреннего сгорания* (имеется в виду зависимость среднего за цикл момента на коленчатом валу от угловой скорости этого вала).

На рис. 1.5.2 и 1.5.3 пунктиром показаны *механические характеристики*, выражающие зависимость мощности двигателя от его угловой скорости.

Угловая скорость  $\omega = \omega_n$ , при которой двигатель развивает максимальную мощность, называется *номинальной угловой скоростью*, а соответствующий ей момент  $T = T_n$  — *номинальным моментом* двигателя.

Угловая скорость  $\omega = \omega_c$ , при которой  $T_d = 0$ , называется *синхронной угловой скоростью*.

Характеристики *рабочих* (исполнительных) машин представляют собой в основном восходящие кривые, как показано на рис. 1.5.4. Такой вид имеют, например, характеристики центробежных насосов, компрессоров и вентиляторов.

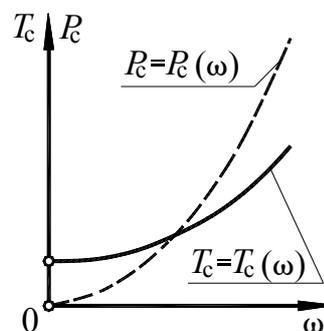


Рис. 1.5.4

Силы тяжести, действующие на подвижные звенья механизма, образуют особую группу сил. Они играют роль движущих сил, если центры тяжести этих звеньев опускаются, и роль сопротивлений, если центры тяжести звеньев поднимаются. Однако при решении задач динамического анализа и синтеза механизмов (например, при расчете маховых масс) весьма неудобно силы тяжести в различные периоды движения механизма относить то к движущим силам, то к сопротивлениям. Поэтому в ряде случаев силы тяжести, в зависимости от характера решаемой задачи, относят условно или к движущим силам, или к сопротивлениям, независимо от знака развиваемой ими мощности.

*Силы тяжести*, действующие на подвижные звенья механизма, образуют особую группу сил. Они играют роль движущих сил, если центры тяжести этих звеньев опускаются, и роль сопротивлений, если центры тяжести звеньев поднимаются. Однако при решении задач динамического анализа и синтеза механизмов (например, при расчете маховых масс) очень неудобно силы тяжести в различные периоды движения механизма относить то к движущим силам, то к сопротивлениям. Поэтому в ряде случаев силы тяжести, в зависимости от характера решаемой задачи, относят условно или к движущим силам, или к сопротивлениям, независимо от знака развиваемой ими мощности.

#### 1.5.4. ПРИВЕДЕНИЕ СИЛ В МЕХАНИЗМАХ

При сведении задачи о движении *механизма* к задаче о движении *материальной точки* или *вращательном движении твердого тела* наряду с понятиями приведенной массы и приведенного момента инерции вводятся понятия *приведенной силы* и *приведенного момента сил*.

*Приведенной к данной точке данного звена механизма силой* называют воображаемую силу, которая, будучи приложена в данной точке и направлена по касательной к траектории этой точки, развивает такую же мощность, как и все действующие на механизм силы и моменты, вместе взятые (если на тело действует пара сил с моментом  $M$ , то для краткости принято говорить, что «на тело действует момент  $M$ »). Силы, образующие эту пару, на схеме обычно не изображают, а только указывают круговой стрелкой направление, в котором пара стремится вращать данное тело).

Обозначая через  $P$  суммарную мощность всех сил и моментов, действующих на механизм, а через  $P_v$  – мощность сил и моментов, приложенных к  $v$ -му звену, имеем:

$$P = \sum_{v=1}^n P_v = F_{\text{пр}} v, \quad (1.5.6)$$

где  $F_{\text{пр}}$  – приведенная сила;  
 $v$  – скорость точки приведения;  
 $n$  – число подвижных звеньев механизма.

Учитывая, что все силы, действующие на звено механизма, можно привести к одной силе  $F_v$  и одному моменту  $T_v$ , для величины  $P$  получаем следующее выражение:

$$P = \sum_{v=1}^n P_v = \sum_{v=1}^n (\overline{F}_v \overline{v}_v + T_v \omega_v), \quad (1.5.7)$$

где  $\overline{v}_v$  – скорость точки приложения силы  $F_v$ ;  
 $\omega_v$  – угловая скорость  $v$ -го звена.

На основании равенств (1.5.6) и (1.5.7) имеем:

$$F_{\text{пр}} v = \sum_{v=1}^n (\overline{F}_v \overline{v}_v + T_v \omega_v),$$

откуда:

$$F_{\text{пр}} = \sum_{v=1}^n \left( \overline{F}_v \frac{\overline{v}_v}{v} + T_v \frac{\omega_v}{v} \right). \quad (1.5.8)$$

В некоторых случаях удобно рассматривать приведенную к данной точке силу, соответствующую не всем действующим на механизм силам, а лишь определенной группе этих сил или даже одной силе.

Силы движущие и силы сопротивлений обычно приводят к данной точке раздельно. Тогда общая приведенная сила определяется как разность приведенной движущей силы и приведенной силы сопротивления.

Установим понятие *приведенного момента сил*.

*Приведенным к данному звену механизма моментом сил* (или, сокращенно, *приведенным моментом*) называется воображаемый момент, который, будучи приложен к этому звену, развивает такую же мощность, как и все действующие на механизм силы и моменты, вместе взятые.

Обозначая через  $T_{\text{пр}}$  приведенный момент, а через  $\omega$  угловую скорость звена приведения, получаем:

$$P = \sum_{v=1}^n P_v = T_{\text{пр}} \omega \quad (1.5.9)$$

где:

$$T_{\text{пр}} = \sum_{v=1}^n \left( \overline{F}_v \frac{\overline{v}_v}{\omega} + T_v \frac{\omega_v}{\omega} \right) \quad (1.5.10)$$

### 1.5.5. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЗМА В КОНЕЧНОЙ ФОРМЕ. ТРИ СТАДИИ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЗМА

Как известно из общей механики, изменение кинетической энергии механической системы на некотором перемещении (за некоторый промежуток времени) равно суммарной работе всех сил, действующих на эту систему, на том же перемещении (за тот же промежуток времени):

$$W - W_0 = A \quad (1.5.11)$$

В применении к механизму это уравнение имеет вид

$$W - W_0 = A_d - A_{п.с} - A_{в.с}, \quad (1.5.12)$$

где  $W$  и  $W_0$  – кинетическая энергия механизма соответственно в конце и начале рассматриваемого перемещения;

$A_d$  – работа движущих сил на этом перемещении;

$A_{п.с}$  и  $A_{в.с}$  – абсолютная величина работы соответственно сил полезных и вредных сопротивлений на том же перемещении.

Уравнение (1.5.12) представляет собой *общее уравнение движения механизма в конечной (интегральной) форме*.

Приводя массы звеньев механизма и силы, действующие на механизм к данной точке механизма или к данному его звену, уравнение движения механизма можно представить в двух видах:

— в форме уравнения *сил*;

— в форме уравнения *моментов*.

В первом случае, обозначая через  $F_{пр}$  приведенную силу, а через  $v$  – скорость точки приведения, определяем суммарную мощность всех сил, действующих на механизм, по формуле (1.5.6):

$$P = F_{пр}v.$$

Отсюда суммарная элементарная работа указанных сил за промежуток времени  $dt$  выражается так:

$$dA = Pdt = F_{пр}vdt = F_{пр}ds,$$

где  $ds$  – элементарное приращение дуговой координаты точки приведения.

Следовательно, полная работа за конечный промежуток времени  $t - t_0$  имеет выражение:

$$A = \int_{s_0}^s F_{пр} ds,$$

где  $s$  и  $s_0$  – конечное и начальное значения дуговой координаты точки приведения.

Таким образом, уравнение (1.5.11) принимает окончательно вид:

$$\frac{1}{2} \left( m_{\text{пр}} v^2 - m_{\text{пр}}^{(0)} v_0^2 \right) = \int_{s_0}^s F_{\text{пр}} ds, \quad (1.5.13)$$

где  $m_{\text{пр}}$  и  $m_{\text{пр}}^{(0)}$  – приведенная масса механизма соответственно в конце и начале рассматриваемого промежутка;

$v$  и  $v_0$  – конечная и начальная скорость точки приведения.

Аналогично получаем общее уравнение движения механизма в форме уравнения моментов:

$$\frac{1}{2} \left( J_{\text{пр}} \omega^2 - J_{\text{пр}}^{(0)} \omega_0^2 \right) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} T_{\text{пр}} d\varphi, \quad (1.5.14)$$

где  $J_{\text{пр}}$  и  $J_{\text{пр}}^{(0)}$  – приведенный момент инерции механизма соответственно в конце и начале рассматриваемого промежутка;

$\omega$  и  $\omega_0$  – конечная и начальная угловая скорость звена приведения;

$\varphi$  и  $\varphi_0$  – конечное и начальное значения угловой координаты этого звена.

Очевидно, что уравнениями (1.5.13) и (1.5.14) можно воспользоваться в тех случаях, когда  $F_{\text{пр}} = \text{const}$  или  $F_{\text{пр}} = F_{\text{пр}}(s)$  и  $T_{\text{пр}} = \text{const}$  или  $T_{\text{пр}} = T_{\text{пр}}(\varphi)$ , т.е. когда силы, действующие на механизм, являются или постоянными, или зависят только от положения этого механизма (например, двигатель внутреннего сгорания при условии, что сопротивление при работе механизма остается почти постоянным).

Рассмотрим применение уравнения (1.5.12) при изучении движения механизма.

Обычно наблюдаются *три стадии движения* механизма:

- пуск в ход (разбег);
- установившееся движение;
- останов (выбег) механизма.

#### 1.5.5.1. ПУСК В ХОД (РАЗБЕГ)

Скорость ведущего звена механизма возрастает от нуля до нормальной рабочей скорости. Так как в начале пуска  $T_0 = 0$ , то на основании уравнения (1.5.12) имеем:

$$W = A_{\text{д}} - A_{\text{пс}} - A_{\text{вс}}$$

или

$$A_{\text{д}} = A_{\text{пс}} + A_{\text{вс}} + W, \quad (1.5.15)$$

т.е. при пуске в ход механизма движущие силы не только преодолевают полезные и вредные сопротивления, но и сообщают механизму кинетическую энергию.

Следовательно, работа движущих сил должна быть больше суммарной работы сил сопротивлений.

Часто для сокращения времени пуска или в связи с требованиями технологического процесса рабочую нагрузку (полезные сопротивления) снимают (холостой ход). К числу таких машин относятся, например, металлообрабатывающие станки.

Тогда:

$$A_d = A_{вс} + W .$$

### 1.5.5.2. УСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ

Скорость ведущего звена остается постоянной (равновесное движение) или колеблется около некоторого среднего значения (неравновесное движение). Обычно эти колебания носят *периодический* характер.

При *установившемся* движении кинетическая энергия механизма в конце и начале какого-либо промежутка времени одинакова:

$$W = W_0 = \text{const} .$$

В случае *неравновесного* движения этот промежуток принимается равным или кратным периоду движения механизма; периодом движения механизма называется наименьший промежуток времени, по истечении которого обобщенные координата, скорость и ускорение механизма принимают те же значения, что и в начале этого промежутка.

Таким образом, из уравнения (1.5.12) следует:

$$A_d = A_{пс} + A_{вс} , \tag{1.5.16}$$

т.е. при *установившемся* движении механизма назначение движущих сил сводится только к преодолению полезных и вредных сопротивлений, и поэтому работа движущих сил за время, равное или кратное периоду, должна быть равна суммарной работе сопротивлений. Нарушение этого баланса приведет к изменению кинетической энергии механизма, т.е. к нарушению установившегося движения.

Так как всегда имеют место вредные сопротивления, то работа движущих сил всегда больше работы полезных сопротивлений.

### 1.5.5.3. ОСТАНОВ (ВЫБЕГ) МЕХАНИЗМА

Скорость ведущего звена механизма убывает до нуля. Следовательно, в конце останова  $T = 0$ . Кроме того, движущие силы при останове выключают, поэтому  $A_d = 0$ , и уравнение (1.5.12) принимает вид:

$$W_0 = A_{\text{пс}} + A_{\text{вс}}, \quad (1.5.17)$$

где  $T_0$  – кинетическая энергия механизма в начале останова.

Таким образом, механизм останавливается после того, как вся кинетическая энергия его звеньев израсходована на полезные и вредные сопротивления.

Для уменьшения времени останова часто используют специальные тормоза; тогда:

$$W_0 = A_{\text{пс}} + A_{\text{вс}} + A_{\text{тс}}, \quad (1.5.18)$$

где  $A_{\text{тс}}$  – работа тормозящих сил, развиваемых тормозными устройствами.

Применение тормозов особенно необходимо в тех случаях, когда по технологическим условиям полезные сопротивления во время останова выключаются.

### 1.5.6. МЕХАНИЧЕСКИЙ КОЭФФИЦИЕНТ ПОЛЕЗНОГО ДЕЙСТВИЯ МЕХАНИЗМА

Как было показано в разделе 1.5.5, при установившемся движении механизма имеет место соотношение  $A_{\text{д}} = A_{\text{пс}} + A_{\text{вс}}$ . Так как всегда существуют вредные сопротивления, то  $A_{\text{д}} > A_{\text{пс}}$ .

Отношение абсолютной величины работы (или средней мощности) полезных сопротивлений к работе (или средней мощности) движущих сил за один полный цикл установившегося движения механизма называется механическим коэффициентом полезного действия (КПД) механизма.

Обозначая КПД через  $\eta$ , получаем:

$$\eta = \frac{A_{\text{пс}}}{A_{\text{д}}} = \frac{P_{\text{пс}}}{P_{\text{д}}} < 1. \quad (1.5.19)$$

КПД механизма является одной из важнейших количественных характеристик его качества. Чем больше величина  $\eta$ , тем большая часть энергии расходуется в механизме на полезную работу и тем меньше доля потерь ее на вредные сопротивления, т.е. тем рациональнее используется поступающая энергия.

Наряду с понятием КПД пользуются понятием *коэффициента потерь*  $\varphi$ .

*Коэффициентом потерь* называется отношение абсолютной величины работы (или средней мощности) вредных сопротивлений к работе (или средней мощности) движущих сил:

$$\varphi = \frac{A_{\text{вс}}}{A_{\text{д}}} = \frac{P_{\text{вс}}}{P_{\text{д}}}. \quad (1.5.20)$$

Таким образом,

$$\eta = \frac{A_{\text{пс}}}{A_{\text{д}}} = \frac{A_{\text{д}} - A_{\text{вс}}}{A_{\text{д}}} = 1 - \varphi. \quad (1.5.21)$$

Определим КПД сложного механизма, состоящего из  $n$  последовательно соединенных механизмов, КПД которых соответственно  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ .

(рис. 1.5.5, а).  
 $A_{\text{д}}$  – работа движущих сил первого механизма;

$A_1$  – полезная работа первого механизма, являющаяся по отношению ко второму механизму работой движущих сил;

$A_2$  – полезная работа второго механизма;

$A_n$  – полезная работа  $n$ -го механизма.

Тогда:

$$\eta_1 = \frac{A_1}{A_{\text{д}}}; \quad \eta_2 = \frac{A_2}{A_1}; \quad \dots \quad \eta_n = \frac{A_n}{A_{n-1}}.$$

Перемножим соответственно левые и правые части этих равенств:

$$\eta_1 \eta_2 \dots \eta_n = \frac{A_1}{A_{\text{д}}} \frac{A_2}{A_1} \dots \frac{A_n}{A_{n-1}} = \frac{A_n}{A_{\text{д}}},$$

но

$$\frac{A_n}{A_{\text{д}}} = \eta,$$

где  $\eta$  — КПД всего механизма.

Следовательно:

$$\eta = \eta_1 \eta_2 \dots \eta_n, \quad (1.5.22)$$

то есть *полный* КПД сложного механизма, состоящего из ряда *последовательно* соединенных механизмов, равен *произведению частных* КПД.

При *параллельном* соединении нескольких механизмов с общим источником энергии (рис. 1.5.5, б) имеем:

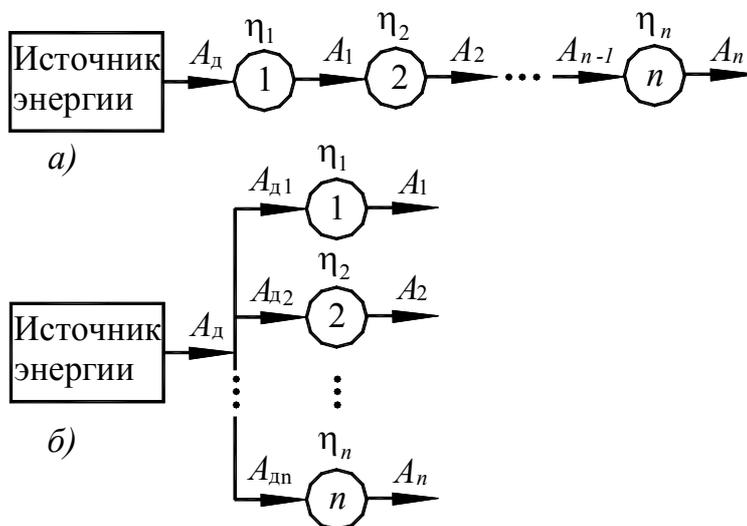


Рис. 1.5.5

$$A_{\text{д}} = \sum_{v=1}^n A_{\text{д}v},$$

$$A_{\text{п.с}} = \sum_{v=1}^n A_v,$$

где  $A_{\text{д}v}$  ( $v=1, 2, \dots, n$ ) – работа движущих сил отдельных механизмов;  
 $A_v$  ( $v=1, 2, \dots, n$ ) – полезные работы, совершаемые этими механизмами.

Учитывая, что:

$$\eta_v = \frac{A_v}{A_{\text{д}v}} \quad (v=1, 2, \dots, n),$$

для КПД всего механизма имеем:

$$\eta = \frac{A_{\text{п.с}}}{A_{\text{д}}} = \frac{\sum_{v=1}^n A_v}{\sum_{v=1}^n A_{\text{д}v}} = \frac{\sum_{v=1}^n \eta_v A_{\text{д}v}}{\sum_{v=1}^n A_{\text{д}v}}. \quad (1.5.23)$$

Если  $\eta_1 = \eta_2 = \dots = \eta_n$ , то, как следует из формулы (1.5.23):

$$\eta = \eta_1 = \eta_2 = \dots = \eta_n,$$

т.е. в этом случае КПД всей машины тот же, что и для отдельного механизма.

Если:

$$A_{\text{д}1} = A_{\text{д}2} = \dots = A_{\text{д}n},$$

то:

$$\eta = \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n \eta_v,$$

т.е. КПД всей машины равен среднему арифметическому от КПД отдельных механизмов.

Рассмотрим зависимость между *моментом движущих сил* и *моментом полезных сопротивлений* механизма передачи вращательного движения (рис. 1.5.6).

В механизме:

$\omega_1$  – угловая скорость входного вала механизма;

$\omega_n$  – угловая скорость выходного вала механизма;

$\eta$  – КПД механизма.

Обозначим вращающий момент на входном валу через  $T_{\text{д}}$ , а момент полезных сопротивлений на выходном валу – через  $T_{\text{п.с}}$ .

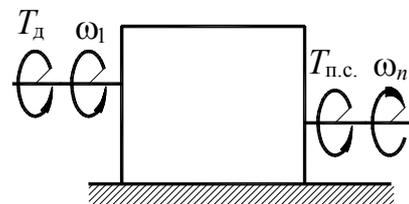


Рис. 1.5.6

Тогда:

$$P_d = T_d \omega_1;$$

$$P_{пс} = T_{пс} \omega_n.$$

Следовательно,

$$\eta = \frac{P_{пс}}{P_d} = \frac{T_{пс} \omega_n}{T_d \omega_1} = \frac{T_{пс}}{T_d i},$$

где  $i$  – передаточное отношение всего механизма.

Отсюда:

$$T_{пс} = \eta i T_d \quad (1.5.24)$$

или

$$T_d = \frac{T_{пс}}{\eta i}.$$

Полагая  $\eta = 1$ , получим зависимость между моментом движущих сил и моментом полезных сопротивлений при установившемся движении *идеального* механизма.

### 1.5.7. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЗМА В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Уравнение движения механизма в *конечной* форме (раздел 1.5.5) дает лишь общее представление о динамических процессах, наблюдаемых при этом движении. Как было установлено, для нахождения закона движения механизма по заданным силам это уравнение может быть применено лишь в ограниченном числе случаев. При изучении движения механизма в периоды *пуска* и *останова*, а также при изучении *периодически неравномерного движения* механизма приходится вместо уравнения кинетической энергии в конечной форме пользоваться уравнением, выражающим эту теорему в *дифференциальной* форме:

$$\frac{dW}{dt} = P. \quad (1.5.25)$$

Учитывая, что:

$$W = \frac{m_{пр} v^2}{2},$$

получим:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{v^2}{2} \frac{dm_{пр}}{dt} + \frac{m_{пр}}{2} 2v \frac{dv}{dt}.$$

В общем случае:

$$m_{пр} = \Phi(s),$$

ПОЭТОМУ:

$$\frac{dm_{\text{пр}}}{dt} = \frac{dm_{\text{пр}}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{m_{\text{пр}}}{ds} v.$$

Таким образом,

$$\frac{dW}{dt} = \left( \frac{v^2}{2} \frac{dm_{\text{пр}}}{ds} + m_{\text{пр}} \frac{dv}{dt} \right) v. \quad (1.5.26)$$

С другой стороны,

$$P = F_{\text{пр}} v. \quad (1.5.27)$$

Подставляя правые части равенств (1.5.26) и (1.5.27) в уравнение (1.5.25), получаем:

$$\frac{v^2}{2} \frac{dm_{\text{пр}}}{ds} + m_{\text{пр}} \frac{dv}{dt} = F_{\text{пр}}. \quad (1.5.28)$$

Это уравнение называется *дифференциальным уравнением движения механизма в форме уравнения сил*.

Если приведенная масса остается величиной постоянной, не зависящей от положения механизма, то:

$$\frac{dm_{\text{пр}}}{ds} = 0$$

и уравнение (2.60) принимает вид:

$$m_{\text{пр}} \frac{dv}{ds} = F_{\text{пр}}. \quad (1.5.29)$$

Уравнение (1.5.29) внешне не отличается от уравнения прямолинейного движения материальной точки.

Аналогично можно получить дифференциальное уравнение движения механизма в форме уравнения моментов:

$$\frac{\omega^2}{2} \frac{dJ_{\text{пр}}}{d\varphi} + J_{\text{пр}} \frac{d\omega}{dt} = T_{\text{пр}}, \quad (1.5.30)$$

где  $J_{\text{пр}} = \Psi(\varphi)$ .

Если в *частном* случае  $J_{\text{пр}} = \text{const}$ , то:

$$J_{\text{пр}} \frac{d\omega}{dt} = T_{\text{пр}} \quad (1.5.31)$$

т.е. получаем для механизма такое же дифференциальное уравнение, как для простого вращательного движения твердого тела.

В качестве *примера* найдем закон движения клетей в период ускоренного движения для системы подъема без хвостового каната (рис. 1.5.7), зная, что вращающий момент в этот период остается постоянным и ускорение клетей в начале движения равно  $a_0$ . Упругими де-

формациями каната пренебрегаем. Определим приведенную к окружности барабана массу подъемной установки:

$$m_{\text{пр}} = m'_{\text{маш}} + 2m'_{\text{шк}} + \frac{1}{g}(2G_{\text{кл}} + G + pL),$$

где  $m'_{\text{маш}}$  и  $m'_{\text{шк}}$  – приведенная к окружности барабана масса машины и шкива;

$G_{\text{кл}}$  – вес порожней клетки;

$G$  – вес полезного груза;

$p$  – вес погонного метра каната;

$L$  – полная длина каната.

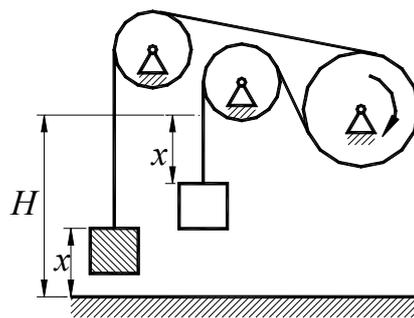


Рис. 1.5.7

Находим приведенную к окружности барабана силу:

$$P_{\text{пр}} = \frac{T_{\text{д}}}{R_{\text{б}}} G_{\text{кл}} - (G_{\text{кл}} + kG) + px - p(H - x) = \frac{T_{\text{д}}}{R_{\text{б}}} - kG - pH + 2px,$$

где  $T_{\text{д}}$  – приведенный к оси барабана вращающий момент;

$k=1,15-1,25$  – коэффициент, учитывающий вредные сопротивления;

$H$  – высота подъема;

$R$  – радиус барабана.

Так как  $m_{\text{пр}} = \text{const}$ , то, обозначая ускорение клеток через  $a$ , имеем:

$$m_{\text{пр}} a = \frac{T_{\text{д}}}{R_{\text{б}}} - kG - pH + 2px,$$

но  $a = a_0$  при  $x = 0$ , следовательно,

$$m_{\text{пр}} a_0 = \frac{T_{\text{д}}}{R_{\text{б}}} - kG - pH,$$

откуда:

$$m_{\text{пр}} a = m_{\text{пр}} a_0 + 2px.$$

Так как  $a = \ddot{x}$ , то:

$$\ddot{x} - \frac{2p}{m_{\text{пр}}} x = a_0.$$

Интегрируя это уравнение и определяя произвольные постоянные из условий  $x(0) = 0$  и  $\dot{x}(0) = 0$ , окончательно получаем:

$$x = \frac{m_{\text{пр}} a_0}{2p} (\text{ch}\varphi - 1),$$

где:

$$\varphi = \sqrt{\frac{2p}{m_{\text{пр}}}} t.$$

## 1.6. ТРЕНИЕ В КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАРАХ

### 1.6.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

*Трением* называется сопротивление относительному перемещению соприкасающихся тел, возникающее в месте их соприкосновения.

По кинематическим признакам различают:

- *трение скольжения* (трение первого рода), возникающее при скольжении одного тела по поверхности другого,
- *трение качения* (трение второго рода), возникающее при качении одного тела по поверхности другого.

Трение скольжения

По *характеру смазки* трущихся поверхностей различают:

- *сухое* трение – смазка отсутствует;
- *граничное* трение – поверхности разделены очень тонким слоем смазки (0,1 мкм и менее);
- *жидкостное* трение – поверхности полностью разделены слоем смазки;
- *полусухое* трение – сочетание сухого и граничного;
- *полужидкостное* трение – сочетание жидкостного и граничного.

Рассмотрим особенности *сухого* и *полусухого* трения скольжения.

По *величине относительного перемещения* соприкасающихся тел различают:

- *неполную силу трения покоя*,
- *полную силу трения покоя*,
- *силу трения движения*.

*Неполная сила трения покоя* соответствует микроскопическим, частично обратимым относительным перемещениям соприкасающихся тел.

Такие перемещения, обусловленные упругими и пластическими деформациями этих тел, называются *предварительными смещениями*.

*Полная сила трения покоя* соответствует предельной величине предварительного смещения и равна максимальному значению неполной силы трения покоя.

Полная и неполная сила трения покоя направлена в сторону, противоположную сдвигающему усилию, и равна ему по модулю. Если сдвигающее усилие становится больше полной силы трения покоя, то начинается относительное движение соприкасающихся тел.

*Сила трения движения* соответствует относительному движению соприкасающихся тел. Эта сила не зависит от движущей силы и направлена в сторону, противоположную относительной скорости скольжения.

Отношение силы трения к силе нормального давления между трущимися поверхностями называется *коэффициентом трения*.

Согласно сказанному выше необходимо различать три вида коэффициента трения:

— коэффициент трения в зоне предварительных смещений, равный отношению неполной силы трения покоя  $F_{\text{нп}}$  к силе нормального давления  $F_n$ :

$$f_{\text{пс}} = \frac{F_{\text{нп}}}{F_n} \quad (1.6.1)$$

— коэффициент трения покоя:

$$f_{\text{ст}} = \frac{F_{\text{ст}}}{F_n} \quad (1.6.2)$$

где  $F_{\text{ст}}$  – полная сила трения покоя;

— коэффициент трения движения:

$$f = \frac{F_{\text{д}}}{F_n} \quad (1.6.3)$$

где  $F_{\text{д}}$  – сила трения движения.

Из этих формул следует, что коэффициент трения скольжения – безразмерная величина.

Коэффициент трения в зоне *предварительных смещений*  $f_{\text{пс}}$  является *переменной* величиной, зависящей от сдвигающего усилия или от характера движения тел в момент их контакта и изменяющейся в пределах от нуля до коэффициента трения покоя (или движения):

$$0 \leq f_{\text{пс}} \leq f_{\text{ст}}.$$

Коэффициенты *трения покоя* и *движения* зависят от многих факторов:

- природы материала,
- наличия пленок на его поверхности (смазка, окисел, загрязнение),
- продолжительности неподвижного контакта,
- скорости приложения сдвигающего усилия,
- жесткости и упругости соприкасающихся тел,
- скорости скольжения,
- температурного режима,
- давления,
- характера соприкосновения,
- качества поверхности,
- шероховатости.

При прочих равных условиях коэффициент трения покоя несколько больше коэффициента трения движения:

$$f_{\text{ст}} \geq f.$$

Коэффициент трения движения в большинстве случаев уменьшается при увеличении скорости скольжения.

Для органических материалов (кожа, резина) коэффициент трения с увеличением скорости обычно возрастает.

Так как в приводимых в литературе данных о коэффициентах трения не могут быть учтены все указанные выше факторы, то в ответственных случаях рекомендуется специальное определение коэффициентов трения с учетом реальных условий работы узла трения.

В большинстве случаев можно считать, что график зависимости коэффициента трения от относительного смещения  $s$  трущихся тел выражается ломаной линией (рис. 1.6.1), где отрезок  $\delta$  изображает максимальную величину *предварительного* смещения.

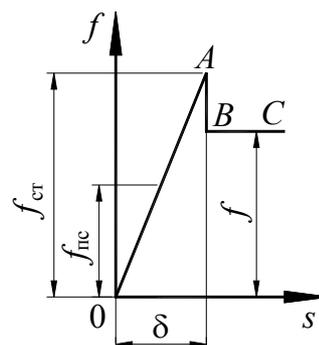


Рис. 1.6.1

На основании выражений (1.6.2) и (1.6.3) получаем следующие формулы Амонтона-Кулона для *приближенного* определения *полной* силы трения покоя и силы трения движения:

$$F_{ст} = f_{ст} F_n$$

и

$$F_d = f F_n$$

$$(1.6.4)$$

Полная реакция поверхности в данной точке в общем случае складывается из нормальной реакции и силы трения (рис. 1.6.2). Угол отклонения полной реакции поверхности в данной точке от нормали к этой поверхности в той же точке называют *углом трения*.

Различают *угол трения покоя*  $\varphi_{ст}$  и *угол трения движения*  $\varphi$ .

Из рис. 1.6.2 следует, что:

$$\operatorname{tg} \varphi_{ст} = \frac{F_{ст}}{F_n} = \frac{f_{ст} F_n}{F_n} = f_{ст},$$

откуда:

$$\varphi_{ст} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} f_{ст}.$$

$$(1.6.5)$$

Аналогично получаем:

$$\varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} f.$$

$$(1.6.6)$$

Все возможные направления полной реакции в данной точке поверхности заключаются в пределах так называемого *конуса трения*, вершина которого совпадает с данной точкой, а образующая составляет с нормалью поверхности угол, равный углу трения ( $\varphi_{ст}$  – при относительном равновесии и  $\varphi$  – при скольжении).

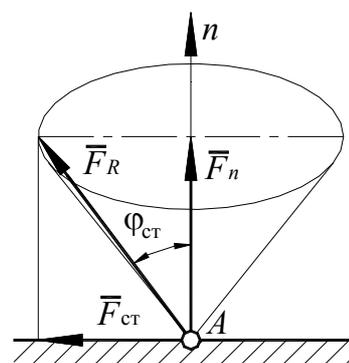


Рис. 1.6.2

Рассмотрим *особенности* трения при *внезапном контакте* движущихся относительно друг друга тел.

Если тело  $A$  движется с некоторой скоростью  $v$  относительно тела  $B$ , не касаясь этого тела, и затем внезапно прижимается к телу  $B$  некоторой силой  $\overline{F}_n$ , то на поверхности контакта возникает трение первого рода.

Так как в начале контакта тело  $A$  уже движется относительно тела  $B$ , то обычно считают, что на тело  $A$  начинает сразу действовать сила трения движения  $F_t = fF_n$ , направленная в сторону, противоположную относительной скорости этого тела.

Однако такое допущение приводит в ряде случаев к парадоксам, противоречащим законам классической механики. Парадоксы снимаются, если принять, что коэффициент трения между движущимися относительно друг друга поверхностями при их внезапном контакте *не сразу* становится равным динамическому коэффициенту трения, а достигает этой величины в течение некоторого весьма малого промежутка времени, соответствующего *предварительным смещениям* контактирующих поверхностей, причем в начале этого промежутка коэффициент сцепления равен нулю.

Если связи, наложенные на вступившие в контакт тела, таковы, что после контакта возможно относительное движение этих тел, то конечное значение коэффициента сцепления равно коэффициенту трения движения  $f$ , но в процессе изменения этого коэффициента от 0 до  $f$  он может (не всегда) принять значение  $f_{ст}$  коэффициента трения покоя. (В данном случае величина  $f_{ст}$  может меньше отличаться от  $f$ , чем при плавном взаимном скольжении тел. Это объясняется, в частности, тем, что коэффициент трения покоя возрастает с увеличением времени предварительного (до начала взаимного скольжения тел) контакта).

Эту возможность необходимо учитывать для надежности расчета в тех случаях, когда в проектируемом механизме не должно быть самозаклинивания, например, тормозных механизмов.

Подобное поведение коэффициента трения вытекает из механической теории трения, если учесть деформации трущихся тел.

## 1.6.2. ТРЕНИЕ В НИЗШИХ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАРАХ

### 1.6.2.1. ТРЕНИЕ В ПОСТУПАТЕЛЬНОЙ ПАРЕ

Рассмотрим ползун на наклонной и горизонтальной плоскости (рис. 1.6.3).

Введем обозначения:

$\overline{G}$  – вес ползуна;

$\overline{F}$  – движущая или тормозящая сила;

$\alpha$  – угол наклона плоскости;  
 $\beta$  – угол, образуемый силой  $\overline{F}$  с вертикалью;  
 $f$  – коэффициент трения;  
 $\varphi$  – угол трения.

Рассмотрим равномерное движение ползуна по наклонной плоскости вверх (рис. 1.6.3, а).

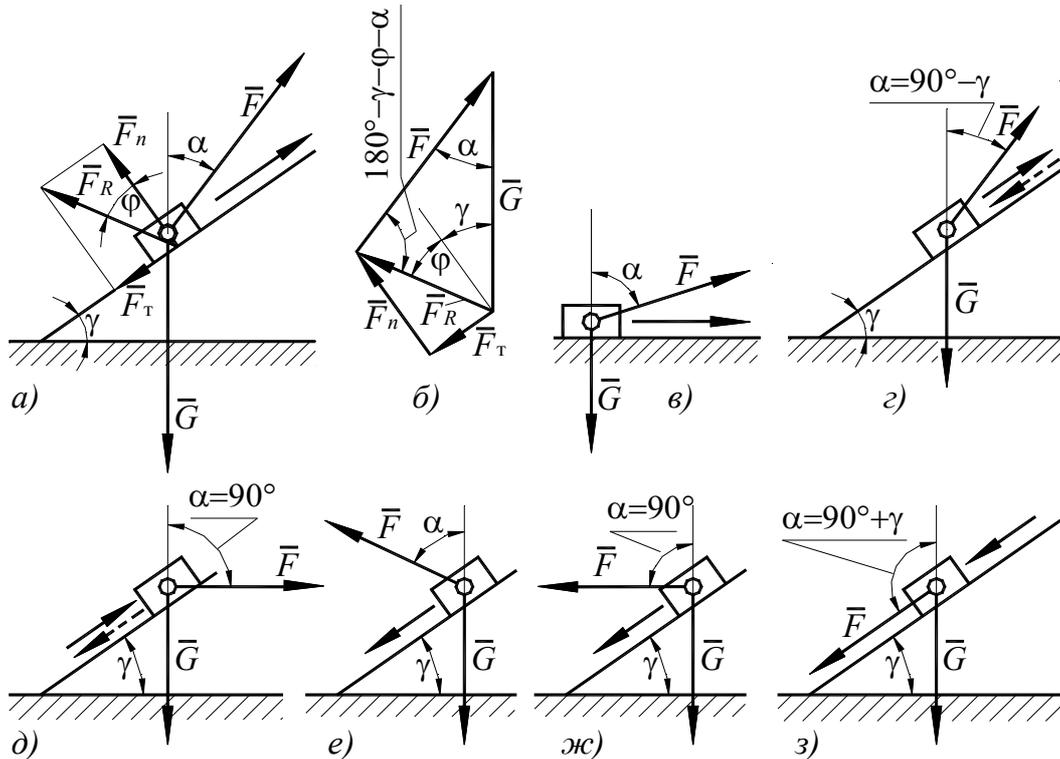


Рис. 1.6.3

Кроме сил  $\overline{F}$  и  $\overline{G}$ , на ползун действуют нормальная реакция  $\overline{F}_n$  наклонной плоскости и сила трения  $\overline{F}_T$ , направленная в сторону, противоположную движению ползуна, и равная по модулю:

$$F_T = fF_n = F_n \operatorname{tg} \varphi.$$

Полная реакция  $\overline{F}_R = \overline{F}_n + \overline{F}_{Tр}$  отклонена от нормали к наклонной плоскости на угол  $\varphi$ .

При равномерном движении ползуна:

$$\overline{F} + \overline{G} + \overline{F}_R = 0.$$

Согласно этому векторному равенству строим замкнутый многоугольник сил (рис. 1.6.3, б), из которого, применяя теорему синусов, находим:

$$F = G \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\sin(\alpha + \beta + \varphi)}. \quad (1.6.7)$$

При равномерном движении ползуна вниз по наклонной плоскости сила  $\overline{F}$  играет роль тормозящей силы, а сила трения  $\overline{F}_T$  меняет свое направление на прямо противоположное. В этом случае:

$$F = G \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin(\alpha + \beta - \varphi)}. \quad (1.6.8)$$

При движении ползуна по горизонтальной плоскости (рис. 1.6.3, в) следует положить  $\alpha = 0$ , что дает:

$$F = G \frac{\sin \varphi}{\sin(\beta + \varphi)}. \quad (1.6.9)$$

При

$$\sin(\beta + \varphi) = 1 \text{ или } \beta = 90^\circ - \varphi$$

получаем минимальное значение движущей силы:

$$F_{\min} = G \sin \varphi = G \frac{f}{\sqrt{1 + f^2}}. \quad (1.6.10)$$

Если сила  $\overline{F}$  направлена вдоль наклонной плоскости, то (рис. 1.6.3, з):

$$\beta = 90^\circ - \alpha$$

и:

$$F = G \frac{\sin(\alpha \pm \varphi)}{\cos \varphi} = G(\sin \alpha \pm f \cos \alpha), \quad (1.6.11)$$

причем верхние знаки соответствуют направлению движения, показанному сплошной линией, а нижние – направлению, показанному пунктиром. Если сила  $\overline{F}$  направлена горизонтально, то  $\beta = 90^\circ$  (рис. 1.6.3, д) и:

$$F = G \operatorname{tg}(\alpha \pm \varphi), \quad (1.6.12)$$

где верхние знаки соответствуют движению вверх, а нижние – вниз.

Во всех рассмотренных случаях равномерное движение вниз возможно при  $\alpha > \varphi$ .

Если  $\alpha = \varphi$ , то при равномерном движении вниз имеем:

$$F = 0.$$

Если  $\alpha < \varphi$ , то наклонную плоскость называют *самотормозящей*.

В этом случае равномерное движение вниз возможно при наличии движущей силы  $\overline{F}$  (рис. 1.6.3, е), которая определяется формулой:

$$F = G \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\sin(\beta - \alpha + \varphi)}. \quad (1.6.13)$$

При  $\beta = 90^\circ$  (рис. 1.6.3, ж) имеем:

$$F = G \operatorname{tg}(\varphi - \alpha), \quad (1.6.14)$$

а при  $\beta = 90^\circ + \alpha$  (рис. 1.6.3, з):

$$F = G \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\cos \alpha} = G(f \cos \alpha - \sin \alpha). \quad (1.6.15)$$

### 1.6.2.2. ТРЕНИЕ В КЛИНЧАТОМ ПОЛЗУНЕ

Рассмотрим еще один пример поступательной пары – *клинчатый ползун* (рис. 1.6.4, а).

Обозначим через  $\alpha$  половину угла при вершине желоба, а через  $\bar{G}$  вертикальную нагрузку на ползун. Тогда:

$$\bar{G} + \bar{F}_{n1} + \bar{F}_{n2} = 0,$$

где  $\bar{F}_{n1}$  и  $\bar{F}_{n2}$  – нормальные реакции направляющих плоскостей.

Из многоугольника сил (рис. 1.6.4, б) находим:

$$F_{n1} = F_{n2} = \frac{G}{2 \sin \alpha}.$$

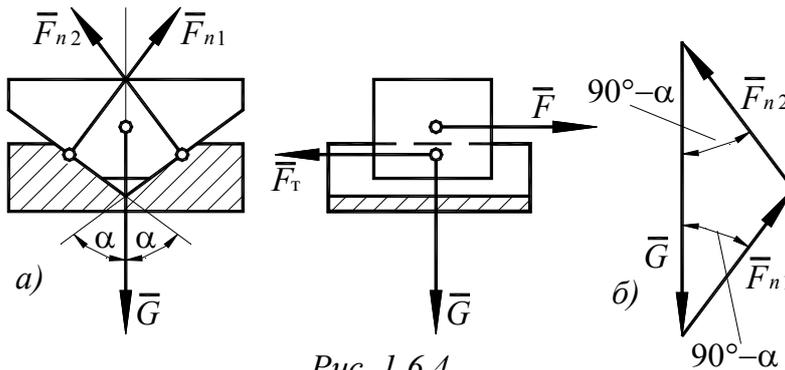


Рис. 1.6.4

При движении ползуна вдоль желоба по каждой из направляющих плоскостей возникает сила трения  $F = fF_n$ , поэтому сила  $F$ , необходимая для поддержания равномерного движения ползуна (рис. 1.6.4, б), определяется равенством:

$$F = 2F_T = 2fF_n = \frac{f}{\sin \alpha} G = f'G, \quad (1.6.16)$$

где

$$f' = \frac{f}{\sin \alpha} > f. \quad (1.6.17)$$

Величину  $f'$  называют *приведенным коэффициентом трения клинчатого ползуна*. Для других конструкций приведенный коэффициент трения выражается другими зависимостями.

### 1.6.2.3. ТРЕНИЕ В ВИНТОВОЙ ПАРЕ

Рассмотрим винт с прямоугольной резьбой (рис. 1.6.5, а).

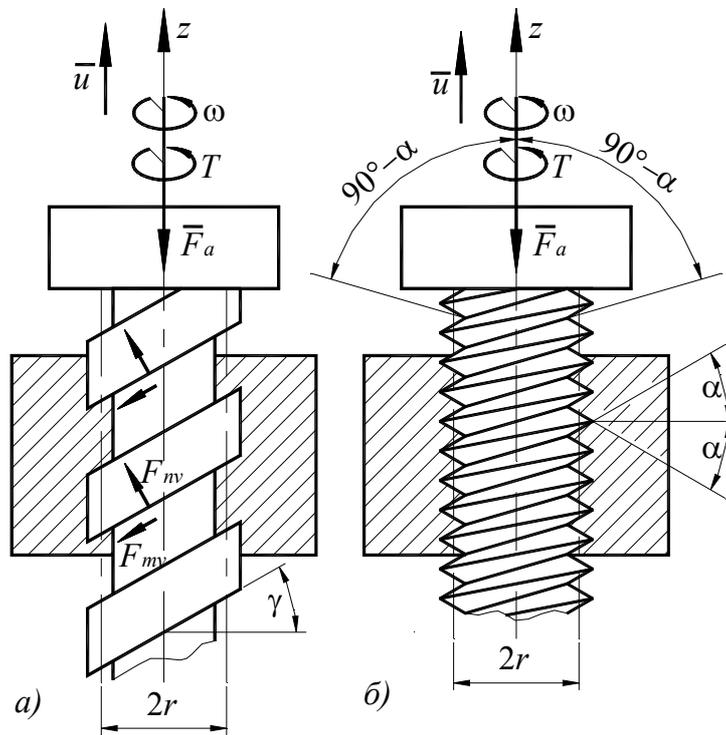


Рис. 1.6.5

Пусть под действием вращающего момента  $T$  винт совершает движение, при котором осевое перемещение винта и осевое усилие  $\overline{F}_a$  противоположны по направлению.

Введем обозначения:

$r$  – средний радиус резьбы;

$\alpha$  – угол подъема винтовой линии;

$f$  – коэффициент трения;

$\varphi$  – угол трения.

Кроме того, через  $\overline{F}_{nv}$  и  $\overline{F}_{\tau v}$  обозначим элементарные силы нормального давления и трения между резьбой гайки и винта.

Составляя уравнение проекций на ось  $z$  и уравнение моментов относительно этой оси, получим:

$$-F_a + \sum F_{nv} \cos \alpha - \sum f F_{nv} \sin \alpha = -F_a + (\cos \alpha - f \sin \alpha) \sum F_{nv} = 0;$$

$$T - \sum r F_{nv} \sin \alpha - \sum r f F_{nv} \cos \alpha = T - r (\cos \alpha + f \sin \alpha) \sum F_{nv} = 0.$$

Исключая из этих уравнений  $\sum F_{nv}$ , находим:

$$T = F_a r \frac{\sin \alpha + f \cos \alpha}{\cos \alpha - f \sin \alpha} = F_a r \frac{\operatorname{tg} \alpha + f}{1 - f \operatorname{tg} \alpha}$$

или, окончательно:

$$T = F_a r \operatorname{tg}(\alpha + \varphi). \quad (1.6.18)$$

Мощность, развиваемая моментом  $T$ , играющим роль момента движущих сил, определяется так:

$$P_d = T \omega = F_a r \omega \operatorname{tg}(\alpha + \varphi).$$

Мощность, развиваемая силой  $\overline{F}_a$ , играющей роль полезного ее противления:

$$P_{п.с} = F_a u,$$

где  $u$  – скорость поступательного движения винта вдоль оси вращения-скольжения.

Как известно из кинематики:

$$u = \omega r \operatorname{tg} \alpha,$$

поэтому КПД винта равен:

$$\eta = \frac{P_{п.с}}{P_d} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}. \quad (1.6.19)$$

В случае *треугольной* резьбы (рис. 1.6.5, б) можно приближенно считать, что движение винта аналогично движению клинчатого ползуна по желобу. Тогда в полученных выше формулах коэффициент трения  $f$  и угол трения  $\varphi$  необходимо заменить величинами  $f'$  и  $\varphi'$ , причем:

$$f' = \frac{f}{\sin(90^\circ - \beta)} = \frac{f}{\cos \beta} \quad (1.6.20)$$

и

$$\varphi' = \operatorname{arctg} f'. \quad (1.6.20')$$

#### 1.6.2.4. ТРЕНИЕ ВО ВРАЩАТЕЛЬНОЙ ПАРЕ

Вращательная пара может быть различных видов. Если пара воспринимает нагрузки, нормальные к оси вращения, то элементами этой пары являются *цапфа* 1 и *подшипник* 2 (рис. 1.6.6).

Пусть равнодействующая  $\overline{Q}$  внешних нагрузок направлена параллельно оси  $\Delta$ . Если бы сила  $\overline{Q}$  была направлена по оси  $\Delta$  и вал не вращался, то точка максимального контакта цапфы и подшипника находилась бы в положении  $A$  и сила  $\overline{Q}$  уравнивалась бы нормальной реакцией подшипника. Сообщим валу вращение в направлении, указанном стрелкой. Тогда точка максимального контакта цапфы и подшипника переместится в положение  $B$  (цапфа набегаёт на подшипник), а

полная реакция  $\overline{F}_R$  подшипника, состоящая из нормальной реакции  $\overline{F}_n$  и силы трения  $\overline{F}_{тр}$ , будет направлена по касательной к так называемому *кругу трения*. Обозначая радиус круга трения через  $\rho$ , а радиус цапфы – через  $r$ , имеем:

$$\rho = r \sin \varphi' = r \frac{f'}{\sqrt{1 + f'^2}} \quad (1.6.21)$$

где  $\varphi'$  – угол отклонения полной реакции от нормали (угол трения);

$f'$  – коэффициент трения в подшипнике.

При малых значениях коэффициента трения  $f'$  можно принять:

$$\rho = \frac{rf'}{1 + \frac{f'^2}{2}} = rf' \left( 1 - \frac{f'^2}{2} \right) \quad (1.6.22)$$

При  $f' \ll 1$  получаем еще более простую зависимость:

$$\rho = rf' \quad (1.6.23)$$

Так как поступательные перемещения цапфы исключены, то главный вектор всех действующих на цапфу сил (активных и реактивных) равен нулю, откуда  $\overline{F}_R = -\overline{Q}$ , то есть полная реакция подшипника всегда параллельна равнодействующей  $\overline{Q}$  внешних нагрузок.

Если линия действия силы  $\overline{Q}$  касается круга трения, как показано на рис. 1.6.6, то есть силы  $\overline{F}_R$  и  $\overline{Q}$  направлены по одной прямой, то они образуют уравновешенную систему, и вал вращается равномерно или находится в покое. Если линия действия силы проходит вне круга трения, как показано пунктиром, то силы  $\overline{F}_R$  и  $\overline{Q}$  образуют пару сил одного направления с угловой скоростью, и вал вращается ускоренно. Если же линия действия силы  $\overline{Q}$  пересекает круг трения, то вал вращается замедленно или находится в покое.

Момент трения во вращательной паре:

$$T_{тр} = F_{тр}r = F_R\rho = fQr \quad (1.6.24)$$

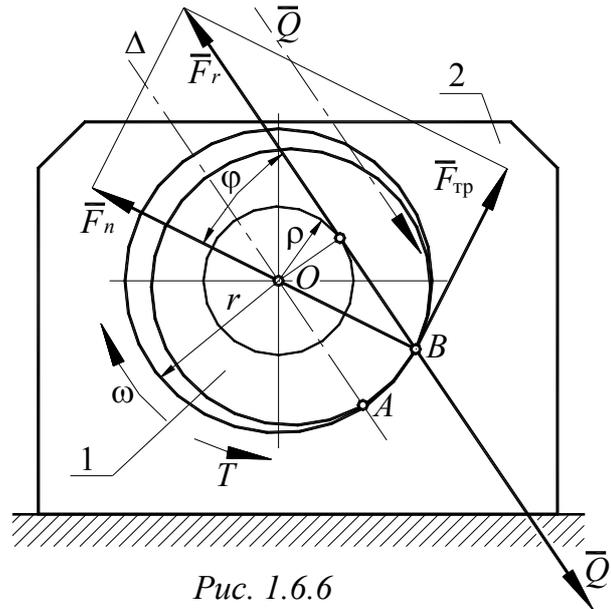


Рис. 1.6.6

Коэффициент трения  $f$ , входящий в формулу (1.6.24), отличается от коэффициента трения плоских поверхностей и определяется экспериментально для различных условий работы вращательной пары. Этот коэффициент зависит от распределения давлений по поверхности контакта цапфы и подшипника.

Для *неприработавшихся* цапф можно принять по Вейсбаху:

$$f' = \frac{\pi}{2} f \quad (1.6.25)$$

для *приработавшихся* цапф – по Рейе:

$$f' = \frac{4}{\pi} f \quad (1.6.26)$$

где  $f$  – коэффициент трения соответствующих плоских поверхностей при тех же прочих условиях.

Если вращательная пара воспринимает нагрузку  $F_a$ , направленную вдоль оси вращения, то элементами этой пары являются *пята* 1 и *подпятник* 2 (рис. 1.6.7, а).

Определим момент сил трения в случае плоской *кольцевой пяты*. Полагая, что сила  $\bar{F}_a$  равномерно распределяется по всей площади прилегания, равной  $\pi(R^2 - r^2)$ , находим удельное давление, т.е. силу, отнесенную к единице поверхности:

$$q = \frac{F_a}{\pi(R^2 - r^2)}.$$

Момент силы трения на элементарной площадке, расположенной на расстоянии  $\rho$  от оси вращения (на рис. 1.6.7, б эта площадка заштрихована), определится так:

$$dT_{\text{тр}} = fqr\rho d\rho d\varphi.$$

Полный момент трения в пяте определится как сумма элементарных моментов:

$$T_{\text{тр}} = \sum dT_{\text{тр}} = \int_r^R \int_0^{2\pi} fqr\rho^2 d\rho d\varphi = fqr2\pi \int_r^R \rho^2 d\rho = \frac{2}{3} (R^3 - r^3),$$

или

$$T_{\text{тр}} = \frac{2}{3} fqr \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} = \frac{2}{3} fF_a R \left( \frac{R}{R+r} + \frac{r}{R} \right). \quad (1.6.27)$$

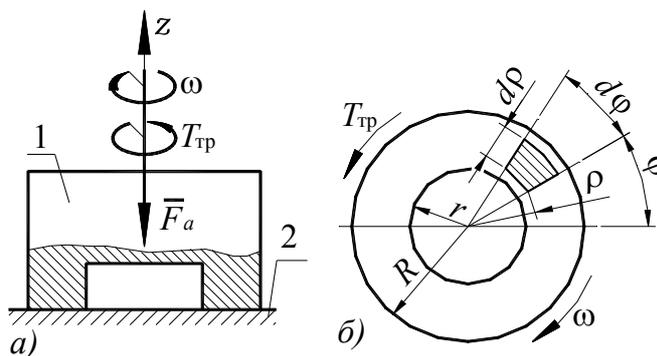


Рис. 1.6.7

Для сплошной пяты, полагая  $r=0$ , имеем:

$$T_{\text{тр}} = \frac{2}{3} f F_a R. \quad (1.6.28)$$

### 1.6.3. ТРЕНИЕ В ВЫСШИХ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАРАХ

В высших кинематических парах может иметь место как трение скольжения, рассмотренное выше, так и трение качения. Часто встречается смешанный случай, когда перекатывание одного тела по другому сопровождается проскальзыванием.

#### 1.6.3.1. ТРЕНИЕ КАЧЕНИЯ

Сопротивление, возникающее при качении одного тела по другому, называемое *трением качения*, обусловлено деформациями этих тел. Из-за этих деформаций точка приложения нормальной реакции в контакте тел смещается так, что возникает пара сил  $(\vec{F}_n - \vec{F}_n)$ , препятствующая качению, и называемая *парой трения качения* (рис. 1.6.8).

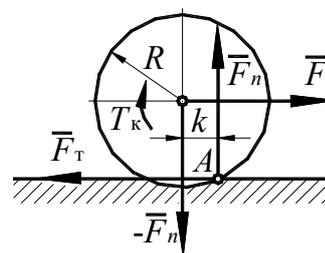


Рис. 1.6.8

Максимальную величину  $k$  плеча этой пары, зависящую от материала данных тел и их упругих свойств, называют *коэффициентом трения качения* (имеет размерность длины). (Величина  $k$  зависит также от радиусов кривизны перекатываемых поверхностей в местах их контакта и от нормального давления между этими поверхностями).

Максимальная величина момента пары трения качения

$$T_k = k F_n \quad (1.6.29)$$

Минимальная величина силы  $F$ , необходимая для качения катка (если эта сила приложена в центре катка):

$$F = \frac{k}{R} F_n \quad (1.6.30)$$

где  $R$  – радиус катка.

Условия равновесия катка выражаются так:

$$FR \leq T_k = k F_n$$

и

$$F \leq F_{\text{т max}},$$

$$F \leq \frac{k}{R} F_n; \quad (1.6.31)$$

$$F \leq f F_n$$

где  $f$  – коэффициент трения скольжения.

### 1.6.3.2. ТРЕНИЕ ГИБКИХ ТЕЛ

В технике широкое применение находят механизмы с гибкими звеньями (ременные и канатные передачи, ленточные конвейеры, ленточные тормоза и др.). Трение между гибким и твердым телами обладает некоторыми особенностями; оно зависит не только от коэффициента трения между этими телами, но и от упругих свойств гибкого тела, его деформаций, а также от формы поверхности, по которой происходит скольжение.

Рассмотрим задачу о трении между гибким и твердым телами в самой простой постановке.

Пусть гибкая, нерастяжимая нить, охватывающая неподвижный круглый шкив, скользит по этому шкиву (рис. 1.6.9). На элемент  $CD$  нити, которому соответствует центральный угол  $d\varphi$ , действуют натяжения  $\bar{S}$  и  $\bar{S}'$  в начале и конце этого элемента, сила трения  $\bar{F}$  между элементом и шкивом и нормальная реакция  $\bar{F}_n$  шкива.

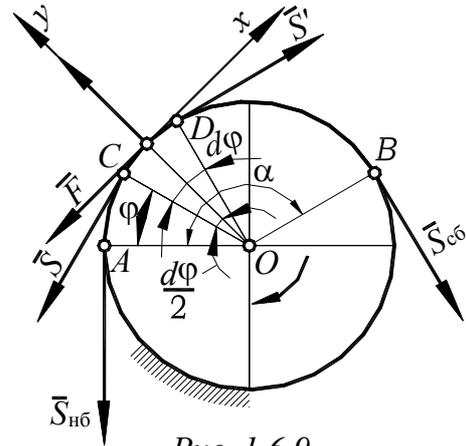


Рис. 1.6.9

Составим уравнения равновесия этих сил в проекциях на оси  $x$  и  $y$ , расположенные, как указано на чертеже:

$$\sum F_x = S' \cos \frac{d\varphi}{2} - S \cos \frac{d\varphi}{2} - F = 0;$$

$$\sum F_y = F_n - S' \sin \frac{d\varphi}{2} - S \sin \frac{d\varphi}{2} = 0.$$

Учитывая, что  $d\varphi$  – величина бесконечно малая, можем положить:

$$\cos \frac{d\varphi}{2} \approx 1$$

и

$$\sin \frac{d\varphi}{2} \approx \frac{d\varphi}{2}.$$

Поэтому из первого уравнения:

$$F = S' - S = dS;$$

из второго уравнения:

$$F_n = (S + dS) \frac{d\varphi}{2} + S \frac{d\varphi}{2} = 2S \frac{d\varphi}{2} + dS \frac{d\varphi}{2} \approx S d\varphi$$

(пренебрегаем бесконечно малыми величинами второго порядка).

Но:

$$F = fF_n = fS d\varphi,$$

где  $f$  – коэффициент трения между нитью и шкивом.

Таким образом,

$$fSd\varphi = dS;$$

$$\frac{dS}{S} = fd\varphi;$$

$$\int_{S_{нб}}^{S_{сб}} \frac{dS}{S} = f \int_0^{\alpha} d\varphi;$$

$$\ln \frac{S_{сб}}{S_{нб}} = f\alpha.$$

Отсюда получаем *формулу Эйлера*, устанавливающую зависимость между натяжениями набегающей  $S_{нб}$  и сбегающей  $S_{сб}$  ветвей нити:

$$S_{сб} = S_{нб} e^{f\alpha}. \quad (1.6.32)$$

## 1.7. КИНЕТОСТАТИКА МЕХАНИЗМОВ

### 1.7.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Рассмотрим метод, позволяющий некоторые задачи динамики механизмов свести к задачам *статики*. К числу таких задач относится определение *реакций* в кинематических парах механизма при его движении, а также *уравновешивающих сил* или *уравновешивающих моментов*.

Если *влиянием сил инерции можно пренебречь* (тихоходные машины), то указанные задачи решаются методами *статики*.

Однако в большинстве случаев приходится принимать во внимание *динамический* характер возникающих в механизмах усилий и тогда прибегают к помощи *кинетостатики*. Для этого должны быть известны массы и моменты инерции всех подвижных звеньев механизма, а также законы движения его ведущих звеньев, что необходимо для определения сил инерции и моментов сил инерции. Присоединив силы инерции к заданным силам и реакциям связей, действующим на звенья механизма, на основании принципа Даламбера получаем возможность применить ко всей совокупности указанных сил известные из статики условия равновесия.

В первом приближении кинестатический расчет механизма выполняется *без учета сил трения*.

В этом случае во *вращательной* паре (цилиндрический шарнир) силы реакций одного звена на другое, распределяющиеся по цилиндрической поверхности контакта, нормальны к указанной поверхности, т.е. проходят через ось шарнира (представляют собой систему сходящихся сил). Такая система сил приводится к одной силе, проходящей через ось

шарнира и расположенной в плоскости, перпендикулярной к его оси (рис. 1.7.1, а).

Силы взаимодействия между двумя звеньями механизма обозначим двумя индексами:

- первый индекс – номер звена, со стороны которого сила действует,
- второй индекс – номер звена, которое подвергается действию силы.

Однако направление результирующей реакции в этой плоскости и ее модуль заранее неизвестны. Такую реакцию можно представить в виде двух составляющих по двум взаимно ортогональным направлениям, произвольно ориентированным в плоскости. Величины этих составляющих подлежат определению.

В *поступательной* паре (рис. 1.7.1, б) силы реакций распределяются по поверхностям контакта, образующие которых параллельны направляющей ползуна. При отсутствии трения эти силы нормальны к направляющей. Такая система сил приводится к одной силе, перпендикулярной к направляющей ползуна (точку приложения этой силы можно выбрать произвольно) и к одной паре (к одному моменту). Величины этой силы и этого момента заранее неизвестны и тоже подлежат определению. Силу  $\overline{F}_{\mu\nu}$  и момент  $M_{\mu\nu}$  можно представить также в виде одной силы  $\overline{F}_{\mu\nu} = \overline{F}'_{\mu\nu}$  (рис. 1.7.1, в), но тогда определению подлежит, кроме модуля силы  $\overline{F}_{\mu\nu}$ , расстояние  $h$  от фиксированной на звене  $\mu$  точки до линии действия этой силы.

Таким образом, определение реакции в каждой паре 5-го класса (вращательной или поступательной) сводится к определению двух неизвестных величин.

### 1.7.2. УСЛОВИЕ СТАТИЧЕСКОЙ ОПРЕДЕЛИМОСТИ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ ЦЕПИ

Рассмотрим *условие статической определенности* плоской кинематической цепи. Для каждого звена такой цепи можно составить три уравнения равновесия.

Пусть кинематическая цепь состоит из  $n$  звеньев, образующих  $p_5$  низших кинематических пар. Тогда число подлежащих определению неизвестных равно  $2p_5$ , а общее число уравнений равновесия, которые можно составить для определения этих неизвестных, равно  $3n$ .

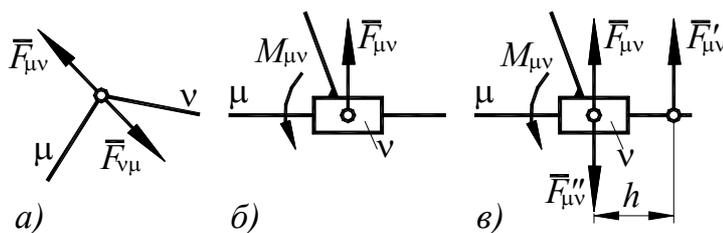


Рис. 1.7.1

Значит, для статической определимости кинематической цепи должно соблюдаться условие:

$$2p_5 = 3n,$$

откуда:

$$p_5 = \frac{3}{2}n, \quad (1.7.1)$$

что совпадает с соотношением (1.4.1), установленным для структурных групп.

Следовательно, *структурные группы представляют собой статически определимые кинематические цепи.*

### 1.7.3. ПРИВЕДЕНИЕ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ СИЛ ИНЕРЦИИ ЗВЕНА ПЛОСКОГО МЕХАНИЗМА

Раньше, чем переходить к кинетостатическому расчету плоских механизмов, рассмотрим задачу приведения к каноническому виду сил инерции звена, совершающего плоскопараллельное движение.

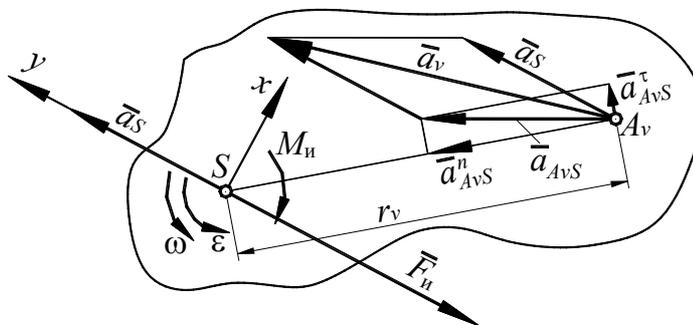


Рис. 1.7.2

Пусть звено имеет

плоскость материальной симметрии и при движении звена его сечение этой плоскостью, условно изображенное на рис. 1.7.2, все время остается в одной и той же неподвижной плоскости.

Мысленно снеся массы всех частиц звена в плоскость его материальной симметрии, получим возможность рассматривать звено как материальную плоскую фигуру, движущуюся в своей плоскости.

Пусть  $S$  – центр масс звена.

Угловую скорость и угловое ускорение звена обозначим соответственно через  $\omega$  и  $\varepsilon$ . Векторы угловой скорости и углового ускорения направлены, очевидно, перпендикулярно к плоскости рисунка. Через  $\overline{a_v}$ ,  $m_v$  и  $\overline{F_{ин}}$  обозначим соответственно ускорение, массу и силу инерции частицы  $A_v$  звена. Согласно сказанному выше полагаем, что все частицы расположены в одной плоскости.

Принимая центр масс звена за полюс, имеем:

$$\overline{a_v} = \overline{a_S} + \overline{a_{AvS}^n} + \overline{a_{AvS}^\tau}$$

где  $\overline{a_S}$  – ускорение центра масс звена;

$\overline{a_{A_v S}^n}$  и  $\overline{a_{A_v S}^\tau}$  – соответственно нормальное и тангенциальное ускорение частицы при вращении звена вокруг мгновенной оси, проходящей через центр масс  $S$ .

$$\overline{a_{A_v S}^n} = \omega^2 r_v,$$

$$\overline{a_{A_v S}^\tau} = \varepsilon r_v,$$

где  $r_v = SA_v$  – модуль радиус-вектора частицы относительно центра масс.

Кроме того,

$$\overline{F_{ив}} = -m_v \overline{a_v} = -m_v \left( \overline{a_S} + \overline{a_{A_v S}^n} + \overline{a_{A_v S}^\tau} \right) = -m_v \overline{a_S} - m_v \overline{a_{A_v S}^n} - m_v \overline{a_{A_v S}^\tau}.$$

Приведем силы инерции частиц звена к его центру масс  $S$ . Находим главный вектор  $\overline{F_{и}}$  этих сил:

$$\overline{F_{и}} = \sum \overline{F_{ив}} = -\sum m_v \overline{a_v}.$$

Но из общей механики известно, что:

$$\sum m_v \overline{v_v} = m \overline{v_S},$$

где  $m = \sum m_v$  – масса всего звена,

$\overline{v_S}$  – скорость его центра масс.

Дифференцируя это равенство по времени, получим:

$$\sum m_v \dot{\overline{v_v}} = m \dot{\overline{v_S}}$$

или

$$\sum m_v \overline{a_v} = m \overline{a_S}.$$

Поэтому:

$$\overline{F_{и}} = -m \overline{a_S}, \quad (1.7.2)$$

т.е. модуль и направление главного вектора сил инерции звена получаются такими, как если бы масса всего звена была сосредоточена в его центре масс.

Теперь находим главный момент элементарных сил инерции относительно центра масс:

$$M_{и} = \sum M_S(\overline{F_{ив}}) = -\sum M_S(m_v \overline{a_S}) - \sum M_S(m_v \overline{a_{A_v S}^n}) - \sum M_S(m_v \overline{a_{A_v S}^\tau}).$$

Определим каждую из этих сумм.

Располагая, как указано на рис. 1.7.2, координатные оси и учитывая, что

$$\sum m_v x_v = m x_S,$$

получаем

$$\sum M_S(m_v \overline{a_S}) = \sum m_v a_S x_v = \left( \sum m_v x_v \right) a_S = m x_S a_S = 0,$$

так как  $x_S=0$  (центр масс находится в начале координат);

$$\sum M_S (m_v \bar{a}_{A_v S}^n) = 0,$$

так как направления всех векторов  $\bar{a}_{A_v S}^n$  проходят через центр  $S$ ;

$$\sum M_S (m_v \bar{a}_{A_v S}^\tau) = \sum m_v r_v \varepsilon r_v = \left( \sum m_v r_v^2 \right) \varepsilon = J_S \varepsilon,$$

где  $J_S = \sum m_v r_v^2$  – момент инерции звена относительно центральной оси, перпендикулярной к плоскости движения.

Итак,

$$M_{и} = -J_S \varepsilon \tag{1.7.3}$$

т.е. силы инерции частиц звена в случае плоскопараллельного движения можно привести к одной силе  $\bar{F}_{и} = -m\bar{a}_S$ , приложенной в центре масс этого звена, и к одной паре с моментом  $M_{и} = -J_S \varepsilon$ .

На рис. 1.7.2 эта пара показана круговой стрелкой.

Силу  $\bar{F}_{и}$  и пару с моментом  $M_{и}$  можно привести к одной силе  $\bar{F}'_{и}$  (рис. 1.7.3), представив пару в виде двух сил:

$$\bar{F}'_{и} = -\bar{F}''_{и} = \bar{F}_{и}$$

и расположив ее в плоскости симметрии звена так, чтобы сила  $\bar{F}''_{и}$  оказалась приложенной в центре масс  $S$  звена и, как следует из последнего равенства, направленной противоположно силе  $\bar{F}_{и}$ .

Задавшись величинами сил, образующих пару, находим плечо  $h$  этой пары:

$$h = \frac{|M_{и}|}{F_{и}} = \frac{J_S |\varepsilon|}{m a_S} \tag{1.7.4}$$

Таким образом, линия действия *равнодействующей*  $\bar{F}'_{и}$  сил инерции проходит на расстоянии  $h$  от центра масс звена. Вопрос о том, по какую сторону от линии действия силы  $\bar{F}_{и}$  располагается точка  $S'$  приложения силы  $\bar{F}'_{и}$ , решаем исходя из того, что сила  $\bar{F}'_{и}$  должна давать относительно центра масс  $S$  момент того же знака, что и момент пары сил инерции. В случае *поступательного* движения звена (рис. 1.7.4, а) величина  $\varepsilon=0$ .

Следовательно,  $M_{и}=0$ , и остается одна сила  $\bar{F}_{и} = m\bar{a}_S$ , приложенная в центре масс звена.

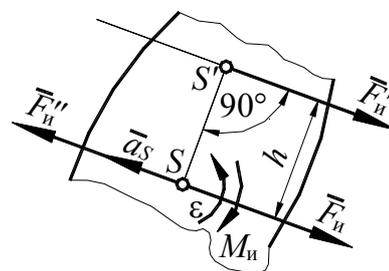


Рис. 1.7.3

В случае вращательного движения звена вокруг оси, перпендикулярной к плоскости симметрии звена и не проходящей через его центр масс (рис. 1.7.4, б), силы инерции приводятся к силе  $\overline{F}_n = -m\overline{a}_S$ , приложенной в центре масс  $S$ , и к паре сил моментом  $M_n = -J_S\varepsilon$ , которые можно привести к одной силе  $\overline{F}'_n = -m\overline{a}_S$ , линия действия которой пересекает прямую, проходящую через центр вращения  $O$  и центр масс звена  $S$ , в некоторой точке  $K$ . Положение этой точки определяется следующим образом:

$$l_{SK} = \frac{h}{\sin \alpha} = \frac{J_S |\varepsilon|}{ma_S \sin \alpha} = \frac{J_S |\varepsilon|}{ma_S^\tau} = \frac{J_S |\varepsilon|}{ml_{OS} |\varepsilon|} = \frac{J_S}{ml_{OS}}.$$

Теперь можно найти расстояние от центра вращения до точки  $K$ :

$$l_{OK} = l_{OS} + l_{SK} = l_{OS} + \frac{J_S}{ml_{OS}}, \quad (1.7.5)$$

или

$$l_{OK} = \frac{ml_{OS}^2 + J_S}{ml_{OS}} = \frac{J_O}{ml_{OS}}. \quad (1.7.6)$$

Из этих формул видно, что точка  $K$  совпадает с центром качаний или центром удара звена.

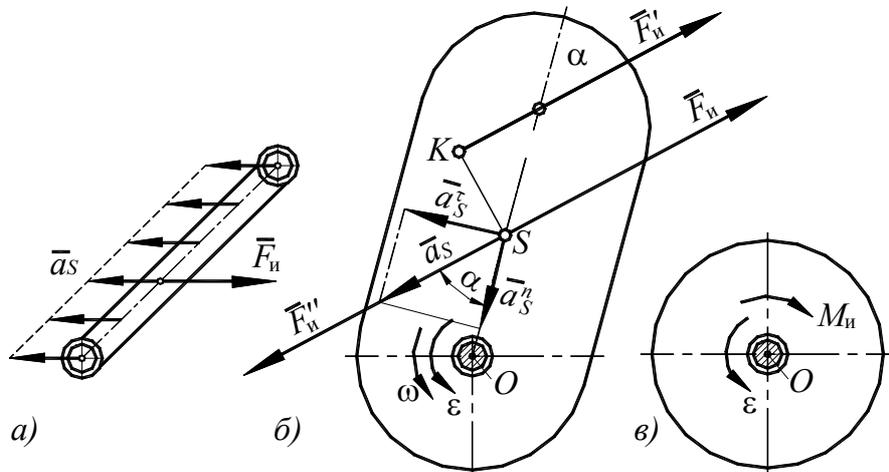


Рис. 1.7.4

Итак, в рассматриваемом случае равнодействующая сил инерции звена такова, как если бы масса всего звена была сосредоточена в его центре масс, но приложена эта равнодействующая не в центре масс, а в центре качания звена.

При вращательном движении вокруг оси, проходящей через центр масс звена (рис. 1.7.4, в), главный вектор сил инерции:

$$\overline{F}'_n = -m\overline{a}_S = 0.$$

Так как:

$$\bar{a}_S = 0$$

и остается один момент:

$$M_{и} = -J_S \varepsilon.$$

### 1.7.4. КИНЕТОСТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ С НИЖШИМИ КИНЕМАТИЧЕСКИМИ ПАРАМИ

Зная активные силы, действующие на звенья механизма, и силы инерции этих звеньев, можно произвести *кинетостатический* расчет механизма, т.е. определить реакции в его кинематических парах и движущий момент (или движущую силу) на ведущем звене.

Указанную задачу решают или аналитически, или графоаналитическим методом при помощи построения планов сил. Для этого механизм расчленяют на структурные группы, которые, как было показано в разделе 1.7.2, являются статически определенными, и ведут последовательно расчет для этих групп, начиная с группы, наиболее удаленной от ведущего звена.

Ограничимся рассмотрением механизмов II класса. В этом случае задача сводится к расчету двухповодковых групп (диад) и ведущего звена (о символах двухповодковых групп см. раздел 1.1).

#### 1.7.4.1. ДИАДА ПЕРВОГО ВИДА (ВВВ)

Эта диада содержит три вращательные пары. Все заданные силы, действующие на звено 2 диады (рис. 1.7.5, а), вместе с присоединенными к ним силами инерции этого звена можно привести к одной силе, приложенной в произвольно выбранной точке звена, и к одной паре.

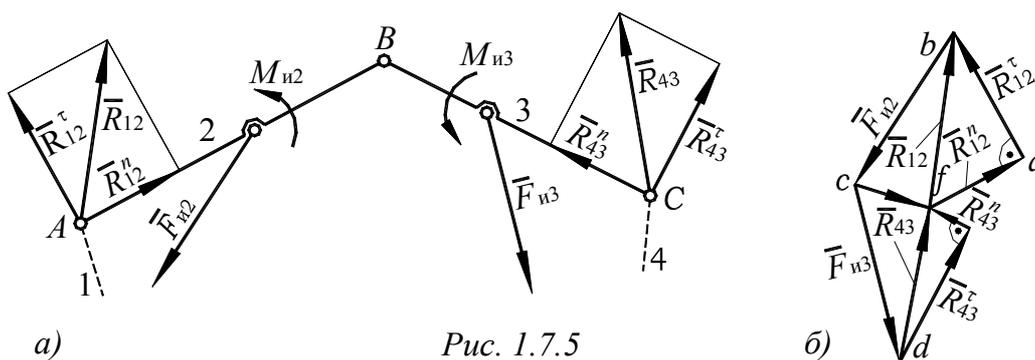


Рис. 1.7.5

Указанную силу и момент указанной пары обозначим соответственно через  $\overline{F_{и2}}$  и  $M_{и2}$ . Аналогично заданные силы, действующие на звено 3, вместе с присоединенными к ним силами инерции звена 3 можно привести к одной силе  $\overline{F_{и3}}$  и к одному моменту  $M_{и3}$ . Дополнив эти

силы реакциями  $\overline{R}_{12}$  и  $\overline{R}_{43}$  звеньев 1 и 4, с которыми соединены соответственно звенья 2 и 3 диады, получим уравновешенную систему сил.

Известными являются силы  $\overline{F}_{и2}$ ,  $\overline{F}_{и3}$  и моменты  $M_{и2}$ ,  $M_{и3}$ ; определению подлежат реакции  $\overline{R}_{12}$  и  $\overline{R}_{43}$  в шарнирах  $A$  и  $C$ , а также реакция  $\overline{R}_{32} = -\overline{R}_{23}$  в шарнире  $B$ .

При *аналитическом* решении задачи координатные оси выбираем так, чтобы одна из них проходила через центры крайних шарниров, а другая была перпендикулярна линии  $AC$ . Реакции в шарнирах разлагаем на компоненты вдоль этих осей и составляем уравнения равновесия сначала для всей диады в целом, а затем для одного из ее звеньев. Из этих уравнений находим проекции искомых реакций на координатные оси, после чего нетрудно определить и сами реакции.

При использовании *метода планов сил* поступаем несколько иначе. Реакции в крайних шарнирах разлагаем на составляющие  $\overline{R}_{12}^n$  и  $\overline{R}_{43}^n$  вдоль соответствующих звеньев и  $\overline{R}_{12}^\tau$  и  $\overline{R}_{43}^\tau$  перпендикулярно этим звеньям. Рассматривая равновесие звена 2, составляем уравнение моментов относительно центра среднего шарнира  $B$ :

$$-\overline{R}_{12}^\tau l_{AB} + M_B(\overline{F}_{и2}) + M_{и2} = 0.$$

Из этого уравнения находим величину  $\overline{R}_{12}^\tau$ .

Далее составляем уравнение моментов для звена 3 относительно того же центра  $B$ :

$$-\overline{R}_{43}^\tau l_{BC} + M_B(\overline{F}_{и3}) + M_{и3} = 0$$

и из этого уравнения находим величину  $\overline{R}_{43}^\tau$ .

Теперь рассмотрим равновесие всей системы в целом.

Так как главный вектор уравновешенных сил равен нулю, то:

$$\overline{R}_{12}^\tau + \overline{F}_{и2} + \overline{F}_{и3} + \overline{R}_{43}^\tau + \overline{R}_{43}^n + \overline{R}_{12}^n = 0. \quad (1.7.7)$$

Внутренние силы  $\overline{R}_{23}$  и  $\overline{R}_{32}$  не входят в уравнение равновесия всей системы, так как, согласно закону равенства действия и противодействия:

$$\overline{R}_{23} = -\overline{R}_{32}$$

и, следовательно,

$$\overline{R}_{23} + \overline{R}_{32} = 0.$$

Пользуясь векторным уравнением (1.7.7), строим замкнутый многоугольник сил, называемый *планом сил*. Для этого от произвольной точки  $a$  (рис. 1.7.5, б) в выбранном масштабе  $\mu_P$  откладываем век-

тор  $\overline{R_{12}^r}$ , от его конца  $b$  – вектор  $\overline{F_{и2}}$  и т.д. в указанной уравнением последовательности. Проведя из точек  $e$  и  $a$  прямые, параллельные соответственно  $\overline{R_{12}^n}$  и  $\overline{R_{43}^n}$ , получаем в точке  $f$  пересечения этих прямых конец силы  $\overline{R_{43}^n}$  и начало силы  $\overline{R_{12}^n}$ , откуда модули этих сил определяются отрезками  $(ef)$  и  $(fa)$ , т.е.

$$R_{43}^n = \mu_P (ef)$$

и

$$R_{12}^n = \mu_P (fa).$$

Полные реакции в шарнирах  $A$  и  $C$  определяются отрезками  $(df)$  и  $(fb)$ , то есть:

$$R_{43} = \mu_P (df)$$

и

$$R_{12} = \mu_P (fb).$$

Чтобы определить реакцию в среднем шарнире  $B$ , напишем в векторной форме условие равновесия сил для звена 2:

$$\overline{R_{12}} + \overline{F_{и2}} + \overline{R_{32}} = 0.$$

Из этого уравнения следует, что давлению (реакции)  $\overline{R_{32}}$  звена 3 на звено 2 соответствует в плане сил вектор  $\overline{cf}$ , а давлению  $\overline{R_{23}}$  звена 2 на звено 3, согласно закону равенства действия и противодействия, вектор  $\overline{fc} = -\overline{cf}$ . Поэтому модуль силы давления в шарнире  $B$  определяется так:

$$R_{32} = R_{23} = \mu_P (cf).$$

Силу  $\overline{F_{и2}}$  и момент  $M_{и2}$ , действующие на звено 2, можно было бы предварительно привести к одной равнодействующей; аналогично можно было бы поступить с силой  $\overline{F_{и3}}$  и моментом  $M_{и3}$ . Однако такая операция не внесла бы особых упрощений в дальнейшее решение задачи, а в некоторых случаях она явно нецелесообразна (например, в том случае, когда линия действия равнодействующей рассматриваемой системы сил проходит на малом расстоянии от центра приведения, в частности, когда равнодействующая сил инерции звена проходит на малом расстоянии от его центра масс).

#### 1.7.4.2. ДИАДА ВТОРОГО ВИДА (ВВП)

Эта диада содержит две вращательные и крайнюю поступательную кинематические пары (рис. 1.7.6,  $a$ ).

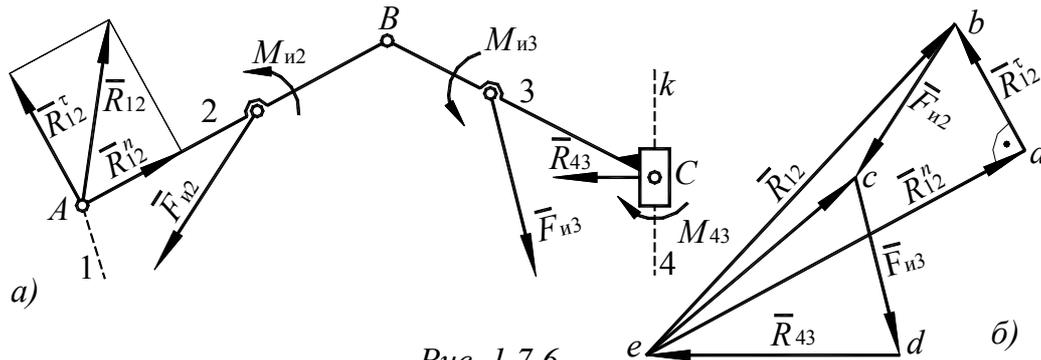


Рис. 1.7.6

Как и в предыдущем случае, определяем предварительно силы  $\overline{F_{и2}}$  и  $\overline{F_{и3}}$ , а также моменты  $M_{и2}$  и  $M_{и3}$ . Реакцию в шарнире  $A$  разлагаем на два компонента  $\overline{R_{12}^n}$  и  $\overline{R_{12}^t}$  вдоль звена 2 и перпендикулярно к этому звену.

Реакция в поступательной паре складывается из силы  $\overline{R_{43}}$ , перпендикулярной к направляющей  $kl$  поступательной пары и приложенной в произвольной точке  $C$  (обычно эту точку выбирают в центре ползуна), и реактивного момента  $M_{43}$ . Составив уравнение моментов для звена 2 относительно центра  $B$ , находим величину  $\overline{R_{12}^t}$ .

После этого переходим к построению замкнутого многоугольника сил для всей системы, для чего пользуемся уравнением:

$$\overline{R_{12}^t} + \overline{F_{и2}} + \overline{F_{и3}} + \overline{R_{43}} + \overline{R_{12}^n} = 0.$$

От произвольной точки  $a$  (рис. 1.7.6, б) откладываем вектор  $\overline{ab}$ , равный  $\overline{R_{12}^t}$ , из его конца – вектор  $\overline{bc}$ , равный  $\overline{F_{и2}}$  и из точки  $c$  – вектор  $\overline{cd}$ , равный  $\overline{F_{и3}}$ . Проведя от точек  $d$  и  $a$  прямые, параллельные соответственно  $\overline{R_{43}}$  и  $\overline{R_{12}^n}$ , получим в точке  $e$  пересечения этих прямых конец силы  $\overline{R_{43}}$  и начало силы  $\overline{R_{12}^n}$ , т.е.  $\overline{R_{43}} = \mu_P(\overline{de})$  и  $\overline{R_{12}^n} = \mu_P(\overline{eb})$ .

Уравнение равновесия сил для звена 2 имеет вид:

$$\overline{R_{12}^n} + \overline{F_{и2}} + \overline{R_{32}} = 0.$$

Отсюда:

$$\overline{R_{32}} = \overline{R_{23}} = \mu_P(\overline{ce}).$$

Реактивный момент  $M_{43}$  определяем из уравнения моментов для звена 3 относительно центра  $B$ . Силу  $\overline{R_{43}}$  и момент  $M_{43}$  можно, конечно, привести к одной силе.

Задача несколько упрощается, если звено 3 состоит из одного ползуна (точки  $B$  и  $C$  сливаются) и заданные силы, действующие на ползун, приводятся вместе с силами инерции ползуна к одной силе, приложенной в центре шарнира  $B$ . В этом случае  $M_{и3}=0$  и  $M_{43}=0$ .

### 1.7.4.3. ДИАДА ТРЕТЬЕГО ВИДА (ВПВ)

Такая диада содержит крайние вращательные и среднюю поступательную кинематические пары (рис. 1.7.7,  $a$ ).

Для кинетостатического расчета диады должны быть предварительно определены силы  $\overline{F}_{и2}$  и  $\overline{F}_{и3}$ , а также моменты  $M_{и2}$  и  $M_{и3}$ .

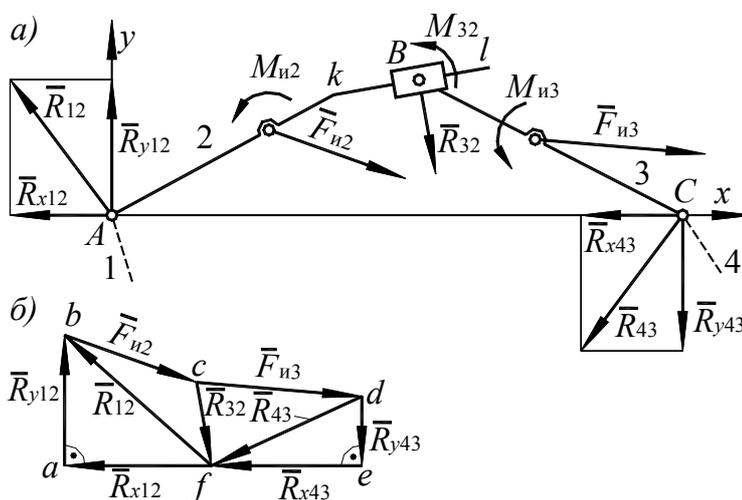


Рис. 1.7.7

Реакции  $\overline{R}_{12}$  и  $\overline{R}_{43}$

крайних шарниров разлагаем на компоненты  $\overline{R}_{x12}$ ,  $\overline{R}_{x43}$  вдоль оси  $x$ , проходящей через центры шарниров, и  $\overline{R}_{y12}$ ,  $\overline{R}_{y43}$  перпендикулярно к этой оси и, составив уравнение моментов для всей диады относительно точки  $C$ , находим величину  $\overline{R}_{y12}$ .

Затем строим замкнутый многоугольник этих сил, исходя из векторного уравнения:

$$\overline{R}_{y12} + \overline{F}_{и2} + \overline{F}_{и3} + \overline{R}_{y43} + \overline{R}_{x43} + \overline{R}_{x12} = 0.$$

Если силы брать в указанной этим уравнением последовательности, то векторы  $\overline{R}_{x12}$ ,  $\overline{R}_{x43}$  окажутся направленными в плане сил по одной прямой.

Из произвольного центра  $a$  (рис. 1.7.7,  $b$ ) проводим вектор  $(\overline{ab}) = \overline{R}_{y12}$ , из его конца вектор  $(\overline{bc}) = \overline{F}_{и2}$  и из конца последнего – вектор  $(\overline{cd}) = \overline{F}_{и3}$ .

Проведя через точки  $d$  и  $a$  прямые, параллельные соответственно осям  $y$  и  $x$ , получим в точке  $e$  пересечения этих прямых конец вектора  $\overline{de} = \overline{R}_{y43}$  и начало вектора  $\overline{R}_{x43}$ .

Для нахождения конца вектора  $\overline{R_{x43}}$  и начала вектора  $\overline{R_{x12}}$  обратимся к условиям равновесия сил для звена 2.

К рассмотренным силам  $\overline{F_{и2}}$ ,  $\overline{R_{12}}$  и моменту  $M_{и2}$  присоединяем действующие со стороны звена 3 реактивную силу  $\overline{R_{32}}$ , перпендикулярную к направляющей  $kl$  поступательной пары (приложим эту силу в центре  $B$  ползуна), и реактивный момент  $M_{32}$ . Тогда имеем:

$$\overline{R_{y12}} + \overline{F_{и2}} + \overline{R_{32}} + \overline{R_{x12}} = 0.$$

Векторы  $\overline{R_{y12}}$  и  $\overline{F_{и2}}$  в плане сил уже построены; остается из конца с вектора  $(\overline{bc}) = \overline{F_{и2}}$  провести прямую, перпендикулярную  $kl$ , до пересечения в некоторой точке  $f$  с прямой  $ae$ , параллельной оси  $x$ .

Точка  $f$  является концом векторов  $(\overline{cf}) = \overline{R_{32}}$  и  $\overline{ef} = \overline{R_{x43}}$ , а также началом вектора  $\overline{fa} = \overline{R_{x12}}$ .

Таким образом,

$$\overline{R_{12}} = \mu_P(\overline{fb});$$

$$\overline{R_{43}} = \mu_P(\overline{df});$$

$$\overline{R_{32}} = \overline{R_{23}} = \mu_P(\overline{cf}).$$

Реактивный момент  $M_{32}$  определяем из уравнения моментов для звена 2 относительно центра  $A$ . Силу  $\overline{R_{32}}$  и момент  $M_{32}$  можно привести к одной силе.

Часто звено 3 состоит из одного ползуна (точки  $B$  и  $C$  сливаются), а звено 2 превращается в кулису, ось которой проходит через центр шарнира  $B$ . В этом случае ось  $x$  совпадает с осью кулисы. Если заданные силы, действующие на ползун, приводятся вместе с силами инерции к одной силе, проходящей через центр шарнира  $B$ , то  $M_{и3}=0$ , и  $M_{32}=0$ .

При *кинетостатическом* расчете диад второго и третьего видов, так же как и при расчете диады первого вида, можно обойтись без построения планов сил, воспользовавшись *аналитическим* методом. Для этого от векторных уравнений равновесия рассматриваемых систем сил следует перейти к уравнениям равновесия этих сил в проекциях на соответствующим образом выбранные координатные оси.

Усилия в кинематических парах остальных двух видов двухповодковых групп определяются методами, аналогичными рассмотренным выше.

#### 1.7.4.4. ВЕДУЩЕЕ ЗВЕНО

Ведущее звено 1 механизма (рис. 1.7.8, а) в большинстве случаев образует с неподвижным звеном (стойкой  $O$ ) вращательную пару и является кривошипом.

Пусть все заданные силы, действующие на звено 1, вместе с присоединенными к ним силами инерции этого звена приводятся к силе  $\overline{F}_{и1}$  и моменту  $M_{и1}$ . Кроме того, на звено 1 действуют: реакция  $\overline{R}_{21}$  со стороны звена 2, которая должна быть предварительно определена при расчете присоединенной к звену 1 структурной группы, реакция  $\overline{R}_{01}$  стойки и, наконец, вращающий момент или момент движущих сил  $M_d$ , который обеспечивает движение ведущего звена по заданному закону и по отношению к другим силам рассматриваемой системы является уравновешивающим моментом  $M_{ур}$ .

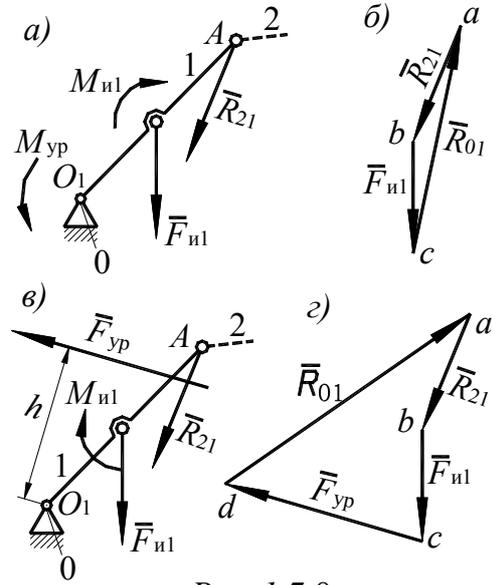


Рис. 1.7.8

Реакция  $\overline{R}_{01}$  и момент движущих сил  $M_d$  подлежат определению. Составляем уравнения равновесия для звена 1:

$$M_d + M_{и1} + M_O(\overline{F}_{и1}) + M_O(\overline{R}_{21}) = 0;$$

$$\overline{R}_{21} + \overline{F}_{и1} + \overline{R}_{01} = 0.$$

Из первого уравнения определяем  $M_d$  (или  $M_{ур}$ ). Второе уравнение используем для построения плана сил (рис. 1.7.8, б), из которого получаем:

$$\overline{R}_{01} = \mu_P(\overline{ca}).$$

Если на ведущее звено действует не уравновешивающая пара сил  $M_{ур}$ , а уравновешивающая сила  $\overline{F}_{ур}$ , то линия действия этой силы, определяемая конструкцией приводного устройства, заранее известна (рис. 1.7.8, в), и остается найти только величину  $F_{ур}$ .

Обозначая через  $h$  плечо силы  $\overline{F}_{ур}$  относительно центра  $O$ , получим:

$$F_{ур} = -\frac{M_1 + M_O(\overline{F}_{и1}) + M_O(\overline{R}_{21})}{h}.$$

Второе уравнение в данном случае принимает вид:

$$\overline{R_{21}} + \overline{F_{и1}} + \overline{F_{yp}} + \overline{R_{01}} = 0.$$

В соответствии с этим уравнением строим план сил (рис. 1.7.8, з), из которого находим реакцию неподвижного шарнира:

$$\overline{R_{01}} = \mu_P (\overline{da}).$$

Расчетом ведущего звена и определением уравновешивающего момента или уравновешивающей силы заканчивается кинетостатический расчет всего механизма.

### 1.7.5. УЧЕТ ТРЕНИЯ ПРИ КИНЕТОСТАТИЧЕСКОМ РАСЧЕТЕ МЕХАНИЗМОВ

Для учета трения в кинематических парах рычажных механизмов при кинетостатическом расчете можно воспользоваться приближенным *методом приведения сил трения*.

Метод приведения сил трения заключается в следующем.

Сначала определяют реакции в кинематических парах структурных групп механизма, а также уравновешивающую силу или уравновешивающий момент без учета трения (раздел 1.7.4).

Затем по найденным реакциям определяют силы трения в кинематических парах и подсчитывают суммарную мощность этих сил, после чего находят приведенную силу трения или приведенный момент сил трения.

Момент трения во *вращательной* паре, образуемой звеньями  $\mu$  и  $\nu$ , определяем на основании выражения (1.6.24) формулой:

$$M_{\mu\nu}^{тр} = f'_{\mu\nu} F_{\mu\nu} r_{\mu\nu}, \quad (1.7.8)$$

где  $f'_{\mu\nu}$  – коэффициент трения во вращательной паре;

$F_{\mu\nu}$  – давление во вращательной паре,

$r_{\mu\nu}$  – радиус цапфы вращательной пары.

Абсолютная величина мощности, затрачиваемой на трение во вращательной паре:

$$P_{\mu\nu}^{тр} = M_{\mu\nu}^{тр} |\omega_{\mu\nu}| = f'_{\mu\nu} F_{\mu\nu} r_{\mu\nu} |\omega_{\mu\nu}|, \quad (1.7.9)$$

где  $\omega_{\mu\nu}$  – угловая скорость звена  $\mu$  относительно звена  $\nu$ :

$$\omega_{\mu\nu} = \omega_{\mu} - \omega_{\nu}, \quad (1.7.10)$$

где  $\omega_{\mu}$  и  $\omega_{\nu}$  – алгебраические величины абсолютных угловых скоростей звеньев  $\mu$  и  $\nu$ , определяемые методами кинематики.

Рассмотрим *поступательную* пару, в которую образуют звенья  $\mu$  и  $\nu$  (рис. 1.7.9, а).

В такой паре при отсутствии трения возникают нормальная к ее направляющей реакция  $\overline{F}_{\mu\nu}$ , которую условились прикладывать в середине ползуна, и реактивный момент  $M_{\mu\nu}$ . Эта система может быть приведена к одной силе  $\overline{F}'_{\mu\nu} = \overline{F}_{\mu\nu}$ , линия действия которой смещена относительно центра ползуна на расстояние  $h = \frac{|M_{\mu\nu}|}{F_{\mu\nu}}$ .

Если

$$h \leq \frac{l}{2},$$

или

$$\frac{|M_{\mu\nu}|}{l} \leq \frac{F_{\mu\nu}}{2}, \quad (1.7.11)$$

то контакт звеньев  $\mu$  и  $\nu$  осуществляется по площадке  $AB$  и линия действия силы  $\overline{F}'_{\mu\nu}$

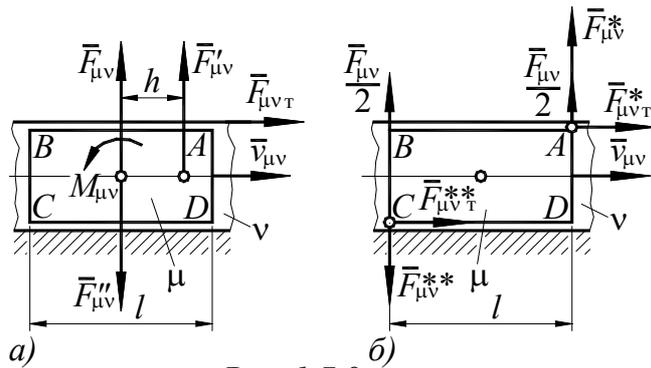


Рис. 1.7.9

проходит в зоне указанной площадки (рис. 1.7.9, а). В этом случае сила трения между звеньями  $\mu$  и  $\nu$  определяется так:

$$F_{\mu\nu T} = f_{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (1.7.12)$$

где  $f_{\mu\nu}$  – коэффициент трения между элементами поступательной пары.

Отсюда мощность, затрачиваемая на трение:

$$P_{\mu\nu}^{тр} = F_{\mu\nu T} |\overline{v}_{\mu\nu}| = f_{\mu\nu} F_{\mu\nu} |\overline{v}_{\mu\nu}|, \quad (1.7.13)$$

где  $\overline{v}_{\mu\nu}$  – скорость поступательного движения звена  $\mu$  относительно звена  $\nu$ :

$$\overline{v}_{\mu\nu} = \overline{v}_{\mu} - \overline{v}_{\nu}. \quad (1.7.14)$$

Так как векторы  $\overline{v}_{\mu}$  и  $\overline{v}_{\nu}$  коллинеарны, то:

$$|\overline{v}_{\mu\nu}| = |\overline{v}_{\mu} \pm \overline{v}_{\nu}|, \quad (1.7.15)$$

причем знак «минус» соответствует случаю, когда векторы  $\overline{v}_{\mu}$  и  $\overline{v}_{\nu}$  направлены в одну сторону, а знак «плюс» – случаю, когда направления этих векторов противоположны.

Если

$$\frac{|M_{\mu\nu}|}{l} > \frac{F_{\mu\nu}}{2}, \quad (1.7.16)$$

то при указанном на рис. 1.7.9, *a* направлении реактивного момента  $M_{\mu\nu}$  можно считать, допуская некоторую погрешность, что элементы кинематической пары контактируют по ребрам *A* и *C* ползуна за счет взаимного перекоса звеньев  $\mu$  и  $\nu$  в плоскости их движения (рис. 1.7.9, *б*). В этом случае, обозначая давления в точках *A* и *C* соответственно через  $\overline{F_{\mu\nu}^*}$  и  $\overline{F_{\mu\nu}^{**}}$ , имеем:

$$\left. \begin{aligned} F_{\mu\nu}^* &= \frac{|M_{\mu\nu}|}{l} + \frac{F_{\mu\nu}}{2}; \\ F_{\mu\nu}^{**} &= \frac{|M_{\mu\nu}|}{l} - \frac{F_{\mu\nu}}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (1.7.17)$$

где

$\frac{|M_{\mu\nu}|}{l}$  – величины давлений, обусловленных действием пары сил  $M_{\mu\nu}$ .

Суммарная сила трения между звеньями  $\mu$  и  $\nu$  в рассматриваемом случае определяется следующим образом:

$$F_{\mu\nu_T} = f_{\mu\nu} F_{\mu\nu}^* + f_{\mu\nu} F_{\mu\nu}^{**} = 2f_{\mu\nu} \frac{|M_{\mu\nu}|}{l} \quad (1.7.18)$$

откуда мощность, развиваемая силой трения,

$$P_{\mu\nu}^{TP} = F_{\mu\nu_T} |\overline{v}_{\mu\nu}| = 2f_{\mu\nu} \frac{|M_{\mu\nu}|}{l} |\overline{v}_{\mu\nu}|. \quad (1.7.19)$$

Таким образом, мощность, затрачиваемая на трение в поступательной паре, определяется по формуле (1.7.13), если соблюдается условие (1.7.11), и по формуле (1.7.19), если соблюдается условие (1.7.16).

Определив, пользуясь формулами (1.7.9), (1.7.13) и (1.7.19), мощность сил трения во всех кинематических парах механизма, находим суммарную мощность этих сил:

$$P^{TP} = \sum P_{\mu\nu}^{TP}, \quad (1.7.20)$$

причем суммирование распространяется на все кинематические пары механизма.

*Уравновешивающий момент*  $M_{yp}^{TP}$ , который необходимо приложить к ведущему звену механизма для преодоления сил трения, равен приведенному моменту указанных сил:

$$M_{yp}^{TP} = M_{пр}^{TP} = \frac{N^{TP}}{\omega_1}, \quad (1.7.21)$$

где  $\omega_1$  – угловая скорость ведущего звена.

Суммарный уравнивающий момент  $M_{ур}^*$  складывается из уравнивающего момента  $M_{ур}$  без учета сил трения и уравнивающего момента сил трения:

$$M_{ур}^* = M_{ур} + M_{ур}^{тр}. \quad (1.7.22)$$

## 1.8. СИНТЕЗ МЕХАНИЗМОВ

### 1.8.1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Создание новых производственных процессов требует создания новых механизмов. В большинстве случаев используется следующий порядок проектирования.

Сначала *технологическую* задачу превращают в *кинематическую* (выбирают кинематическую схему) и определяют ее *основные размеры*. Основные размеры рассчитываются по заданным условиям работы, определяемым в результате изучения механизмуемого технологического процесса.

При проектировании новых механизмов приходится учитывать условия геометрии, кинематики, динамики, технологичности, надежности и т.п. Удовлетворение всех этих условий представляет весьма сложную задачу, которая требует различного подхода к механизмам и особой методики их расчета. Поэтому единой теории синтеза механизмов не существует и кинематические схемы проектируют по отдельным группам механизмов (рычажных, кулачковых, зубчатых и др.), а также по различным условиям их работы.

*Основной задачей синтеза* является осуществление *заданного движения рабочего органа механизма*.

Решение этой задачи многовариантно, т.е. одну и ту же форму движения можно осуществить механизмами различных типов. Конструктор обычно проектирует несколько вариантов схем и после их всестороннего изучения и сравнения выбирает оптимальный для заданных условий.

### 1.8.2. СИНТЕЗ ПЛОСКИХ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

#### 1.8.2.1. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ КИНЕМАТИЧЕСКИХ СХЕМ МЕХАНИЗМОВ

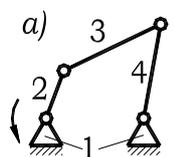
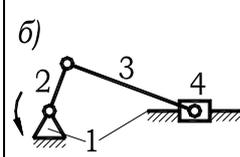
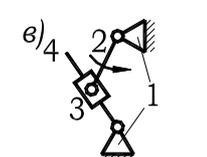
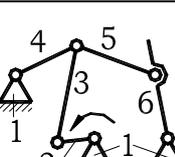
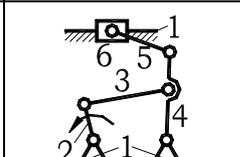
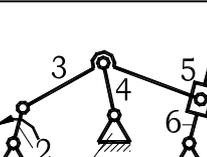
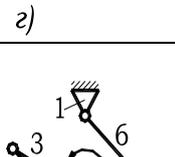
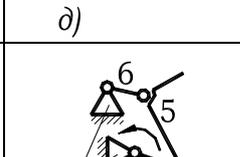
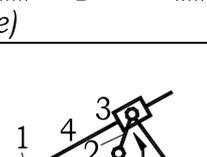
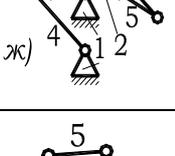
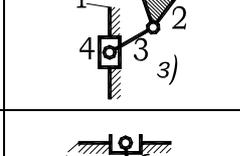
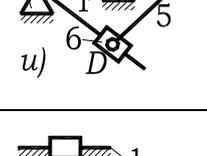
Рычажные механизмы, сочленения звеньев которых образуют низшие кинематические пары, получили большое распространение из-за их надежности, технологичности и способности передавать большие усилия. Точная обработка плоскостей и цилиндрических поверхностей элементов низших пар возможна на обыкновенных металлорежущих

станках, что приводит к малой стоимости изготовления деталей этих механизмов.

Рычажные механизмы широко применяют в разных отраслях машиностроения и приборостроения. В таблице 1.8.1 представлены кинематические схемы различных плоских рычажных механизмов, расположенные в соответствии с их структурной классификацией.

Таблица 1.8.1

Схемы четырех— и шестизвенных рычажных механизмов

Механизмы		рычажные с вращательными и поступательными кинематическими парами		
		с вращательными парами	кривошипно-ползунные	кривошипно-кулисные
рычажные с двухповодковыми группами	четырёхзвенные			
	последовательное соединение			
	параллельное соединение			
	с трехповодковыми группами Ассура			

Простейшие *четырёхзвенные* механизмы *а, б, в* имеют четыре звена. Звено 1 служит *стойкой*. Эти механизмы преобразуют равномерное вращательное движение кривошипа 2 в неравномерное вращательное, возвратно-поступательное или в сложное плоское движения шатуна 3, а также преобразуют поступательное движение во вращательное. Наи-

большее распространение получили *шарнирный четырехзвенник а*, *кривошипно-ползунный механизм б* и *кривошипно-кулисный механизм в*.

Многозвенные рычажные механизмы с числом звеньев более четырех позволяют осуществить такие законы движения ведомых звеньев, которые нельзя получить в четырехзвенных механизмах. Часто применяют *шести-звенные* механизмы, воспроизводящие требуемую закономерность движения рабочего органа или обеспечивающие необходимые условия передачи мощности. Эти механизмы могут быть образованы *последовательным (г, д, е)* или *параллельным (ж, з, и)* присоединением *двух двухпроводковых* или же одной *трехпроводковой (к, л, м)* групп Ассура к кривошипу.

В станкостроении, полиграфическом машиностроении и других отраслях часто используют *шестизвенный механизм типа д*, дающий высокий КПД и имеющий малую стоимость изготовления.

Шарнирный *шестизвенник типа г* может сообщать ведомому коромыслу *б* несколько качательных движений за один оборот кривошипа *2*.

Рычажный механизм *типа е* при непрерывном движении кривошипа *2* воспроизводит движение ведомого звена *б* с выстоями заданной продолжительности. Траекторию точки *Е* подбирают так, чтобы на некотором участке она была прямолинейной. За время прохождения точки *Е* ползуна по прямолинейному участку траектории кулиса *б* будет неподвижна.

При *параллельном* соединении обе группы Ассура присоединены к ведущему звену *2*. Например, в шарнирном механизме тормоза *ж* в результате поворота рычага *2* колодки *4* и *6* прижимаются к ободу колеса *7* и производят его торможение силами трения.

В механизме *з* швейной машины кривошип *2* соединен с двумя группами – игловодителя *4* и нитепротягивателя *5*.

Кулисный направляющий механизм *и* имеет соединение кривошипа *2* с группами *3-4* и *5-6*. Точка *Д* ползуна *б* за время  $1/6$  оборота кривошипа движется приближенно по прямой линии.

В *шестизвенных* рычажных механизмах *к, л, м* III порядка кривошип *2* соединен с *трехпроводковой группой Ассура*. Методы синтеза анализа и силового расчета таких систем значительно сложнее, чем рассмотренных выше.

В механизме *к* лущильной машины точка *Ф* базисного звена *б* *трехпроводковой группы* движется приближенно по прямой линии, осуществляя технологическую операцию.

В механизме *л* привода талера плоскочечатной машины к кривошипу *2* присоединена *трехпроводковая группа* с ведомым рабочим звеном *б*.

*Шестизвенный кривошипно-кулисный механизм м* III порядка применяют в металлорежущих станках.

Трудности метрического синтеза рычажных шестизвенных механизмов III порядка приводят к экспериментальному методу решения задачи. Это является одной из причин сравнительно редкого применения в машиностроении механизмов с трехпроводковой группой.

Задачами синтеза рычажных механизмов механизма являются:

- 1) проектирование по положениям звеньев;
- 2) проектирование по воспроизведению непрерывной функции на заданном отрезке.

Вторую задачу обычно ставят при синтезе функциональных механизмов приборов и систем автоматического контроля и управления. Сущность этих задач поясним следующим примером.

В рычажном механизме связь между ведущим звеном  $AB$  и ведомым  $CD$  (рис. 1.8.1,  $a$ ) можно осуществить либо кинематической цепью, либо одним шатуном  $BC$ . Независимую координату  $\varphi$  ведущего звена отсчитывают от оси  $I$ , координату  $\psi$  ведомого звена – от оси  $II$ . Положения осей  $I$  и  $II$  относительно линии центров  $AD$  определяются постоянными углами  $\alpha$  и  $\beta$ .

Зависимость  $\psi(\varphi)$  – есть функция положения механизма. Форма задания этой функции зависит от назначения механизма.

При синтезе по положениям звеньев параметры схемы определяют согласно следующим условиям: задан ряд точек и с координатами  $\varphi$  и  $\psi$  (рис. 1.8.1,  $b$ ), определяющими положения ведущего и ведомого звеньев. Требуется, чтобы график  $\psi(\varphi)$  проходил через все заданные точки  $u_1, u_2, u_3, u_4$ .

Ход графика между точками иногда уточняют заданием передаточной функции

$$f'(\varphi) = \frac{d\psi}{d\varphi}$$

$$\text{или ее производной } f''(\varphi) = \frac{d^2\psi}{d\varphi^2}.$$

Синтез механизма по положениям звеньев с математической точки зрения представляет задачу

интерполирования с предварительно заданными узлами  $U$ . При синтезе по воспроизведению непрерывной функции на заданном отрезке задают функцию  $F(\varphi)$ , непрерывную на отрезке  $\varphi_i - \varphi_k$  (рис. 1.8.1,  $в$ ), которая должна быть осуществлена механизмом.

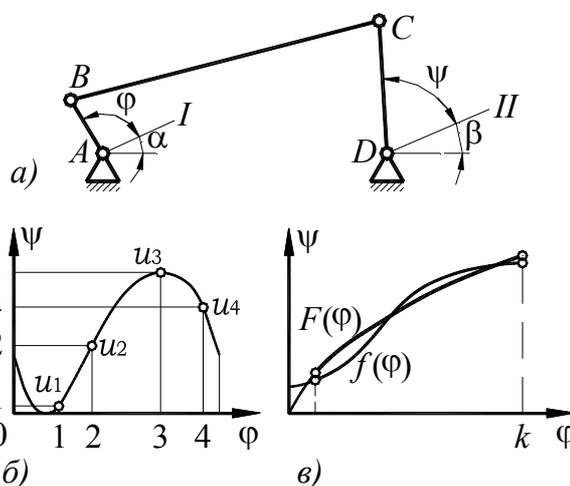


Рис. 1.8.1

Вследствие неизбежных производственных погрешностей при изготовлении звеньев и монтаже, а также свойств самой схемы, механизм воспроизводит заданную функцию с некоторыми отклонениями. Поэтому функцию положения механизма  $f(\varphi)$  приближают на отрезке  $\varphi_i - \varphi_k$  с требуемой точностью к заданной функции  $F(\varphi)$  методами теории приближения функций, в том числе методом интерполирования.

Разработаны два основных направления синтеза – *аналитическое* и *геометрическое*.

*Аналитический метод* синтеза механизмов дает полное общее решение задачи, но сложен и трудоемок. Он необходим в тех случаях, когда предъявляются требования особой точности размеров, или когда задача не может быть решена другими методами.

*Геометрические методы* синтеза весьма наглядны и практически удобны, но не приводят к общим решениям.

Поэтому целесообразно общие вопросы решать аналитически, а частные – геометрически.

При синтезе задают определенные условия, которым должен соответствовать проектируемый механизм. К таким условиям синтеза, часто встречаемым в конструкторской практике, относятся следующие:

- условие существования кривошипа;
- осуществление заданной траектории точки исполнительного звена;
- условия передачи сил звеньями механизма;
- отношение времени прямого и обратного ходов механизма;
- ход или размах ведомого звена;
- величины и закономерности изменения скоростей (или ускорений).

Эти условия рассмотрены ниже.

#### **1.8.2.1.1. УСЛОВИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ КРИВОШИПА**

Условие существования кривошипа в шарнирном четырехзвеннике выражает *теорема Грасгофа*:

*«Наименьшее звено является кривошипом, если сумма длин наименьшего и любого другого звена меньше суммы длин остальных двух звеньев».*

Рассмотрим шарнирный четырехзвенник (рис. 1.8.2).

Если кривошип  $AB$  ведущее звено, то за один цикл механизм имеет два крайних положения, в которых кривошип  $AB$  оказывается на одной прямой с шатуном  $BC$  (рис. 1.8.2, *а* или 1.8.2, *б*).

Так как длина любой стороны треугольника меньше суммы длин двух других его сторон, то, согласно рис. 1.8.2, *a* (где  $r$ ,  $l$ ,  $R$  и  $L$  – длины кривошипа, шатуна, коромысла и стойки), имеют место неравенства:

$$R < (l - r) + L$$

и

$$L < (l - r) + R,$$

откуда:

$$r + R < l + L, \quad (1.8.1)$$

$$r + L < l + R. \quad (1.8.2)$$

Очевидно и соотношение

(рис. 1.8.2, *б*):

$$r + l < L + R. \quad (1.8.3)$$

Складывая почленно неравенства (1.8.1) и (1.8.2), (1.8.1) и (1.8.3), (1.8.2) и (1.8.3), получаем:

$$r < l, \quad r < L, \quad r < R. \quad (1.8.4)$$

Рассмотрение неравенств (1.8.1)–(1.8.4) и приводит к формулировке теоремы Грасгофа, изложенной выше.

В том случае, когда сумма длин кривошипа и шатуна равна сумме длин коромысла и стойки:

$$r + l = R + L,$$

получается двухкривошипный механизм, в котором ведомое звено  $CD$  также будет проворачиваться.

Если сумма длин наименьшего и наибольшего звеньев больше суммы длин остальных звеньев, то четырехшарнирник оказывается двухкоромысловым, т.е. ни одно звено не может совершать полный оборот.

В кривошипно-ползунном механизме (рис. 1.8.2, *в*) условия существования кривошипа определяются очевидным неравенством:

$$r + e \leq l, \quad (1.8.5)$$

где  $e$  – эксцентриситет.

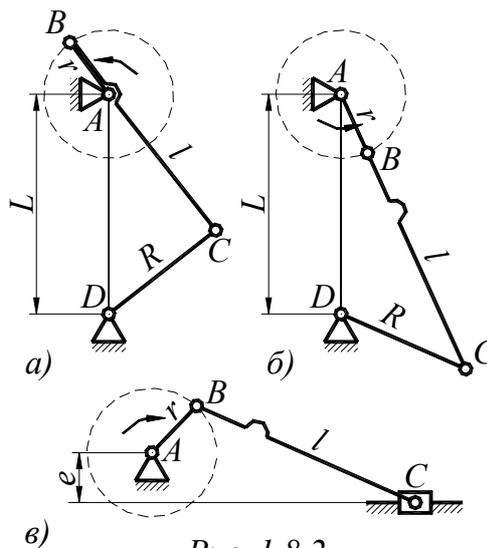


Рис. 1.8.2

### 1.8.2.1.2. ТРАЕКТОРИИ ТОЧЕК ЗВЕНЬЕВ

В тех случаях, когда исполнительным звеном служит шатун  $BC$ , характеристикой движения являются траектории его точек – шатунные кривые. На рис. 1.8.3 показаны траектории точек  $B$ ,  $E$ ,  $C$ ,  $F$  и  $G$  шатуна шарнирного четырехзвенника, которые иллюстрируют многообразие их форм даже в одном механизме.

Движение по траекториям, описанным шатунными кривыми, применяют для разнообразных рабочих процессов.

Условия передач и сил, позволяющие получить достаточно высокий механический КПД, определяют с помощью углов давления.

Углом давления  $\gamma$  называют угол между направлением вектора движущей силы, приложенной к ведомому звену, и вектором скорости точки приложения этой силы.

В плоском шарнирном четырехзвеннике угол давления  $\gamma$  (рис. 1.84) соответствует образован векторами  $\vec{F}$  и  $\vec{v}_C$ . Направление вектора скорости точки  $C$  совпадает с направлением вектора  $\vec{F}$  (перпендикулярного коромыслу  $CD$ ) полезной составляющей силы  $\vec{F}$ . Составляющая  $\vec{F}_t$  затрачивается на преодоление сил сопротивлений, приложенных к ведомому звену.

Следовательно, *угол давления* – это угол между векторами движущей силы, приложенной к ведомому звену, и ее полезной составляющей.

При равновесии коромысла существует равенство:

$$F_t = F \cos \gamma = \frac{T_c}{R}, \quad (1.8.6)$$

где  $T_c$  – момент сил сопротивлений, приложенных к ведомому звену.

Очевидно, при одной и той же заданной величине  $T_c$ , сила  $\vec{F}_t$  будет постоянной и увеличение угла  $\gamma$  приведет к увеличению второй составляющей движущей силы  $\vec{F}_n$ :

$$F_n = F_t \operatorname{tg} \gamma,$$

что потребует большей силы  $\vec{F}$  для преодоления тех же полезных сопротивлений и вызовет увеличение потерь на трение и снижение КПД механизма.

При угле давления  $\gamma = 90^\circ$  (рис. 1.8.5) полезная составляющая равна нулю и никакая сила, приложенная к кривошипу  $AB$ , не сможет привести ведомое звено  $CD$  в движение. Механизм оказывается в крайнем – «мертвом» положении.

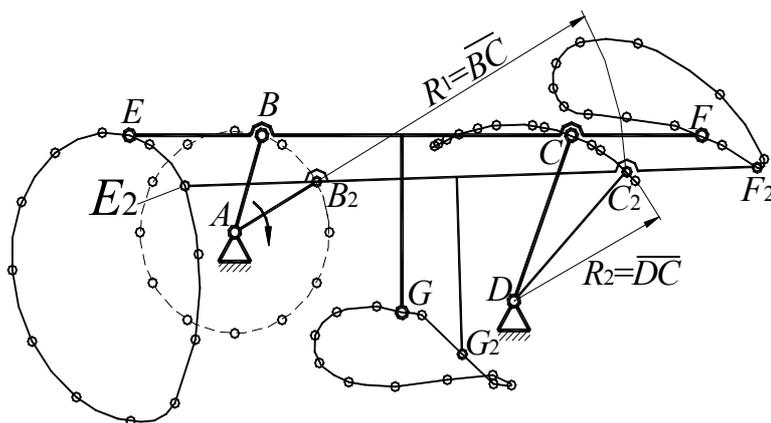


Рис. 1.8.3

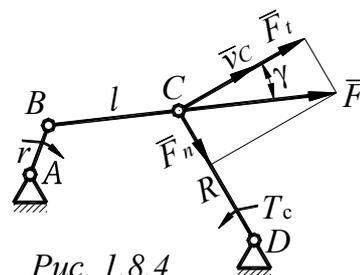


Рис. 1.8.4

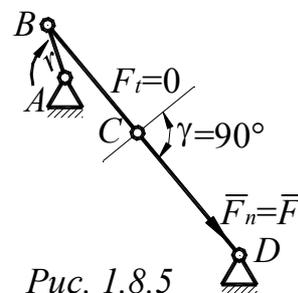


Рис. 1.8.5

При меньших углах  $\gamma$ , но близких к  $90^\circ$ , то же явление наблюдается вследствие действия сил трения. При синтезе рычажных механизмов рекомендуют задавать для рабочих ходов углы давления  $\gamma < 30^\circ$ , а для обратных – холостых ходов  $\gamma \leq 45^\circ$ .

Углы давления у кривошипно-ползунного механизма (рис. 1.8.6) можно уменьшить, увеличивая длину  $l$  шатуна при том же радиусе  $r$  кривошипа (если заданные условия допускают соответствующее увеличение габаритов).

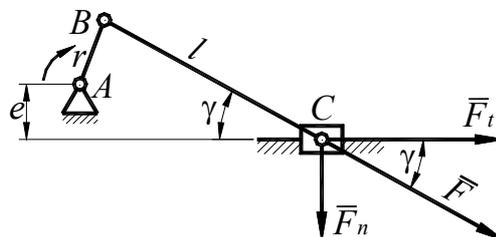


Рис. 1.8.6

На величину угла давления влияет также эксцентриситет  $e$ .

Угол давления будет максимальным  $\gamma_{\max}$  в положении механизма, при котором кривошип и шатун взаимно перпендикулярны. Однако практически удобно и допустимо считать, что в кривошипно-ползунном механизме  $\gamma_{\max}$  соответствует положению кривошипа, перпендикулярному траектории точки  $C$  ползуна.

При этом согласно рис. 1.87, для *верхнего* положения шатуна при вращении кривошипа по часовой стрелке:

$$\gamma'_{\max} = \arcsin \frac{r+e}{l},$$

а для *нижнего* положения шатуна, при вращении кривошипа против часовой стрелки:

$$\gamma'_{\max} = \arcsin \frac{r-e}{l}.$$

При  $e=0$ :

$$\gamma_{\max} = \arcsin \frac{r}{l}.$$

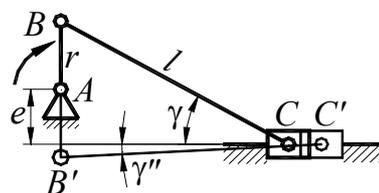


Рис. 1.8.7

Таким образом, в первом случае, при *отрицательном* эксцентриситете  $\gamma'_{\max} > \gamma_{\max}$ , а во втором случае, при *положительном* эксцентриситете (звенья обозначены пунктиром)  $\gamma'_{\max} < \gamma_{\max}$ .

Благодаря этому во внецентренном кривошипно-ползунном механизме угол давления при прямом ходе (когда ползун удаляется от центра вращения кривошипа) можно уменьшить за счет его увеличения при обратном движении. В период прямого хода наименьшие углы  $\gamma$  внецентренного механизма всегда меньше, а в период обратного хода – всегда больше, чем для центрального механизма. Углы давления в начале и конце прямого хода внецентренного механизма больше  $0^\circ$ , а для центрального они равны  $0^\circ$ . Обычно начало и конец участка, на котором вы-

полняется рабочий процесс, не совпадают с началом и концом прямого хода из-за участков, где перемещение оказывается холостым.

Для машин с кривошипно-ползунным механизмом, рабочий процесс у которых осуществляется лишь на части прямого хода, а весь обратный ход, начало и конец прямого хода являются холостыми, схема внецентренного механизма динамически более рациональна, чем центрального.

### 1.8.2.1.3. КОЭФФИЦИЕНТ ИЗМЕНЕНИЯ СРЕДНЕЙ СКОРОСТИ ВЕДОМОГО ЗВЕНА

Для увеличения производительности машины с возвратно-поступательным или возвратно-вращательным движением рабочего звена нужно, чтобы время рабочего хода было больше времени холостого хода.

В кривошипно-ползунном механизме это осуществляют введением эксцентриситета  $e$  (рис. 1.8.8).

Допустим, что кривошип  $AB$  вращается равномерно и при удалении ползуна от оси вращения кривошипа со скоростью  $v_{\Pi}$  (прямой ход) производится рабочая операция, например снятие стружки резцом. При обратном ходе приближения к оси вращения кривошипа ползун движется вхолостую.

Угловое перемещение  $\varphi$  кривошипа прямо пропорционально времени  $t$  вращения, поэтому время  $t_{\Pi}$  прямого хода будет больше времени  $t_0$  обратного хода при условии:

$$\sigma = \frac{\varphi_{\Pi}}{\varphi_0} = \frac{t_{\Pi}}{t_0} > 1. \quad (1.8.7)$$

Если второе отношение умножить и разделить на ход  $s$  ползуна, то получится отношение средних скоростей  $v_{\Pi \text{ ср}}$  и  $v_{0 \text{ ср}}$  ведомого звена за время его движения при прямом и обратном ходах:

$$\sigma = \frac{t_{\Pi}}{t_0} \cdot \frac{s}{s} = \frac{v_{\Pi \text{ ср}}}{v_{0 \text{ ср}}} > 1.$$

Из неравенства видно, что  $v_{\Pi \text{ ср}} > v_{0 \text{ ср}}$ , поэтому отношение  $\sigma$  называют коэффициентом изменения средней скорости ведомого звена.

Направление вращения кривошипа выбирают так, чтобы прямой ход соответствовал повороту кривошипа на больший угол:

$$\varphi_{\Pi} = 180^{\circ} + \theta^{\circ}.$$

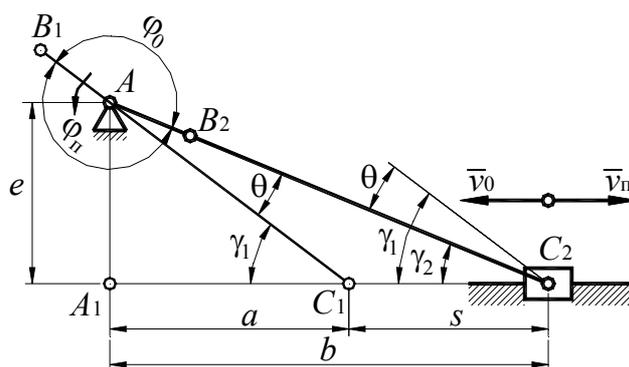


Рис. 1.8.8

Тогда:

$$\varphi_0 = 180^\circ + \theta^\circ.$$

В последних двух формулах:

$\theta$  – угол смещения.

С учетом этого, формула (1.8.7) примет вид:

$$\sigma = \frac{180^\circ + \theta^\circ}{180^\circ - \theta^\circ}. \quad (1.8.8)$$

Если при синтезе механизма задать величину коэффициента  $\sigma$ , то, согласно формуле (1.8.8), можно определить угол смещения  $\theta$  в градусах или радианах:

$$\theta = 180^\circ \frac{\sigma - 1}{\sigma + 1} = 2\pi \frac{\sigma - 1}{\sigma + 1}. \quad (1.8.9)$$

Зависимость между коэффициентом  $\sigma$  и эксцентриситетом  $e$  определится следующим образом. Из треугольника  $AC_1C_2$  (рис. 1.8.8), по теореме синусов можно записать равенство:

$$\frac{l - r}{\sin \gamma_2} = \frac{s}{\sin \theta},$$

где  $l$  и  $r$  – длины шатуна  $BC$  и кривошипа  $AB$ .

Рассматривая также прямоугольный треугольник  $AA_1C_2$ , находим зависимость:

$$\sin \gamma_2 = \frac{(l - r)}{s} \sin \theta = \frac{e}{l + r}.$$

Из последнего равенства и формулы (1.8.9) очевидна зависимость:

$$\sin \theta = \frac{es}{l^2 - r^2} = \sin \left( 2\pi \frac{\sigma - 1}{\sigma + 1} \right),$$

откуда, после преобразований, находим функцию:

$$\sigma = \frac{2\pi + \arcsin \frac{es}{l^2 - r^2}}{2\pi - \arcsin \frac{es}{l^2 - r^2}} \quad (1.8.10)$$

свидетельствующую о том, что увеличение эксцентриситета  $e$  приводит к возрастанию коэффициента  $\sigma$ .

При  $e=0$ ,  $\sigma=1$ .

В практике машиностроения величина коэффициента  $\sigma$ :

— для кривошипно-ползунных механизмов:  $\sigma=1,0-1,2$ ,

— для шарнирных четырехзвенников:  $\sigma=1,0-1,4$ .

Если задана средняя скорость  $v_{\text{п}}$  прямого хода, то ход  $s$  ползуна определится зависимостью:

$$s = v_{\text{п}} t_{\text{п}} = v_{\text{п}} \frac{\varphi_{\text{п}}}{\omega} = \frac{30}{\pi n} v_{\text{п}} \varphi_{\text{п}},$$

где  $\omega$  – угловая скорость;

$$n = \frac{60}{t_{\text{п}} + t_0} \text{ – число оборотов в минуту кривошипа.}$$

Из последнего равенства получим формулу для определения скорости вращения (об/мин) кривошипа при заданных величинах  $s$  и  $v_{\text{п}}$  ползуна:

$$n = \frac{30}{\pi s} v_{\text{п}} \varphi_{\text{п}} = \frac{30}{\pi s} v_{\text{п}} (180^\circ + \theta) \quad (1.8.11)$$

Угол смещения  $\theta$  определяют по формуле (1.8.9).

Для шарнирного четырехзвенника  $ABCD$  (рис. 1.8.9) получают аналогичные зависимости, причем формулы (1.8.7), (1.8.8), (1.8.9) остаются без изменения, а вместо средней линейной скорости и хода  $s_{\text{п}}$  подставляют среднюю угловую скорость  $\omega_{4\text{п}}$  и размах  $\psi$  коромысла:

$$\psi = \omega_{4\text{п}} t_{\text{п}} = \omega_{4\text{п}} \frac{\varphi_{\text{п}}}{\omega} = \frac{30}{\pi n} \omega_{4\text{п}} \varphi_{\text{п}} \quad (1.8.12)$$

$$n = \frac{30}{\pi \psi} \omega_{4\text{п}} (180^\circ + \theta) \quad (1.8.13)$$

Кривошипно-ползунный механизм можно рассматривать как частный случай шарнирного четырехзвенника с бесконечно длинным коромыслом  $CD$ . Поэтому в качестве эксцентриситета  $e$  четырехшарнирного механизма (рис. 1.8.9) можно приближенно принять расстояние, измеряемое по перпендикуляру от прямой, проведенной через крайние положения  $C_1$  и  $C_2$  точки  $C$  до центра  $A$ .

В практике конструирования машин, когда требуются наглядность и быстрота решения, применяют *графочисленный метод синтеза*, сочетающий простоту графических построений с точностью математических расчетов. Приведем некоторые задачи, решаемых этим методом.

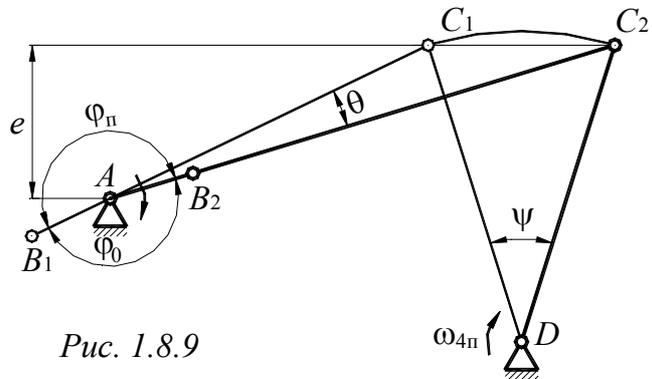


Рис. 1.8.9

### 1.8.2.2. ПРОЕКТИРОВАНИЕ ШАРНИРНОГО ЧЕТЫРЕХЗВЕННИКА

Когда требуется определить длины  $r$  и  $l$  кривошипа и шатуна по заданному размаху  $\psi$  и длине коромысла  $R$  при известном межцентровом расстоянии  $L$  (рис. 1.8.10), часто применяют следующее решение. Размах  $\psi$  определяют как разность углов  $\psi_2$  и  $\psi_1$  крайних положений коромысла. Соединяя центр  $A$  вращения кривошипа с точками  $C_1$  и  $C_2$ , получают отрезки  $AC_1 = l - r$  и  $AC_2 = l + r$ .

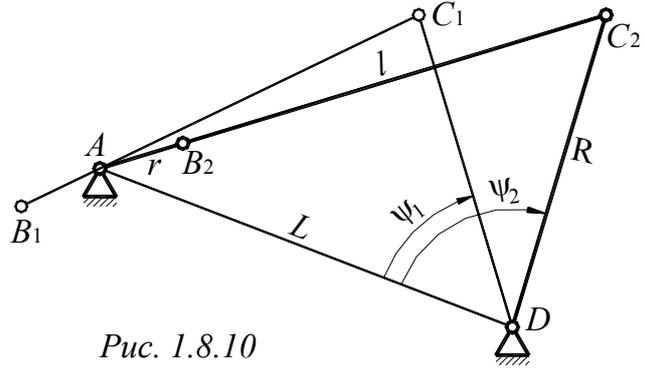


Рис. 1.8.10

Применяя аналитический расчет, из треугольников  $AC_1D$  и  $AC_2D$  по теореме косинусов находим:

$$(l - r)^2 = L^2 + R^2 - 2LR \cos \psi_1;$$

$$(l + r)^2 = L^2 + R^2 - 2LR \cos \psi_2.$$

Совместное решение этих уравнений дает расчетные формулы для определения искомых размеров звеньев:

$$r = \frac{1}{2} \left( \sqrt{L^2 + R^2 - 2LR \cos \psi_2} - \sqrt{L^2 + R^2 - 2LR \cos \psi_1} \right), \quad (1.8.14)$$

$$l = \frac{1}{2} \left( \sqrt{L^2 + R^2 - 2LR \cos \psi_2} + \sqrt{L^2 + R^2 - 2LR \cos \psi_1} \right) \quad (1.8.15)$$

Если заданы начальное положение  $\psi_0$ , длина коромысла  $R$ , коэффициент  $\sigma$  и межцентровое расстояние  $L$  (рис. 1.8.11, а), а нужно определить длины  $r$  и  $l$  кривошипа и шатуна, то решение находят следующим путем. По углу  $\psi_0$  строят в масштабе  $\mu$  крайнее левое положение коромысла  $C_0D$  (рис. 1.8.11, б) и отмечают, что отрезок  $AC_0$  равен разности длин шатуна и кривошипа:

$$AC_0 = BC_0 - AB \quad (1.8.16)$$

Затем по формуле (1.8.9) рассчитывают угол смещения  $\theta$  (рис. 1.8.11, б) и, проводя прямую  $AC$  до пересечения с известной траекторией точки  $C$ , находят отрезок  $AC$ , равный сумме длин  $l$  и  $r$ :

$$AC_k = BC_k + AB. \quad (1.8.17)$$

Вычитая равенство (1.8.16) из равенства (1.8.17), с учетом того, что:

$$BC_k = BC_0,$$

получают:

$$AC_k - AC_0 = BC_k + AB - BC_0 + AB = 2AB \quad (1.8.18)$$

Из равенств (1.8.18) и (1.8.17) выводятся формулы для расчета длин кривошипа и шатуна:

$$\frac{r}{\mu} = AB = \frac{AC_k - AC_0}{2}, \quad (1.8.19)$$

$$\frac{l}{\mu} = BC_k = AC_k - AB. \quad (1.8.20)$$

Если заданы длины и два положения 1 и 2 шатуна  $BC$  (рис. 1.8.12), а также соответствующие углы поворота  $\varphi$  кривошипа и  $\psi$  коромысла, то величины  $L$ ,  $r$  и  $R$  можно определить следующим путем.

Точки  $B_1$  и  $B_2$ ,  $C_1$  и  $C_2$  соединяют прямыми и из середин полученных отрезков проводят перпендикуляры, которые являются геометрическими местами центров окружностей, проходящих через точки  $B_1B_2$  и  $C_1C_2$ .

Положения центров вращения  $A$  кривошипа и  $D$  коромысла на этих перпендикулярах определяются лучами  $B_1A$  и  $C_1D$ , проведенными под углами  $90^\circ - \frac{\varphi}{2}$  и  $90^\circ - \frac{\psi}{2}$  к прямым  $B_1B_2$  и  $C_1C_2$ .

Затем, после измерения длин звеньев полученного механизма, необходимо проверить условия проворачиваемости кривошипа по формулам (1.8.1)-(1.8.3).

Если требуется, чтобы скорость звена  $BC$  в указанных положениях 1 и 2 была равна нулю, проектирование можно осуществить следующим путем. Так как точки  $A$  и  $D$  можно выбрать на перпендикулярах к серединам

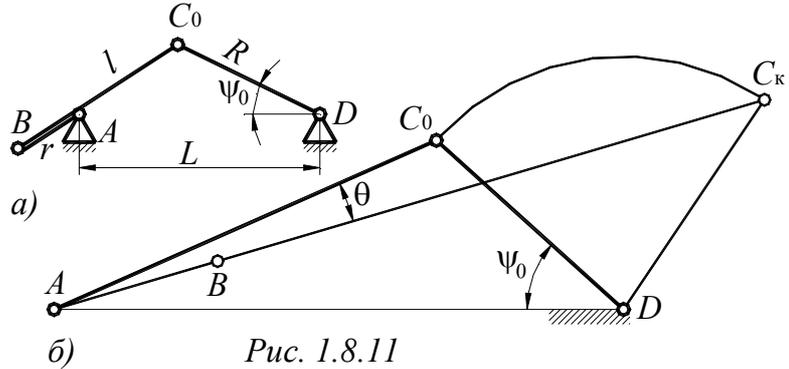


Рис. 1.8.11

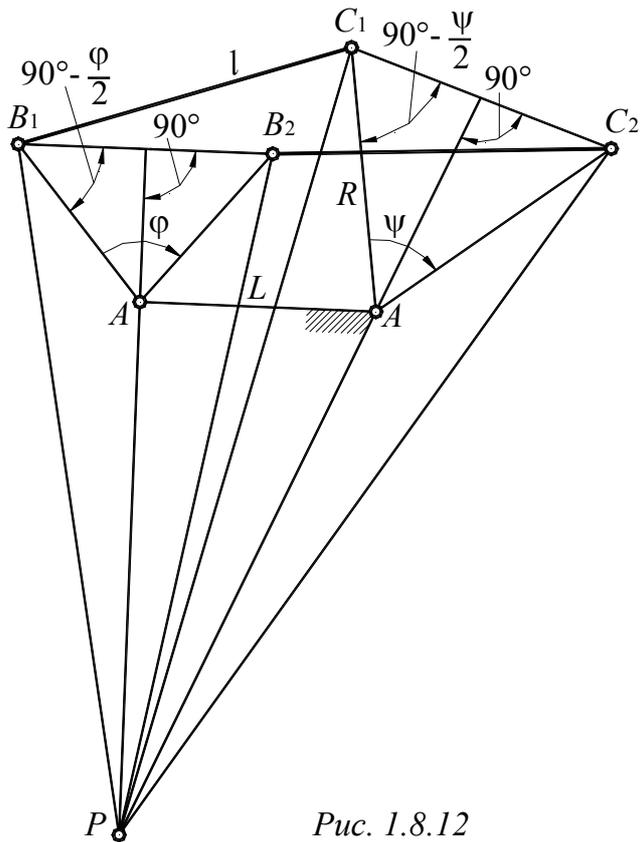


Рис. 1.8.12



$$l = \frac{s}{\sqrt{2\left[1 + \lambda^{-2} - (1 - \lambda^{-2})\cos\theta\right]}}. \quad (1.8.23)$$

Угол  $\theta$  рассчитывают по формуле (1.8.9).

Длина кривошипа равна:

$$r = \frac{l}{\lambda}. \quad (1.8.24)$$

Эксцентриситет  $e$  определяют из треугольника  $AA_1C_2$ :

$$e = (l + r)\sin\gamma_2.$$

Синус угла  $\gamma_2$  определяют из треугольника  $AC_2C_1$ :

$$\sin\gamma_2 = \frac{l - r}{s}\sin\theta.$$

Подстановка последнего выражения в предыдущую формулу приводит к расчетному уравнению:

$$e = \frac{l^2 - r^2}{s}\sin\theta. \quad (1.8.25)$$

Если эксцентриситет  $e$  задан из конструктивных соображений и известны абсциссы  $a$  и  $b$  крайних положений ползуна, то размеры кривошипа и шатуна можно определить из прямоугольных треугольников  $AA_1C_1$  и  $AA_1C_2$  (рис. 1.8.8).

По теореме Пифагора:

$$l - r = \sqrt{a^2 + e^2},$$

$$l + r = \sqrt{b^2 + e^2}.$$

Складывая и вычитая эти равенства, получим расчетные формулы:

$$l = \frac{1}{2}\left(\sqrt{b^2 + e^2} + \sqrt{a^2 + e^2}\right), \quad (1.8.26)$$

$$r = \frac{1}{2}\left(\sqrt{b^2 + e^2} - \sqrt{a^2 + e^2}\right). \quad (1.8.27)$$

#### 1.8.2.4 ПРОЕКТИРОВАНИЕ КУЛИСНОГО МЕХАНИЗМА

В кулисных механизмах коэффициент изменения средней скорости ведомого звена  $\sigma$  больше, чем у других рычажных четырехзвенников и находится в пределах 1,0-1,7.

Крайние положения кулисы определяются касательными к окружности, описанной точкой  $B$  кривошипа.

Размеры звеньев кинематической схемы обычно находят по заданному размаху  $\psi$  кулисы или ходу  $s$ , а также по коэффициенту  $\sigma$ .

Из прямоугольного треугольника  $ABC$  (рис. 1.8.14):

$$r = L \sin \frac{\psi}{2}. \quad (1.8.28)$$

Так же из рис 1.8.14:

$$\sin \frac{\psi}{2} = \frac{s}{2l},$$

где  $l$  – длина кулисы.

Подставив значение  $\sin \frac{\psi}{2}$  в формулу (1.8.28), получим расчетную формулу:

$$r = \frac{Ls}{2l}. \quad (1.8.29)$$

Задаваясь тремя параметрами, из формулы (1.8.29) определяют четвертый.

Из того же треугольника  $ABC$  (рис. 1.8.14):

$$\frac{\varphi_0}{2} = 90^\circ - \frac{\psi}{2},$$

следовательно, угловое перемещение кривошипа при обратном (холостом) ходе:

$$\varphi_0 = 180^\circ - \psi.$$

Угол поворота кривошипа при прямом ходе:

$$\varphi_{\Pi} = 360^\circ - \varphi_0 = 180^\circ + \psi.$$

Коэффициент изменения средней скорости ведомого звена:

$$\sigma = \frac{\varphi_{\Pi}}{\varphi_0} = \frac{180^\circ + \psi}{180^\circ - \psi}, \quad (1.8.30)$$

откуда:

$$\psi = 180^\circ \frac{\sigma - 1}{\sigma + 1}. \quad (1.8.31)$$

Рассчитав по заданной величине  $\sigma$  размах кулисы  $\psi$  и подставив его в формулу (1.8.28), определяют величину  $r$  при заданном  $L$ .

Посредством методов, разработанных для плоских четырехзвенных механизмов, решают также более сложные задачи проектирования многозвенных механизмов. При этом пользуются методом последовательного решения задачи синтеза, рассматривая систему состоящей из ряда простейших кинематических цепей Ассур.

### 1.8.3. СИНТЕЗ ПЕРЕДАТОЧНЫХ МЕХАНИЗМОВ

Вопросы, связанные с расчетом и проектированием различных передаточных механизмов, рассмотрены в разделе 4.

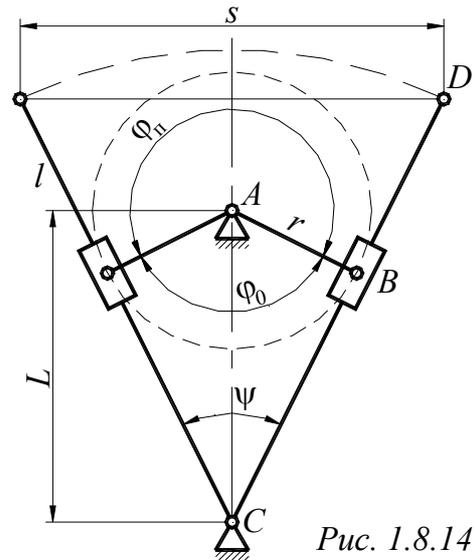


Рис. 1.8.14