МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования

**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

---

# ТЕОРИЯ ИГР И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

*Рекомендовано в качестве учебного пособия
Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета*

*Составитель* **Г.Е. Шевелёв**

Издательство
Томского политехнического университета
2018

УДК 519.8
ББК 22.17я73
Т24

Т24 Теория игр и исследование операций: учебное пособие / сост. Г.Е. Шевелев; Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2018. – 116 с.

**В авторской редакции**

Учебное пособие состоит из шести глав, написано в соответствии с программой курса «Теория игр и исследование операций» для вузов. В нем рассмотрены основные теоретические понятия и определения теории игр и исследования операций; приведены примеры решения задач.

Пособие подготовлено в отделении информационных технологий ИШИТР ТПУ и предназначено для студентов ИШЯТ, обучающихся по направлению 01.03.02.

**УДК 519.8**
**ББК 22.17я73**

*Рецензенты*
Доктор физико-математических наук
Профессор ТГАСУ
*Б.М. Шумилов*

Кандидат технических наук
доцент ТУСУР
*А.А. Шелестов*

# 1. ВВЕДЕНИЕ
# В ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

## 1.1. Предмет исследования операций

***Исследование операций (ИО)*** – наука, которая занимается разработкой и практическим применением методов наиболее эффективного (или оптимального) управления.

Предметом исследования операций чаще всего являются системы организационного типа (организации), которые состоят из большого числа подразделений, взаимодействующих между собой. Причем интересы подразделений не всегда согласуются между собой и могут быть противоположными.

Цель исследования операций – количественное обоснование принимаемых решений по управлению организациями (системами).

Возникновение науки «Исследование операций» обычно относят к годам второй мировой войны, когда в вооруженных силах США и Англии были сформированы специальные научные группы для подготовки решений по способам организации и обеспечения боевых действий.

Зародившись в области преимущественно военных задач, исследование операций с течением времени вышло из этой узкой сферы. В настоящее время исследование операций – одна из самых быстро развивающихся наук, завоевывающая все более обширные области применения: промышленность, сельское хозяйство, торговля, транспорт, здравоохранение и т. д.

Решение, наиболее выгодное всей организации называется ***оптимальным***. Решение, выгодное одному или нескольким подразделениям – ***субоптимальное***.

Надо заметить, что решение, оптимальное для всей организации, необязательно оптимально для входящих в нее подразделений.

Исследование операций характеризуется следующими основными особенностями:

1. Системный подход к анализу поставленной проблемы. Системный подход (анализ) является основным принципом исследования операций. Любая задача, какая бы ни была частная, рассматривается с точки зрения ее влияния на критерий функционирования всей системы.
2. Для исследования операций характерно, что при решении каждой новой проблемы возникают все новые задачи. Наибольший эффект достигается при непрерывном исследовании, обеспечивающий преемственность при переходе одной задачи к другой.
3. Стремление к нахождению оптимального решения поставленной задачи. Хотя определение оптимального решения не всегда возможно из-за ограничений, накладываемыми имеющимися в наличии ресурсами (или уровня развития современной науки). В этом случае довольствуются субоптимальным решением.

4. Одним из создателей исследования операций является известный американский ученый Томас Л. Саати, который определил ее как «***искусство давать плохие ответы на те практические вопросы, на которые делаются еще худшие ответы другими методами***».

5. Исследования всегда проводятся комплексно по многим направлениям. Для проведения такого исследования системы организационного типа создается группа, состоящая из специалистов различного профиля из разных областей (инженеры, экономисты, психологи и т. д.). Задача такой группы – комплексное исследование всего множества факторов, влияющих на решение проблемы, и использования идей и методов различных наук.

## 1.2. Основные этапы операционного исследования

Любое операционное исследование, при всем возможном многообразии конкретных работ по исследованию операций, проходит последовательно следующие этапы:

1. Постановка задачи.
2. Построение математической модели.
3. Нахождение метода решения (выбор, разработка).
4. Проверка и корректировка модели.
5. Реализация найденного решения на практике.

1. **Постановка задачи**. Чрезвычайно ответственный этап операционного исследования. Первоначально задачу формулируют с точки зрения заказчика. Такая постановка никогда не бывает окончательной. Во время анализа исследуемой системы постановка всегда уточняется. На этом этапе роль операций состоит в тщательном исследование объекта, изучении множества факторов, влияющих на результаты исследования процесса.

2. **Формализация задачи**. В самом общем случае математическая модель задачи имеет вид.

Необходимо найти

$$\max E = \max f(\overline{x}, \overline{y})$$

при $$g_i(x, y) \le b_i, i = \overline{1, m},$$

где $E = f(\overline{x}, \overline{y})$ – целевая функция (показатель качества или эффективность системы);

$\overline{x}$ – вектор управляемых переменных;

$\overline{y}$ – вектор неуправляемых переменных;

$g_i$– функция потребления $i$-го ресурса

$b_i$ – величина $i$-го ресурса

3. **Нахождение метода решения**. Для нахождения оптимального решения $\bar{x}_{opt}$ в зависимости от структуры целевой функции и ограничений применяют те или иные методы теории оптимальных решений:

- Линейное программирование, если $f$ и $g$ – линейные функции.
- Нелинейное программирование, если $f$ и $g$ – нелинейные функции.
- Динамическое программирование, если $f$ имеет специфическую структуру, т.е. является аддитивной или мультипликативной функцией от переменных $\bar{x}$ и $\bar{y}$, например, $f(x, y) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i, y_i)$.
- Геометрическое программирование, если целевая функция

$$f(\bar{x}) = \sum_i c_i x_1^{\alpha_1} \ldots x_m^{\alpha_m}, \text{ а } g_i\overline{(x) \le 1}.$$

- Стохастическое программирование, когда $\bar{y}$ – случайная величина, а вместо функции $f(\bar{x}, \bar{y})$ рассматривается ее математическое ожидание

$E_y[f(\bar{x}, \bar{y})]$.

- Дискретное программирование, если на $\bar{x}$ и $\bar{y}$, наложено требование дискретности (например, целочисленности).
- Эвристическое программирование применяют при решение тех задач, в которых точный оптимизм найти алгоритмическим путем невозможно из-за огромного числа вариантов.

4. **Проверка и корректировка модели.** В сложных системах, к которым относятся и системы организационного типа, модель лишь частично отражает реальный процесс. Поэтому необходима проверка степени соответствия или адекватности модели и реального процесса. Проверку производят сравнением предсказанного поведения с фактическим поведением при изменении значений внешних неуправляемых воздействий.

5. **Реализация найденного решения на практике**. Важнейший этап, завершающий операционное исследование.

## 1.3. Типичные классы задач

По содержательной постановке наиболее часто возникают следующие типичные классы задач:

– *Задачи управления запасами*. Такие задачи обладают следующей особенностью: с увеличением запасов увеличиваются расходы на хранение, но уменьшаются потери из-за возможной их нехватки. (Логистика)

– *Задачи распределения ресурсов*. Такие задачи возникают, когда существует определенный набор работ, которые необходимо выполнить, а наличных ресурсов для выполнения работы должным образом не хватает.

– *Задачи ремонта и замены оборудования* появляются в тех случаях, когда работающее оборудование изнашивается, устаревает и со временем подлежит замене.

– *Задачи массового обслуживания* рассматривают вопросы образования и функционирования очередей, с которыми приходится сталкиваться в повседневной практике, при управлении технологическими процессами, в линиях связи и компьютерных сетях.

– *Задачи календарного планирования или составления расписания*.

– *Задачи сетевого планирования и управления*. Здесь рассматриваются соотношения между сроком окончания крупного комплекса операций и моментами начала всех операций комплекса. Они актуальны при разработке сложных и дорогостоящих проектов.

– *Задачи выбора маршрута или сетевые задачи*. Чаще всего встречаются при исследовании разнообразных процессов на транспорте и в системах связи (компьютерные сети).

Часто задачи оказываются комбинированными.

## 1.4. Некоторые принципы принятия решений в исследовании операций

В процессе принятия решений всегда возникают многочисленные трудности.

1. Большое число критериев, которые не всегда согласованы между собой. Например, требования максимальной надежности и минимальной стоимости; или требование максимальной мощности изделия при минимальных габаритах. Такие критерии противоречивы. Поэтому часто возникает задача выбора некоторого компромисса между такими требованиями.
2. Высокая степень неопределенности, которая обусловлена недостаточной информацией для обоснованного принятия решения.

Любой процесс принятия решения включает следующие элементы:

– *Цель*. Необходимость принятия решения определяется целью или несколькими целями, которые должны быть достигнуты.

– *Лицо, принимающее решение*, должно нести ответственность за последствия этих решений.

– *Наличие альтернативных решений* (различных вариантов достижения целей).

– *Наличие внешней среды* (совокупности внешних факторов, влияющих на исход решения).

– *Исходы решений*, т. е. результаты, к которым приходят в результате реализации принятых решений.

– *Правила выбора решений* (решающие правила).

Эти правила позволяют определить наиболее предпочтительные в смысле выбранного критерия решения. Решающее правило отражает информированность лица, принимающего решение, о возможных исходах выбранных решений, а также предпочтительность тех или иных исходов.

Теория принятия решений использует различные процедуры, позволяющие формализовать предпочтения, т. е. выразить их в единой количественной мере. Основой для таких процедур является *теория полезности*, разработанная Дж. Фон Нейманом и О. Моргенштерном. Ее математическая основа – система аксиом, в которых утверждается, что существует некоторая мера ценности, позволяющая упорядочить результаты решений. Эта мера называется функцией *полезности решений* или *полезностью.*

В зависимости от условий внешней среды и степени информированности лица, принимающего решение, существует следующая квалификация задач принятия решений:

– в условиях определенности;

– в условиях риска;

– в условиях неопределенности;

– в условиях конфликтных ситуаций или противодействия (активного противника).

## 1.5. Принятие решений в условиях определенности

Характеризуется однозначной или детерминированной связью между принятым решением и его исходом. Основная трудность – наличие многих критериев, по которым следует сравнивать исходы.

В таких ситуациях возникает задача принятия решения при так называемом “компромиссном критерии”.

Пусть имеется совокупность критериев $F_1(\overline{x}), F_2(\overline{x}), ..., F_n(\overline{x}), \overline{x} \in X$. Пусть для определенности все $F_i(\overline{x}) \to \max$, тогда можно рассмотреть следующие случаи:

1. Если все критерии измеряются в одной шкале, то обобщенный критерий $F_0(\overline{x})$ можно записать в виде взвешенной суммы критериев

$$F_0(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{n} w_i F_i(\overline{x}), \sum_{i=1}^{n} w_i = 1,$$

где $w_i$ – вес соответствующего критерия. В этом случае необходимо найти

$$\max_{\bar{x}\in X} F_0(\bar{x})$$

Если же критерии измеряются в различных шкалах, то необходимо привести их к одной шкале. Для этого формируют критерий

$$\min_{\bar{x}\in X} F_0(\bar{x}) = \min_{\bar{x}\in X} \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{F_i(\overline{x_i}^*) - F_i(\bar{x})}{\left|F_i(\overline{x_i}^*)\right|},$$

где

$$F_i(\overline{x_i}^*) = \max F_i(\bar{x}), F_i(\overline{x_i}^*) \neq 0.$$

Т.е. требуется свести к минимуму взвешенную величину отклонения каждого критерия от его максимального значения.

При таком формировании обобщенного критерия можно добиться высоких показателей по одним критериям за счет ухудшения показателей его другим.

2. Часто требуется, чтобы значения некоторых частных критериев не оказались меньше предельно допустимых значений $F_i(\overline{x_i}) \geq F_{i\ \text{доп}}$. Допустим, что по каждому критерию определены значения $F_{i\ \text{доп}},\ i = \overline{1,n}.$ В таком случае формируемый обобщенный критерий может быть дополнен системой ограничений, и задача принимает следующий вид:

$$\max_{\bar{x}\in X} F_0(\bar{x}) = \max_{\bar{x}\in X} \sum_{i=1}^{n} w_i F_i(\bar{x}),$$

при

$$F_i(\overline{x_i}) \geq F_{i\ \text{доп}},\ i = \overline{1,n}.$$

3. Бывает, что критерии упорядочены по предпочтению

$$F_1(\bar{x}) > F_2(\bar{x}) > \ldots > F_n(\bar{x})$$

тогда задача отыскания оптимального решения может быть записана следующим образом:

$$\max_{\bar{x}\in X} F_1(\bar{x})$$

при

$$F_2(\overline{x_i}) \geq F_{2\ \text{доп}}$$

$$\ldots$$

$$F_n(\overline{x_i}) \geq F_{\text{n доп}}$$

4. Бывают ситуации, когда критерии $F_1(\bar{x}),\ F_2(\bar{x}),\ ...,F_n(\bar{x})$ могут принимать только два значения (0 или 1): $F_i(\bar{x})=1$, если $i$-я цель достигнута, $F_i(\bar{x})=0$ – в противном случае.

Тогда обобщенный критерий может быть образован логическим объединением отдельных критериев.

a) В виде конъюнкции критериев $F_i(\bar{x})$, если общая цель операции состоит в выполнении всех целей одновременно, т.е.

$$F_0(\bar{x})=\prod_{i=1}^{n}F_i(\bar{x}).$$

b) В виде дизъюнкции критериев, когда общая цель достигается, если достигается хотя бы одна частная цель, т.е.

$$F_0(\bar{x})=1-\prod_{i=1}^{n}(1-F_i(\bar{x})).$$

### 1.6. Принятие решений в условиях риска

Такая задача возникает в том случае, когда с каждой принимаемой стратегией $x_i$ связано целое множество различных результатов $O_1, O_2, ..., O_m$ с известными вероятностями $P(O_j \setminus x_i)$.

Формально модель задачи может быть представлена в виде следующей матрицы:

| $x_i \backslash 0_j$ | $O_1$ | $O_2$ | ..... | $O_m$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $L_{11}$ | $L_{12}$ | ..... | $L_{1m}$ |
| $x_2$ | $L_{21}$ | $L_{22}$ | ...... | $L_{2m}$ |
| ...... | ..... | ..... | ...... | ...... |
| $x_n$ | $L_{n1}$ | $L_{n2}$ | ...... | $L_{nm}$ |

где $L_{ij}=U(O_j,x_i)$. – полезность результата $O_j$ при использовании решения $x_i$.

Пусть заданы условные вероятности $P(O_j \setminus x_i),\ i=\overline{1,n}\ ,\ j=\overline{1,m}$ . Вводят ожидаемую полезность для каждой стратегии

$$E[U(x_i)]=\sum_{j=1}^{m}U(O_j,x_i)P(O_j \setminus x_i),\ i=\overline{1,n,}\ .$$

Решающее правило для определения оптимальной стратегии задаётся следующим образом: следует выбрать ту стратегию, которая дает максимальную ожидаемую полезность, т.е.

$$\max_{x_i} E[U(x_i)]=\max_{i=\overline{1,n}} E[U(x_i)]$$

### 1.7. Принятие решений в условиях неопределенности

Одним из определяющих факторов в таких задачах является внешняя среда или природа, которая может находиться в одном из состояний $S_1$, $S_2$, …, $S_k$, которые неизвестны лицу (наблюдателю) принимающему решения. Тогда математическую модель задачи в условиях неопределенности можно сформулировать следующим образом.

Имеется некоторая матрица $L$ размерности $m \times n$ с элементами, рассматриваемыми как полезность результата $O_j$ при использовании стратегии $x_i$

$$L_{ij} = U(O_j, x_i),\ i = \overline{1,n}\ ,\ j = \overline{1,m}\ .$$

В зависимости от состояния среды результат $O_j$ достигается с вероятностью $P(O_j \setminus x_i, S_k)$.

| $x_i \backslash 0_j$ | $O_1$ | $O_2$ | ..... | $O_m$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $L_{11}$ | $L_{12}$ | ..... | $L_{1m}$ |
| $x_2$ | $L_{21}$ | $L_{22}$ | ...... | $L_{2m}$ |
| ...... | ..... | ..... | ...... | ...... |
| $x_n$ | $L_{n1}$ | $L_{n2}$ | ...... | $L_{nm}$ |

Кроме того, наблюдателю неизвестно распределение вероятностей $P(S_k)$. Относительно состояния среды наблюдатель может высказать только определенные гипотезы. Его предположения о вероятном состоянии среды называются субъективными вероятностями $\overline{P}(S_k),\ k = \overline{1,K}$.

Если бы величины $P(S_k)$ были известны наблюдателю, то мы бы имели задачу принятия решений в условиях риска.

На самом же деле состояния среды неизвестны и неизвестно также распределение вероятностей $P(S_k)$.

Как поступить в данном случае? Существует несколько критериев для выбора оптимальной стратегии.

***Критерий Вальда.*** Или критерий осторожного наблюдателя. Этот критерий оптимизирует полезность в предположении, что среда находится в самом невыгодном для наблюдателя состоянии. По данному критерию решающее правило имеет следующий вид:

$$\max_{x_i} \min_{S_k} U(x_i, S_k),$$

где

$$U(x_i, S_k) = \sum_{j=1}^{m} U(O_j, x_i) P(O_j \setminus x_i, S_k),\ i = \overline{1,n},\ \mathrm{k} = \overline{1,K}.$$

По критерию Вальда выбирают стратегию, которая дает гарантированный выигрыш при наихудшем варианте состояния среды.

***Критерий Гурвица***. Основан на следующих двух предположениях: среда может находиться в самом невыгодном состоянии с вероятностью $1-\alpha$ и в самом выгодном с вероятностью $\alpha$, где $0 \le \alpha \le 1$ – коэффициент доверия.

Тогда решающее правило записывается следующим образом:

$$\max_{x_i} [\alpha \max_{S_k} U(x_i, S_k) + (1-\alpha) \min_{S_k} U(x_i, S_k)],$$

Если $\alpha = 0$, то получаем критерий Вальда. Если $\alpha = 1$, то приходим к решающему правилу вида

$$\max_{x_i} \max_{S_k} U(x_i, S_k),$$

Это, так называемая, стратегия «здорового оптимиста», который верит в свою удачу.

***Критерий Лапласа***. Если никакой информации о вероятностях состояний среды нет, то все состояния среды считаются равновероятными:

$$P(S_1) = P(S_2) = \ldots = P(S_K).$$

В результате решающее правило определяется соотношением:

$$\max_{x_i} E[U(x_i)] = \max_{x_i} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{K} U(O_j, x_i) P(O_j \setminus x_i, S_k) P(S_k) =$$

$$= \max_{x_i} \frac{1}{K} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{K} U(O_j, x_i) P(O_j \setminus x_i, S_k),$$

при условии $P(S_k) = 1/K$.

***Критерий Сэвиджа.*** Или критерий минимизации «сожалений». «Сожаление» – это величина, равная изменению полезности результата при данном состоянии среды относительно возможного наилучшего состояния.

Чтобы определить «сожаление» поступают следующим образом. Строят матрицу

$$U = \|u_{ik}\|,$$

где

$$u_{ik} = U(x_i, S_k) = \sum_{j=1}^{m} U(x_i, O_j) P(O_j \setminus x_i, S_k),\ i = \overline{1,n},\ \mathrm{k} = \overline{1,K}.$$

В каждом столбце этой матрицы находят максимальный элемент $u_k = \max_i u_{ik}$, из которого вычитают все элементы этого столбца. Далее строим матрицу сожалений

$$U = \| u_k - u_{ik} \| = \| u_{ik}^c \|.$$

Искомую стратегию $x_i$, которая минимизирует «сожаление», определяют из условия

$$\min_{x_i} \max_{S_k} u_{ik}^c.$$

Этот критерий минимизирует возможные потери при условии, что состояние среды наихудшем образом отличается от предполагаемого.

Рассмотрим **частный случай** задачи в условиях неопределенности, когда каждому возможному состоянию среды соответствует один возможный исход:

$$P(O_j \setminus S_k) = \delta_{jk}, \text{ где } \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k; \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

То есть, в данном случае математическая модель задачи принятия решения определяется множеством стратегий $\{x_i\}$, множеством состояний среды $\{S_k\}$ и матрицей полезностей

| $x_i \setminus S_j$ | $S_1$ | $S_2$ | ... | $S_k$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $L_{11}$ | $L_{12}$ | … | $L_{1k}$ |
| $x_2$ | $L_{21}$ | $L_{22}$ | … | $L_{2k}$ |
| … | … | … | … | … |
| $x_n$ | $L_{n1}$ | $L_{n2}$ | … | $L_{nk}$ |

где $L_{ij} = U(x_i, S_j)$. Множество $\{P(S_j)\}$ предполагается неизвестным.

В этом случае рассмотренные выше критерии для выбора оптимальной стратегии принимают следующий вид.

*Критерий Вальда:*

$$\max_{x_i} \min_{S_k} U(x_i, S_k).$$

*Критерий Гурвица:*

$$\max_{x_i} [\alpha \max_{S_k} U(x_i, S_k) + (1-\alpha) \min_{S_k} U(x_i, S_k)],$$

среда может находиться в самом невыгодном состоянии с вероятностью $1-\alpha$ и в самом выгодном с вероятностью $\alpha$, где $0 \le \alpha \le 1$ – коэффициент доверия.

*Критерий Лапласа:*

$$\max_{x_i} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} U(x_i, S_k).$$

*Критерий Сэвиджа:*

$$\min_{x_i} \max_{S_k} U_c(x_i, S_k),$$

где

$$U_c(x_i, S_k) = \max_i U(x_i, S_k) - U(x_i, S_k).$$

Рассмотрим пример использования данных критериев в условиях неопределенности.

**Пример.** Некоторая фирма решает построить отель в одном из курортных мест. Необходимо определить наиболее целесообразное количество мест или комнат в этой гостинице.

Составляют смету расходов по строительству гостиницы с различным количеством комнат, а также рассчитывают ожидаемый доход в зависимости от количества комнат, которые будут сняты.

В зависимости от принятого решения – количество комнат в гостинице

$$x_i = 20, 30, 40, 50$$

и количества снятых комнат

$$S_k = 0, 10, 20, 30, 40, 50,$$

которое зависит от множества случайных факторов и неизвестно фирме, получают следующую таблицу ежегодных прибылей (в условных единицах):

Таблица 1.

| $x_i \setminus S_j$ | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | -121 | 62 | 245 | 245 | 245 | 245 |
| 30 | -168 | 14 | 198 | 380 | 380 | 380 |
| 40 | -216 | -33 | 150 | 332 | 515 | 515 |
| 50 | -264 | -81 | 101 | 284 | 468 | 650 |

Наиболее подходящее количество комнат в гостинице определим по рассмотренным критериям.

***Критерий Вальда:***

$$\max_{x_i} \min_{S_k} (x_i, S_k) = \max_{x_i} \min_{S_k} L_{ik} =$$

$$\max_{x_i} = (-121, -168, -216, -264) = -121.$$

$$x_{\text{опт}} = x_1 = 20.$$

Судя по результату, критерий Вальда неприменим, так как в этом случае от постройки гостиницы следует отказаться.

***Критерий Лапласа:***

$$\max_{x_i} \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{K} L_{ik} = \max_{x_i} \overline{L_i} = \max\{153, 198, 210, 193\} = 210,$$

где $L_i$ - среднее арифметическое по каждой строке таблицы.

$$x_{\text{опт}} = x_3 = 40.$$

***Критерий Гурвица:***

$$\max_{x_i} [\alpha \max_k U(x_i, S_k) + (1-\alpha)\min_k U(x_i, S_k)].$$

Для разных $\alpha$ можно построить таблицу доходов по критерию Гурвица

$$H = \left\| h_{i,\alpha} \right\|,$$

где

$$h_{i,\alpha} = [\alpha \max_k L_{ik} + (1-\alpha)\min_k L_{ik}].$$

Например, для $i = 1$

$$\max_k L_{ik} = 245, \quad \min_k L_{ik} = -121,$$

и при $\alpha = 0.1$

$$h_{1,0.1} = (0.1 \cdot 245 + 0.9 \cdot (-121)) = -84.4 \approx -84.$$

Таким образом, изменяя $i$ от 1 до 4, а $\alpha \Rightarrow 0.1,\ 0.2,\ 0.5,\ 0.9$, получим таблицу доходов по критерию Гурвица:

| $x_i \setminus \alpha$ | 0.1 | 0.2 | 0.5 | 0.9 |
|---|---|---|---|---|
| 20 | –84 | –47 | 63 | 206 |
| 30 | –114 | –59 | 108 | 325 |
| 40 | –143 | –70 | 150 | 442 |
| 50 | –172 | –81 | 193 | 560 |

Тогда оптимальное количество комнат в гостинице в зависимости от $\alpha$:

| $\alpha$ | 0.1 | 0.2 | 0.5 | 0.9 |
|---|---|---|---|---|
| $x_{ОПТ}$ | $\max h_{i,\,0.1} = 20$ | $\max h_{i,\,0.2} = 20$ | $\max h_{i,\,0.5} = 50$ | $\max h_{i,\,0.9} = 50$ |

Таким образом, будет выбрано 20 комнат, если заказчик пессимист, и 50 комнат, если оптимист.

***Критерий Сэвиджа:***

Опираясь на таблицу 1,

| $x_i \setminus S_j$ | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | -121 | 62 | 245 | 245 | 245 | 245 |
| 30 | -168 | 14 | 198 | 380 | 380 | 380 |
| 40 | -216 | -33 | 150 | 332 | 515 | 515 |
| 50 | -264 | -81 | 101 | 284 | 468 | 650 |

строят матрицу сожалений:

| $x_i \setminus S_j$ | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 0 | 0 | 0 | 135 | 270 | 405 |
| 30 | 47 | 48 | 47 | 0 | 135 | 275 |
| 40 | 95 | 95 | 95 | 48 | 0 | 135 |
| 50 | 145 | 143 | 144 | 96 | 47 | 0 |

$$\min_{x_i} \max_{S_k} U_c(x_i, S_k) = \min\{405, 275, 135, 145\} = 135,$$

таким образом, $x_{\text{опт}} = x_3 = 40.$

Какое из решений предпочтительнее, определяется выбором критерия. Выбор критерия принятия решения является наиболее сложным ответственным этапом в исследовании операций. При этом не существует каких-либо общих рекомендаций или советов. Выбор критерия должен производить заказчик на самом высоком уровне и в максимальной степени согласовывать этот выбор с конкретной спецификой задачи, а также со своими целями.

В частности, если даже минимальный риск недопустим, то следует применять критерий Вальда. Если наоборот, определенный риск вполне приемлем, и заказчик намерен вложить в некоторое предприятие столько средств, чтобы потом не сожалеть, что вложил слишком мало, то выбирают критерий Сэвиджа.

При отсутствии достаточной информации для выбора того или иного критерия возможен альтернативный подход, который может быть связан с вычислением шансов на успех или неуспех на основе прошлого опыта.

## 1.8. Принятие решений в условиях конфликтных ситуаций или противодействия

В отличие от задач принятия решений в условиях определенности, риска и неопределенности, в которых внешняя среда (природа) предполагалась пассивной, *конфликтные ситуации* предполагают наличие, по крайней мере, *двух противодействующих сторон, интересы которых противоположны.*

Упрощенная математическая модель конфликтных ситуаций представляет собой игру.

Игра может быть определена следующим образом:

- Имеются $n$ конфликтных сторон (лиц), принимающих решения, интересы которых не совпадают.
- Заданы правила, определяющие выбор допустимых стратегий и известные игрокам.
- Существует точно определенный набор конечных состояний, которыми заканчивается игра (например, выигрыш, ничья, проигрыш).
- Заранее определены и известны всем игрокам платежи, соответствующие каждому возможному конечному состоянию. Обычно они заданы в виде некоторой матрицы $A = \|a_{ij}\|$.

Практические задачи, в которых встречаются игровые аспекты, чрезвычайно разнообразны.

# 2. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

## 2.1. Основные понятия и определения

В 1939 году Л.В. Канторович опубликовал работу «Математические методы организации и планирования производства», в которой сформулировал новый класс экстремальных задач с ограничениями и разработал эффективный метод их решения, таким образом были заложены основы линейного программирования.

В 1949 году американский математик Джордж Бернард Данциг разработал эффективный метод решения задач линейного программирования (ЗЛП) – симплекс-метод. Термин «программирование» нужно понимать в смысле «планирования» (один из переводов англ. *programming*). Он был предложен в середине 1940-х годов Джорджем Данцигом, одним из основателей линейного программирования.

Линейное программирование – раздел математического программирования, применяемый при разработке методов отыскания экстремума линейных функций нескольких переменных при линейных ограничениях, налагаемых на переменные. По типу решаемых задач его методы разделяются на универсальные и специальные. С помощью универсальных методов могут решаться любые *задачи линейного программирования* (ЗЛП). Специальные методы учитывают особенности модели задачи, ее целевой функции и системы ограничений.

Особенностью задач линейного программирования является то, что экстремума целевая функция достигает на границе области допустимых решений.

Различают три основные формы задач линейного программирования в зависимости от наличия ограничений разного типа.

### *Стандартная задача ЛП*

$$
\begin{aligned}
&\max(c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n)\\
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1,\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2,\\
&...\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m,\\
&x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, ..., x_n \ge 0.
\end{aligned}
$$

Стандартная задача важна ввиду наличия большого числа прикладных моделей, сводящихся наиболее естественным образом к этому классу задач ЛП.

### *Каноническая задача ЛП*

$$\max(c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n)$$
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2,$$
$$...$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m,$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, ..., x_n \ge 0.$$

Основные вычислительные схемы решения задач ЛП разработаны именно для канонической задачи.

### *Общая задача ЛП*

В этой задачи часть ограничений носит характер неравенств, а часть является уравнениями. Кроме того, не на все переменные наложено условие неотрицательности:

$$\max(c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n)$$
$$\max(c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n)$$
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2,$$
$$...$$
$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n \le b_k,$$
$$a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + ... + a_{k+1,n}x_n = b_{k+1},$$
$$a_{k+2,1}x_1 + a_{k+2,2}x_2 + ... + a_{k+2,2n}x_n = b_{k+2},$$
$$...$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m,$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, ..., x_\gamma \ge 0.$$

Все три перечисленные задачи эквивалентны в том смысле, что каждую из них можно простыми преобразованиями привести к любой из двух остальных.

При изучении задач ЛП сложилась определенная терминология. Линейная форма $c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$, подлежащая максимизации (или минимизации) , называется *целевой функцией*. Вектор $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, удовлетворяющий всем ограничениям задачи ЛП, называется *допустимым вектором, или планом*. Задача ЛП, для которой существуют допустимые векторы, называется *допустимой задачей*. Допустимый вектор, доставляющий наибольшее значение целевой функции по сравнению с любым другим допустимым вектором, называется *решением задачи, или оптимальным планом*. Максимальное значение целевой функции называется *значением задачи*.

## 2.2. Графический метод решения задачи ЛП

Если целевая функция в задаче линейного программирования зависит от двух переменных, то данная задача может быть решена простым и наглядным геометрическим методом. Графическим методом решаются задачи линейного программирования, имеющие 2 переменные или число ограничений-уравнений ровно на 2 меньше числа переменных.

Множество решений задачи линейного программирования определяется конечной системой линейных ограничений, поэтому геометрически это множество представляет собой либо выпуклый многоугольник, либо неограниченную многоугольную область.

Выпуклым многоугольником называется многоугольник, все точки которого лежат по одну сторону от любой прямой, проходящей через две его соседние вершины Выпуклый многоугольник имеет конечное число угловых точек.

**Производственная задача.** Цех может производить стулья и столы. На производство стула идет 5 единиц материала, на производство стола – 20 единиц (футов красного дерева). Стул требует 10 человеко- часов, стол – 15. Имеется 400 единиц материала и 450 человеко-часов. Прибыль при производстве стула – 45 дол. США, при производстве стола – 80 дол. Сколько надо сделать стульев и столов, чтобы получить максимальную прибыль?

Обозначим $X_1$ число изготовленных стульев, $X_2$ – число столов. Задача оптимизации имеет вид:

$$45X_1 + 80X_2 \to \max;$$
$$5X_1 + 20X_2 <400;$$
$$10X_1 + 15X_2 <450;$$
$$X_1> 0; X_2<0.$$

В первой строке выписана целевая функция – прибыль при выпуске $X_1$ стульев и $X_2$ столов. Ее требуется максимизировать, выбирая оптимальные значения переменных $X_1$ и $X_2$. При этом должны быть выполнены ограничения по материалу (вторая строчка) – истрачено не более 400 футов красного дерева. А также и ограничения по труду (третья строчка) – затрачено не более 450 ч. Кроме того, нельзя забывать, что число столов и число стульев неотрицательны. Если $X_1 = 0$, то это значит, что стулья не выпускаются. Если же хоть один стул сделан, то $X_1$ положительно. Но невозможно представить себе отрицательный выпуск – $X_1$ не может быть отрицательным с экономической точки зрения, хотя с математической точки зрения такого ограничения усмотреть нельзя. В четвертой и пятой строчках задачи и констатируется, что переменные неотрицательны.

Условия производственной задачи можно изобразить на координатной плоскости. Будем по оси абсцисс откладывать значения $X_1$, а по оси ординат – значения $X_2$. Тогда ограничения по материалу и последние две строчки оптимизационной задачи выделяют возможные значения ($X_1$, $X_2$) объемов выпуска в виде треугольника (рис. 1).

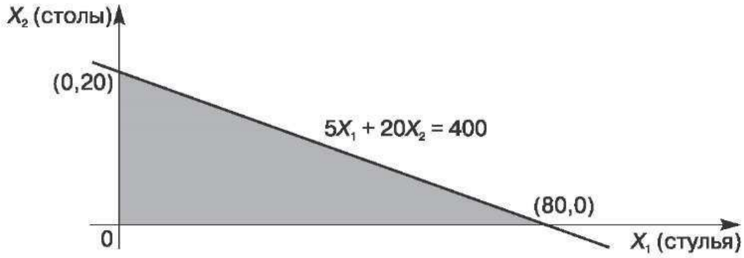



Рис. 1. Ограничения по материалу

Таким образом, ограничения по материалу изображаются в виде выпуклого многоугольника, в данном случае – треугольника. Этот треугольник получается путем отсечения от первого квадранта примыкающей к началу координат зоны. Отсечение проводится прямой, соответствующей второй строке исходной задачи, с заменой неравенства на равенство. Прямая пересекает ось *X1,* соответствующую стульям, в точке (80,0). Это означает, что если весь материал пустить на изготовление стульев, то будет изготовлено 80 стульев. Та же прямая пересекает ось X2, соответствующую столам, в точке (0,20). Это означает, что если весь материал пустить на изготовление столов, то будет изготовлено 20 столов. Для всех точек внутри треугольника выполнено неравенство, что означает – материал останется.

Аналогичным образом можно изобразить и ограничения по труду (рис. 2).

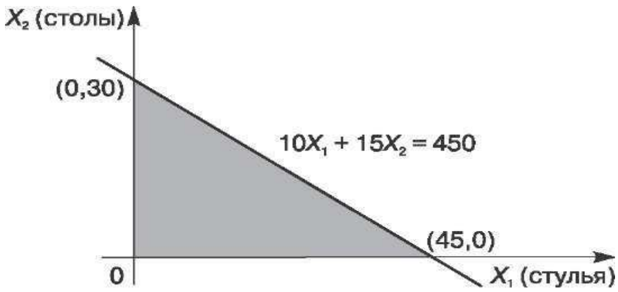



Рис. 2. Ограничения по труду

Ограничения по труду, как и ограничения по материалу, изображаются в виде треугольника, который получается аналогично – путем отсечения от первого квадранта примыкающей к началу координат зоны. Отсечение проводится прямой, соответствующей третьей строке исходной задачи, с заменой неравенства на равенство. Прямая пересекает ось $X_1$, соответствующую стульям, в точке (45,0). Это означает, что если все трудовые ресурсы пустить на изготовление стульев, то будет сделано 45 стульев. Та же прямая пересекает ось $X_2$, соответствующую столам, в точке (0,30). Это означает, что если всех рабочих поставить на изготовление столов, то будет сделано 30 столов. Для всех точек внутри треугольника выполнено неравенство, что означает – часть рабочих будет простаивать.

Мы видим, что очевидного решения нет – для изготовления 80 стульев есть материал, но не хватает рабочих рук, а для производства 30 столов есть рабочая сила, но нет материала. Значит, надо изготавливать и то и другое. Но в каком соотношении?

Чтобы ответить на этот вопрос, надо «совместить» рис. 1 и рис. 2, получив область возможных решений, а затем проследить, какие значения принимает целевая функция на этом множестве (рис. 3).

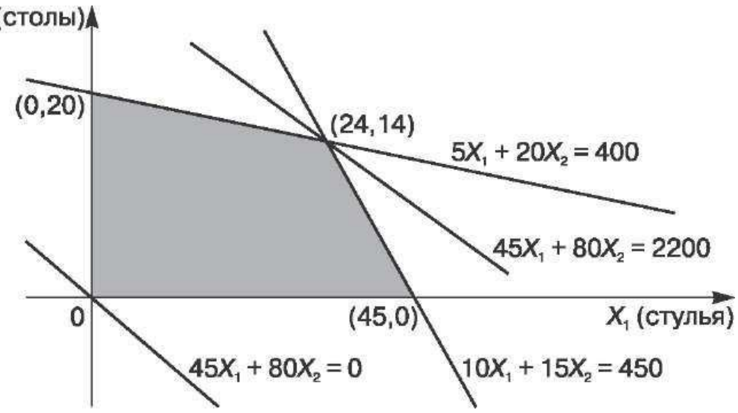



Рис. 3. Основная идея линейного программирования

Таким образом, множество возможных значений объемов выпуска стульев и столов ($X_1$, $X_2$), или, в других терминах, множество $A$, задающее ограничения на параметр управления в общей оптимизационной задаче, представляет собой пересечение двух треугольников, т.е. выпуклый четырехугольник, показанный на рис. 3. Три его вершины очевидны – это (0,0), (45,0) и (0,20). Четвертая – это пересечение двух прямых – границ треугольников на рис. 1 и рис. 2, Решение системы этих двух уравнений даст четвертую вершину четырехугольника – (24, 14).

Надо найти максимум линейной функции на выпуклом многоугольнике. (В общем случае линейного программирования – максимум линейной функции на выпуклом многограннике, лежащем в конечномерном линейном пространстве.) Основная идея линейного программирования состоит в том, что максимум достигается в вершинах многоугольника. В общем случае – в одной вершине, и это – единственная точка максимума. В частном – в двух, и тогда отрезок, их соединяющий, тоже состоит из точек максимума.

Целевая функция $45X_1 + 80X_2$ принимает минимальное значение, равное 0, в вершине (0,0). При увеличении аргументов эта функция увеличивается. В вершине (24, 14) она принимает значение 2200. При этом прямая $45X_1 + 80X_2 = 2200$ проходит между прямыми ограничений $5X_1 + 20X_2 = 400$ и $10X_1 + 15X_2 = 450$, пересекающимися в той же точке. Отсюда, как и из непосредственной проверки двух оставшихся вершин, вытекает, что максимум целевой функции, равный 2200, достигается в вершине (24, 14).

Таким образом, оптимальный выпуск таков: 24 стула и 14 столов. При этом используется весь материал и все трудовые ресурсы, а прибыль равна 2200 дол.

## 2.3. Симплекс-метод решения задачи ЛП

Путём построения симплексных таблиц решить задачу линейного программирования намного проще, чем путём алгебраических преобразований. Симплексные таблицы очень наглядны. С их помощью решается каноническая задача ЛП.

**Задача:**
Найти значения переменных $\mathbf{x_1...x_2}$, при которых функция:
$Q = x_1 + x_2$
принимает **максимальное** значение, при условии следующих ограничений:

$$2x_1 + 4x_2 \le 1 \quad (1)$$
$$6x_1 + 2x_2 \le 1 \quad (2)$$
$$x_1 \ge 0 \quad (3)$$
$$x_2 \ge 0 \quad (4)$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

---

**Шаг:1**
Избавимся от неравенств в ограничениях, введя в ограничения 1, 2, 3, 4 неотрицательные базисные переменные $\mathbf{s_1}$, $\mathbf{s_2}$, $\mathbf{s_3}$, $\mathbf{s_4}$.

$$2x_1 + 4x_2 + s_1 = 1 \quad (1)$$
$$6x_1 + 2x_2 + s_2 = 1 \quad (2)$$
$$x_1 - s_3 = 0 \quad (3)$$
$$x_2 - s_4 = 0 \quad (4)$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \ge 0$$

Это было сделано с соблюдением следующего правила: если в первоначальном ограничении знак "меньше или равно", то добавочную переменную нужно прибавлять, а если "больше или равно", то добавочную переменную нужно отнимать.
Введённые добавочные переменные принимаем за основные (базисные). Тогда $x_1$ и $x_2$ – неосновные (свободные) переменные.

**Шаг:2**
Ищем в системе ограничений базисные переменные. Из последней системы ограничений можно выделить базисные переменные **$s_1$, $s_2$**. Не все уравнения содержат базисные переменные, это значит, что исходная задача не содержит в себе допустимого базисного решения. Для его нахождения вначале составим и решим вспомогательную задачу. Такое решение еще называют решением с искусственным базисом.
Введем в уравнения 3, 4 искусственные неотрицательные переменные **$r_1$**, **$r_2$**. Получим следующую систему ограничений,

$$2x_1 + 4x_2 + s_1 = 1 \quad (1)$$

$$6x_1 + 2x_2 + s_2 = 1 \quad (2)$$

$$x_1 - s_3 + r_1 = 0 \quad (3)$$

$$x_2 - s_4 + r_2 = 0 \quad (4)$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4, r_1, r_2 \geq 0$$

с базисными переменными **$s_1$, $s_2$, $r_1$, $r_2$**.
Целью решения вспомогательной задачи является получение допустимого базисного решения не содержащего искусственных переменных (**$r_1$, $r_2$**). Для этого сформируем вспомогательную целевую функцию:

$$G = r_1 + r_2$$

и проведем ее минимизацию в заданной системе ограничений. Если после минимизации функции G ее оптимальное значение будет равно нулю и все искусственные переменные окажутся выведенными из базиса, то полученное базисное решение есть допустимое базисное решение исходной задачи. Если же после минимизации функции G ее оптимальное значение окажется отличным от нуля, значит исходная система ограничений противоречива (область допустимых решений пуста) и исходная задача решения не имеет.
Для решения вспомогательной задачи симплекс-методом выразим функцию G через свободные переменные, для этого:

- - вычтем из функции G уравнение 3;
- - вычтем из функции G уравнение 4.

Функция G примет вид:

$$G = -x_1 - x_2 + s_3 + s_4$$

Теперь мы можем сформировать начальную симплекс-таблицу.

**Шаг:3**

Начальная симплекс-таблица

| БП | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ | $r_1$ | $r_2$ | Решение | Отношение |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_1$ | 2 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | $1/4=\frac{1}{4}$ |
| $s_2$ | 6 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | $1/2=\frac{1}{2}$ |
| $r_1$ | 1 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 | -- |
| $r_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | $0/1=0$ |
| Q | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -- |
| G | -1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | -- |

Итерация 1 Как производится итерация?...

| БП | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ | $r_1$ | Решение | Отношение |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_1$ | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 4 | 0 | 1 | $1/2=\frac{1}{2}$ |
| $s_2$ | 6 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 | 0 | 1 | $1/6=\frac{1}{6}$ |
| $r_1$ | 1 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | $0/1=0$ |
| $x_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | -- |
| Q | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | -- |
| G | -1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | -- |

Итерация 1-а

| БП | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ | Решение | Отношение |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_1$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 | 4 | 1 | $1/3=\frac{1}{4}$ |
| $s_2$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 6 | 2 | 1 | $1/4=\frac{1}{2}$ |
| $x_1$ | 1 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | -- |
| $x_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | -- |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Q** | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | -- |
| **G** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -- |

Получено оптимальное решение вспомогательной задачи (найден минимум функции G т.к. в строке целевой функции нет отрицательных коэффициентов). Все искусственные переменные вышли из базиса и поэтому мы можем приступить к решению исходной задачи, приняв полученное базисное решение в качестве опорного. Строка "G" нам больше не нужна, принятие решения о направляющем столбце, во всех последующих итерациях, будем принимать по строке "Q"

Итерация 2

| **БП** | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ | **Решение** | **Отношение** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_1$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 | 4 | 1 | $1/4=\frac{1}{4}$ |
| $s_2$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 6 | 2 | 1 | $1/2=\frac{1}{2}$ |
| $x_1$ | 1 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | -- |
| $x_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | -- |
| **Q** | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | -- |

Разрешающий столбец – где max(Q)=1: возьмем столбец $S_4$
Разрешающая строка – где min (Отношение): строка $S_1$
На их пересечении – разрешающий элемент: 4.

***Покажем, как из табл. «Итерация 2» получить табл. «Итерация 3»***

1. Изменяется имя разрешающей строки $S_1$ на $S_4$
2. Делается перерасчет разрешающей строки: элементы разрешающей строки $S_1$ в табл. «Итерация 2» делятся на разрешающий элемент 4 и записываются в строку $S_4$ табл. «Итерация 3.
3. Обнуляется все элементы разрешающего столбца, кроме элемента, стоящего в разрешающей строке.
4. Остальные ячейки таблицы (кроме столбца "Отношение") пересчитываются по так называемому **правилу прямоугольника** по данным табл. «Итерация 2».
5. Определяем новый разрешающий столбец по данным табл. «Итерация 3» Разрешающий столбец – где max(Q)=1/2: столбец $S_3$
6. Теперь заполним столбец "Отношение". Для этого нужно соответствующий (стоящий в той же строке) элемент столбца "Решение" разделить на соответствующий элемент разрешающего столбца. Данная

операция проводится только для положительных элементов разрешающего столбца, и строка "Q" в данной операции не участвует.

7. После заполнения столбца "Отношение" определим новую разрешающую строку. Она определяется минимальным элементом из столбца "Отношение". Это – строка $S_2$.

Итерация 3.

| БП | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ | Решение | Отношение |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_4$ | 0/4=**0** | 0/4=**0** | **1/4** | 0/4=**0** | 2/4=**1/2** | 4/4=**1** | **1/4** | 1/4:1/2=**1/2** |
| $S_2$ | 0-0·2/4=**0** | 0-0·2/4=**0** | 0-1·2/4= -**1/2** | 1-0·2/4=**1** | 6-2·2/4=**5** | 0 | 1-1·2/4=**1/2** | 1/2:5=**1/10** |
| $X_1$ | 1-0·0/4=**1** | 0-0·0/4=**0** | 0-1·0/4=**0** | 0-0·0/4=**0** | -1-2·0/4=-**1** | 0 | 0-1·0/4=**0** | — |
| $X_2$ | 0-0·(-1)/4=**0** | 1-0·(-1)/4=**1** | 0-1·(-1)/4=**1/4** | 0-0·(-1)/4=**0** | 0-2·(-1)/4=**1/2** | 0 | 0-1·(-1)/4=**1/4** | 1/4:1/2=**1/2** |
| Q | 0-0·1/4=**0** | 0-0·1/4=**0** | 0-1·1/4=-**1/4** | 0-0·1/4=**0** | 1-2·1/4=**1/2** | 0 | 0-1·1/4= -**1/4** | — |

Итерация 3

| БП | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ | Решение | Отношение |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_4$ | 0 | 0 | $\frac{1}{4}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 1 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}/\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ |
| $s_2$ | 0 | 0 | $\frac{-1}{2}$ | 1 | 5 | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}/5=\frac{1}{10}$ |
| $x_1$ | 1 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | -- |
| $x_2$ | 0 | 1 | $\frac{1}{4}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}/\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ |
| **Q** | 0 | 0 | $\frac{-1}{4}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{-1}{4}$ | -- |

Итерация 4

| БП | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ | Решение | Отношение |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_4$ | 0 | 0 | 3 | -1 | 0 | 1 | 1 | -- |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 10 | 10 | | | 5 | |
| $s_3$ | 0 | 0 | $\frac{-1}{10}$ | $\frac{1}{5}$ | 1 | 0 | $\frac{1}{10}$ | -- |
| $x_1$ | 1 | 0 | $\frac{-1}{10}$ | $\frac{1}{5}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{10}$ | -- |
| $x_2$ | 0 | 1 | $\frac{3}{10}$ | $\frac{-1}{10}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{5}$ | -- |
| **Q** | 0 | 0 | $\frac{-1}{5}$ | $\frac{-1}{10}$ | 0 | 0 | $\frac{-3}{10}$ | -- |

Достигнуто оптимальное решение, т.к. в строке целевой функции нет положительных коэффициентов

**Ответ:**

Оптимальное значение функции $Q(x)=\frac{3}{10}$

достигается в точке с координатами:

$x_1=\frac{1}{10}$

$x_2=\frac{1}{5}$

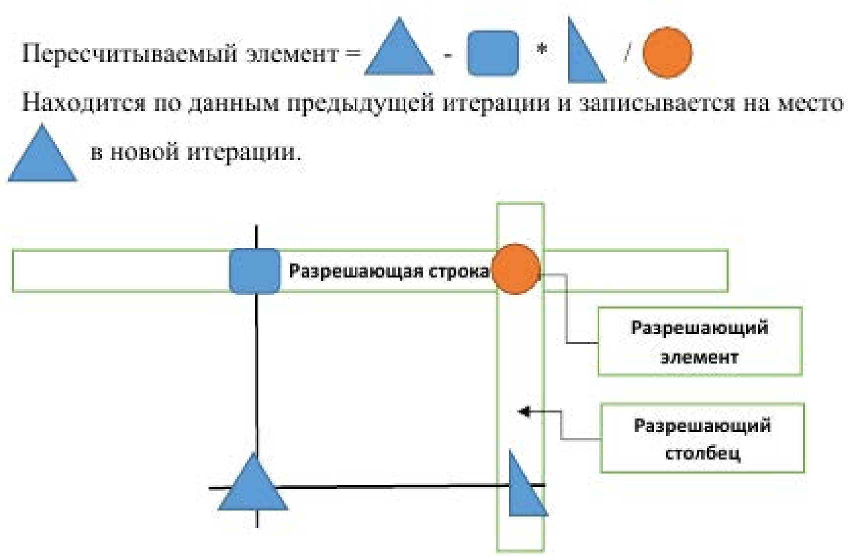
$s_1= 0$

$s_2= 0$

$s_3=\frac{1}{10}$

$s_4=\frac{1}{5}$

**Правило прямоугольника**



## 2.4. Транспортная задача линейного программирования

### 2.4.1. Математическая модель транспортной задачи

Пусть имеются m пунктов отправления $A_1, A_2, \ldots, A_m$, в которых находится однородный груз в количествах $a_1, a_2, \ldots, a_m$ соответственно, и $n$ пунктов назначения $B_1, B_2, \ldots, B_n$, потребности которых в данном грузе равны $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Известны $c_{ij}$ расходы на перевозку единицы груза из $i$-го пункта отправления в $j$-й пункт потребления. Требуется составить план перевозок так, чтобы запасы каждого поставщика были бы вывезены, спрос каждого потребителя удовлетворен и общая стоимость всех перевозок была минимальной.

Исходные данные транспортной задачи запишем в виде матрицы перевозок (*табл. 3.1*).

*Таблица 3.1*

| $B_j$ / $A_i$ | $B_1$ | $B_2$ | … | $B_n$ | Запасы $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | $C_{11}$ | $C_{12}$ | | $C_{1n}$ | $a_1$ |
| $A_2$ | $C_{21}$ | $C_{22}$ | | $C_{2n}$ | $a_2$ |
| … | … | … | … | … | … |
| $A_n$ | $C_{m1}$ | $C_{m2}$ | | $C_{mn}$ | $a_m$ |
| Потребности $b_j$ | $b_1$ | $b_2$ | … | $b_n$ | - |

Обозначим через $x_{ij} \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n})$ количество единиц груза, которое нужно перевезти из пункта $A_i$ в пункт $B_j$.

Так как нужно перевезти весь груз из каждого пункта отправления $A_i$, то должны выполняться равенства

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = a_1, \\ x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = a_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = a_m. \end{cases}$$

В каждый пункт назначения $B_j$ должен быть завезен весь требуемый груз, потому

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} = b_1, \\ x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} = b_n. \end{cases}$$

Стоимость всех запланированных перевозок должна быть минимальной:

$$f = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{mn}x_{mn} \quad \to \quad \min .$$

Математическая модель транспортной задачи (ТЗ) в общем случае имеет вид:

$$f = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \quad \to \quad \min , \tag{7}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1,m}, \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1,n}. \end{array} \right\} , \tag{8}$$

$$x_{ij} \ge 0, \quad i = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,n}. \tag{9}$$

Таким образом, математически ТЗ формируется по следующей схеме. Заданы система ограничений (8) при условии (9) и целевая функция (7); требуется среди множества решений системы (8) найти такое неотрицательное решение, которое минимизирует функцию (7).

В рассмотренной модели ТЗ предполагается, что суммарные запасы поставщиков равны суммарным запросам потребителей, т. е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j . \tag{10}$$

Такая задача называется задачей с *правильным балансом*, ее модель – *закрытой.*

Для того, чтобы ТЗ линейного программирования имела решение, необходимо и достаточно выполнение равенства (10).

Всякое неотрицательное решение системы линейных уравнений (8), определяемое матрицей $X=(x_{ij})$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, называется *планом ТЗ*. План $X^*=(x_{ij}^*)$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, при котором целевая функция (7) принимает свое минимальное значение, называется *оптимальным планом ТЗ*. Матрица $(c_{ij})$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$ называется *матрицей тарифов* (издержек или транспортных расходов).

### 2.4.2. Свойства транспортной задачи

1. Ранг матрицы из коэффициентов при неизвестных системы ограничений ТЗ равен $m + n - 1$, где $m$ и $n$ – количество поставщиков и потребителей соответственно.
2. ТЗ всегда имеет оптимальный план.
3. В ТЗ всегда существуют допустимые планы, содержащие не более $m + n - 1$ положительных элементов.
4. Если в ТЗ все числа $a_i$ , $b_j$ целые, то она имеет оптимальный целочисленный план.

Решение (план перевозок) назовем *допустимым*, если оно удовлетворяет системе ограничений (8), *опорным*, если в нем отличны от нуля не более $m + n - 1$ базисных переменных, остальные равны нулю.

Решение ТЗ разобьем на три этапа:

- определение первоначального допустимого решения;
- проверка найденного решения на оптимальность (оценка плана по критерию стоимости). Если оно оптимальное, то ТЗ решена;
- улучшение начального плана, т.е. последовательный переход от одного плана к другому, связанный с уменьшением суммарной стоимости перевозок.

### 2.4.3. Методы нахождения начального плана перевозок

Клетки матрицы перевозок, где $x_{ij}>0$, называются *базисными*, а остальные, где $x_{ij}=0$ – *свободными*.

В матрице есть $m + n - 1$ базисных клеток. Их число совпадает с числом независимых уравнений – ограничений.

Значение $x_{ij}$ в матрице перевозок находится по формуле:

$$x_{ij} = \min\begin{cases}\text{остаток груза в пункте } A_i;\\ \text{неудовлетворенные потребности в пункте } B_j.\end{cases} \qquad (11)$$

Значение $x_{ij} = 0$ в свободной клетке не пишется явно, а вместо этого в ней ставится точка.

### *Метод северо-западного угла*

Вычисление проводим по формуле (11), начиная с элемента $x_{11}$, стоящего в северо-западном углу матрицы перевозок.

***Пример 3.*** Найти начальный план перевозок в ТЗ методом северо-западного угла

$$a_i: \quad 15, 25, 5;$$

$$b_j: \quad 5, 15, 15, 10;$$

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 20 & 11 \\ 12 & 7 & 9 & 20 \\ 0 & 14 & 16 & 18 \end{pmatrix}.$$

Запишем матрицу перевозок (табл. 3.2).

*Таблица 3.2*

| $B_j$ / $A_i$ | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | Запасы $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 10<br>5 | 0<br>10 | 20<br>* | 11 | 15 |
| $A_2$ | 12<br>* | 7<br>5 | 9<br>15 | 20<br>5 | 25 |
| $A_3$ | 0 | 14<br>* | 16<br>* | 18<br>5 | 5 |
| Потребности $b_j$ | 5 | 15 | 15 | 10 | 45 / 45 |

Начинаем с северо-западного угла, т. е.

$$x_{11} = \min\{15, 5\} = 5 .$$

Тогда в пункте $B_1$ потребности удовлетворены, и, следовательно, $x_{21} = 0$ (в табл. 3.2 ставится точка (*)). Первый столбец выбывает из рассмотрения.

Продолжаем с северо-западного угла, т.е.

$$x_{12} = \min\{15 - 5, 15\} = \min\{10, 15\} = 10 .$$

Запасы в пункте $A_1$ исчерпаны и $x_{13} = 0$ (в табл. 3.2 ставится точка). Первая строка таблицы выбывает из рассмотрения.

Продолжаем с северо-западного угла:

$$x_{22} = \min\{25, 15-10\} = \min\{25, 5\} = 5 .$$

Потребности в пункте $B_2$ удовлетворены, второй столбец выбывает из рассмотрения.

Продолжаем с северо-западного угла:

$$x_{23} = \min\{25-5, 15\} = \min\{20, 15\} = 15 \quad \text{и} \quad x_{33} = 0 .$$

Третий столбец выбывает из рассмотрения.

$$x_{24} = \min\{25-20, 10\} = \min\{5, 10\} = 5 .$$

Запасы в пункте $A_2$ исчерпаны.

$$x_{34} = \min\{5, 10-5\} = \min\{5, 5\} = 5 .$$

Получен начальный план перевозок:

$$X = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 15 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

с суммарной стоимостью

$$f = 5\cdot 10 + 0\cdot 10 + 7\cdot 5 + 9\cdot 15 + 20\cdot 5 + 18\cdot 5 = 410 .$$

Число базисных клеток $m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$.

***Примечание.*** При нахождении начального плана перевозок возможен случай вырождения, когда в результате вычислений значения $x_{ij}$ получается, что потребности в пункте $B_j$ удовлетворены, а запасы в пункте $A_i$ исчерпаны. Тогда одновременно из рассмотрения выбывают строка и столбец. Рекомендуется в одну из клеток выбывающих строки и столбца (лучше в клетку с наименьшей стоимостью) ставить так называемый *базисный нуль*. Эта клетка считается базисной (в ней пишется 0), а общее число базисных клеток остается равным $m + n - 1$.

### *Метод минимального элемента*

Получаемый методом северо-западного угла, начальный план перевозок не зависит от их стоимости и поэтому в общем случае далек от наилучшего. В методе минимального элемента учитываются затраты на перевозку. Соответствующий начальный план позволяет обеспечить суммарную стоимость перевозок, более близкую к оптимальной.

В этом методе по формуле (11) последовательно заполняются клетки с наименьшей стоимостью перевозок. Если есть несколько клеток с наименьшей стоимостью, то из них выбирается любая.

***Пример 4.*** Найти начальный план перевозок в ТЗ (пример 3) методом минимального элемента.

Запишем матрицу перевозок (табл. 3.3).

*Таблица 3.3*

| $A_i$ \ $B_j$ | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | Запасы $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 10<br>0 | 0<br>15 | 20<br>* | 11 | 15 |
| $A_2$ | 12 | 7<br>0 | 9<br>15 | 20<br>10 | 25 |
| $A_3$ | 0<br>5 | 14<br>* | 16<br>* | 18 | 5 |
| Потребности $b_j$ | 5 | 15 | 15 | 10 | 45 / 45 |

Заполняем клетку с наименьшей стоимостью:

$$x_{12} = \min\{15, 15\} = 15.$$

Потребности в пункте $B_2$ удовлетворены, запасы в пункте $A_1$ исчерпаны – случай вырождения. В клетке с наименьшей стоимостью среди выбывающих клеток ставим базисный нуль $x_{22} = 0$.

Среди оставшихся клеток ищем клетку с наименьшей стоимостью:

$x_{31} = \min\{5, 5\} = 5$ – случай вырождения, базисный нуль $x_{11} = 0$.

Из оставшихся клеток заполняем клетку с наименьшей стоимостью:

$$x_{23} = \min\{25, 15\} = 15.$$

Потребности в пункте $B_3$ удовлетворены, выбывает третий столбец.

$$x_{24} = \min\{25 - 15, 10\} = \min\{10, 10\} = 10.$$

Получен начальный план перевозок:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 10 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

с суммарной стоимостью

$$f = 10 \cdot 0 + 0 \cdot 15 + 7 \cdot 0 + 9 \cdot 15 + 20 \cdot 10 + 0 \cdot 5 = 355,$$

которая меньше стоимости, полученной методом северо-западного угла. Число базисных клеток $m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$.

## 2.4.4. Метод потенциалов

Метод потенциалов - метод, обеспечивающий улучшение начального плана перевозок. При этом происходит переход от одного плана перевозок к другому (от одной матрицы перевозок к другой) до тех пор, пока уменьшение суммарной стоимости перевозок станет невозможным.

### *Циклы матрицы перевозок*

*Цикл* – замкнутая ломаная с вершинами в клетках и звеньями, расположенными вдоль строк и столбцов матрицы перевозок. В каждой вершине встречаются два звена, причем одно из них располагается по строке, а другое – по столбцу. Число вершин цикла чётно. Циклом может быть самопересекающаяся ломаная, но точки ее самопересечения не могут быть вершинами цикла.

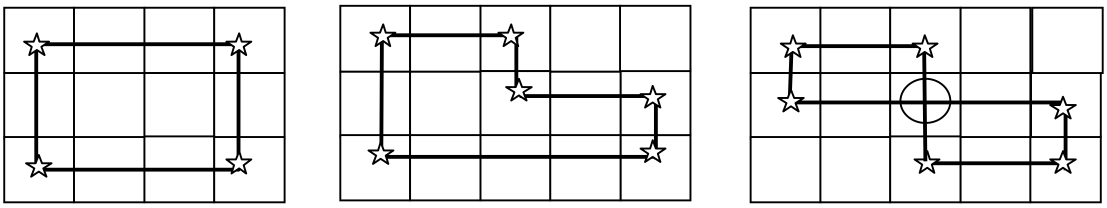



*Рис. 3.* Простейшие циклы

На *рис. 3* звездочкой отмечены клетки матрицы, включенные в состав цикла. На *рис. 3 в* кружком отмечена точка самопересечения.

*Означенный цикл* – цикл, в котором некоторой вершине приписан знак +, а затем при обходе цикла в каком-либо направлении знаки чередуются.

*Сдвигом по циклу на величину* $\Theta \geq 0$ назовем увеличение объемов перевозок во всех клетках, отмеченных знаком + и уменьшение объемов перевозок на $\Theta$ во всех клетках цикла, отмеченных знаком –.

### ***Алгоритм решения транспортной задачи методом потенциалов***

| | |
|---|---|
| *Теорема* | Если план $X^* = (x_{ij}^*)$ транспортной задачи является оптимальным, то ему соответствует система из $m+n$ чисел $u_i^*$ и $v_j^*$, удовлетворяющих условиям: $$u_i^* + v_j^* = c_{ij} \quad \text{для} \quad x_{ij}^* \geq 0,$$ $$u_i^* + v_j^* \leq c_{ij} \quad \text{для} \quad x_{ij}^* = 0,\ i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}.$$ Числа $u_i^*$ $(i = \overline{1,m})$, $v_j^*$ $(j = \overline{1,n})$ называются потенциалами соответственно поставщиков и потребителей. |

Данная теорема позволяет построить алгоритм нахождения решения транспортной задачи методом потенциалов.

### Алгоритм

1. Для ТЗ с *правильным* балансом находим начальный план перевозок методом северо-западного угла или методом минимального элемента.
2. Для каждой *базисной клетки* составляем уравнение $u_i + v_j = c_{ij}$. Так как число базисных клеток $m + n - 1$, то система $m + n - 1$ уравнений с $m + n$

неизвестными имеет бесконечное множество решений. Для определенности положим $u_1 = 0$. Тогда все остальные потенциалы находятся однозначно. Вносим их в матрицу перевозок.

3. Для *свободных* клеток находим суммы соответствующих потенциалов, помещаем их в нижний правый угол свободных клеток матрицы.
4. Для всех свободных клеток проверяем выполнение условия оптимальности:
   - если $u_i + v_j \le c_{ij}$ для всех свободных клеток ($x_{ij} = 0$), то задача решена; выписываем полученный оптимальный план перевозок из последней матрицы, подсчитываем его стоимость;
   - если $u_i + v_j > c_{ij}$ для одной или нескольких свободных клеток, то переходим к п. 5.
5. Находим ту *свободную клетку*, для которой $\Delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$ имеет *наибольшее по модулю отрицательное значение*. Строим для нее означенный цикл. Свободной клетке приписываем знак +. Все вершины означенного цикла, кроме расположенной в клетке (*i,j*), должны находиться в базисных клетках.
6. Выполняем сдвиг по циклу на величину $\Theta = \min\limits_{"-"} \{x_{ij}\}$, равную наименьшему из чисел, стоящих в «отрицательных» вершинах цикла. Если наименьшее значение Θ достигается в нескольких «–» клетках, то при сдвиге следует поставить базисный нуль во всех таких клетках, кроме одной. Тогда число базисных клеток сохранится и будет равно $m + n - 1$, это необходимо проверять при расчетах.
   Клетки матрицы, не входящие в цикл, остаются без изменения.
   Строим новую матрицу перевозок.
7. Переход к шагу 2.

***Примечание.*** При решении задачи может возникнуть ситуация, в которой $\Theta = 0$. Тогда при сдвиге свободная клетка становится базисной $x_{ij} = 0$.

***Пример 5.*** Составить математическую модель ТЗ, решить ТЗ:

$$a_i : 15, 25, 5;$$

$$b_j : 5, 15, 15, 10;$$

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 20 & 11 \\ 12 & 7 & 9 & 20 \\ 0 & 14 & 16 & 18 \end{pmatrix}.$$

Запишем матрицу перевозок (*табл. 3.4*).

*Таблица 3.4*

| $B_j$ / $A_i$ | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | Запасы $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 10 | 0 | 20 | 11 | 15 |
| $A_2$ | 12 | 7 | 9 | 20 | 25 |
| $A_3$ | 0 | 14 | 16 | 18 | 5 |
| Потребности $b_j$ | 5 | 15 | 15 | 10 | 45 / 45 |

1. Пусть $x_{ij} > 0 \quad (i = \overline{1,3}; \quad j = \overline{1,4})$ – количество единиц груза, которое нужно перевезти из пункта $A_i$ в пункт $B_j$ .
2. Ограничения:

а) по запасам
$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 15, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 25, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 5; \end{cases}$$

б) по потребностям
$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 5, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 15, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 15, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 10. \end{cases}$$

3. Целевая функция:
$$f = 10x_4 + 0 \cdot x_{12} + 20x_{13} + 1x_{14} + 12x_{21} + \ldots + 16x_{33} + 18x_{34} \quad \to \quad \min .$$

Требуется составить план перевозок, чтобы их суммарная стоимость была минимальной.

Данная ТЗ с правильным балансом: 15 + 25 + 5 = 5 + 15 + 10; 45 = 45.

Начальный план перевозок найден в п. 3.3.2 методом минимального элемента (*табл.3.3*) Выпишем найденную матрицу перевозок.

Находим потенциалы базисных клеток:

Матрица перевозок

$v_1 = 10 \quad v_2 = 0 \quad v_3 = 2 \quad v_4 = 13$

| | $A_i$ \ $B_j$ | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | Запасы $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_1=0$ | $A_1$ | 10<br>0 - | + 0<br>15 | 20<br>2 | 11<br>13 | 15 |
| $u_2=7$ | $A_2$ | 12<br>+ 17 | 7<br>0 - | 9<br>15 | 20<br>10 | 25 |
| $u_3= -10$ | $A_3$ | 0<br>5 | 14<br>-10 | 16<br>-8 | 18<br>3 | 5 |
| | Потребности $b_j$ | 5 | 15 | 15 | 10 | 45 \ 45 |

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 10, \\ u_1 + v_2 = 0, \\ u_2 + v_2 = 7, \\ u_2 + v_3 = 9, \\ u_2 + v_4 = 20, \\ u_3 + v_1 = 0, \\ u_1 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} u_1 = 0, \\ u_2 = 7, \\ u_3 = -10, \\ v_1 = 10, \\ v_2 = 0, \\ v_3 = 2, \\ v_4 = 13. \end{cases}$$

7. Для свободных клеток находим суммы соответствующих потенциалов, заносим их в матрицу в нижний правый угол свободных клеток.
8. Для свободных клеток проверяем выполнение условия оптимальности: $u_i + v_j \le c_{ij}$ для $x_{ij} = 0$. Для клеток (1,4) и (2,1) условие не выполнено.
9. $\Delta_{14} = 11 - 13 = -2$, $\Delta_{21} = 12 - 17 = -5$. Для свободных клеток строим обозначенный цикл.
10. Производим сдвиг по циклу на $\Theta = \min\limits_{"-"} \{0;0\} = 0$. Клетка (2,1) становится базисной $x_{12} = 0$, а клетка (1,1) – свободной.
11. Переходим к шагу 2 алгоритма метода потенциалов.
12. Строим новую матрицу перевозок.

*Матрица перевозок.*

| | $v_1=5$ | $v_2=0$ | $v_3=2$ | $v_4=13$ |
|---|---|---|---|---|
| $u_1=0$ | 10 <br> 5 | 0 <br> 15 - | 20 <br> 2 | + 11 <br> 13 |
| $u_2=7$ | 12 <br> 0 | 7 + <br> 0 | 9 <br> 15 | 20 <br> 10 - |
| $u_3=-5$ | 0 <br> 5 | 14 <br> -5 | 16 <br> -3 | 18 <br> 8 |

$$\begin{cases} u_1+v_2=0, \\ u_2+v_1=12, \\ u_2+v_2=7, \\ u_2+v_3=9, \\ u_2+v_4=20, \\ u_3+v_1=0, \\ u_1=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} u_1=0, \\ u_2=7, \\ u_3=-5, \\ v_1=5, \\ v_2=0, \\ v_3=2, \\ v_4=13. \end{cases}$$

Для свободной клетки (1,4) условие оптимальности не выполнено. Строим для нее обозначенный цикл, осуществляем сдвиг по циклу на $\Theta=\min\limits_{"-"}\{10;15\}=10$. Клетка (1,4) становится базисной $x_{14}=10$, клетка (2,4) – свободной. Строим новую матрицу перевозок.

*Матрица перевозок*

| | $v_1=5$ | $v_2=0$ | $v_3=2$ | $v_4=11$ |
|---|---|---|---|---|
| $u_1=0$ | 10 <br> 5 | 0 <br> 5 | 20 <br> 2 | 11 <br> 10 |
| $u_2=7$ | 12 <br> 0 | 7 <br> 10 | 9 <br> 15 | 20 <br> 18 |
| $u_3=-5$ | 0 <br> 5 | 14 <br> -5 | 16 <br> -3 | 18 <br> 6 |

$$f=0\cdot 5+11\cdot 10+12\cdot 0+7\cdot 10+ \\ +9\cdot 15+0\cdot 5=315$$

13. Переходим к шагу 2 метода потенциалов:

$$\begin{cases} u_1+v_2=0, \\ u_1+v_4=11, \\ u_2+v_2=12, \\ u_2+v_2=7, \\ u_2+v_3=9, \\ u_3+v_1=0, \\ u_1=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} u_1=0, \\ u_2=7, \\ u_3=-5, \\ v_1=5, \\ v_2=0, \\ v_3=2, \\ v_4=11. \end{cases}$$

Для всех свободных клеток $u_i+v_j\le c_{ij}$.

Полученный план является оптимальным:

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 15 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 15 & 10 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При данном плане стоимость перевозок:

$$f = 0 \cdot 5 + 11 \cdot 10 + 12 \cdot 0 + 7 \cdot 10 + 9 \cdot 15 + 0 \cdot 5 = 315\,.$$

## РЕЗЮМЕ

Вспомним постановку транспортной задачи и рассмотрим подробно решение еще одного примера.

*Транспортная задача* - задача о наиболее экономичном плане перевозок однородного груза из пункта производства в пункты потребления - является важнейшей частью математического программирования, имеющей обширные практические приложения не только к проблемам транспорта.

Транспортная задача выделяется в линейном программировании определенностью экономической характеристики, особенностями математической модели, наличием специфических методов решения.

Простейшая формулировка транспортной задачи по критерию стоимости следующая: в т пунктах отправления $(A, A_2, .., A_m)$ находятся соответственно $(a_1, a_2, ..., a_m)$ единиц однородного груза, который должен быть доставлен $n$ потребителям $(B_1, B_2, ..., B_m)$ в количествах $(b_1, b_2, ..., b_n)$ единиц. Известны транспортные издержки $C_{ij}$ перевозок единиц груза из $i$— го пункта отправления в $j$-ый пункт потребления. Необходимо составить план перевозок так, чтобы полностью удовлетворить потребности и чтобы суммарные издержки на перевозки были минимальными.

Построим математическую модель задачи. Обозначим через $x_{ij}$ количество единиц груза, перевозимого из пункта $A_i$ в пункт $B_j$. Предполагается, что все $x_{ij} \geq 0$. Переменные $x_{ij}$ должны удовлетворять ограничениям по запасам и по потребностям.

Требуется минимизировать функцию

$$F = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij} \tag{20}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i (i = \overline{1,m}) \tag{21}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \mathrm{b}_j (j = \overline{1,\mathrm{n}})$$

$$x_{ij} \geq 0 (i = \overline{1,m}; \mathrm{j} = \overline{1,n}) \tag{22}$$

Необходимым и достаточным условием разрешимости транспортной задачи является равенство суммарных запасов суммарным потребностям, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{23}$$

Транспортная задача (20)-(22) называется закрытой при условии, что выполняется равенство (23). В противном случае задача называется открытой. Далее мы будем рассматривать задачи закрытого типа поскольку открытая задача сводится к закрытой введением фиктивных потребностей или фиктивных произведенных единиц продукции.

Любое решение транспортной задачи называется распределением поставок. Так как поставки не могут быть отрицательными, речь идет только о допустимых решениях.

Решение транспортной задачи сводится к выбору некоторого допустимого решения (распределение поставок) и *их* последующего перераспределения с тем, чтобы каждое новое распределение снижало общую стоимость затрат на перевозки. Перераспределение поставок осуществляется до тех пор, пока не будет найдено оптимальное распределение поставок.

### 2.4.5. Пример решения транспортной задачи

Разберем на примере постановку и решение транспортной задачи.

Предположим, что с 3-х баз требуется доставить в магазины однородный товар. Пусть на базе $A_1$ имеется 50 единиц груза, на базе $A_2$ - 40 единиц, на базе $A_3$- 20 единиц. Указанный товар нужно отгрузить 4-м потребителям: $B_1$,$B_2$,$B_3$,$B_4$

потребности которых составляют соответственно 30, 25, 35, 20 единиц товара. Стоимость перевозки от базы до потребителей запишем в виде таблицы 1.

Табл 1.

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 3 | 2 | 4 | 6 |
| $A_2$ | 2 | 3 | 1 | 2 |
| $A_3$ | 3 | 2 | 7 | 4 |

Требуется составить такой план перевозок груза, который обеспечит минимальные транспортные расходы.

Решение.

**I этап.** Для наглядности перенесем условие задачи в специальную распределительную таблицу, называемой матрицей перевозок.

Табл 2.

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | Наличие товара |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 3 | 2 | 4 | 6 | 50 |
| $A_2$ | 2 | 3 | 1 | 2 | 40 |
| $A_3$ | 3 | 2 | 7 | 4 | 20 |
| Потребность в товаре | 30 | 25 | 35 | 20 | 110 |

**II этап.** Составляем математическую модель задачи, для этого вводим неизвестные $x_{ij}$, которым являются количество единиц товара, перевозимого от каждого поставщика к каждому потребителю.

$$\left.\begin{aligned} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}&=50\\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}&=40\\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}&=20 \end{aligned}\right\} \quad \text{Ограничения по поставкам.}$$

$$\left.\begin{aligned} x_{11}+x_{21}+x_{31}&=30\\ x_{12}+x_{22}+x_{32}&=25\\ x_{13}+x_{23}+x_{33}&=35\\ x_{14}+x_{24}+x_{34}&=20 \end{aligned}\right\}$$ Ограничение по потребителям

$x_{ij} \geq 0 (i=\overline{1,3}),(j=\overline{1,4})$ Ограничения по здоровому смыслу.

Цель задачи (стоимость всей перевозки) в математической форме

$$z(x)=3x_{11}+2x_{12}+4x_{13}+6x_{14}+2x_{21}+x_{23}+2x_{24}+3x_{31}+2x_{31}+7x_{33}+4x_{34}\rightarrow \min$$

Проверяем задачу на разрешимость, то есть $\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j$, где $\sum_{i=1}^{3} a_i = 50+40+20=110, \sum_{j=1}^{4} b_j = 30+25+35+20=110.$

Условимся:

1. Построение опорных решений системы, а также преобразования этих решений будут производиться в таблицах.

2. Если базисное неизвестное $x_{ij}=a$, то это число записывается в соответствующей клетке (*i,j*), и эту клетку будем называть загруженной, если же переменная не базисная, то $x_{ij}=0$ и соответствующую клетку оставляем свободной.

**III этап.** Составляем первоначально - исходный план Его можно составлять разными способами.

<u>1 способ</u>. Метол северо-западного угла. Этот метод заключается в том, что заполнение таблицы 2 начинают с левого верхнего угла, двигаясь далее по строке вправо или по столбцу вниз. Занесем в клетку (1,1) меньшее из чисел $a_1$ и $b_1$, т.е, $x_{11}$=min(50.30)=30, так как запасы поставщика $A_1(50)$ превышают потребности потребителя $B_1$(30). И в клетку (1,1) записали 30, тем самым полностью удовлетворили потребности $B_{11}$ запасы 4 уменьшаем на 30 единиц груза. Так как потребности $B_2$, равны 25 единицам, то в клетку (1,2) запишем число 20 = min(25. 20) и первую строку исключим из рассмотрения. Затем загружаем клетку (2.2) величиной $x_{22}$= min *(5.* 40) = *5,* далее второй столбец закрываем, и загружаем клетку (2,3), даем $x_{23}$= 35. Закрываем второй столбец,

но одновременно надо исключить вторую строку, но этого делать нельзя, поэтому в соседнюю клетку (2.4) запишем нулевую поставку $x_{24}$ =0. и будем считать клетку загруженной. Далее загружаем клетку (3,4), запишем min(20, 20) = 20. Таким образом, исчерпаны все запасы и удовлетворены все потребности. Итак, начальный план имеет вид:

$$x_{11} = 30; x_{12} = 20; x_{22} = 5; x_{23} = 35; x_{24} = 0; x_{34} = 20.$$

Для того, чтобы задача имела решение нужно, чтобы любой план или программа перевозок удовлетворяла 2-м условиям разрешимости:

1) условие - число загруженных клеток должно быть равно ($m$+$n$-1), где $m$ - число поставщиков, а $n$ - число потребителей.

2) условие - загруженные клетки не должны образовывать замкнутого цикла.

Метод северо-западного угла гарантирует выполнение этих двух условий разрешимости.

Ш этап завершается подсчетом стоимости 1$^{\text{го}}$ плана перевозок:

$$Z1 = 3\cdot 30 + 2\cdot 20 + 3\cdot 5 + 1\cdot 35 + 2\cdot 0 + 4\cdot 20 = 260.$$

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 3<br>30 | 2<br>20 | 4 | 6 | 50 |
| $A_2$ | 2 | 3<br>5 | 1<br>35 | 2<br>0 | 40 |
| $A_3$ | 3 | 2 | 7 | 4<br>20 | 20 |
| $b_j$ | 30 | 25 | 35 | 20 | 110 |

$m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$-число загруженных клеток.

2 способ. Метод “минимального элемента, В отличие от метода северо-западного угла, метод “минимального элемента” учитывает величины затрат $C_{ij}$, позволяет найти опорный план транспортной задачи. при котором общая стоимость перевозок груза меньше, чем стоимость перевозок при плане северо-западного угла.

Заполнение таблицы начинается с клетки, имеющей минимальную стоимость перевозок (минимальный тариф). Если таких клеток более одной, то выбирается первая по порядку. В клетку *(i.j)* с наименьшим тарифом помещают наименьшее из чисел $a_i$ или $b_j$ Затем из рассмотрения исключают строку, соответствующую поставщику, запасы которого полностью израсходованы, или столбец, соответствующий потребителю, спрос которого полностью удовлетворен. Далее из оставшихся клеток таблицы снова выбирают клетку с наименьшим тарифом, и процесс распределения запасов продолжают до тех пор, пока все они не будут распределены, а спрос удовлетворен. В завершении проверяем число загруженных клеток: $m+n-1=3+4-1=6$ (см. табл.4). Если же число загруженных клеток будет меньше, то следует загрузить нулем клетку с наименьшим тарифом, но такую, чтобы она не образовывала замкнутого цикла.

Посмотрим на нашем примере.

Табл. 4

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 3<br>25 + | 2<br>25 | 4 | 6 | 50 |
| $A_2$ | 2<br>5 - | 3 | 1<br>35 | 2<br>+ | 40 |
| $A_3$ | 3 | 2<br>+ | 7 | 4<br>20 - | 20 |
| $b_j$ | 30 | 25 | 35 | 20 | 110 |

Вначале заполняем клетку (2,3) с тарифом $C_{23}=1$, min(35.40) = 35; затем клетку (1,2): $x_{12}$=min(25.50)=25 ,и т.д.

$$Z_1 = 3\cdot 25+2\cdot 25+2\cdot 5+1\cdot 35+2\cdot 0+4\cdot 20=250.$$

Метод потенциалов.

Переходим теперь к процессу последовательного улучшения исходного плана до оптимального методом потенциалов, сущность которого состоит в следующем.

**IV этап.** Дадим оценку исходному опорному плану.

I шаг. После того, как найдем исходный опорный план перевозок, каждому поставщику $A_i(i=\overline{1,m})$ ставим в соответствие некоторое число $U_i=(i=\overline{1,m})$

называемое потенциалом поставщика $A_i$, а каждому потребителю $B_j(j=\overline{1,n})$ - некоторое число $V_j(j=\overline{1,n})$ называемое потенциалом потребителя $B_j$.

Числа $U_i$ и $V_j$ выбираются так, чтобы в любой загруженной клетке сумма их равнялась тарифу этой клетки, т.е. $U_i+V_j=C_{ij}$. Так как количество всех чисел $U_i$ и $V_j$ составляет ($m$+$n$), а занятых клеток $(m+n-1)$, то для определения чисел $U_i$ и $V_j$ придется решать систему из $(m+n-1)$ уравнений $U_i+V_j=C_{ij}$ с ($m$+$n$) неизвестными. Одному из неизвестных нужно придать произвольное значение и определить остальные.

Покажем 1 шаг на примере таблицы 4.

$U_1+V_1=3;$ $\quad U_1+V_2=2;$ $\quad U_2+V_1=2;$

$U_3+V_2=2;$ $\quad U_3+V_4=4;$ $\quad U_2+V_3=1;$

Полагая $U_1=0$, находим остальные потенциалы: $V_1=3$; $V_2=2$; $U_2=-1$; $V_3=2$; $U_3=0$; $V_4=4$.

<u>2 шаг</u>. Далее для оценки плана просматриваются свободные клетки, для которых определяются косвенные тарифы $C'_{ij}$, где $C'_{ij}=U_i+V_j$, т.е. в нашей задаче

$$C'_{13}=U_1+V_3=0+2=0; \qquad C'_{22}=U_2+V_2=-1+2=1;$$

$$C'_{24}=U_2+V_4=-1+4=3; \qquad C'_{31}=U_3+V_1=0+3=3;$$

$$C'_{33}=U_3+V_3=0+2=2; \qquad C'_{14}=U_1+V_4=0+4=4;$$

<u>3 шаг.</u> Для каждой свободной клетки вычисляется оценка - разность между тарифом клетки и ее косвенным тарифом $\Delta_{ij}=C_{ij}-C'_{ij}$. План оптимален тогда, когда по каждой свободной клетке эта оценка неотрицательна.

$$\Delta_{13}=C_{13}-C'_{13}=4-2=2; \qquad \Delta_{14}=C_{14}-C'_{14}=6-4=2;$$

$$\Delta_{22}=C_{22}-C'_{22}=3-1=2; \qquad \Delta_{24}=C_{24}-C'_{24}=2-3=-1;$$

$$\Delta_{31}=C_{31}-C'_{31}=3-3=0; \qquad \Delta_{33}=C_{33}-C'_{33}=7-2=5.$$

Полученный план перевозок (в таблице 4) не является оптимальным, так как среди оценок $\Delta_{ij}$ имеется отрицательная оценка $\Delta_{24} = -1$.

**V этап.** Построение нового плана. Если есть хотя бы одна отрицательная оценка, то план надо улучшить, а делается это следующим образом. Загружают ту клетку. у которой оценка отрицательная. Если будет несколько отрицательных оценок, то выбирают клетку для загрузки, у которой отрицательная оценка наибольшая по абсолютной величине. Для наиболее перспективной клетки строится замкнутый цикл, то есть замкнутый путь, соединяющий выбранную незаполненную клетку с ней же самой и проходящий через заполненные клетки. Для каждой свободной клетки существует только один цикл.

В нашем примере $\Delta_{24} = -1$, следовательно, в качестве свободной клетки берем клетку (2,4) и строим замкнутый цикл, который будет включать клетки: (2,4), (2,1), (1,1), (1,2), (3,2), (3,4), (2,4) (см. табл. 4). В каждой клетке цикла, начиная со свободной, проставляем поочередно знаки «+» и «-». В клетках со знаком **«-»** (они еще называются четные клетки) выбирают наименьший груз, который "перемещается" по клеткам замкнутого цикла, т.е. прибавляется поставкам $\tilde{o}_{ij}$ в клетках со знакам плюс (включая свободную) и вычитается в клетках со знаком минус. В результате такого перемещения груза по циклу получим новый план перевозок. Новый план переносят в другую таблицу, и затем дают ему оценку. Процесс продолжается до тех пор пока не получим все положительные оценки (можно и 0). По таблице 4 находим $\theta = \min(5,\ 25{,}20)$ =5. Перемещаем *5* единиц по циклу, тем самым строим новый план:

Табл. 5

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 3<br>30 | 2<br>20 | 4 | 6 | 50 |
| $A_2$ | 2 | 3 | 1<br>35 | 2<br>5 | 40 |
| $A_3$ | 3 | 2<br>5 | 7 | 4<br>15 | 20 |
| $b_j$ | 30 | 25 | 35 | 20 | 110 |

$$Z_2 = 3\cdot 30 + 2\cdot 20 + 2\cdot 5 + 1\cdot 35 + 2\cdot 5 + 4\cdot 15 = 245.$$

Полученный план не вырожденный, так как число занятых клеток $(m+n-1)=6$, оценим этот план. Аналогично предыдущему рассуждению

Определяем потенциалы: $U_1 = 0, U_2 = -2, U_3 = 0$

$$V_1 = 3, V_2 = 2, V_3 = 3, V_4 = 4.$$

Определяем косвенные тарифы

$C'_{13} = 0+3 = 3; C'_{14} = 0+4 = 4; C'_{21} = -2+3 = 1;$

$C'_{22} = -2+3 = 0; C'_{31} = 0+3 = 3; C'_{33} = 0+3 = 3.$

Находим оценки для свободных клеток:

$\Delta_{13} = 4-3 = 1; \Delta_{14} = 6-4 = 2; \Delta_{21} = 2-1 = 1;$

$\Delta_{22} = 3-0 = 3; \Delta_{31} = 3-3 = 0; \Delta_{33} = 7-3 = 4.$

Полученный план перевозок является оптимальным, т.к в нем нет ни одной отрицательной оценки.

Оптимальный план можно представить в виде

$X_{опт} = \begin{Bmatrix} 30 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 35 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & 15 \end{Bmatrix}$ транспортные расходы по этому плану составляют

$z_{\min} = z_2 = 245$ - условных единиц.

## 2.5. Двойственность в линейном программировании

Каждой задаче линейного программирования может быть поставлена в соответствие другая вполне определенная задача линейного программирования, такая, что при решении одной из них одновременно решается и другая. Эти задачи были названы *парой взаимодвойственных задач.*

| Исходная задача | Двойственная задача |
| --- | --- |
| $f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \rightarrow \max$; | $\varphi = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \rightarrow \min$; |

| | |
|---|---|
| $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le b_k, \\ a_{k+1}x_1 + a_{k+1}x_2 + \ldots + a_{k+1}x_n = b_{k+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,l},\ l \le n \end{cases}$ | $\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \ge c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \ge c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1l}y_1 + a_{2l}y_2 + \ldots + a_{ml}y_m \ge c_l, \\ a_{1l+1}y_1 + a_{2l+1}y_2 + \ldots + a_{ml+1}y_m = c_{l+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m = c_m, \\ y_i \ge 0, \quad i = \overline{1,k},\ k \le m \end{cases}$ |

### 2.5.1. Правила построения двойственной пары

1. Целевая функция исходной задачи задается на максимум, а целевая функция двойственной – на минимум.
2. Коэффициенты при переменных в системах ограничений описываются матрицами, которые являются транспонированными относительно друг друга.
3. Число переменных в двойственной задаче равно числу соотношений в системе ограничений исходной задачи. Число ограничений в системе двойственной задачи равно числу переменных в исходной задаче.
4. Коэффициенты при переменных в целевой функции одной задачи являются свободными членами системы ограничений другой задачи и наоборот.
5. Если на *j* переменную исходной задачи наложено условие неотрицательности $x_j \ge 0$, то *j*-тое ограничение двойственной задачи является неравенством. Если $x_j$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения, то *j*-тое соотношение в системе ограничений двойственной задачи – уравнение.

Аналогично связаны ограничения исходной задачи и переменные двойственной. Если *i*-тое соотношение в системе исходной задачи является неравенством, то *i*-тая переменная двойственной задачи $y_i \ge 0$. В противном случае $y_i$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

### 2.5.2. Основные теоремы двойственности

| | |
|---|---|
| *Теорема 1* | Если одна из двойственных задач имеет оптимальный план, то и другая также имеет оптимальный план, причем значения целевых функций $f$ и $\varphi$ на этих планах равны, т. е. $f(X^*) = \varphi(Y^*)$. |

| | |
|---|---|
| *Теорема 2* | Если при подстановке компонент оптимального плана в систему |

| | |
|---|---|
| | ограничений исходной задачи $i$-тое ограничение обращается в неравенство, то $i$-тая компонента оптимального плана двойственной задачи равна нулю.<br>Если $i$-тая компонента оптимального плана двойственной задачи положительна, то $i$-тое ограничение исходной задачи удовлетворяется ее оптимальным решением как строгое равенство. |

***Примечание.*** Геометрическая интерпретация двойственных задач.

При решении двойственных задач возможны три случая:

- обе задачи разрешимы;
- области допустимых решений обеих задач пусты;
- одна задача имеет неограниченную область допустимых решений, вторая – пустую.

***Пример 2.*** Для данной задачи составить двойственную, решить ее графическим методом, и, используя теоремы двойственности, найти решение данной задачи.

$$f = -x_1 - 7x_2 - 8x_3 + x_4 + 4x_5 \;\rightarrow\; \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 1, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 4, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

***Решение.***

1. Составим матрицу из коэффициентов при неизвестных, свободных членах и коэффициентах целевой функции (f).
2. Транспонируем полученную матрицу (т. е. заменяем строки на столбцы).
3. По транспонированной матрице составляем двойственную систему ограничений и целевую функцию (φ)

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & -2 & 4 \\ \hline -1 & -7 & -8 & 1 & 4 & f \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -7 \\ -1 & 2 & -8 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \\ \hline 1 & 4 & \varphi \end{array}\right);$$

$$\varphi = y_1 + 4y_2 \;\rightarrow\; \min;$$

$$\begin{cases} y_1 - y_2 \ge -1, (1) \\ y_1 + y_2 \ge -7, (2) \\ -y_1 + 2y_2 \ge -8, (3) \\ -y_1 - y_2 \ge 1, (4) \\ -y_1 - 2y_2 \ge 4. (5) \end{cases}$$

Функция $\varphi$ минимизируется, так как целевая функция исходной задачи максимизируется.

Поскольку на переменные исходной задачи наложены условия неотрицательности $x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,5})$, то соотношения (1) – (5) в системе ограничений двойственной задачи являются неравенствами. Переменные $y_1$, $y_2$ не должны удовлетворять условию неотрицательности, т.к. они соответствуют ограничениям- неравенствам исходной задачи.

Решим полученную задачу графическим методом. На рис. 2 изображены: область допустимых решений задачи, $\overrightarrow{grad}\,\varphi = \vec{i} + 4\vec{j}$, линии уровня и оптимальное решение задачи, Y* = (-2; -5) и φ(Y*) = -22.

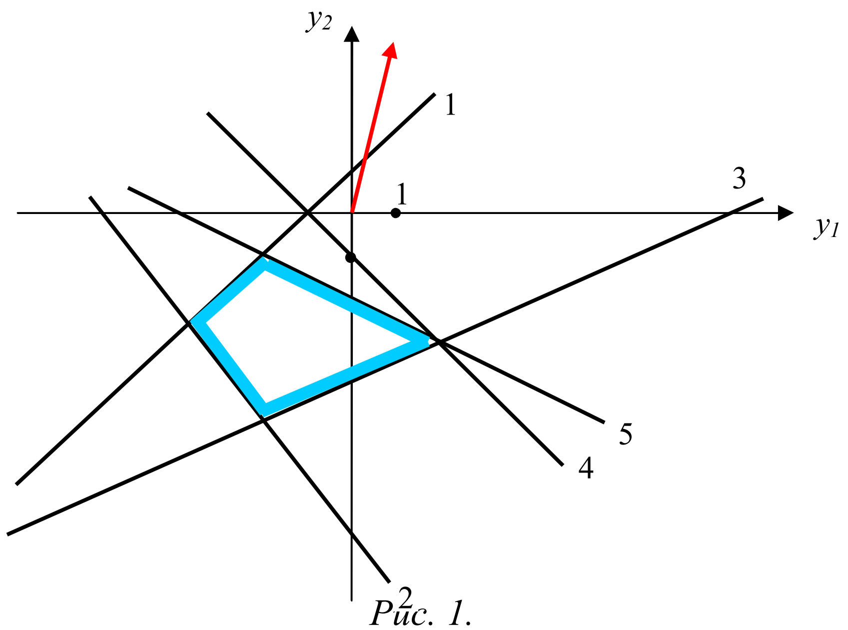



*Рис. 1.*

По первой теореме двойственности

$$f(X^*) = \varphi(Y^*) = -22.$$

Подставим оптимальное решение Y* = (-2; -5) в систему ограничений. Получим ограничения

$$\begin{cases} -2 + 5 = 3, \quad 3 > -1 \quad \Rightarrow \quad x_1^* = 0, \\ -2 - 5 = -7, \\ 2 - 10 = -8, \\ 2 + 5 = 7, \quad 7 > 1 \quad \Rightarrow \quad x_4^* = 0, \\ 2 + 10 = 12, \quad 12 > 4 \quad \Rightarrow \quad x_5^* = 0. \end{cases}$$

1, 4, 5 выполняются как строгие неравенства. Согласно второй теореме двойственности соответствующие компоненты оптимального плана двойственной задачи, т.е. исходной задачи, равны нулю: $x_1^* = x_4^* = x_5^* = 0$. Учитывая это, из системы ограничений исходной задачи найдем ее оптимальное решение:

$$-\begin{cases} x_2^* - x_3^* = 1, \\ x_2^* + 2x_3^* = 4, \end{cases}$$

$$\overline{\qquad -3x_3^* = -3, \qquad}$$

$$x_3^* = 1.$$

$$\begin{cases} x_1^* = 0, \\ x_2^* = 2, \\ x_3^* = 1, \\ x_4^* = 0, \\ x_5^* = 0. \end{cases}$$

X* = (0; 2; 1; 0; 0).

***Ответ:*** $f_{\max} = -22$ при X* = (0; 2; 1; 0; 0).

# 3. МАТРИЧНЫЕ ИГРЫ

## 3.1. Введение

***Теория игр*** – это раздел математики, в котором исследуются математические модели принятия решения в условиях конфликта, т.е. в условиях столкновения сторон, каждая из которых стремится воздействовать на развитие конфликта в своих собственных интересах. Она находит широкое применение в различных областях человеческой деятельности, таких как экономика и менеджмент, промышленность и сельское хозяйство, военное дело, торговля, транспорт, связь и т.д.

Теорию математических моделей принятия оптимальных решений принято называть ***исследованием операций***, поэтому теорию игр можно рассматривать как составную часть исследования операций.

Задачи исследования операций можно классифицировать по уровню информации о ситуации, которой располагает субъект, принимающий решение. Наиболее простыми уровнями информации о ситуации являются ***детерминированный*** – условия, в которых принимаются решения, известны полностью и ***стохастический*** - известно множество возможных вариантов условий и их вероятностное распределение. В этих случаях задача сводится к нахождению экстремума функции при заданных ограничениях. Методы решения таких задач изучаются в курсах математического программирования или методов оптимизации.

Наконец, третий уровень – ***неопределенный***, когда известно множество возможных вариантов, но без какой-либо информации об их вероятностях. Это самый сложный уровень информации о ситуации, т.к. могут быть неясны сами принципы оптимального поведения. Теория игр – это теория математических моделей принятия решения в условиях неопределенности, когда принимающий решение субъект («игрок») располагает информацией лишь о множестве возможных ситуаций, в одной из которых он в действительности находится, о множестве решений («стратегий»), которые он может принять, и о количественной мере того «выигрыша», который он мог бы получить, выбрав в данной ситуации данную стратегию.

Неопределенность, имеющая место в теории игр, может иметь различное происхождение. Однако, как правило, она является следствием сознательной деятельности другого лица, отстаивающего свои интересы.

Поэтому под теорией игр часто понимают теорию математических моделей принятия оптимальных решений в условиях конфликта. Таким образом, моделями теории игр можно содержательно описывать весьма разнообразные явления: экономические, правовые и классовые конфликты, взаимодействие человека с природой, биологическую борьбу за существование и т.д. Все такие модели в теории игр принято называть играми.

Математическое описание игры сводится к перечислению всех действующих в ней игроков, указанию для каждого игрока всех его стратегий, а также численного выигрыша, который он получит после того, как игроки выберут свои стратегии. В результате игра становится формальным объектом, который поддается математическому анализу.

***Классификацию игр*** можно проводить: по количеству игроков, количеству стратегий, характеру взаимодействия игроков, характеру выигрыша, количеству ходов, состоянию информации и т.д.

В зависимости от количества игроков различают игры двух и $n$ игроков. Первые из них наиболее изучены. Игры трёх и более игроков менее исследованы из-за возникающих принципиальных трудностей и технических возможностей получения решения. Чем больше игроков - тем больше проблем.

По количеству стратегий игры делятся на конечные и бесконечные. Если в игре все игроки имеют конечное число возможных стратегий, то она называется *конечной.* Если же хотя бы один из игроков имеет бесконечное количество возможных стратегий игра называется *бесконечной.*

По характеру взаимодействия игры делятся на:

- *Бескоалиционные* – игроки не имеют права вступать в соглашения, образовывать коалиции;
- *Коалиционные (кооперативные)* – игроки могут вступать в коалиции.

В кооперативных играх коалиции определены наперёд.

По характеру выигрышей игры делятся на: игры *с нулевой суммой* (общий капитал всех игроков не меняется, а перераспределяется между игроками; сумма выигрышей всех игроков равна нулю) и игры с *ненулевой суммой*.

По виду функций выигрыша игры делятся на: матричные, биматричные, непрерывные, выпуклые, сепарабельные, типа дуэлей и др.

*Матричная* игра – это конечная игра двух игроков с нулевой суммой, в которой задаётся выигрыш игрока 1 в виде матрицы, (строка матрицы соответствует номеру применяемой стратегии игрока 1, столбец – номеру применяемой стратегии игрока 2; на пересечении строки и столбца матрицы находится выигрыш игрока 1, соответствующий применяемым стратегиям).

Для матричных игр доказано, что любая из них имеет решение и оно может быть легко найдено путём сведения игры к задаче линейного программирования.

*Биматричная* игра – это конечная игра двух игроков с ненулевой суммой. В ней выигрыши каждого игрока задаются матрицами отдельно для соответствующего игрока (в каждой матрице строка соответствует стратегии игрока 1, столбец – стратегии игрока 2, на пересечении строки и столбца в первой матрице находится выигрыш игрока 1, во второй матрице – выигрыш игрока 2.)

Для биматричных игр также разработана теория оптимального поведения игроков, однако решать такие игры сложнее, чем обычные матричные.

*Непрерывной* считается игра, в которой функция выигрышей каждого игрока является непрерывной в зависимости от стратегий. Доказано, что игры этого класса имеют решения, однако не разработано практически приемлемых методов их нахождения.

Если функция выигрышей является выпуклой, то такая игра называется *выпуклой.* Для них разработаны приемлемые методы решения, состоящие в отыскании чистой оптимальной стратегии (определённого числа) для одного игрока и вероятностей применения чистых оптимальных стратегий другого игрока. Такая задача решается сравнительно легко.

Изучение теории игр рассмотрим с простейшей статической модели – *матричной игры*, в которой участвуют два игрока, множество стратегий каждого из игроков конечно, а выигрыш одного игрока равен проигрышу другого.

### 3.2. Решение матричных игр в чистых стратегиях

Матричная игра двух игроков с нулевой суммой может рассматриваться как следующая абстрактная игра двух игроков. Первый игрок имеет $m$ стратегий ($i = 1,2,...,m$), второй имеет $n$ стратегий ($j = 1,2,...,n$). Каждой паре стратегий $(i,j)$ поставлено в соответствие число $a_{ij}$, выражающее выигрыш игрока 1 за счёт игрока 2, если первый игрок примет свою $i$-ю стратегию, а 2 – свою $j$-ю стратегию.

Каждый из игроков делает один ход: игрок 1 выбирает свою $i$-ю стратегию ($i=\overline{1,m}$), 2 – свою $j$-ю стратегию ($j=\overline{1,n}$), после чего игрок 1 получает выигрыш $a_{ij}$ за счёт игрока 2 (если $a_{ij} < 0$, то это значит, что игрок 1 платит второму сумму $|a_{ij}|$). На этом игра заканчивается.

Каждая стратегия игрока $i=\overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$ часто называется *чистой стратегией.*

Если рассмотреть матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

то проведение каждой партии матричной игры с матрицей $A$ сводится к выбору игроком 1 $i$-й строки, а игроком 2 $j$-го столбца и получения игроком 1 (за счёт игрока 2) выигрыша $a_{ij}$.

Главным в исследовании игр является понятие оптимальных стратегий игроков. В это понятие интуитивно вкладывается такой смысл: стратегия игрока является оптимальной, если применение этой стратегии обеспечивает ему наибольший гарантированный выигрыш при всевозможных стратегиях другого игрока. Исходя из этих позиций, игрок 1 исследует матрицу выигрышей $A$ следующим образом: для каждого значения $i$ определяется минимальное значение выигрыша в зависимости от применяемых стратегий игрока 2

$$\min_j a_{ij},\ i = \overline{1, m},$$

т.е. определяется минимальный выигрыш для игрока 1 при условии, что он примет свою $i$-ю чистую стратегию, затем из этих минимальных выигрышей отыскивается такая стратегия $i = i_o$, при которой этот минимальный выигрыш будет максимальным, т.е. находится

$$\max_i \min_j a_{ij} = a_{i0\,j0} = \underline{\alpha}. \qquad (1)$$

Число $\underline{\alpha}$, определённое по формуле (1) называется ***нижней чистой ценой игры*** и показывает, какой минимальный выигрыш может гарантировать себе игрок 1, применяя свои чистые стратегии при всевозможных действиях игрока 2.

Игрок 2 при оптимальном своём поведении должен стремится по возможности за счёт своих стратегий максимально уменьшить выигрыш игрока 1. Поэтому для игрока 2 отыскивается $\max_i a_{ij}$, $\mathrm{j} = \overline{1, n}$ т.е. определяется *max* выигрыш игрока 1, при условии, что игрок 2 применит свою $j$-ю чистую стратегию, затем игрок 2 отыскивает такую свою $j = j_1$ стратегию, при которой игрок 1 получит *min* выигрыш, т.е. находит

$$\min_j \max_i a_{ij} = a_{i1\,j1} = \overline{\alpha}. \qquad (2)$$

Число $\overline{\alpha}$, определяемое по формуле (2), называется ***чистой верхней ценой игры*** и показывает, какой максимальный выигрыш за счёт своих стратегий может себе гарантировать игрок 1.

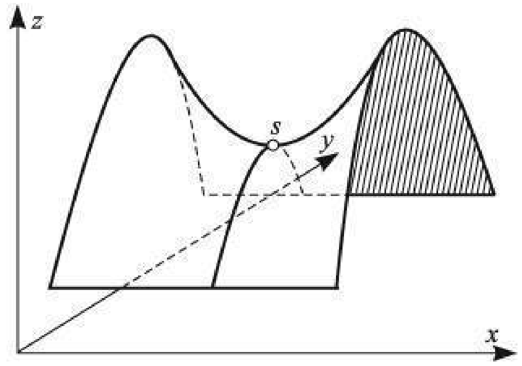
Другими словами, применяя свои чистые стратегии игрок 1 может обеспечить себе выигрыш не меньше $\underline{\alpha}$, а игрок 2 за счёт применения своих чистых стратегий может не допустить выигрыш игрока 1 больше, чем $\overline{\alpha}$.

Если в игре с матрицей $A$ $\underline{\alpha} = \overline{\alpha}$, то говорят, что эта игра имеет ***седловую точку*** в чистых стратегиях и ***чистую цену*** игры $\nu = \underline{\alpha} = \overline{\alpha}$.

***Седловая точка*** – это пара чистых стратегий $(i_o, j_o)$ соответственно игроков 1 и 2, при которых достигается равенство $\underline{\alpha} = \overline{\alpha}$. В это понятие вложен следующий смысл: если один из игроков придерживается стратегии, соответствующей седловой точке, то другой игрок не сможет поступить лучше, чем придерживаться стратегии, соответствующей седловой точке. Математически это можно записать и иначе:

$$a_{ij_o} \le a_{i_o j_o} \le a_{i_o j} \qquad (3)$$

где $i$, $j$ – любые чистые стратегии соответственно игроков 1 и 2; $(i_o, j_o)$ – стратегии, образующие седловую точку.




Таким образом, исходя из (3), седловой элемент $\alpha_{i_o j_o}$ является минимальным в $i_o$-й строке и максимальным в $j_o$-м столбце в матрице $A$. Отыскание седловой точки матрицы $A$ происходит следующим образом: в матрице $A$ последовательно в каждой <u>*строке*</u> находят минимальный элемент и проверяют, является ли этот элемент максимальным в своём <u>*столбце*</u>. Если да, то он и есть седловой элемент, а пара стратегий, ему соответствующая, образует седловую точку. Пара чистых стратегий $(i_o, j_o)$ игроков 1 и 2, образующая седловую точку и седловой элемент $a_{i_o j_o}$, называется ***решением игры***. При этом $i_o$ и $j_o$ называются ***оптимальными чистыми стратегиями*** соответственно игроков 1 и 2.

***Пример 1***

$$
\begin{array}{rccl}
 & & \min\limits_j a_{ij} & \\
 & & \| & \\
A = & \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} & \left.\begin{matrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}\right\} & \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = 2 \\
\max\limits_i a_{ij} = & \underbrace{\begin{matrix} 2 & 5 & 4 \end{matrix}}_{\min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = 2} & &
\end{array}
$$

Седловой точкой является пара ($i_o = 3$; $j_o = 1$), при которой $\nu = \underline{\alpha} = \overline{\alpha} = 2$.

Заметим, что хотя выигрыш в ситуации (3;3) также равен $2 = \underline{\alpha} = \overline{\alpha}$, она не является седловой точкой, т.к. этот выигрыш не является максимальным среди выигрышей третьего столбца.

***Пример 2***

$$
\begin{array}{rcccl}
 & & \min\limits_j a_{ij} & & \\
H = & \begin{pmatrix} 10 & 30 \\ 40 & 20 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \rightarrow \\ \rightarrow \end{matrix} & \left.\begin{matrix} 10 \\ 20 \end{matrix}\right\} & \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = 20 \\
\max\limits_i a_{ij} & \begin{matrix} \downarrow & \downarrow \end{matrix} & & & \\
 & \underbrace{\begin{matrix} 40 & 30 \end{matrix}}_{\min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = 30} & & &
\end{array}
$$

Из анализа матрицы выигрышей видно, что $\underline{\alpha} < \overline{\alpha}$, т.е. данная матрица не имеет седловой точки. Если игрок 1 выбирает свою чистую максиминную стратегию $i = 2$, то игрок 2, выбрав свою минимаксную $j = 2$, проиграет только 20. В этом случае игроку 1 выгодно выбрать стратегию $i = 1$, т.е. отклониться от своей чистой максиминной стратегии и выиграть 30. Тогда игроку 2 будет выгодно выбрать стратегию $j = 1$, т.е. отклониться от своей чистой минимаксной стратегии и проиграть 10. В свою очередь игрок 1 должен выбрать свою 2-ю стратегию, чтобы выиграть 40, а игрок 2 ответит выбором 2-й стратегии и т.д.

### 3.3. Смешаное расширение матричной игры

Исследование в матричных играх начинается с нахождения её седловой точки в чистых стратегиях. Если матричная игра имеет седловую точку в чистых стратегиях, то нахождением этой седловой точки заканчивается исследование игры. Если же в игре нет седловой точки в чистых стратегиях, то можно найти нижнюю и верхнюю чистые цены этой игры, которые указывают, что игрок 1 не должен надеяться на выигрыш больший, чем верхняя цена игры, и может быть уверен в получении выигрыша не меньше нижней цены игры. *Улучшение решений матричных игр следует искать в использовании секретности применения чистых стратегий и возможности многократного повторения игр в виде партии.* Этот результат достигается путём применения чистых стратегий случайно, с определённой вероятностью.

***Смешанной стратегией игрока*** называется полный набор вероятностей применения его чистых стратегий.

Таким образом, если игрок 1 имеет $m$ чистых стратегий $1,2,\ldots,m$, то его смешанная стратегия $X$ – это набор чисел $p = (p_1, \ldots, p_m)$ удовлетворяющих соотношениям

$$p_i \geq 0, \quad i = \overline{1,m}, \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1.$$

Аналогично для игрока 2, который имеет $n$ чистых стратегий, смешанная стратегия $Y$ – это набор чисел

$$q = (q_1 \ldots, q_n), \quad q_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}, \quad \sum_{j=1}^{n} q_j = 1.$$

Так как каждый раз применение игроком одной чистой стратегии исключает применение другой, то чистые стратегии являются несовместными событиями. Кроме того, они являются единственно возможными событиями.

Чистая стратегия есть частный случай смешанной стратегии. Действительно, если в смешанной стратегии какая-либо $i$-я чистая стратегия применяется с вероятностью 1, то все остальные чистые стратегии не применяются. И эта $i$-я чистая стратегия является частным случаем смешанной стратегии. Для соблюдения секретности каждый игрок применяет свои стратегии независимо от выбора другого игрока.

***Средний выигрыш*** игрока 1 в матричной игре с матрицей $A$ выражается в виде математического ожидания его выигрышей

$$E\,(A,\,p,\,q)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\;p_i\;q_j=\begin{pmatrix}p_1\\ \vdots\\ p_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & q_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_1; & \cdots; & q_n\end{pmatrix}=p\,A\,q^T$$

Первый игрок имеет целью за счёт изменения своих смешанных стратегий $X$ максимально увеличить свой средний выигрыш $E\,(A,\,p,\,q)$, а второй – за счёт своих смешанных стратегий Y стремится сделать $E\,(A,\,p,\,q)$ минимальным. Таким образом для решения игры необходимо найти такие $p$ и $q$, при которых достигается верхняя цена игры $\overline{\alpha}=\min\limits_{y}\max\limits_{x}\;E\,(A,\,p,\,q)$.

Аналогичной должна быть ситуация и для игрока 2, т.е. нижняя цена игры должна быть

$$\underline{\alpha}=\max_{x}\min_{y}\;E\,(A,\,p,\,q).$$

Подобно играм, имеющим седловые точки в чистых стратегиях, вводится следующее определение: ***оптимальными смешанными стратегиями*** игроков 1 и 2 называются такие наборы $p^o$, $q^o$ соответственно, которые удовлетворяют равенству

$$\min_{y}\max_{x}\;E\,(A,\,p,\,q)=\max_{x}\min_{y}\;E\,(A,\,p,\,q)=E\,(A,\,p^o,\,q^o).$$

Величина $E\,(A,\,p^o,q^o)$ называется при этом *ценой игры* и обозначается через $\nu$

Имеется и другое определение оптимальных смешанных стратегий: $p^o$, $q^o$ называются оптимальными смешанными стратегиями соответственно игроков 1 и 2, если они образуют седловую точку:

$$E\,(A,\,p,\,q^o)\le E\,(A,\,p^o,\,q^o)\le E\,(A,\,p^o,\,q)$$

Оптимальные смешанные стратегии и цена игры называются *решением матричной игры*.

***Теорема Неймана*:**

Каждая конечная игра имеет, по крайней мере, одно оптимальное решение, возможно среди смешанных стратегий.

*Активной* называется такая чистая стратегия, которая входит в оптимальную смешанную стратегию с отличной от нуля вероятностью.

***Теорема об активных стратегиях:***

Если один из игроков придерживается своей оптимальной смешанной стратегии, то выигрыш остается неизменным и равным цене игры ν, если второй игрок не выходит за пределы своих активных стратегий.

## 3.4. Игры порядка 2×2

В общем случае игра размера $2\times2$ определяется матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Прежде всего необходимо проверить, есть ли у данной игры седловая точка. Если да, то игра имеет решение в чистых стратегиях, причём оптимальными стратегиями игроков 1 и 2 соответственно будут чистая максиминная и чистая минимаксная стратегии. Если седловая точка отсутствует, то в соответствии с теоремой Неймана оптимальное решение определяется парой смешанных стратегий: $X^* = (p_1^*, p_2^*)$ и $Y^* = (q_1^*, q_2^*)$.

Для того, чтобы их найти воспользуемся теоремой об активных стратегиях. Если 1-й игрок придерживается своей оптимальной стратегии $X^*$, то его средний выигрыш будет равен цене игры ν, какой бы *активной* стратегией не пользовался 2-ой игрок. Для игры размера 2×2 любая из 2-х чистых стратегия противника является активной, если отсутствует седловая точка (при наличии седловой точки с вероятностью, равной единице, выбирается одна чистая стратегия, а вероятность использования второй стратегии равна нулю она, следовательно, не является активной). Выигрыш 1-го игрока (проигрыш 2-го) – это случайная величина математическое ожидание (среднее значение) которой является ценой игры ν.

Средний выигрыш 1-го игрока, если он использует оптимальную смешанную стратегию $X^*$, а 2-ой игрок – свою первую чистую стратегию, равен цене игры ν:

$$a_{11}p_1^* + a_{21}p_2^* = \nu$$

Тот же средний выигрыш получит 1-ый игрок, если 2-ой игрок применяет свою вторую чистую стратегию:

$$a_{12}p_1^* + a_{22}p_2^* = \nu$$

Учитывая, что сумма вероятностей применения чистых стратегий равна единице, получаем систему уравнений для определения оптимальной стратегии $X^*$ и цены игры ν:

$$\begin{cases} a_{11}p_1^* + a_{21}p_2^* = \nu \\ a_{12}p_1^* + a_{22}p_2^* = \nu \\ p_1^* + p_2^* = 1 \end{cases}$$

Решая её, находим

$$p_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}$$

$$p_2^* = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}$$

$$\nu = \frac{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}.$$

Аналогичные рассуждения приводят нас к тому, что оптимальная стратегия 2-го игрока $Y^*$ удовлетворяет системе уравнений:

$$\begin{cases} a_{11} q_1^* + a_{12} q_2^* = \nu \\ a_{21} q_1^* + a_{22} q_2^* = \nu \\ q_1^* + q_2^* = 1 \end{cases}$$

Решая её, находим

$$q_1^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}$$

$$q_2^* = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}$$

$$\nu = \frac{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}.$$

### 3.5. Графический метод решения игр $2 \times n$ и $m \times 2$

Поясним метод на примерах.

***Пример 3.***

Рассмотрим игру, заданную платёжной матрицей.
$$\begin{array}{cc} & 2 \\ & \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ 1 & \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

На плоскости $xOy$ введём систему координат и на оси $Ox$ отложим отрезок единичной длины $A_1$, $A_2$, каждой точке которого поставим в соответствие некоторую смешанную стратегию игрока 1 ($p_1$, $p_2$). В частности, точке $A_1$ (0;0) отвечает стратегия $A_1$, точке $A_2$ (1;0) – стратегия $A_2$ (рис.1).

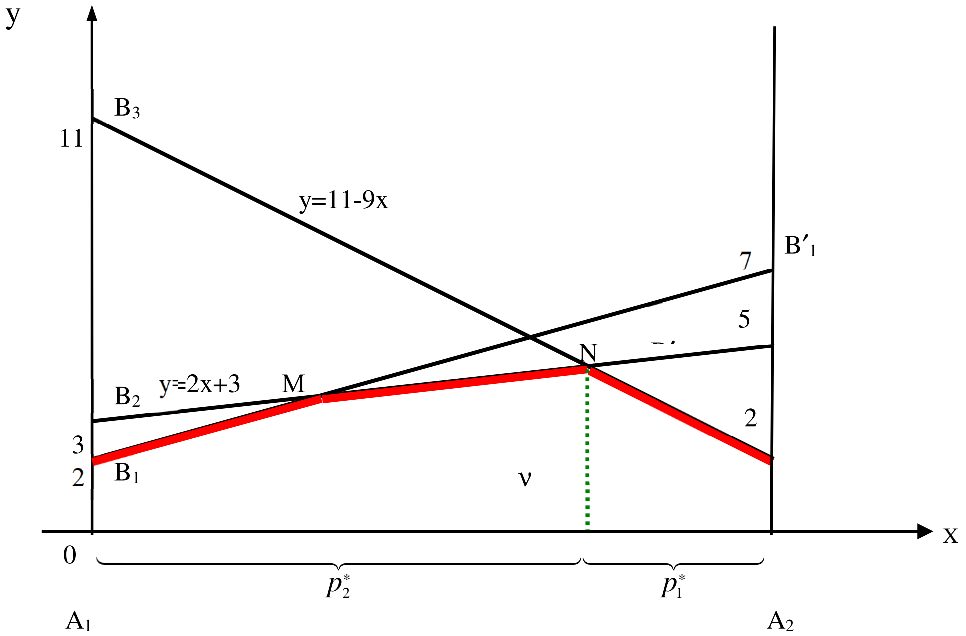



Рис.1. Нахождение оптимальной стратегии игрока 1

В точках $A_1$ и $A_2$ восстановим перпендикуляр и на полученных прямых будем откладывать выигрыш игроков. На первом перпендикуляре (в данном случае он совпадает с осью $0y$) отложим выигрыш игрока 1 при стратегии $A_1$, а на втором – при стратегии $A_2$. Если игрок 1 применит стратегию $A_1$, то выиграет при стратегии $B_1$ игрока 2 – 2, при стратегии $B_2$ – 3, а при стратегии $B_3$ – 11. Числам 2, 3, 11 на оси $0x$ соответствуют точки $B_1$, $B_2$ и $B_3$.

Если же игрок 1 применит стратегию $A_2$, то его выигрыш при стратегии $B_1$ равен 7, при $B_2$ – 5, а при $B_3$ – 2. Эти числа определяют точки $B'_1$, $B_2'$, $B_3'$ на перпендикуляре, восстановленном в точке $A_2$.Соединяя между собой точки $B_1$ и $B'_1$, $B_2$ и $B'_2$, $B_3$ и $B'_3$ получим три прямые, расстояние до которых от оси $0x$ определяет средний выигрыш при любом сочетании соответствующих стратегий.

Ординаты точек, принадлежащих ломанной $B_1MNB'_3$ определяют минимальный выигрыш игрока 1 при применении им любых смешанных стратегий. Эта минимальная величина является максимальной в точке $N$;

следовательно, этой точке соответствует оптимальная стратегия $X^* = (p_1^*, p_2^*)$, а её ордината равна цене игры ν. Координаты точки $N$ находим как точку пересечения прямых $B_2B'_2$ и $B_3B'_3$.

Уравнение прямой, проходящей через две точки с координатами ($x_1$, $y_1$) и ($x_2$, $y_2$): $$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Имеем прямую $B_2B'_2$. Ее координаты (0,3) и (1,5) и уравнение имеет вид: $\frac{x-0}{1-0}=\frac{y-3}{5-3}$, отсюда $\boldsymbol{y = 2x+3}$.

Координаты прямой $B_3B'_3$ – (0,11) и (1,2), ее уравнение: $\frac{x-0}{1-0}=\frac{y-11}{2-11}$, отсюда $\boldsymbol{y = 11\text{-}9x}$.

Решая совместно эти два уравнения, получим: $x=\frac{8}{11}$ $y=\frac{49}{11}$, т.е.

$$p_1=\frac{3}{11},\quad p_2=\frac{8}{11},\quad \nu=\frac{49}{11}$$

Следовательно $X^*=(\frac{3}{11};\frac{8}{11})$, при цене игры $\nu=\frac{49}{11}$.

Из рис.1 видно, что стратегия 1 игрока 2 не войдёт в его оптимальную стратегию (вероятность ее использования равна нулю).

Таким образом мы можем найти оптимальную стратегию при помощи матрицы размером 2×2: $\begin{pmatrix}3 & 11\\ 5 & 2\end{pmatrix}$.

С ней найдем оптимальную стратегию 2-го игрока (рис. 2).

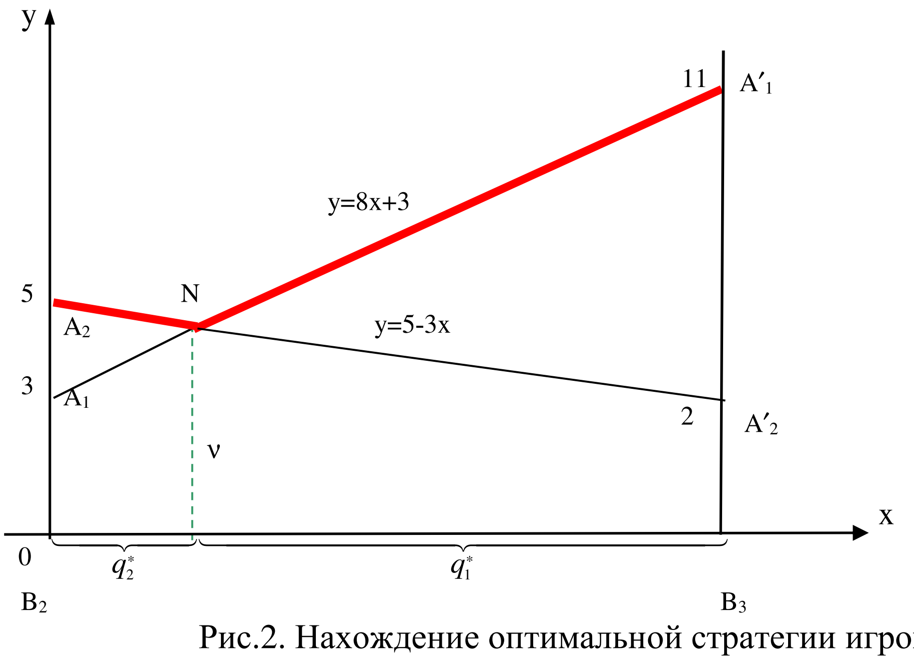



Рис.2. Нахождение оптимальной стратегии игрока 2

Ординаты точек, принадлежащих ломанной $A_2NA'_1$ определяют максимальный проигрыш игрока 2 при применении им любых смешанных стратегий. Эта максимальная величина является минимальной в точке $N$; следовательно, этой точке соответствует оптимальная стратегия $Y^* = (q_1^*, q_2^*)$, а её ордината равна цене игры $\nu$. Координаты точки $N$ находим как точку пересечения прямых $A_1A'_1$ и $A_2A'_2$.

Имеем прямую $A_1A'_1$. Ее координаты (0,3) и (1,11) и уравнение имеет вид:
$\frac{x-0}{1-0} = \frac{y-3}{11-3}$, отсюда $\boldsymbol{y = 8x+3}$.

Координаты прямой $A_2A'_2$ – (0, 5) и (1,2), ее уравнение:
$\frac{x-0}{1-0} = \frac{y-5}{2-5}$, отсюда $\boldsymbol{y = 5-3x}$.

Решая совместно эти два уравнения, получим: $x = \frac{2}{11}$ $y = \frac{49}{11}$, т.е.

$$q_2 = \frac{9}{11},\quad q_3 = \frac{2}{11},\quad \nu = \frac{49}{11}$$

Следовательно $Y^* = (0; \frac{9}{11}; \frac{2}{11})$, при цене игры $\nu = \frac{49}{11}$.

***Пример 4.*** Найти решение игры, заданной матрицей

$$\begin{array}{cc} & 2 \\ & \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ 1 & \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array}\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 6 \\ 2 & 7 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \end{array}$$

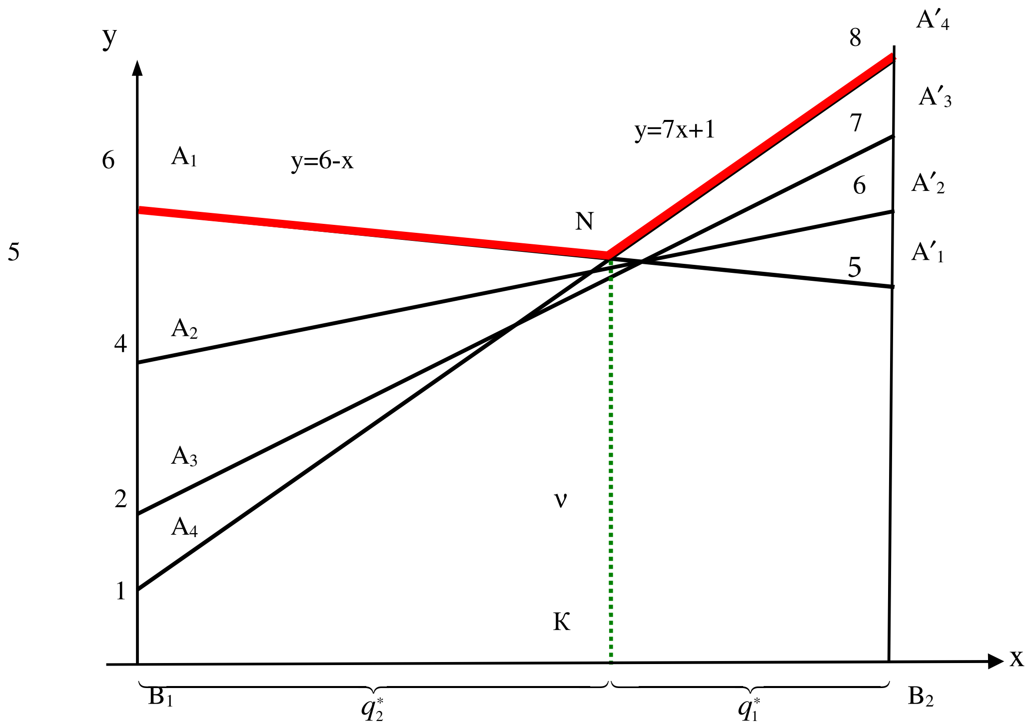



Рис.3. Нахождение оптимальной стратегии игрока 2

Матрица имеет размерность 2х4. Строим прямые, соответствующие стратегиям игрока 1. Ломанная $A_1NA'_4$ соответствует верхней границе выигрыша игрока 1, а отрезок $KN$ –цене игры. Решение игры для игрока 2:

$$Y^* = (\frac{3}{8}; \frac{5}{8}), \nu = \frac{43}{8}$$

Из рис.3 видно, что стратегии 2 и 3 для игрока 1 можно не использовать. Тогда для оптимальную стратегию игрока 1 можно найти, используя матрицу размером 2×2:

$$\begin{array}{cc} & 2 \\ & \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ 1 & \begin{array}{c} A_1 \\ A_4 \end{array} \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \end{array}$$

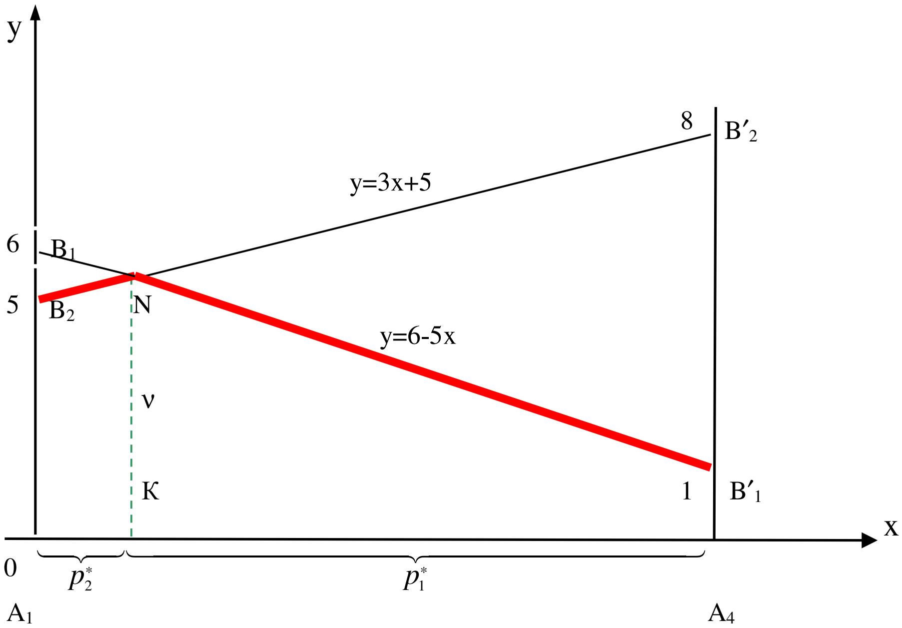



Рис.4. Нахождение оптимальной стратегии игрока 1

Решение игры для игрока 1:

$$X^* = (\frac{7}{8}; 0; 0; \frac{1}{8}); \quad \nu = \frac{43}{8}.$$

## 3.6. Решение полностью усредненных матричных игр размером *n*×*n*

Как было показано выше, игры размером 2х$n$ и $m$х2 сводятся к играм 2×2, которые можно решить в смешенных стратегиях графическим методом.

Рассмотрим теперь матричную игру без седловой точки размером n×n, где $n>2$. Имеем платежную матрицу:

$$A = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

Если эта игра является полностью усредненной, т.е. все чистые стратегии противника являются активными, то можно найти оптимальные смешанные стратегии путем решения системы уравнений $n$+1 порядка. Для $n$=2 мы ранее записывали такие системы и решали их аналитически (см. раздел 2.4).

Для нахождения оптимальной стратегии 1-го игрока

$$X^* = (p_1^*, p_2^*, ..., p_n^*)$$

и цены игры ν необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{matrix} p_1^* & + & p_2^* & + & \cdots & + & p_n^* & + & 0 & = & 1 \\ a_{11}p_1^* & + & a_{21}p_2^* & + & \cdots & + & a_{n1}p_n^* & - & \nu & = & 0 \\ a_{12}p_1^* & + & a_{22}p_2^* & + & \cdots & + & a_{n2}p_n^* & - & \nu & = & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n}p_1^* & + & a_{2n}p_2^* & + & \cdots & + & a_{nn}p_n^* & - & \nu & = & 0 \end{matrix}$$

Исходными данными для решения системы являются:

$$\begin{matrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} & -1 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} & -1 \end{matrix}$$

Матрица коэффициентов при неизвестных

$$\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}$$ - Вектор свободных членов

В результате решения получим вектор неизвестных $p_1^*, p_2^*, ..., p_n^*, \nu$.

Для нахождения оптимальной стратегии 2-го игрока $Y^* = (q_1^*, q_2^*, ..., q_n^*)$ и цены игры ν необходимо решить систему уравнений:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
q_1^* & + & q_2^* & + & \cdots & + & q_n^* & + & 0 & = & 1 \\
a_{11}q_1^* & + & a_{12}q_2^* & + & \cdots & + & a_{1n}q_n^* & - & \nu & = & 0 \\
a_{21}q_1^* & + & a_{22}q_2^* & + & \cdots & + & a_{2n}q_n^* & - & \nu & = & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1}q_1^* & + & a_{n2}q_2^* & + & \cdots & + & a_{nn}q_n^* & - & \nu & = & 0
\end{array}
$$

Исходными данными для решения системы являются:

$$
\begin{array}{ccccc}
1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & -1 \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & -1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & -1
\end{array}
$$

Матрица коэффициентов при неизвестных

$$
\begin{array}{l}
1 \\
0 \\
0 \\
\vdots \\
0
\end{array}
$$
- Вектор свободных членов

В результате решения получим вектор неизвестных $q_1^*, q_2^*, ..., q_n^*, \nu$.

Если будет получено осмысленное решение систем (найденные вероятности будут находиться в промежутке [0,1]), то предположение о том, что все чистые стратегии игроков являются активными, верное, и задача решена правильно. В противном случае так находить оптимальные стратегии нельзя, т.к. задача не является полностью усредненной.

Не полностью усредненные игры размером $n \times n$, $n>2$ и любые игры размером $m \times n$, где $m \neq n$ и $m,n>2$ можно решать приближенными методами или симплекс-методом (сведение к задаче линейного программирования).

### 3.7. Приближенные методы решения матричных игр

Часто в практических задачах нет необходимости находить точное решение игры, достаточно найти приближенное решение, дающее средний выигрыш, близкий к цене игры $\nu$. Ориентировочное значение $\nu$ может дать простой анализ платежной матрицы и определение нижней ($\underline{\alpha}$)верхней ($\overline{\alpha}$) цены игры. Если они близки, то нет надобности заниматься поисками точного решения, а достаточно будет выбрать чистые минимаксные стратегии.

Для нахождения приближенного решения игр в области смешанных стратегий может быть применен «метод Браун-Робинсон» или называемый еще как «метод фиктивного разыгрывания».

*Идея метода заключается в следующем.* Мысленно разыгрывается эксперимент, в котором противники $A$ и $B$ применяют друг против друга свои стратегии. Эксперимент состоит из последовательности партий (игр).

Оди*н из игроков, например, А выбирает свою произвольную стратегию* $A_i$. *Игрок В* отвечает той своей стратегией $B_j$, которая наименее выгодна для игрока $A$, применяющего стратегию $A_i$. На это игрок $A$ отвечает своей стратегией $A_l$, которая наименее выгодна для игрока $B$, применяющего стратегию $B_j$. Снова очередь игрока $B$. Он выбирает опять ту стратегию, которая наименее выгодна для игрока $A$, применяющего половинную смесь стратегий $A_i$ и $A_l$.

Таким образом, в каждой партии, когда наступает у игрока очередь выбирать стратегию, он отвечает своему противнику той своей чистой стратегией, которая является наихудшей мерой против всех его предыдущих выборов. Эти предыдущие выборы рассматриваются как своеобразная «смешанная стратегия», где чистые стратегии смешаны в пропорциях, соответствующих частоте их применения в прошлом.

Если такой процесс продолжать достаточно долго, то средний выигрыш, приходящийся на одну партию, будет стремиться к цене игры $\nu$. Сходимость метода довольно медленная, однако для практики решение получается довольно скоро (за несколько десятков итераций).

***Пример 5.*** Решить приближенно игру $3 \times 3$, в которой участвуют игроки $A$ и $B$.

Платежная матрица $P$ имеет следующий вид:

$$P = \begin{array}{c|ccc} & B_1 & B_2 & B_3 \\ \hline A_1 & 7 & 2 & 9 \\ A_2 & 2 & 9 & 0 \\ A_3 & 2 & 0 & 11 \end{array}$$

$A_i$ – стратегии игрока $A$, $B_j$ – стратегии игрока $B$.

Из анализа матрицы $P$ видно, что $\underline{\alpha}=2$, а $\overline{\alpha}=7$.

Таким образом, седловая точка отсутствует. Верхняя и нижняя цены игры не равны друг другу и различаются в 3.5 раза. Поэтому приближенного решения в области чистых стратегий здесь нет.

Будем использовать «метод фиктивного разыгрывания».

Все вычисления сведем в табл.1, где используются следующие обозначения:

- $n$ – номер играемой партии.
- $i$ – номер выбранной стратегии игроком $A$.
- $B_1$, $B_2$, $B_3$ – «накопленный выигрыш» при стратегиях $B_1$, $B_2$, $B_3$.
- $j$ – номер выбранной стратегии игроком $B$.
- $A_1$, $A_2$, $A_3$ – «накопленный выигрыш» при стратегиях $A_1$, $A_2$, $A_3$.
- *min* – минимальный «накопленный выигрыш» игрока $B$, деленный на $n$.
- *max* – максимальный «накопленный выигрыш» игрока $A$, деленный на $n$.
- $v = \dfrac{\min + \max}{2}$ – средняя цена игры.

Теперь опишем правила выбора ходов (чистых стратегий) игроками, предположив для определённости, что начинает первый игрок. Пусть первый игрок выберет стратегию $A_3 : (B_1 = 2 \quad B_2 = 0 \quad B_3 = 11)$

Второй игрок ответит стратегией $B_2 : \begin{pmatrix} A_1 = 2 \\ A_2 = 9 \\ A_3 = 0 \end{pmatrix}$, чтобы выигрыш первого игрока был минимален.

Первый игрок выберет стратегию $A_2$, чтобы его «накопленный» выигрыш был максимальным:

$$A_2 : (B_1 = 2+2 \quad B_2 = 0+9 \quad B_3 = 11+0) = (B_1 = 4 \quad B_2 = 9 \quad B_3 = 11)$$

Второй игрок выбирает стратегию $B_1$, чтобы «накопленный» выигрыш первого игрока: $B_1 : \begin{pmatrix} A_1 = 2+7 \\ A_2 = 9+2 \\ A_3 = 0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 = 9 \\ A_2 = 11 \\ A_3 = 2 \end{pmatrix}$ был минимален.

Первый игрок выберет стратегию $A_2$, чтобы его «накопленный» выигрыш был максимальным:

$$A_2:\left(B_1=4+2 \quad B_2=9+9 \quad B_3=11+0\right)=\left(B_1=6 \quad B_2=18 \quad B_3=11\right)$$

Второй игрок выбирает стратегию $B_1$, чтобы «накопленный» выигрыш первого игрока: $B_1:\begin{pmatrix} A_1=9+7 \\ A_2=11+2 \\ A_3=2+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1=16 \\ A_2=13 \\ A_3=4 \end{pmatrix}$ был минимален.

И так далее.

Таблица 1

| *N* | *i* | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | *j* | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | *min* | *max* | ν |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 2 | **0** | 11 | 2 | 2 | **9** | 0 | 0.00 | 9.00 | 4.50 |
| 2 | 2 | **4** | 9 | 11 | 1 | 9 | **11** | 2 | 2.00 | 5.50 | 3.75 |
| 3 | 2 | **6** | 18 | 11 | 1 | **16** | 13 | 4 | 2.00 | 5.33 | 3.67 |
| 4 | 1 | **13** | 20 | 20 | 1 | **23** | 15 | 6 | 3.25 | 5.75 | 4.50 |
| … | … | … | … | … | … | … | … | … | … | … | … |
| 29 | 2 | **133** | 147 | 146 | 1 | **143** | 142 | 34 | 4.59 | 4.93 | 4.76 |
| 30 | 1 | **140** | 149 | 155 | 1 | **150** | 144 | 36 | 4.67 | 5.00 | 4.83 |

Далее находим частоты применения стратегий.

Для игрока *A* необходимо в столбце ***i*** подсчитать сколько раз применялись стратегии 1, 2 и 3. Полученные результаты надо поделить на число проведенных итераций, т.е. на 30. Для игрока *B* необходимо проделать это же самое с данными столбца ***j***.

| | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| В результате будем иметь. | | | |
| Частоты применения стратегий *игроком A* – | 0.567 | 0.433 | 0.000 |
| Частоты применения стратегий игроком *B* – | 0.600 | 0.400 | 0.000 |

*Таким образом, игроку A необходимо использовать стратегию* $A_1$ с вероятностью $p_1\approx 0.567$, стратегию $A_2$ с вероятностью $p_2\approx 0.433$, стратегию $A_3$ не применять, т.е. $p_3\approx 0$. Игроку *B* необходимо использовать стратегию $B_1$ с вероятностью $q_1\approx 0.600$, стратегию $B_2$ с вероятностью $q_2\approx 0.400$, стратегию $B_3$ не применять, т.е. $q_3\approx 0$.

Средний выигрыш после 30-ой итерации равен 4.83. Видно, что он еще не застабилизировался и необходимо еще продолжать итерационный процесс.

## 3.8. Сведение матричной игры к задаче линейного программирования

### Симплекс метод

Пусть имеется система $m$ ограничений с $n$ переменными ($m < n$).

***Допустимым базисным решением*** является решение, содержащее $m$ неотрицательных ***основных*** (***базисных***) переменных и $n - m$ ***неосновных***. (небазисных, или ***свободных***) переменных. Неосновные переменные в базисном решении равны нулю, основные же переменные, как правило, отличны от нуля, то есть являются положительными числами.

Любые $m$ переменных системы $m$ линейных уравнений с $n$ переменными называются ***основными***, если определитель из коэффициентов при них отличен от нуля. Тогда остальные $n - m$ переменных называются ***неосновными*** (или ***свободными***).

### Алгоритм симплекс метода

**Шаг 1**. Привести задачу линейного программирования к канонической форме. Для этого перенести свободные члены в правые части (если среди этих свободных членов окажутся отрицательные, то соответствующее уравнение или неравенство умножить на - 1) и в каждое ограничение ввести дополнительные переменные (со знаком "плюс", если в исходном неравенстве знак "меньше или равно", и со знаком "минус", если "больше или равно").

**Шаг 2**. Если в полученной системе $m$ уравнений, то $m$ переменных принять за основные, выразить основные переменные через неосновные и найти соответствующее базисное решение. Если найденное базисное решение окажется допустимым, перейти к допустимому базисному решению.

**Шаг 3**. Выразить функцию цели через неосновные переменные допустимого базисного решения. Если отыскивается максимум (минимум) линейной формы и в её выражении нет неосновных переменных с отрицательными (положительными) коэффициентами, то критерий оптимальности выполнен и полученное базисное решение является оптимальным - решение окончено. Если при нахождении максимума (минимума) линейной формы в её выражении имеется одна или несколько неосновных переменных с отрицательными (положительными) коэффициентами, перейти к новому базисному решению.

**Шаг 4**. Из неосновных переменных, входящих в линейную форму с отрицательными (положительными) коэффициентами, выбирают ту, которой соответствует наибольший (по модулю) коэффициент, и переводят её в основные. Переход к шагу 2.

#### Важные условия

Если допустимое базисное решение даёт оптимум линейной формы (критерий оптимальности выполнен), а в выражении линейной формы через неосновные переменные отсутствует хотя бы одна из них, то полученное оптимальное решение - не единственное.

Если в выражении линейной формы имеется неосновная переменная с отрицательным коэффициентом в случае её максимизации (с положительным - в случае минимизации), а во все уравнения системы ограничений этого шага указанная переменная входит также с отрицательными коэффициентами или отсутствует, то линейная форма не ограничена при данной системе ограничений. В этом случае её максимальное (минимальное) значение записывают в виде $F_{\max}=\infty \quad (F_{\min}=-\infty)$.

Рассмотрим матричную игру $m\times n$ с платежной матрицей $A=\{a_{ij}\}_{m\times n}$. И будем считать, что все элементы $a_{ij}$ платежной матрицы положительны. Этого всегда можно добиться применением аффинного правила, то есть мы можем просто прибавить ко всем элементам матрицы $A$ одно и то же положительное число. Тогда искомая цена игры $\nu$ будет тоже являться положительным числом.

Начнем с первого игрока. Оптимальная смешанная стратегия первого игрока обеспечивает ему средний выигрыш, не меньший $\nu$, при любой чистой стратегии второго игрока. То есть, будут выполняться неравенства:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}p_i \ge \nu,\ j=\overline{1,n},$$

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1,\ \mathrm{p}_i \ge 0,\ i=\overline{1,m}.$$

Если ввести новые переменные по формуле $x_i=\dfrac{p_i}{\nu}$, то можно получить:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i \ge 1,\ j=\overline{1,n},$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \ge \frac{1}{\nu},\ \mathrm{x}_i \ge 0,\ i=\overline{1,m}.$$

Так как первый игрок стремится максимизировать свой выигрыш ($\nu\to\max$), то решение матричной игры можно свести к следующей задаче линейного программирования:

Найти:

$$\min F(x)=\min\sum_{i=1}^{m} x_i$$

при следующих ограничениях:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i \ge 1,\ j=\overline{1,n},$$

$$x_i \ge 0,\ i=\overline{1,m}.$$

Рассмотрим теперь интересы второго игрока. Его оптимальная смешанная стратегия обеспечивает ему средний проигрыш, не больший $\nu$, при любой чистой стратегии первого игрока.

То есть:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \le \nu,\ i = \overline{1,m},$$

$$\sum_{j=1}^{n} q_j = 1,\ \mathrm{q}_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}.$$

Если ввести новые переменные по формуле $y_j = \dfrac{q_j}{\nu}$, то можно получить следующую задачу линейного программирования:
Найти:

$$\max Z(y) = \max \sum_{j=1}^{n} y_j$$

при следующих ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \le 1,\ i = \overline{1,m},$$

$$y_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}.$$

Таким образом, мы пришли к следующей теореме:
Решение матричной игры с положительной платежной матрицей равносильно решению двойственных задач линейного программирования. При этом цена игры $\nu$ – это величина, обратная значению оптимальных сумм:

$$\nu = \frac{1}{\sum x_i^0} = \frac{1}{\sum y_j^0}$$

а оптимальные значения $p_i^0$ и $q_i^0$ равны:

$$p_i^0 = \frac{x_i^0}{\sum x_i^0},\ \mathrm{q}_j^0 = \frac{y_j^0}{\sum y_j^0}$$

Рассмотрим теперь алгоритм решения матричной игры:

1. Ко всем элементам платежной матрицы $A$ прибавим одно и то же положительное число $\gamma$ так, чтобы все элементы платежной матрицы стали положительными.

2. Сводим матричную игру к двойственной задаче линейного программирования и находим их решения: $x_i^0$, $y_j^0$, $\sum x_i^0 = \sum y_j^0$.

3. Строим оптимальные смешанные стратегии игроков:

$$p_i^0 = \frac{x_i^0}{\sum x_i^0},\ \mathrm{q}_j^0 = \frac{y_j^0}{\sum y_j^0}$$

4. Вычисляем цену игры:

$$\nu = \frac{1}{\sum x_i^0} - \gamma = \frac{1}{\sum y_j^0} - \gamma$$

***Пример* 6.**

Решить матричную игру $A = \begin{Bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \end{Bmatrix}$ сведением к задаче линейного программирования.

*Решение.*
Сведем матричную игру к двойственной задаче линейного программирования:

$$F(x) = x_1 + x_2 \to \min,$$
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \geq 1, \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 1, \\ 5x_1 + x_2 \geq 1, \\ x_1, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

– «прямая» задача линейного программирования, и

$$Z(y) = y_1 + y_2 + y_3 \to \max,$$
$$\begin{cases} y_1 + 3y_2 + 5y_3 \leq 1, \\ 4y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 1, \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0, \end{cases}$$

– «обратная» задача.

Симплексным методом «легче» решается «обратная» задача линейного программирования, так как здесь требуется введение двух дополнительных переменных, против трех в «прямой» задаче. Поэтому найдем сначала оптимальную стратегию второго игрока, решив «обратную» задачу.

*Шаг* 1. Введем дополнительные переменные $y_4, y_5 \geq 0$

$$\begin{cases} y_1 + 3y_2 + 5y_3 + y_4 = 1, \\ 4y_1 + 2y_2 + y_3 + y_5 = 1. \end{cases}$$

Возьмем в качестве основных переменные $y_4$ и $y_5$, тогда свободными будут переменные $y_1$, $y_2$, $y_3$:

$$\begin{cases} y_4 = 1 - y_1 - 3y_2 - 5y_3, \\ y_5 = 1 - 4y_1 - 2y_2 - y_3. \end{cases}$$

Получим базисное решение $y$ = (0, 0, 0, 1, 1), которое является допустимым, поэтому вычислим значение целевой функции:

$$Z(y) = y_1 + y_2 + y_3 = 0.$$

Так как в выражении для целевой функции все коэффициенты при переменных – положительны, то в основные можно перевести любую из них. Для этого вычислим:

$$y_1 = \min\left\{1, \frac{1}{4}\right\} = \frac{1}{4},$$

$$y_2 = \min\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{3},$$

$$y_3 = \min\left\{\frac{1}{5}, 1\right\} = \frac{1}{5}.$$

Следовательно, переводим в основные переменную $y_2$, а в свободные – переменную $y_4$.

*Шаг* 2. Основные переменные: $y_2$ и $y_5$, свободные: $y_1$, $y_3$, $y_4$:

$$\begin{cases} y_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}y_1 - \frac{5}{3}y_3 - \frac{1}{3}y_4, \\ y_5 = \frac{1}{3} - \frac{10}{3}y_1 + \frac{7}{3}y_3 + \frac{2}{3}y_4. \end{cases}$$

Получаем базисное решение: $y = (0, \frac{1}{3}, 0, 0, \frac{1}{3})$, которое является допустимым, поэтому вычисляем значение целевой функции:

$$Z(y) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}y_1 - \frac{2}{3}y_3 - \frac{1}{3}y_4 = \frac{1}{3}.$$

Так как в выражении для целевой функции коэффициент при $y_1$ является положительным, то переменную $y_1$ необходимо перевести в основные:

$$y_1 = \min\left\{1, \frac{1}{10}\right\} = \frac{1}{10}.$$

Следовательно, в свободные переходит переменная $y_5$.

*Шаг* 3. Основные переменные: $y_1$ и $y_2$, свободные: $y_3$, $y_4$, $y_5$:

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{10} + \frac{7}{10}y_3 + \frac{1}{5}y_4 - \frac{3}{10}y_5, \\ y_2 = \frac{3}{10} - \frac{19}{10}y_3 - \frac{2}{5}y_4 + \frac{1}{10}y_5. \end{cases}$$

Получаем базисное решение: $y = (\frac{1}{10}, \frac{3}{10}, 0, 0, 0)$, которое является допустимым, потому вычислим значение целевой функции:

$$Z(y) = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}y_3 - \frac{1}{5}y_4 - \frac{1}{5}y_5 = \frac{2}{5}.$$

Так как все коэффициенты при переменных в выражении для целевой функции отрицательны, то оптимальное решение «обратной» задачи найдено:

$$y_{\max} = (\frac{1}{10}, \frac{3}{10}, 0, 0, 0), \ Z_{\max} = \frac{2}{5} = 0,4.$$

Определим теперь оптимальную стратегию второго игрока и цену игры:
а) цена игры:

$$\nu = \frac{1}{Z_{\max}} = 2,5;$$

б) оптимальная смешанная стратегия:

$$q_1^0 = \frac{0,1}{0,4} = \frac{1}{4}, \ q_2^0 = \frac{0,3}{0,4} = \frac{3}{4}, \ q_3^0 = 0,$$

то есть

$$q^0 = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 0).$$

Чтобы определить оптимальную стратегию первого игрока найдем решение «прямой» задачи, воспользовавшись свойствами решений взаимно двойственных задач линейного программирования, а именно:

$$F_{\min} = Z_{\max} = \frac{2}{5}, \ \mathrm{x}_{\min} = (\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, 0, 0, \frac{1}{5}).$$

Следовательно, оптимальная смешанная стратегия первого игрока равна:

$$p_1^0 = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{2}, \ \mathrm{p}_2^0 = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{2},$$

то есть

$$p^0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}).$$

# 4. БИМАТРИЧНЫЕ ИГРЫ

В матричной игре интересы двух игроков были прямо противоположны, то есть, речь шла об антагонистической игре. Однако гораздо чаще встречаются ситуации, в которых интересы игроков хотя и не совпадают, но не обязательно являются противоположным.

Рассмотрим конфликтную ситуацию, в которой два игрока имеют следующие возможности для выбора своей линии поведения:

- 1 -й игрок может выбрать любую из стратегий $A_1, A_2, \ldots, A_m$;
- 2-й игрок – любую из стратегий $B_1, B_2, \ldots, B_n$;

При этом в ситуации $\{A_i; B_j\}$выигрыш первого игрока будет равен $a_{ij}$, а второго – $b_{ij}$.

Тогда получаем две платежные матрицы размерности $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} b_{11} & \mathrm{b}_{12} & \ldots & \mathrm{b}_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & \mathrm{b}_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m1} & \mathrm{b}_{m2} & \ldots & \mathrm{b}_{mn} \end{pmatrix}$$

Игру можно также описать с помощью таблицы $m \times n$. В каждой клетке такой таблицы указываются два числа, где первое число – это выигрыш первого игрока, а второе число – выигрыш второго.

$$(A, B) = \begin{pmatrix} (a_{11}, \mathrm{b}_{11}) & (a_{12}, \mathrm{b}_{12}) & \ldots & (a_{1n}, b_{1n}) \\ (a_{21}, \mathrm{b}_{21}) & (a_{22}, \mathrm{b}_{22}) & \ldots & (a_{2n}, b_{2n}) \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots \\ (a_{m1}, \mathrm{b}_{m1}) & (a_{m2}, \mathrm{b}_{m2}) & \ldots & (a_{mn}, b_{mn}) \end{pmatrix}$$

## 4.1. Равновесие Нэша

Рассмотрим неантагонистическую игру двух лиц. с функциями выигрышей $H_1(x, y)$ и $H_2(x, y)$, $x \in S_x$ и $y \in S_y$ Исход игры будем называть равновесным, если ни одному из участников не выгодно отклоняться от неё в одностороннем порядке. Именной такой смысл понятию равновесие придал Джон Нэш. Запишем строгое определение равновесия по Нэшу.

Стратегии $x^* \in S_x$ и $y^* \in S_y$ называются стратегиями равновесными по Нэшу, если выполняются следующие неравенства:

$$H_1(x^*, y^*) \geq H_1(x, y), \forall x \in S_x$$
$$H_2(x^*, y^*) \geq H_2(x, y), \forall y \in S_y.$$

Таким образом, равновесие Нэша характеризуется тем, что ни одному из участников не выгодно отклоняться от своей равновесной стратегии, если другой участник применяет стратегию, равновесную по Нэшу. Заметим, что это определение сохраняется и для игры с любым числом участников.

Ситуация ($i^*$, $j^*$) биматричной игры называется ситуацией равновесия (равновесной по Нэшу) в *чистых стратегиях*, если

$$a_{ij^*} \le a_{i^*j^*} \text{ для любых } i = \overline{1,m} \text{ и } b_{i^*j} \le b_{i^*j^*} \text{ для любых } j = \overline{1,n}$$

***Пример 1. Семейный спор***. $N = \{$муж (М), жена (Ж)$\}$. Каждый имеет две альтернативы: пойти – в театр (Т) или на футбол (Ф), т.е. $X_м = X_ж = \{x^Т, x^Ф\}$. Если они вместе пойдут на футбол, то муж получит больше удовольствия, чем жена; если они вместе пойдут в театр, то – наоборот. Наконец, если они окажутся в разных местах, то они не получат никакого удовольствия.

Найти равновесные ситуации.

Рассматриваемая ситуация моделируется следующей игрой:

$$(H_1, H_2) = \begin{array}{cc|cc} & & \multicolumn{2}{c}{Ж} \\ & & Ф & Т \\ \hline M & Ф & (4,1) & (0,0) \\ & Т & (0,0) & (1,4) \end{array}$$

***Решение.***

$$H_1 = \begin{pmatrix} \underline{4} & 0 \\ 0 & \underline{1} \end{pmatrix} \quad H_2 = \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 \\ 0 & \underline{4} \end{pmatrix}$$

В матрицах выигрыша $H_1$ и $H_2$ подчеркнуты максимальные элементы, стоящие в столбцах и строках соответственно. Видно, что общие подчеркнутые элементы стоят в позиции (1, 1) и (2, 2), т.е. здесь две ситуации равновесия:

$$(x_M^Ф, x_Ж^Ф) \text{ и выигрыши игроков } (4, 1),$$

$$(x_M^Т, x_Ж^Т) \text{ и выигрыши игроков } (1, 4).$$

## 4.2. Равновесие Нэша в смешанных стратегиях

Существуют игры, в которых нет равновесия в чистых стратегиях. Кроме равновесия в чистых стратегиях случае, может существовать равновесие Нэша в смешанных стратегиях. Смысл смешанной стратегии для биматричной игры будем определять так же, как и для матричных игр.

Смешанная стратегия первого и второго участников есть соответственно вектора $X = \{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$ и $Y = \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$, где

$$0 \le p_i \le 1;\ \ \sum_{i=1}^{m} p_i = 1;\ 0 \le q_i \le 1;\ \ \sum_{j=1}^{n} q_i = 1;$$

Функции выигрышей первого и второго игроков при смешанных стратегиях $X$ и $Y$ определяются по формулам

$$H_1(p,q) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j;\ \ H_2(p,q) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij} p_i q_j$$

Равновесные по Нэшу смешанные стратегии будем обозначать $X^o$ и $Y^o$ соответственно. Вопрос существования равновесия по Нэшу решается следующей теоремой, доказанной Дж. Нэшем.

***Теорема о равновесии по Нэшу.***

В любой биматричной игре существует, по крайней мере, одно равновесие Нэша.

*Замечание.* Это могут быть равновесия в чистых или смешанных стратегиях.

В общем случае биматричной игры нахождение смешанных равновесий является сложной задачей, но для матриц размера 2×2 решение в смешанных стратегиях найти несложно.

Рассмотрим биматричную игру 2×2:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & \mathrm{b}_{12} \\ b_{21} & \mathrm{b}_{22} \end{pmatrix}$$

с вероятностями $p_1 = p,\ p_2 = 1 - p,\ q_1 = q,\ q_2 = 1 - q.$

Вычислим средние выигрыши игроков

$$H_1(p,q) = a_{11}pq + a_{12}p(1-q) + a_{21}(1-p)q + a_{22}(1-p)(1-q)$$

$$H_2(p,q) = b_{11}pq + b_{12}p(1-q) + b_{21}(1-p)q + b_{22}(1-p)(1-q)$$

Для таких игр оказывается справедливой следующая теорема, позволяющая находить смешанные стратегии.

***Теорема***. Выполнение неравенств:

$$H_1(p,q^o) \le H_1(p^o,q^o),$$

$$H_2(p^o,q) \le H_2(p^o,q^o).$$

Равносильно выполнению следующих неравенств:

$$H_1(0,q^o) \le H_1(p^o,q^o),$$
$$H_1(1,q^o) \le H_1(p^o,q^o),$$
$$H_2(p^o,0) \le H_2(p^o,q^o),$$
$$H_2(p^o,1) \le H_2(p^o,q^o).$$

Другими словами, чтобы убедиться в том, что пара ($p^o$, $q^o$) определяет равновесную ситуацию, достаточно проверить справедливость неравенств не для всех $p \in [0,1]$ и $q \in [0,1]$, а только для двух чистых стратегий каждого игрока.

Перепишем формулу для вычисления $H_1(p, q)$ в более удобном виде

$$H_1(p,q) = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})pq + (a_{12} - a_{22})p + (a_{21} - a_{22})q + a_{22}.$$

Положим здесь $p = 0$ и $p = 1$:

$$H_1(1,q) = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})q + a_{12} + (a_{21} - a_{22})q,$$
$$H_1(0,q) = (a_{21} - a_{22})q + a_{22}.$$

и рассмотрим разности:

$$H_1(p,q) - H_1(1,q) = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})pq + (a_{12} - a_{22})p -$$
$$-(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})q + a_{22} - a_{12},$$
$$H_1(p,q) - H_1(0,q) = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})pq + (a_{12} - a_{22})p.$$

Полагая

$$\begin{cases} C = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}, \\ \alpha = a_{22} - a_{12}, \end{cases}$$

получим

$$H_1(p,q) - H_1(1,q) = Cpq - \alpha p - Cq + \alpha = (p-1)(Cq - \alpha),$$
$$H_1(p,q) - H_1(0,q) = Cpq - \alpha p = p(Cq - \alpha).$$

Так как в точке равновесия эти разности должны быть неотрицательными, то приходим к следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} (p-1)(Cq - \alpha) \ge 0, \\ p(Cq - \alpha) \ge 0. \end{cases}$$

Для $H_2(p, q)$ при обозначениях:

$$\begin{cases} D = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}, \\ \beta = b_{22} - b_{21}, \end{cases}$$

получаем аналогичным образом:

$$\begin{cases} (q-1)(Dp - \beta) \ge 0, \\ q(Dp - \beta) \ge 0. \end{cases}$$

Таким образом, для того, чтобы пара ($p$, $q$) определяла равновесную ситуацию в биматричной игре 2×2, необходимо и достаточно справедливости системы неравенств:

$$\begin{cases} (p-1)(Cq-\alpha)\ge 0, \\ p(Cq-\alpha)\ge 0, \\ (q-1)(Dp-\beta)\ge 0, \\ q(Dp-\beta)\ge 0, \\ p\in[0,1],\ \mathrm{q}\in[0,1]. \end{cases}$$

***Пример 2. Борьба за рынки.*** Небольшая фирма *А* (1-й игрок) намерена сбыть партию товара на одном из двух рынков, монополизируемых другой, более крупной фирмой *В* (2-й игрок). Для этого фирма *А* готова предпринять по одному из рынков соответствующие приготовления, например, развернуть рекламную кампанию. Фирма *В* может воспрепятствовать этому, предприняв по одному из рынков предупредительные меры. Если фирма *А* встречает противодействие, то терпит поражение, в противном случае – захватывает рынок.

Будем считать, что проникновение фирмы *А* на первый рынок более выгодно для нее, чем на второй, но и поражение на первом рынке принесет фирме А большие потери (убытки), чем на втором рынке.

Таки*м образом, фирмы имеют по две стратегии:*

$A_1$ и $B_1$ – выбор первого рынка;

$A_2$ и $B_2$ – выбор второго рынка;

Составим и решим биматричную игру.

**Решение.**

Составим платежные матрицы игроков в условных единицах, исходя из соответствующих качественных соображений:

$$A=\begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Из этих матриц видно, что если обе фирмы выберут один рынок, то выигрывает фирма *В*, если разные – то фирма *А*.

Найдем равновесные ситуации, вычислив параметры системы.

$$\begin{cases} C=a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22}=-10-2-1-1=-14, \\ \alpha=a_{22}-a_{12}=-1-2=-3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} D = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22} = 5 + 2 + 1 + 1 = 9, \\ \beta = b_{22} - b_{21} = 1 + 1 = 2. \end{cases}$$

Тогда получаем следующие системы неравенств:

$$\begin{cases} (p-1)(-14q+3) \geq 0, \\ p(-14q+3) \geq 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} (q-1)(9p-2) \geq 0, \\ q(9p-2) \geq 0. \end{cases}$$

Решим эти системы неравенств:

1) $p = 1$, $-14q + 3 \geq 0$, $q \leq 3/14$.

2) $p = 0$, $-14q + 3 \leq 0$, $q \geq 3/14$.

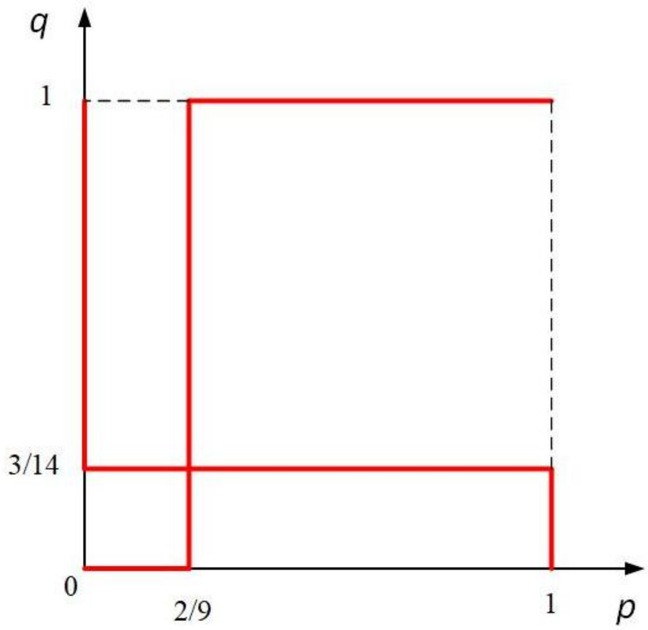
3) $0 < p < 1$, $-14q + 3 = 0$, $q = 3/14$.

1) $q = 1$, $9p - 2 \geq 0$, $p \geq 2/9$.

2) $q = 0$, $9p - 2 \leq 0$, $p \leq 2/9$.

3) $0 < q < 1$, $9p - 2 = 0$, $p = 2/9$.

Изобразим эти решения на рисунке:




Видно, что получилась одна точка равновесия $p = \frac{2}{9}$, $q = \frac{3}{14}$. Это дает нам следующие оптимальные смешанные стратегии игроков:

$$p^o = \left(\frac{2}{9}, \frac{7}{9}\right),\ q^o = \left(\frac{3}{14}, \frac{11}{14}\right),$$

которым соответствуют оптимальные (средние выигрыши)

$$H_1(p^o, q^o) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i^o q_j^o = -\frac{4}{7};\ H_2(p^o, q^o) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij} p_i^o q_j^o = \frac{1}{3}.$$

Таким образом, если игра может быть повторена многократно в схожих условиях, то фирма $A$ в 22,22 % случаев должна осуществлять попытки проникновения на первый рынок, а в 77,78 % – на второй рынок. При этом (в среднем) она не проиграет больше, чем 4/7. Фирме $B$ рекомендуется в 21,43 % случаев оказывать противодействие на первом рынке, а в 78,57 % – на втором. В этом случае ее средний выигрыш составит не менее 1/3.

Отметим, что в этой задаче получилась одна равновесная точка, и $\upsilon_A \neq \upsilon_B$. В других биматричных играх можно получить несколько равновесных ситуаций, В этом случае встает проблема выбора оптимальной в некотором смысле ситуации, из нескольких равновесных. Эту задачу можно попытаться решить, исходя из содержательного смысла игры.

Из рассмотренного примера видно, что точка равновесия определяется парой $p = \dfrac{\beta}{D},\ q = \dfrac{\alpha}{C}$. А это означает, что в равновесной ситуации выбор одного игрока полностью определяется платежной матрицей другого игрока и не зависит от собственной платежной матрицы. Другими словами, равновесная ситуация определяется не столько стремлением увеличить свой выигрыш, сколько желанием держать под контролем выигрыш другого игрока.

## 4.3. Оптимальность по Парето

Ситуация $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ называется ***оптимальной по Парето***, если не существует никакой другой ситуации $x' = (x_1', \dots, x_n')$ такой что:

1) $H_i(x') \geq H_i(x^*) \ \ \forall i \in N$;
2) хотя бы для одного $i_0 \in N \ \ H_{i_0}(x') > H_{i_0}(x^*)$.

Таким образом, отсюда следует, что не существует другой ситуации $x'$, которая была бы предпочтительней ситуации $x^*$ для ***всех*** игроков.

***Пример 3. Семейный спор.***

$$\begin{pmatrix} (H_1(x_м^Ф, x_ж^Ф), H_2(x_м^Ф, x_ж^Ф)) & (H_1(x_м^T, x_ж^Ф), H_2(x_м^T, x_ж^Ф)) \\ (H_1(x_м^Ф, x_ж^T), H_2(x_м^Ф, x_ж^T)) & (H_1(x_м^T, x_ж^T), H_2(x_м^T, x_ж^T)) \end{pmatrix} = \begin{array}{cc|cc} & & Ж & \\ & & Ф & T \\ М & Ф & (4,1) & (0,0) \\ & T & (0,0) & (1,4) \end{array}$$

***Решение.***

$$H_1(Ф,Ф) = 4; H_1(Ф,T) = 0; H_1(T,Ф) = 0; H_1(T,T) = 1;$$
$$H_2(Ф,Ф) = 1; H_2(Ф,T) = 0; H_2(T,Ф) = 0; H_2(T,T) = 4.$$

$(ФФ): т.к. \quad \neg\exists\, x' : \ H_1(x') > H_1(ФФ) = 4 \,|$ опт. по Парето;

$$(ФT): т.к. \quad \exists\, (ФФ): \begin{array}{l} H_1(ФФ) > H_1(ФT) \\ H_2(ФФ) > H_2(ФT) \end{array} \Big| \text{ не опт. по Парето;}$$

$$(TФ): т.к. \quad \exists\, (ФФ): \begin{array}{l} H_1(ФФ) > H_1(TФ) \\ H_2(ФФ) > H_2(TФ) \end{array} \Big| \text{ не опт. по Парето;}$$

$(TT): т.к. \quad \neg\exists\, x' : \ H_2(x') > H_2(TT) = 4 \,|$ опт. по Парето.

***Пример 4. Игра "Дилемма заключенного"***

Каждый из двух игроков располагает двумя стратегиями: $A_2$ и $B_2$ – стратегии агрессивного поведения, а $A_1$ и $B_1$ – миролюбивое поведение. Предположим, что "мир" (оба игрока миролюбивы) лучше для обоих игроков, чем "война". Случай, когда один игрок агрессивный, а другой миролюбивый, выгоднее агрессору. Пусть матрицы выигрышей игроков 1 и 2 в данной биматричной игре имеют вид:

$$H_1, H_2 = \begin{pmatrix} & "мир" - B_1 & "война" - B_2 \\ "мир" - A_1 & (2,2) & (0,\underline{3}) \\ "война" - A_2 & (\underline{3},0) & (\underline{1},\underline{1}) \end{pmatrix}$$

***Единственное равновесие Нэша в доминирующих стратегиях имеет вид (A₂, B₂)*** (общие подчеркнутые элементы стоят в позиции ($A_2$, $B_2$), т. е. постулируется, что результатом некооперативного поведения является война. В то же время исход ($A_1$, $B_1$) (мир) дает больший выигрыш для обоих игроков. Таким образом, некооперативное эгоистическое поведение вступает в противоречие с коллективными интересами. Коллективные интересы диктуют выбор мирных стратегий. В то же время, если игроки не обмениваются информацией, война является наиболее вероятным исходом.

В данном случае ***ситуация ($A_1$, $B_1$) является оптимальной по Парето***.

Действительно, сравним выигрыши (2, 2) в этой ситуации с выигрышами в остальных ситуациях:

(2, 2) и (3, 0) –> 3>2, но 0<2

(2, 2) и (0, 3) –> 0<2, но 3>2

(2, 2) и (1, 1) –> 1<2 и 1<2

Таким образом, нет ситуаций, в которых для ***обоих*** игроков выигрыш был бы больше 2. Следовательно, ситуация ($A_1$, $B_1$) с выигрышем (2, 2) является оптимальной по Парето.

Однако эта ситуация неустойчива, что ведет к возможности нарушения игроками установленного соглашения. Действительно, если первый игрок нарушит соглашение, а второй не нарушит, то выигрыш первого игрока увеличится до трех, а второго упадет до нуля и, наоборот. Причем, каждый игрок, не нарушающий соглашение, теряет больше при нарушении соглашения вторым игроком, нежели в том случае, когда они оба нарушают соглашение.

Как видим, в отличие от примера 1 (игра "Семейный спор"), где кооперация игроков была им выгодна, в этом примере кооперация не выгодна для игроков.

Иными словами, в оптимальной по Парето ситуации игроки не могут совместными усилиями увеличить выигрыш кого-либо из них, не уменьшив при этом выигрыш кого-либо другого. Если интересы игроков не противоположны, то в игре могут существовать исходы, один из которых предпочтительнее других ***с точки зрения всех игроков.***

Вообще говоря, наилучшим исходом игры является оптимальность по Парето (равновесие Парето), при которой любое изменение, оптимизирующее один параметр, приводит к проигрышу по другим параметрам. Это ситуация максимизирующая общую выгоду.

Оптимальность по Парето – такое состояние системы, при котором значение каждого частного критерия, описывающего состояние системы, не может быть улучшено без ухудшения положения других элементов.

Таким образом, по словам самого Парето: «Всякое изменение, которое никому не приносит убытков, а некоторым людям приносит пользу (по их собственной оценке), является улучшением». Значит, признаётся право на все изменения, которые не приносят никому дополнительного вреда.

Ситуация, когда достигнута эффективность по Парето – это ситуация, когда все выгоды от обмена исчерпаны. Однако игры, в которых каждый игрок преследует свои интересы, ведут не к оптимальности по Парето. Они ведут к равновесию Нэша – ситуации, когда любому из игроков невыгодно изменение способа его действий.

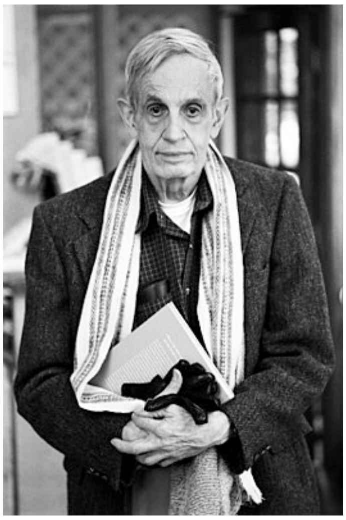
Таким образом, при Парето-равновесии изменение любым игроком его способа действий приведёт к ухудшению общего результата. При равновесии Нэша изменение любым игроком его способа действий приведёт к ухудшению его собственного результата. ***Равновесие Парето – результат оптимизации действий на уровне всех игроков, равновесие Нэша – на уровне отдельного игрока.***

Фильм «Игры разума" (2001 г.) – биографическая драма о Джоне Форбсе Нэше, получившего Нобелевскую премию по экономике 1994 год за фундаментальный труд «Анализ равновесия в теории некооперативных игр». Фильм получил четыре «Оскара» (за лучший фильм, лучший адаптированный сценарий, режиссуру и актрису второго плана), награду «Золотой глобус.

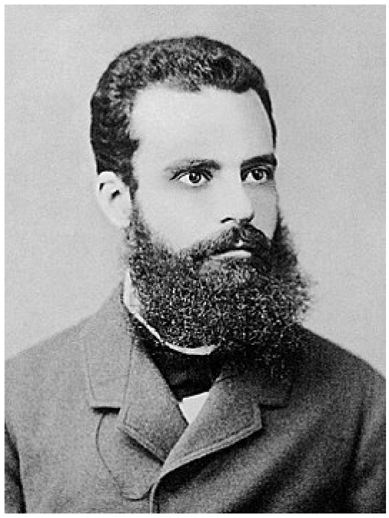
***Сюжет фильма:*** Подающий надежды студент Джон Нэш приезжает в Принстон. Он всецело погружен в исследования. Со временем Нэш стал преподавателем в Массачусетском технологическом институте женился на одной из студенток. Однажды к Нэшу обратился агент Парчер с предложением работать на ЦРУ, ученый согласился и добросовестно выполнял возложенное на него задание. Вскоре выяснилось, что у Нэша шизофрения и никакого агента Парчера не было. Супруга Нэша Алисия не покинула мужа, помогала справляться с недугом, вскоре болезнь удалось взять под контроль. Нэш продолжает работать, за открытия в теории игр получил Нобелевскую премию по экономике.

Джон Нэш погиб 23 мая 2015 года (на 87-ом году жизни) вместе с супругой, Алисией Нэш (ей было 83 года), в автомобильной катастрофе в штате Нью-Джерси. Водитель такси, в котором ехали супруги, потерял управление при обгоне и врезался в разделительный барьер. Обоих непристегнутых пассажиров выбросило наружу при ударе, и приехавшие медики констатировали смерть на месте происшествия. Водитель такси был отправлен в госпиталь с травмой, не угрожающей жизни.

Вильфред Федерико Дамасо Парето (1848-1923) итальянский инженер, экономист и социолог. Один из основоположников теории элит. Он разработал теории, названные впоследствии его именем: статистическое Парето-распределение и Парето-оптимум, широко используемые в экономической теории и иных научных дисциплинах.



Джон Нэш (1928 – 2015)



Вильфредо Парето (1848 – 1923)

В 1897 году, итальянским экономистом Вильфредо Парето была обнаружена математическая зависимость, которая легла в основу Принципа 80/20. Его открытие называли по-разному, в том числе принципом Парето, законом Парето, правилом 80/20, принципом наименьшего усилия, принципом Дисбаланса.

Принцип 80/20 гласит, что небольшая доля причин, вкладываемых средств или прилагаемы усилий, отвечает за большую долю результатов, получаемой продукции или заработанного вознаграждения. Например, на получение 80% результатов у вас уходит 20% всего затраченного времени.

Выходит, что на практике 4/5 приложенных вами усилий (немалая доля) почти никак не влияет на результат.

Так что же обнаружил Вильфредо Парето? Так случилось, что он рассматривал распределение богатства и доходов в Англии XIX века. Он установил, что существует неизменное математическое соотношение между численностью группы людей (в процентах от общей численности рассматриваемого населения) и долей богатства или дохода, контролируемой этой группой.

Множество примеров, подтверждающих справедливость Принципа 80/20, можно найти в области бизнеса. 20% ассортимента продукции дают обычно 80% от общего объема продаж в денежном выражении, то же самое можно сказать о 20% покупателей и клиентов.

Возьмем наше общество. 20% преступников совершают 80% преступлений; 20%водителей виновны в 80% дорожно-транспортных происшествий; 20% вступивших в брак ответственны за 80% разводов.

Наконец, 20% детей используют 80% возможностей, предоставляемых системой образования в данной стране.

Даже дома: 80% всего времени вы носите 20% имеющейся у вас одежды. 80% всех ложных тревог при срабатывании противоугонной сигнализации вызывается 20% возможных причин.

Двигатель внутреннего сгорания также великолепно подтверждает справедливость Принципа 80/20: 80% энергии, выделившейся при сгорании топлива, теряется, а колесам передается лишь 20% всей энергии. Эти 20% топлива производят 100% всего движения.

Этот принцип Парето лежит в основании идеи компьютерных *RISC*-процессоров (*Reduced Instruction Set Computer* – компьютер с набором коротких (простых, быстрых) команд). В то время как электронная промышленность шла по пути создания всё более сложных микропроцессоров со всё более объёмными системами сложных команд, чтобы обеспечить выполнение как можно большего числа сложных операций одной командой, создатели *RISC* обратили внимание на тот факт, что в течение большей части машинного времени процессор выполняет команды, составляющие очень небольшое подмножество всей системы команд. Возникла естественная идея: выбросить из схемы процессора реализацию 80 % редко используемых команд, оставив только 20 % используемых часто, и за счёт упрощения схемы сделать её более производительной.

Принцип Парето ни в коем случае не должен рассматриваться как непреложный закон природы с конкретно заданными числовыми параметрами. Применение же его в качестве общего принципа, требующего обращать внимание на неравномерность вклада разных факторов в результат и необходимость уделять различное внимание разным по важности факторам, вполне оправданно и полезно.

# 5. КООПЕРАТИВНЫЕ ИГРЫ

Игра называется кооперативной, или *коалиционной*, если игроки могут объединяться в группы, беря на себя некоторые обязательства перед другими игроками и координируя свои действия. Этим она отличается от некооперативных игр, в которых каждый обязан играть за себя. Развлекательные игры редко являются кооперативными, однако такие механизмы нередки в повседневной жизни

Кооперативные игры получаются в тех случаях, когда, в игре $n$ игроков разрешается образовывать определённые коалиции. Обозначим через $N$ множество всех игроков, $N=\{1, 2, ..., n\}$, а через $S$ – любое его подмножество. Пусть игроки из $S$ договариваются между собой о совместных действиях и, таким образом, образуют одну коалицию. Очевидно, что число таких коалиций, состоящих из $r$ игроков, равно числу сочетаний из $n$ по $r$, то есть $C_n^r$, а число всевозможных коалиций равно

$$\sum_{r=1}^{n} C_n^r = 2^n - 1.$$

Из этой формулы видно, что число всевозможных коалиций значительно растёт в зависимости от числа всех игроков в данной игре. Для исследования этих игр необходимо учитывать все возможные коалиции, и поэтому трудности исследований возрастают с ростом $n$. Образовав коалицию, множество игроков $S$ действует как один игрок против остальных игроков, и выигрыш этой коалиции зависит от применяемых стратегий каждым из n игроков.

Функция $\upsilon$, ставящая в соответствие каждой коалиции $S$ наибольший, уверенно получаемый его выигрыш $\upsilon(S)$, называется *характеристической функцией игры*. Так, например, для бескоалиционной игры $n$ игроков $\upsilon(S)$ может получиться, когда игроки из множества $S$ оптимально действуют как один игрок против остальных $N\backslash S$ игроков, образующих другую коалицию (второй игрок).

Характеристическая функция $\upsilon$ называется *простой*, если она принимает только два значения: 0 и 1. Если характеристическая функция $\upsilon$ простая, то коалиции $S$, для которых $\upsilon(S)=1$, называются *выигрывающими*, а коалиции $S$, для которых $\upsilon(S) = 0$, – *проигрывающими.*

Если в простой характеристической функции $\upsilon$ выигрывающими являются те и только те коалиции, которые содержат фиксированную непустую коалицию $R$, то характеристическая функция $\upsilon$, обозначаемая в этом случае через $\upsilon_R$, называется *простейшей*.

Содержательно простые характеристические функции возникают, например, в условиях голосования, когда коалиция является выигрывающей, если она собирает более половины голосов (простое большинство) или не менее двух третей голосов (квалифицированное большинство).

Более сложным является пример оценки результатов голосования в Совете безопасности ООН, где выигрывающими коалициями являются все коалиции, состоящие из всех пяти постоянных членов Совета плюс ещё хотя бы один непостоянный член, и только они.

Простейшая характеристическая функция появляется, когда в голосующем коллективе имеется некоторое "ядро", голосующее с соблюдением правила "вето", а голоса остальных участников оказываются несущественными.

Пусть коалиции как-то образованы. Тогда возникает вопрос: как делить общий выигрыш с учетом веса каждой коалиции между ее членами?

## 1. Принцип оптимальности в форме *C*-ядра

Естественно положить в основу анализа кооперативной игры принцип оптимального распределения максимального выигрыша $\upsilon(S)$ между сторонами $i \in S$.

Реализация этого принципа приводит к рассмотрению ***С-ядра*** – *множество недоминируемых «вполне устойчивых» дележей кооперативной игры.*

Вектор $x = (x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющий условиям индивидуальной и коллективной рациональности, называется *дележём* в условиях характеристической функции $\upsilon$.

Распределение выигрышей (делёж) игроков должно удовлетворять следующим естественным условиям: если обозначить через $x_i$ выигрыш $i$-го игрока, то, во-первых, должно удовлетворяться условие *индивидуальной рациональности*

$$x_i \geq \upsilon(i), \text{ для } i \in N \quad (1),$$

т.е. любой игрок должен получить выигрыш в коалиции не меньше, чем он получил бы, не участвуя в ней (в противном случае он не будет участвовать в коалиции); во-вторых, должно удовлетворяться условие *коллективной рациональности*

$$\sum_{i \in N} x_i = \upsilon(N) \qquad (2)$$

т.е. сумма выигрышей игроков должна соответствовать возможностям (если сумма выигрышей всех игроков меньше, чем $\upsilon(N)$, то игрокам незачем вступать в коалицию; если же потребовать, чтобы сумма выигрышей была больше, чем $\upsilon(N)$, то это значит, что игроки должны делить между собой сумму большую, чем у них есть).

Система $\{N, \upsilon\}$, состоящая из множества игроков, характеристической функции над этим множеством и множеством дележей, удовлетворяющих соотношениям (2) и (3) в условиях характеристической функции, называется *классической кооперативной игрой*.

Делёж $x$ доминирует $y$, если существует такая коалиция $S$, для которой делёж $x$ доминирует $y$. Это доминирование обозначается так: $x \succ y$.

Наличие доминирования $x \succ y$ означает, что в множестве игроков $N$ найдётся коалиция, для которой $x$ предпочтительнее $y$. Соотношение доминирования возможно не для всякой коалиции. Так невозможно доминирование по коалиции, состоящей из одного игрока или из всех игроков.

Любой дележ *из* $C$-ядра устойчив, в том смысле, что ни одна из коалиций не имеет ни желания, ни возможности изменить исход игры.

Для того чтобы делёж $x$ принадлежал с-ядру кооперативной игры с характеристической функцией $\upsilon$, необходимо и достаточно, чтобы для любой коалиции $S$ выполнялось неравенство $\upsilon(S) \le \sum_{i \in S} x_i$.

$C$-ядро может оказаться пустым, например, когда есть слишком сильные коалиции. Если $C$-ядро пусто, то требования всех коалиций одновременно не могут быть удовлетворены.

**Пример.** Найти $C$-ядро в кооперативной игре 3-х сторон, если максимальные гарантированные выигрыши всевозможных в данном случае семи коалиций ( $\sum_{r=1}^{3} C_3^r = 7$ ) следующие:

$\upsilon(1, 2, 3)=9$, $\upsilon(2, 3)=7$, $\upsilon(1, 3)=4$, $\upsilon(1, 2)=4$, $\upsilon(1) =\upsilon(2) =\upsilon(3) =0$.

**Решение**

Воспользуемся утверждением, раскрывающим метод построения $C$-ядра как множества *недоминируемых дележей, т. е. для того, чтобы дележ x(S) принадлежал* $C$-ядру необходимо и достаточно выполнения неравенств:

$$\upsilon(S) \le \sum_{i \in S} x_i ,\ S \subset N,$$

где $x_i$ – доля $i$-ой стороны; $i \in S$, такая, что должно выполняться требование $x_i \ge \upsilon(i)$, $i$=1, 2, 3.

Составим соотношения (4 уравнения для 3 неизвестных):

$$\begin{aligned} &x_1+ x_2 + x_3 \ge 9 \\ &x_2 + x_3 \ge 7 \\ &x_1 + x_3 \ge 4 \\ &x_1+ x_2 \ge 4 \\ &x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

Для нахождения $x_1$, $x_2$, $x_3$ получаем следующие системы из 3-х неизвестных:

I. $x_1+ x_2 + x_3 \ge 9$
$x_2 + x_3 \ge 7$
$x_1 + x_3 \ge 4$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0$

II. $x_1+ x_2 + x_3 \ge 9$
$x_2 + x_3 \ge 7$
$x_1 + x_2 \ge 4$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0$

III. $x_1+ x_2 + x_3 \ge 9$
$x_1 + x_3 \ge 4$
$x_1 + x_2 \ge 4$

IV. $x_2 + x_3 \ge 7$
$x_1 + x_3 \ge 4$
$x_1 + x_2 \ge 4$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$ $\qquad$ $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$

Решением этих систем являются соответственно:

I – ($x_1=2,\ x_2=5,\ x_3=2$); II – ($x_1=2,\ x_2=2,\ x_3=5$);
III – ($x_1=0,\ x_2=4,\ x_3=5$), ($x_1=0,\ x_2=5,\ x_3=4$); IV – ($x_1=0.5,\ x_2=3.5,\ x_3=3.5$).

Для кооперативных игр 3-х лиц, когда *С*-ядро не пусто, должно выполняться неравенство:

$$\upsilon(1,2)+\upsilon(1,3)+\upsilon(2,3) \leq 2\upsilon(1,2,3) \qquad (3)$$

Таким образом, решение рассматриваемой игры (*С*-ядро) состоит из: **($x_1=2,\ x_2=5,\ x_3=2$), ($x_1=2,\ x_2=2,\ x_3=5$), ($x_1=0,\ x_2=4,\ x_3=5$), ($x_1=0,\ x_2=5,\ x_3=4$)**, а ($x_1=0.5$, $x_2=3.5$, $x_3=3.5$) не удовлетворяет условию принадлежности С-ядру, т.к. 0.5+3.5+3.5 = 7.5 <9.

## 2. Принцип оптимальности в форме вектора Шепли

В случае, когда какая-то сторона (игрок) не является существенной, т. е. не принадлежит коалиции – носителю игры, то возникает необходимость конструирования принципа оптимальности как *принципа справедливого дележа*.

Одним из таких подходов является подход Шепли, суть которого в том, что он строиться на основании аксиом, отражающих справедливость дележей.

Для кооперативной игры рассмотрим некоторое упорядочение множества игроков *N*. Обозначим через *T* подмножество, содержащее *i* первых игроков в данном упорядочении. Вкладом *i*-го по счету игрока назовем величину $\upsilon(T)-\upsilon(T\setminus\{i\})$, где *v* – характеристическая функция кооперативной игры.

Вектором Шепли кооперативной игры называется такое распределение выигрыша, в котором каждый игрок получает математическое ожидание своего вклада в соответствующие коалиции *T*, при равновероятном возникновении упорядочений. Он представляет собой n-мерный вектор $\varphi(\upsilon) = (\varphi_1(\upsilon), \varphi_2(\upsilon), ..., \varphi_n(\upsilon))$, где $\varphi_i(\upsilon)$ – компонента вектора $\varphi(\upsilon)$, представляющая полезность (выигрыш) *i*-го игрока в кооперативной игре в результате соглашения или решения арбитра.

Наиболее распространенная формула для вычисления вектора Шепли имеет вид:

$$\phi_i(\upsilon)=\sum_{\substack{T\subseteq N\\ i\in T}}\phi_i(T)\,\left[\upsilon(T)-\upsilon(T\setminus\{i\})\right]=\sum_{\substack{T\subseteq N\\ i\in T}}\frac{(t-1)!\,(n-t)!}{n!}\left[\upsilon(T)-\upsilon(T\setminus\{i\})\right],$$

где *n* – количество игроков, *t* – количество участников коалиции *T*.

Вектор Шепли удовлетворяет ***аксиомам Шепли:***

1. **Линейность.**

Отображение $\varphi(\upsilon)$ представляет собой линейный оператор, то есть для любых двух игр с характеристическими функциями *v* и *w*: $\varphi(\upsilon+\omega)=\varphi(\upsilon)+\varphi(\omega)$ и для любой игры с характеристической функцией *v* и для любого $\alpha$: $\varphi(\alpha\upsilon)=\alpha\varphi(\upsilon)$.

2. **Симметричность.**

Получаемый игроком выигрыш не зависит от его номера. Это означает, что если игра *w* получена из игры *v* перестановкой игроков, то ее вектор Шепли $\varphi(\omega)$ есть вектор $\varphi(\upsilon)$ с соответствующим образом переставленными элементами.

3. **Аксиома болвана.** *Болваном* в теории кооперативных игр называется бесполезный игрок, не вносящий вклада ни в какую коалицию, то есть игрок *i*, такой что для любой коалиции, содержащей *i*, выполнено: $\upsilon(T)-\upsilon(T\setminus\{i\})=0$. Аксиома болвана состоит в том, что если игрок *i* – болван, то $\varphi_i(\upsilon) = 0$.

4. **Эффективность.**

Вектор Шепли позволяет полностью распределить имеющееся в распоряжении тотальной коалиции благосостояние, то есть $\sum\limits_{i\in S}\varphi_i(\upsilon)=\upsilon(T)$.

**Теорема Шепли**

Для любой кооперативной игры *v* существует единственное распределение выигрыша, удовлетворяющее аксиомам 1-4, задаваемое приведенной выше формулой.

Вектор Шепли содержательно можно интерпретировать следующим образом: предельная величина, которую вносит *i*-й игрок в коалицию *T*, выражается как $\upsilon(T)-\upsilon(T\setminus\{i\})$ и считается выигрышем *i*-го игрока.

$\varphi_i(\upsilon)$ – средний выигрыш *i*-го игрока в такой схеме интерпретации.

В том случае, когда $\upsilon$ – простейшая,

$$\upsilon(T)-\upsilon(T\setminus\{i\})=\begin{cases}0, \text{ если } T \text{ и } T\setminus\{i\} - \text{выигрывающие каолиции}\\ 1, \text{ если } T \text{ выигрывающая каолиция, а } T\setminus\{i\} - \text{не выигрывающая.}\end{cases}$$

Следовательно, тогда

$$\varphi_i(\upsilon)=\sum_T \gamma_i(T)=\sum_T \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!},$$

где $\gamma_i$ (*T*) – это вероятность того, что *i*-й игрок вступит в коалицию $T\setminus\{i\}$; суммирование по *T* распространяется на все такие выигрывающие коалиции *T*, что коалиция $T\setminus\{i\}$ не является выигрывающей.

Вектор Шепли является заданием принципа оптимальности в кооперативной игре, когда *C*-ядро пусто или, когда оно не пусто, но вектор Шепли ему не принадлежит.

**<u>Пример 1</u>.** Рассматривается корпорация из четырёх акционеров, имеющих 100 акций, распределенных следующим образом:

$$a_1 = 10,\ a_2 = 20,\ a_3 = 30,\ a_4 = 40.$$

Любое решение утверждается акционерами, имеющими в сумме более 50 акций. Это решение считается выигрышем, равным 1. Поэтому данная ситуация может рассматриваться как простая игра четырёх игроков, в которой выигрывающими являются следующие коалиции:

{2; 4} – 60 акций, {3; 4} – 70,
{1; 2; 3}– 60, {1; 2; 4} – 70, {2; 3; 4}– 90, {1; 3; 4} – 80,
{1; 2; 3; 4} - 100.

Найти вектор Шепли для этой игры.

**Решение**

Находим все выигрывающие коалиции, но не выигрывающие без 1-го игрока При нахождении $\varphi_1$ необходимо учитывать, что имеется только одна коалиция $T = \{1; 2; 3\}$, которая выигрывает, а коалиция $T \setminus \{1\} = \{2; 3\}$ не выигрывает. В коалиции $T$ имеется $t = 3$ игрока, поэтому

$$\varphi_1 = \frac{(t-1)!\ (n-t)!}{n!} = \frac{2!\cdot 1!}{4!} = \frac{1}{12}.$$

Далее, определяем все выигрывающие коалиции, но не выигрывающие без 2-го игрока: {2; 4}, {1; 2; 3}, {1; 2; 4}.

$$\varphi_2 = \frac{(2-1)!(4-2)!}{4!} + \frac{(3-1)!(4-3)!}{4!} + \frac{(3-1)!(4-3)!}{4!} = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}.$$

Далее, определяем все выигрывающие коалиции, но не выигрывающие без 3-го игрока: {3; 4}, {1, 2; 3}, {1; 3; 4}

$$\varphi_3 = \frac{(2-1)!(4-2)!}{4!} + \frac{(3-1)!(4-3)!}{4!} + \frac{(3-1)!(4-3)!}{4!} = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}.$$

Далее, определяем все выигрывающие коалиции, но не выигрывающие без 4-го игрока: {2; 4}, {3; 4}, {1; 2; 4}, {2; 3; 4}, {1; 3; 4}

$$\varphi_4 = \frac{(2-1)!(4-2)!}{4!} + \frac{(2-1)!(4-2)!}{4!} + \frac{(3-1)!(4-3)!}{4!} + \frac{(3-1)!(4-3)!}{4!} + \frac{(3-1)!(4-3)!}{4!} =$$

$$= \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}.$$

В результате получаем, что вектор Шепли равен $\left(\frac{1}{12}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{5}{12}\right)$. При этом, если считать, что вес голоса акционера пропорционален количеству имеющихся у него акций, то получим следующий вектор голосования $\left(\frac{1}{10}; \frac{2}{10}; \frac{3}{10}; \frac{4}{10}\right)$,который, очевидно, отличается от вектора Шепли.

Анализ игры показывает, что компоненты 2-го и 3-го игроков равны, хотя третий игрок имеет больше акций. Это получается вследствие того, что возможности образования коалиций у 2-го и 3-го игрока одинаковые. Для 1-го и 4-го игрока ситуация естественная, отвечающая силе их капитала.

**Пример 2.** Пусть n различных потребителей должны построить хранилища спецпродукции, при нарушении правил хранения которой может возникнуть опасная ситуация. Затраты на строительство зависят от объема хранилищ. Потребности в продукции потребителей определяются функциями $f_i(t)$, $i=1,2,\dots,n$. Для постройки хранилищ потребители могут организовывать коалиции $S \subset N$, $N=\{1,2,\dots,n\}$. Затраты на создание хранилищ заданы такой возрастающей функцией, что характеристическая функция принимает значения:

| Коалиция | {1} | {2} | {3} | {1, 2} | {1, 3} | {2, 3} | {1, 2, 3} |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\upsilon(S)$ | 2 | 3 | 2.5 | 4 | 3.9 | 5 | 6 |

Определить число хранилищ и коалиции, которые их будут строить. Члены коалиции равноправны.

**Решение**

Для вычисления распределения расходов между членами коалиции воспользуемся вектором Шепли (4).

1. Вклад 1-го потребителя, если создается коалиция $S = \{1,2,3\}$ равен:

$$\varphi_{1(2,\,3)}(\upsilon) = \frac{2!\cdot 0!}{3!}(6-5) + \frac{1!\cdot 1!}{3!}(4-3) + \frac{1!\cdot 1!}{3!}(3.9-2.5) + \frac{0!\cdot 2!}{3!}(2-0) = \frac{7}{5} = 1.4,$$

где ↕ ↕ ↕ ↕

*n = 3, t = 3 t = 2 t = 2 t = 1*

*6→ {1, 2, 3}, 5→ {2, 3}, 4→ {1, 2}, 3→ {2}, 3.9→ {1, 3}, 2.5→ {3}, 2→ {1}, 0→ {0}*

Выигрыш $\upsilon(S)$=6 коалиции $S = \{1,2,3\}$ и т. д.

Вклад 2-го потребителя, если создается коалиция $S = \{1,2,3\}$ равен:

$$\varphi_{2(1,\,3)}(\upsilon) = \frac{2!\cdot 0!}{3!}(6-3.9) + \frac{1!\cdot 1!}{3!}(4-2) + \frac{1!\cdot 1!}{3!}(5-2.5) + \frac{0!\cdot 2!}{3!}(3-0) = \frac{49}{20} = 2.45,$$

где ↕ ↕ ↕ ↕

*n = 3, t = 3 t = 2 t = 2 t = 1*

*6→ {1, 2, 3}, 3.9→ {1, 3}, 4→ {1, 2}, 2→ {1}, 5→ {2, 3}, 2.5→ {3}, 3→ {2}, 0→ {0}*

Вклад 3-го потребителя, если создается коалиция $S = \{1,2,3\}$ равен:

$$\varphi_{3(1,\,2)}(\upsilon) = \frac{2!\cdot 0!}{3!}(6-4) + \frac{1!\cdot 1!}{3!}(3.9-2) + \frac{1!\cdot 1!}{3!}(5-3) + \frac{0!\cdot 2!}{3!}(2.5-0) = \frac{43}{20} = 2.15,$$

где ↕ ↕ ↕ ↕

*n = 3, t = 3 t = 2 t = 2 t = 1*

*6→ {1, 2, 3},4→ {1,2}, 3.9→ {1, 3}, 2→ {1}, 5→ {2, 3}, 3→ {2}, 2.5→ {3}, 0→ {0}*

2. Вклад 1-го потребителя, если создается коалиция $S$ = {1,2} равен:

$$\varphi_{1(2)}(\upsilon) = \frac{1!\cdot 0!}{2!}(4-3) + \frac{0!\cdot 1!}{2!}(2-0) = \frac{3}{2} = 1.5,$$

где ↕ ↕

*n = 2, t = 2 t = 1*

*4→ {1, 2}, 3→ {2}, 2→ {1}, 0→ {0}*

Вклад 1-го потребителя, если создается коалиция $S$ = {1,3} равен:

$$\varphi_{1(3)}(\upsilon) = \frac{1!\cdot 0!}{2!}(3.9-2.5) + \frac{0!\cdot 1!}{2!}(2-0) = \frac{34}{20} = 1.7,$$

где ↕ ↕

*n = 2, t = 2 t = 1*

3. *{1, 3}, 2.5→ {3}, 2→ {1}, 0→ {0}*

Вклад 2-го потребителя, если создается коалиция $S$ = {2,1} равен:

$$\varphi_{2(1)}(\upsilon) = \frac{0!\cdot 1!}{2!}(4-2) + \frac{0!\cdot 1!}{2!}(3-0) = \frac{5}{2} = 2.5,$$

где ↕ ↕

*n = 2, t = 2 t = 1*

*4→ {1, 2}, 2→ {1}, 3→ {2}, 0→ {0}*

Вклад 2-го потребителя, если создается коалиция $S$ = {2,3} равен:

$$\varphi_{2(3)}(\upsilon) = \frac{0!\cdot 1!}{2!}(5-2.5) + \frac{0!\cdot 1!}{2!}(3-0) = \frac{11}{4} = 2.75,$$

где ↕ ↕

*n = 2, t = 2 t = 1*

*5→ {3, 2}, 2.5→ {3}, 3→ {2}, 0→ {0}*

Вклад 3-го потребителя, если создается коалиция $S$ = {3,1} равен:

$$\varphi_{3(1)}(\upsilon) = \frac{0!\cdot 1!}{2!}(3.9-2) + \frac{0!\cdot 1!}{2!}(2.5-0) = \frac{11}{5} = 2.2,$$

где ↕ ↕

*n = 2, t = 2 t = 1*

4. *{1, 3}, 2→ {1}, 2.5→ {3}, 0→ {0}*

Вклад 3-го потребителя, если создается коалиция $S$ = {3,2} равен:

$$\varphi_{3(2)}(\upsilon) = \frac{0!\cdot 1!}{2!}(5-3) + \frac{0!\cdot 1!}{2!}(2.5-0) = \frac{9}{4} = 2.25,$$

где ↕ ↕

*n = 2, t = 2 t = 1*

*5→ {2, 3}, 3→ {2}, 2.5→ {3}, 0→ {0}*

5. Вклады потребителей, если они входят в коалиции $S$= {1}, $S$= {2}, $S$= {3 заданы в таблице и равны:

$\varphi_{1(1)}(\upsilon) = 2$, $\varphi_{2(2)}(\upsilon) = 3$, $\varphi_{3(3)}(\upsilon) = 2.5$

Сравним вычисленные вклады для потребителей при вхождении их в различные коалиции.

Имеем:

$$\underset{2}{\varphi_{1(1)}(\upsilon)} > \underset{1.5}{\varphi_{1(2)}(\upsilon)} > \underset{1.4}{\varphi_{1(2,3)}(\upsilon)} \qquad \underset{2}{\varphi_{1(1)}(\upsilon)} > \underset{1.7}{\varphi_{1(3)}(\upsilon)} > \underset{1.4}{\varphi_{1(2,3)}(\upsilon)}$$

$$\underset{3}{\varphi_{2(2)}(\upsilon)} > \underset{2.5}{\varphi_{2(1)}(\upsilon)} > \underset{2.45}{\varphi_{2(1,3)}(\upsilon)} \qquad \underset{3}{\varphi_{2(2)}(\upsilon)} > \underset{2.75}{\varphi_{2(3)}(\upsilon)} > \underset{2.45}{\varphi_{2(1,3)}(\upsilon)}$$

$$\underset{2.5}{\varphi_{3(3)}(\upsilon)} > \underset{2.2}{\varphi_{3(1)}(\upsilon)} > \underset{2.15}{\varphi_{3(1,2)}(\upsilon)} \qquad \underset{2.5}{\varphi_{3(3)}(\upsilon)} > \underset{2.25}{\varphi_{3(2)}(\upsilon)} > \underset{2.15}{\varphi_{3(1,2)}(\upsilon)}$$

Так как вектор Шепли в данном примере характеризует затраты на создание хранилищ, то из сравнения вкладов видно, что потребителям выгоднее объединиться в коалицию $S = \{1,2,3\}$ и строить одно хранилище.

**<u>Пример 3.</u>** Решить пример 2 (строительство хранилища спецпродукции) путем вычисления $C$-ядра.

**Решение**

Составим соотношения (4 уравнения для 3 неизвестных):

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 \geq 6\\ &x_2 + x_3 \geq 5\\ &x_1 + x_3 \geq 3.9\\ &x_1 + x_2 \geq 4\\ &x_1 \geq 2,\ x_2 \geq 3,\ x_3 \geq 2.5 \end{aligned}$$

Для нахождения $x_1$, $x_2$, $x_3$ получаем следующие системы из 3-х неизвестных:

I. $$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 \geq 6\\ &x_2 + x_3 \geq 5\\ &x_1 + x_3 \geq 3.9\\ \\ &x_1 \geq 2,\ x_2 \geq 3,\ x_3 \geq 2.5 \end{aligned}$$

II. $$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 \geq 6\\ &x_2 + x_3 \geq 5\\ &x_1 + x_2 \geq 4\\ \\ &x_1 \geq 2,\ x_2 \geq 3,\ x_3 \geq 2.5 \end{aligned}$$

III. $$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 \geq 6\\ &x_1 + x_3 \geq 3.9\\ &x_1 + x_2 \geq 4\\ \\ &x_1 \geq 2,\ x_2 \geq 3,\ x_3 \geq 2.5 \end{aligned}$$

IV. $$\begin{aligned} &x_2 + x_3 \geq 5\\ &x_1 + x_3 \geq 3.9\\ &x_1 + x_2 \geq 4\\ \\ &x_1 \geq 2,\ x_2 \geq 3,\ x_3 \geq 2.5 \end{aligned}$$

Решением этих систем являются соответственно:

I – ($x_1=1$, $x_2=2.1$, $x_3=2.9$); II – ($x_1=1$, $x_2=3$, $x_3=2$);

III – ($x_1=1.9$, $x_2=2.1$, $x_3=2$); IV – ($x_1=1.45$, $x_2=2.55$, $x_3=2.45$).

Видно, что эти значения в совокупности не удовлетворяют условиям:

$$x_1 \geq 2,\ x_2 \geq 3,\ x_3 \geq 2.5.$$

Отсюда делаем вывод, что *C*-ядро пустое и принцип оптимальности надо искать на основе вычисления вектора Шепли.

**Ллойд Стауэлл Шепли** (1923-2016) – почетный профессор Калифорнийского Университета в Лос-Анджелесе. Он внес свой вклад в область математической экономики, особенно в теорию игр. С той поры как в 1940-х фон Нейман и Моргенштерн представили математические аспекты и приложения теории, Ллойд Шепли расценивается многими экспертами, собственно, как само воплощение теории игр.

Нобелевская премия по экономике за 2012 год присуждена Элвину Роту (Гарвардский университет, США) и Ллойду Шепли (Калифорнийский университет, США) за «теорию стабильного распределения и практическое применение рыночных моделей»

Ллойд Стауэлл Шепли

## Заключение

Теория игр очень многогранна и может применяться не только в игровых ситуациях. Ее суть состоит в том, чтобы определить стратегию и формализовать принятие решений. Существует пример, который, благодаря своей необыкновенной простоте, часто используется, чтобы объяснить, какие цели преследует теория игр: *Разрезание торта.*

Предположим, два человека должны поделить торт. Обычно в этом примере речь идет о детях: считается, что дети очень любят сладкое и потому хотят получить самый большой кусок, и это позволяет лучше понять ситуацию. Детский индивидуализм – идеальное качество для нужных нам игроков. Дележ торта будет происходить так: ребенок A будет резать торт, а ребенок B – первым выбирать себе кусок. Таким образом, ребенок A должен всегда помнить о ребенке B и о том, что после того, как он разрежет весь торт, B заберет себе самый большой кусок. Это условие является основополагающим для выбора наилучшей стратегии, которая, разумеется, состоит в том, чтобы разрезать торт на две равные части. Любой другой вариант опасен. Если, например, A подумает, что B – очень хороший и воспитанный ребенок и потому возьмет себе кусок поменьше, то он начнет резать торт на неравные куски. Но это решение содержит много рисков и основывается на догадках или дополнительной информации, которая не имеет ничего общего с игрой.

Это объяснение может показаться слишком простым, но в нем содержатся все ключевые элементы, определяющие сценарий, выбранный для теории игр. Ситуация типа «я играю только для того, чтобы приятно провести время, меня не беспокоит проигрыш, и вообще я могу позволить выиграть своему противнику» может быть вполне оправданной во многих сценариях, но не в теории игр. В ней игроки рассматриваются, прежде всего, как рациональные люди, чья цель – выиграть, а для этого им нужно думать о себе.

Теория игр – наука, изучающая поведение многих участников, когда достигаемые каждым результаты зависят от действий остальных.

"Есть в современной математике одна область, она носит безобидное название теории игр, но ей, несомненно, суждено сыграть очень важную роль в человековедении самого ближайшего будущего, – говорил Джон фон Нейман, один из основоположников кибернетики. – Она занимается вопросами оптимального поведения людей при наличии противодействующего противника. Для ученого противник – это природа со всеми ее явлениями; экспериментатор борется со средой; математик - с загадками математического мира; инженер – с сопротивлением материалов".

# 6. ЗАДАЧИ И МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

## 6.1. Основные понятия

Задачи управления запасами составляют один из наиболее многочисленных классов экономических задач исследования операций, решение которых имеет важное народнохозяйственное значение. Правильное и своевременное определение оптимальной стратегии управления запасами, а также нормативного уровня запасов позволяет высвободить значительные оборотные средства, замороженные в виде запасов, что в конечном счете повышает эффективность используемых ресурсов.

Рассмотрим основные характеристики моделей управления запасами.

***Спрос.*** Спрос на запасаемый продукт может быть *детерминированным* (в простейшем случае постоянным во времени) или *случайным.* Случайность спроса описывается либо случайным моментом спроса, либо случайным объектом спроса в детерминированные или случайные моменты времени.

***Пополнение склада.*** Пополнение склада может осуществляться либо периодически через определенные интервалы времени, либо по мере исчерпания запасов, т.е. снижения их до некоторого уровня.

***Объем заказа.*** При периодическом пополнении и случайном исчерпании запасов объем заказа может зависеть от того состояния, которое наблюдается в момент подачи заказа. Заказ обычно подается на одну и ту же величину при достижении запасом заданного уровня – так называемой *точки заказа.*

***Время доставки.*** В идеализированных моделях управления запасами предполагается, что заказанное пополнение доставляется на склад мгновенно. В других моделях рассматривается задержка поставок на фиксированный или случайный интервал времени.

***Стоимость поставки.*** Как правило, предполагается, что стоимость каждой поставки слагается из двух компонент – разовых затрат, не зависящих от объема заказываемой партии, и затрат, зависящих (чаще всего линейно) от объема партии.

***Издержки хранения.*** В большинстве моделей управления запасами считают объем склада практически неограниченным, а в качестве контролирующей величины служит объем хранимых запасов. При этом полагают, что за хранение каждой единицы запаса в единицу времени взимается определенная плата.

***Штраф за дефицит.*** Любой склад создается, для того чтобы предотвратить дефицит определенного типа изделий в обслуживаемой системе. Отсутствие запаса в нужный момент приводит к убыткам, связанным с простоем оборудования, неритмичностью производства и т.п. Эти убытки в дальнейшем будем называть *штрафом за дефицит.*

***Номенклатура запаса.*** В простейших случаях предполагается, что на складе хранится запас однотипных изделий или однородного продукта. В более сложных случаях рассматривается *многономенклатурный запас.*

***Структура складской системы.*** Наиболее полно разработаны математические модели одиночного склада. Однако на практике встречаются и более сложные структуры: иерархические системы складов с различными периодами пополнения и временем доставки заказов, с возможностью обмена запасами между складами одного уровня иерархии и т.п.

В качестве критерия эффективности принятой стратегии управления запасами выступает *функция затрат (издержек),* представляющая суммарные затраты на хранение и поставку запасаемого продукта (в том числе потери от порчи продукта при хранении и его морального старения, потери прибыли от омертвления капитала и т.п.) и затраты на штрафы.

***Управление запасами состоит в отыскании такой стратегии пополнения и расхода запасов, при которой функция затрат принимает минимальное значение.***

Ниже рассматриваются простейшие модели управления запасами.

Пусть функции $A(t)$, $B(t)$ и $R(t)$ выражают соответственно пополнение запасов, их расход и спрос на запасаемый продукт за промежуток времени $[0, t]$. В моделях управления запасами обычно используются производные этих функций по времени $a(t)$, $b(t)$, $r(t)$, называемые соответственно *интенсивностями пополнения, расхода и спроса.*

Если функции $a(t)$, $b(t)$, $r(t)$ – не случайные величины, то модель управления запасами считается *детерминированной,* если хотя бы одна из них носит случайный характер – *стохастической.* Если все параметры модели не меняются во времени, она называется *статической,* в противном случае – *динамической.* Статические модели используются, когда принимается разовое решение об уровне запасов на определенный период, а динамические – в случае принятия последовательных решений об уровнях запаса или корректировке ранее принятых решений с учетом происходящих изменений.

Уровень запаса в момент $t$ определяется основным уравнением запасов:

$$J(t) = J_0 + A(t) - B(t), \quad (1)$$

где $J_0$ – начальный запас в момент $t = 0$.

Уравнение (1) чаще используется в интегральной форме:

$$J(t) = J_0 + \int_0^t a(t)dt - \int_0^t b(t)dt. \quad (2)$$

***Пример 1.*** Интенсивность поступления деталей на склад готовой продукции цеха составляет в начале смены 5 дет/мин, в течение первого часа линейно возрастает, достигая к концу его 10 дет/мин, и затем остается постоянной. Полагая, что поступление деталей на склад происходит непрерывно в течение всех семи часов смены, а вывоз деталей со склада производится только в конце работы, записать выражение для уровня запаса в произвольный момент времени и, используя его, найти количество деталей на складе: а) через 30 мин после начала работы; б) в конце смены.

***Решение.*** По условию в течение смены не происходит выдачи деталей со склада, т. е. $b(t) = 0$. Интенсивность пополнения запаса в течение первого часа линейно возрастает, т. е. $a(t) = kt+b$.

Учитывая, что $a(0) =5$, получаем $b = 5$. Так как в конце часа, т. е. при $t = 60$ $a(60) = 10$, то $10 = k \cdot 60 + 5$, откуда $k = 1/12$. Таким образом, для первого часа смены $a(t) = (1/12)t + 5$, а затем $a(t)=10$.

Учитывая продолжительность смены (7 час. = 420 мин) и соотношение (2), получаем:

$$J(t) = \int_0^t \left(\frac{t}{12} + 5\right)dt = \frac{t^2}{24} + 5t, \text{ если } 0 \le t \le 60.$$

$$J(t) = \int_0^{60} \left(\frac{t}{12} + 5\right)dt + \int_{60}^{t} 10dt = \left(\frac{t^2}{24} + 5t\right)\Big|_0^{60} + 10t\,\Big|_{60}^{t} =$$
$$= 450 + 10t - 600 = 10t - 150, \text{ если } 60 \le t \le 420.$$

Количество деталей на складе через 30 мин после начала работы: $J(30) = 900/24 + 5 \cdot 30 = 187.5$, а в конце смены: $J(420) = = 10 \cdot 420 - 150 = 4050$.

### 6.2. Типовая задача по исследованию операций применительно к управлению запасами

На складе хранится товар, которым обеспечивается сеть магазинов. Товар поступает на склад равными порциями через равные промежутки времени и расходуется с постоянной скоростью так, что к моменту очередного поступления его запасы становятся равными нулю (рис 1).

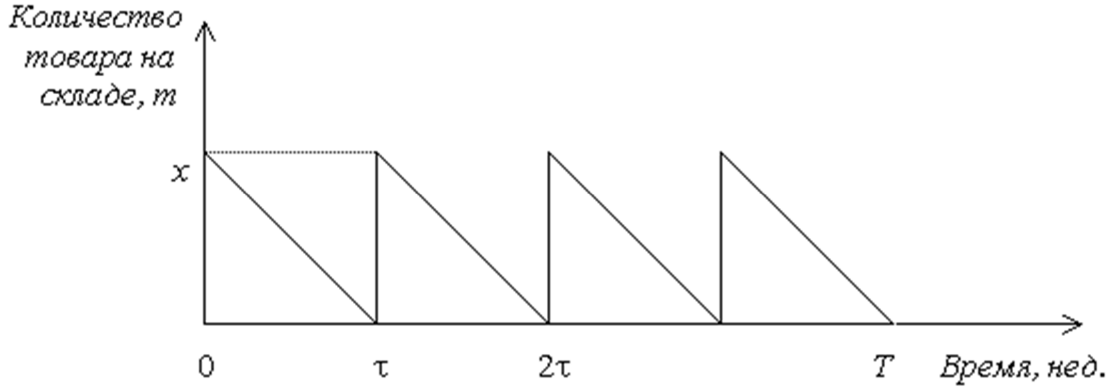



Рис. 1. Изменение запасов товара на складе во времени

Известны:

$c_1$ - стоимость доставки одной порции товара (*руб.*),

$c_2$ - стоимость хранения тонны товара в течение недели (*руб./*(*т* × *нед.*)),

$\tau$ - время между двумя последовательными поступлениями товара (*нед.*),

$T$ - время обслуживания сети магазинов (плановый период, *нед.*),

$N$ - необходимое количество товара в течение планового периода (спрос, *т*).

Требуется определить количество товара в порции так, чтобы общие затраты на обеспечение спроса $N$ и хранение товара за время $T$ были минимальными.

Перейдем к математической формулировке задачи. Обозначим через $x$ искомое количество товара в порции (в тоннах). Подсчитаем отдельно затраты на доставку и хранение товара.

На покрытие спроса $N$ необходимо $N/x$ доставок товара, затраты на которые (в *руб.*) составят

$$c_1\, N/x. \qquad (1)$$

За $\tau$ недель (между двумя последовательными поставками) запасы товара на складе убывают с постоянной скоростью от $x\tau$ до 0, поэтому средний запас составит $0.5x\tau$.

Действительно, если бы товар не расходовался, то затраты на хранение за $\tau$ недель равнялись бы $c_2 x\tau$ *руб.*, т.е. были пропорциональны площади $x\tau$ прямоугольника со сторонами $x$ и $\tau$ (см. рис. 1.). При равномерном расходовании товара затраты пропорциональны площади $0.5x\tau$ прямоугольного треугольника с катетами $x$ и $\tau$, которая ровно в два раза меньше площади соответствующего прямоугольника. Следовательно, затраты (в *руб.*) на хранение товара в течение планового периода равны

$$c_2\,(0.5x\,\tau\,)(\,N/x). \qquad (2)$$

Складывая затраты (1) и (2), получим формулу общих затрат

$$З(x) = c_1\, N/x + c_2\,(0.5x\tau\,)(\,N/x).$$

Поскольку здесь $\tau\,(N/x) = T$, то окончательно получим

$$З(x) = c_1\, N/x + 0.5\, c_2 T\, x. \qquad (3)$$

Итак, математически задача управления запасами заключается в нахождении такого положительного значения неизвестной $x$, при котором функция общих затрат (3) имеет минимум. В символической записи

$$З(x) = c_1\, N/x + 0.5\, c_2\, T\, x \rightarrow min, \quad (4)$$

$$x > 0. \qquad (5)$$

Условие (4) задачи называют *целевым*, оно содержит требование (минимизации целевой функции), по которому находится искомое $x$. Условие (5), вытекающее из физического смысла неизвестной $x$, есть *ограничение* на $x$.

Задача управления запасами, содержащая ограничение на неизвестную $x$, относится к классу задач на *условный экстремум*. Конечно, здесь она предельно упрощена. Существуют более сложные постановки, которые учитывают нерегулярность поставок товара, ограниченную емкость склада и другие факторы. По образному выражению известного американского специалиста по исследованию операций Г. Вагнера задача управления запасами "играет в исследовании операций такую же роль, как законы Ньютона в физике".

## 6.3. Статическая детерминированная модель управления запасами без дефицита

Предположение о том, что дефицит не допускается, означает полное удовлетворение спроса на запасаемый продукт, т.е. совпадение функций $r(t)$ и $b(t)$. Пусть общее потребление запасаемого продукта за рассматриваемый интервал времени $\theta$ равно $N$. Рассмотрим простейшую модель, в которой предполагается, что расходование запаса происходит непрерывно с постоянной интенсивностью, т.е. $b(t) = b$. Эту интенсивность можно найти, разделив общее потребление продукта на время, в течение которого он расходуется:

$$b = \frac{N}{\theta} \qquad (1)$$

Пополнение заказа происходит партиями одинакового объема, т.е. функция $a(t)$ не является непрерывной: $a(t) = 0$ при всех $t$, кроме моментов поставки продукта, когда $a(t)= n$, где $n$ – объем партии. Так как интенсивность расхода равна $b$, то вся партия будет использована за время

$$T = \frac{n}{b} \qquad (2)$$

Если отсчет времени начать с момента поступления первой партии, то уровень запаса в начальный момент равен объему этой партии $n$, т.е. $J(0) = n$. Графически уровень запаса в зависимости от времени представлен на рис 2.

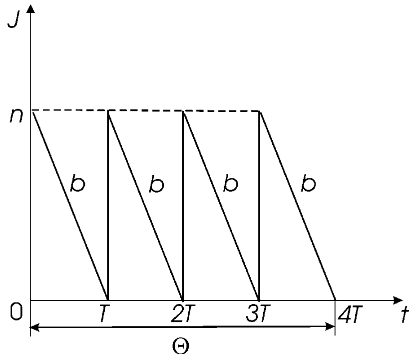



Рис.2.

На временном интервале $[0,T]$ уровень запаса уменьшается по прямой $J(t)= n-bt$ от значения $n$ до нуля. Так как дефицит не допускается, то в момент $T$ уровень запаса мгновенно пополняется до прежнего значения $n$ за счет поступления партии заказа. И так процесс изменения $J(t)$ повторяется на каждом временном интервале продолжительностью $T$ (*см.* рис.2).

*Задача управления запасами состоит в определении такого объема партии n, при котором суммарные затраты на создание и хранение запаса были бы минимальными.*

Обозначим суммарные затраты через $C$, затраты на создание запаса – через $C_1$, затраты на хранение запаса – через $C_2$ и найдем эти величины за весь промежуток времени $T$.

Пусть затраты на доставку одной партии продукта, не зависимые от объема партии, равны $\boldsymbol{c}_1$, а затраты на хранение одной единицы продукта в единицу времени – $c_2$;. Так как за время $\theta$ необходимо запастись $N$ единицами продукта, который доставляется партиями объема $n$, то число таких партий $k$ равно:

$$k = \frac{N}{n} = \frac{\theta}{T} \qquad (3)$$

Отсюда получаем $$C_1 = c_1 k = c_1 \frac{N}{n} \qquad (4)$$

Мгновенные затраты хранения запаса в момент времени $t$ равны $c_2 J(t)$. Значит, за промежуток времени $[0, T]$ они составят

$$c_2 \int_0^T J(t)dt = c_2 \int_0^T (n - bt)dt$$

или, учитывая (2):

$$c_2 \int_0^T J(t)dt = c_2 \int_0^T \left(n - \frac{nt}{T}\right)dt = c_2 \left(nt - \frac{nt^2}{2T}\right)\Bigg|_0^T = \frac{c_2 nT}{2}.$$

Средний запас за промежуток $[0, T]$ равен $nT/2$, т.е. *затраты на хранение всего запаса при линейном (по времени) его расходе равны затратам на хранение среднего запаса.*

Учитывая периодичность функции $J(t)$ (всего за промежуток времени будет $k = \frac{N}{n}$ "зубцов", аналогичных рассмотренному на отрезке $[0,T]$), и формулу (3), получаем, что затраты хранения запаса за промежуток времени $\theta$ равны:

$$C_2 = \frac{c_2 nT}{2} k = \frac{c_2 nT}{2} \cdot \frac{N}{n} = \frac{c_2 TN}{2} = \frac{c_2 \theta n}{2}. \qquad (5)$$

Нетрудно заметить, что затраты $C_1$ обратно пропорциональны, а затраты $C_2$ прямо пропорциональны объему партии $n$. Графики функций

$$C_1(n), \quad C_2(n), \quad C = \frac{c_1 N}{n} + \frac{c_2 \theta}{2} n,$$

а также функции суммарных затрат приведены на рис. 3.

(6)

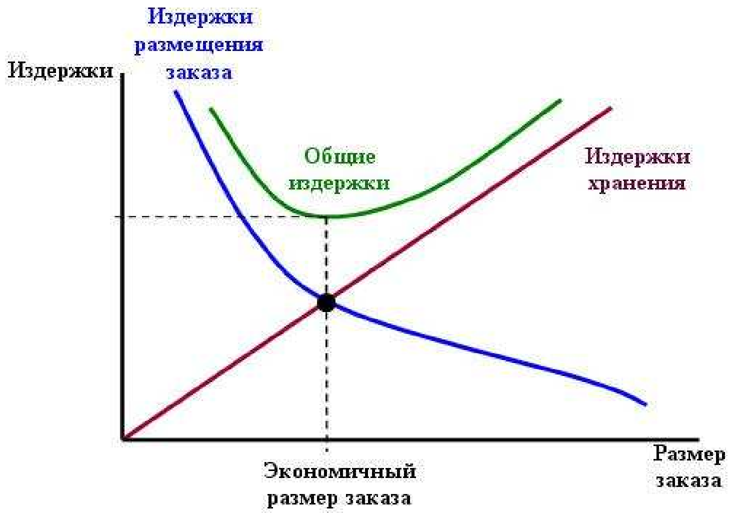



Рис. 3.

В точке минимума функции $C(n)$ ее производная

$$C'(n) = -\frac{c_1 N}{n^2} + \frac{c_2 \theta}{2} = 0,$$

откуда
$$n = n_0 = \sqrt{\frac{2c_1 N}{c_2 \theta}} \qquad (7)$$

или, учитывая (1)

$$n_0 = \sqrt{\frac{2c_1 b}{c_2}} \qquad (8)$$

Формула (8), называемая *формулой* ***Уилсона*** или *формулой наиболее экономичного объема партии,* широко используется в экономике. Эта формула может быть получена и другим способом, если учесть, что произведение $C_1 C_2 = 0{,}5 c_1 c_2 N\theta$ есть величина постоянная, не зависящая от $n$. В этом случае, как известно, сумма двух величин принимает наименьшее значение, когда они равны, т. е. $C_1 = C_2$ или

$$\frac{c_1 N}{n} = \frac{c_2 n \theta}{2} \qquad (9)$$

откуда получаем (7).

Из (9) следует, что *минимум общих затрат задачи управления запасами достигается тогда, когда затраты на создание запаса равны затратам на хранение запаса.* При этом минимальные суммарные затраты

$$C_0 = C(n_0) = \frac{2c_1 N}{n}, \qquad (10)$$

откуда, с учетом предыдущего, получим $C_0 = \sqrt{2c_1 c_2 \theta N}$

или
$$C_0 = \theta\sqrt{2c_1 c_2 b} \qquad (11)$$

Число оптимальных партий за время $\theta$ с учетом (2), (7) и (1) равно:

$$k_0 = \frac{N}{n_0} = \sqrt{\frac{c_2 N \theta}{2c_1}} = \theta\sqrt{\frac{c_2 b}{2c_1}}.$$

Время расхода оптимальной партии равно

$$T_0 = \frac{n_0}{b} = n_0 \frac{\theta}{N}$$

или
$$T_0 = \sqrt{\frac{2c_1 \theta}{c_2 N}} = \sqrt{\frac{2c_1}{c_2 b}}$$

***Пример.***

Потребность сборочного предприятия в деталях некоторого типа составляет 120 000 деталей в год, причем эти детали расходуются в процессе производства равномерно и непрерывно. Детали заказываются раз в год и поставляются партиями одинакового объема, указанного в заказе. Хранение детали на складе стоит 0,35 ден. ед. в сутки, а поставка партии -10 000 ден. ед. Задержка производства из-за отсутствия деталей недопустима. Определить наиболее экономичный объем партии и интервал между поставками, которые нужно указать в заказе (предполагается, что поставщик не допускает задержки поставок).

**Решение**.

По условию затраты на одну партию составляют $c_1 = 10000$ ден. ед., затраты хранения единицы запаса в сутки $c_2$=0.35 ден. ед. Общий промежуток времени $\theta = 1$ год = 365 дней, а общий объем запаса за этот период $N$ = 120 000 деталей. По формуле (7)

$$n = n_0 = \sqrt{\frac{2c_1 N}{c_2\theta}},\ n_0 = \sqrt{\frac{2\cdot 10000\cdot 120000}{0{,}35\cdot 365}} \approx 4335 \text{ дет., а из (2) следует}$$

$$T_0 = n_0 \cdot \frac{\theta}{N} = 13{,}2 \text{ дней.}$$

Итак, наиболее экономичный объем партии равен 4335 деталей, а интервал между поставками 13 дней.

## 6.4. Статическая детерминированная модель управления запасами с дефицитом

В рассматриваемой модели будем полагать наличие *дефицита.* Это означает, что при отсутствии запасаемого продукта, т.е. при $\boldsymbol{J(t)}$ = 0 спрос сохраняется с той же интенсивностью $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{b}$, но потребление запаса отсутствует $-\boldsymbol{b}(\boldsymbol{t}) = 0$, вследствие чего накапливается дефицит со скоростью $\boldsymbol{b}$. График изменения уровня запаса в этом случае представлен на рис. 4. Убывание графика ниже оси абсцисс в область отрицательных значений в отличие от графика на рис. 2. характеризует накопление дефицита.

Из рис. 4 видно, что каждый период "пилы" $\boldsymbol{T} = \dfrac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{b}}$ разбивается на два временных интервала, т. е. $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}_1 + \boldsymbol{T}_2$, где $\boldsymbol{T}_1$ - время, в течение которого производится потребление запаса, $\boldsymbol{T}_2$ - время, когда запас отсутствует и накапливается дефицит, который будет перекрыт в момент поступления следующей партии.

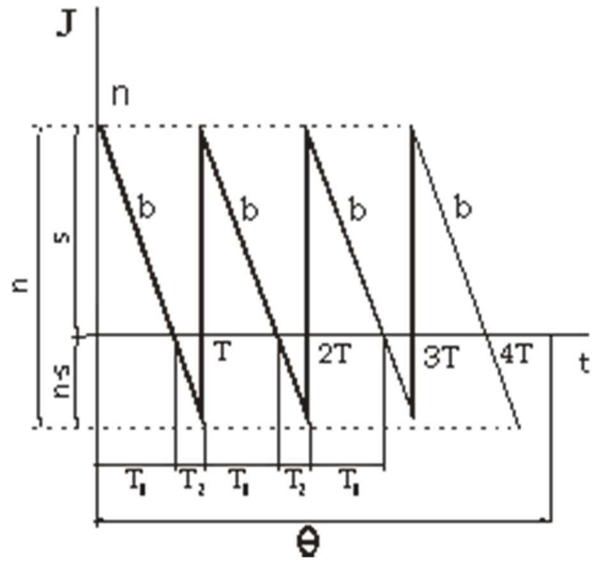



Рис. 4.

Необходимость покрытия дефицита приводит к тому, что максимальный уровень запаса $\boldsymbol{s}$ в момент поступления каждой партии теперь не равен ее объему $\boldsymbol{n}$, а меньше его на величину дефицита $\boldsymbol{n - s}$, накопившегося за время $\boldsymbol{T_2}$.

Из геометрических соображений легко установить, что

$$\boldsymbol{T}_1 = \frac{\boldsymbol{s}}{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{T}, \quad \boldsymbol{T}_2 = \frac{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{s}}{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{T}. \qquad (1)$$

В данной модели в функцию суммарных затрат $\boldsymbol{C}$ наряду с затратами $\boldsymbol{C_1}$ (на пополнение запаса) и $\boldsymbol{C_2}$(на хранение запаса) необходимо ввести затраты $\boldsymbol{C_3}$ — на штраф из-за дефицита, т.е.

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}_1 + \boldsymbol{C}_2 + \boldsymbol{C}_3.$$

Затраты $\boldsymbol{C_1}$, как и ранее, находим по формуле (9). Было показано, что затраты $\boldsymbol{C_2}$ при линейном расходе запаса равны затратам на хранение среднего запаса, который за время потребления $\boldsymbol{T_1}$ *р*авен $\boldsymbol{s}\boldsymbol{T}_1/2$; поэтому с учетом (5) и (3) эти затраты составят

$$C_2 = \frac{c_2 s T_1}{2} k = \frac{c_2 s \cdot s T}{2} \cdot \frac{\theta}{T} = c_2 s^2 \theta / 2n \qquad (2)$$

При расчете затрат $C_3$ будем считать, что штраф за дефицит составляет в единицу времени $c_3$ на каждую единицу продукта. Так как средний уровень дефицита за период $T_2$; равен $(n - s) T_2 / 2$, то штраф за этот период $T_2$ составит $\frac{1}{2} c_3 (n-s) T_2$, а за весь период $\theta$

$$C_3 = \frac{1}{2} c_3 (n-s) T_2 k = \frac{1}{2} c_3 (n-s) \frac{n-s}{n} T \frac{\theta}{T} = \frac{c_3 \theta (n-s)^2}{2n}. \qquad (3)$$

Теперь, учитывая предыдущие соотношения, суммарные затраты равны

$$C = c_1 \frac{N}{n} + \frac{c_2 \theta s^2}{2n} + \frac{c_3 \theta (n-s)^2}{2n}. \qquad (4)$$

Нетрудно заметить, что при $n = s$ формула совпадает с ранее полученной в модели без дефицита.

Рассматриваемая *задача управления запасами сводится к отысканию такого объема партии* ***n*** *и максимального уровня запаса* ***s****, при которых функция* ***C*** *принимает минимальное значение.* Другими словами, необходимо исследовать функцию двух переменных $C(n,s)$ на экстремум. Приравнивая частные производные $\partial C/\partial n$, $\partial C/\partial s$ к нулю, получим после преобразований систему уравнений:

$$\begin{cases} n^2 c_3 - (c_2 + c_3) s^2 = 2 c_1 N / \theta \\ s = n \dfrac{c_3}{c_2 + c_3} \end{cases} \qquad (5)$$

Решая систему, получаем формулы наиболее объема партии $\tilde{n}_0$ и максимального уровня запаса $\tilde{s}_0$ для модели с дефицитом

$$\tilde{n}_0 = \sqrt{\frac{2c_1 N}{c_2 \theta}} \sqrt{\frac{c_2 + c_3}{c_3}} = \sqrt{\frac{2c_1 b}{c_2}} \sqrt{\frac{c_2 + c_3}{c_3}}$$

$$\tilde{s}_0 = \sqrt{\frac{2c_1 N}{c_2 \theta}} \sqrt{\frac{c_3}{c_2 + c_3}} = n_0 \frac{c_3}{c_2 + c_3}$$

Величина $$\rho = \frac{c_3}{c_2 + c_3} \qquad (6)$$

называется *плотностью убытков из-за неудовлетворенного спроса* и играет важную роль в управлении запасами. Заметим, что $0 \le \rho \le 1$. Если значение $c_3$ мало по сравнению с $c_2$, то величина $\rho$ близка к нулю: когда $c_3$

значительно превосходит $c_2$, то $p$ близка к 1. Недопустимость дефицита равносильна предположению, что $c_3 = \infty$ или $\rho = 1$.

Используя основные формулы выражения можно записать компактнее:

$$\tilde{n}_0 = \sqrt{\frac{2c_1 b}{c_2 \rho}}$$

$$\tilde{s}_0 = \tilde{n}_0 \rho$$

Из сравнения формул следует, что оптимальные объемы партий для задач с дефицитом и без дефицита при одинаковых параметрах связаны соотношением

$$\tilde{n}_0 = \frac{n_0}{\sqrt{\rho}}$$

откуда вытекает, что *оптимальный объем партии в задаче с дефицитом всегда больше (в* $1/\sqrt{\rho}$ *раз), чем в задаче без дефицита.*

**Пример.**

Найти наиболее экономичный объем партии и интервал между поставками, сохраняя условия предыдущей задачи**,** кроме недопустимости дефицита, если известно, что отсутствие на сборке каждой детали приносит в сутки убытки в размере 3,5 ден. ед.

**Решение**.

По условию $c_3$ = 3,5. Ранее было получено по формуле $n_0 = 4335$ и $T_0$ = 13,2. Найдем плотность убытков из-за неудовлетворенного спроса по формуле $\rho$ = 3,5/(0,35 + 3,5) = 0,909, т.е. 100(1-0,909) =9,1% времени между поставками детали на сборке будут отсутствовать.

Теперь оптимальный размер партии по формуле = 4335/$\sqrt{0{,}909}$ = 4547. В силу пропорционального увеличения $\tilde{n}_0$, должен увеличиться интервал между поставками, т.е.

$\tilde{T}_0 = T_0 / \sqrt{\rho} = 13{,}2 / \sqrt{0{,}909} = 13{,}8 \approx 14$ дней.

## 6.5. Стохастические модели управления запасами с фиксированным временем задержки поставок

В идеализированных моделях управления запасами предполагалось, что пополнение запаса происходит практически мгновенно. Однако в ряде задач время задержки поставок может оказаться настолько значительным, что его необходимо учитывать в модели.

Пусть за время задержек поставок $\theta$ уже заказаны $n$ партий по одной в каждый из $n$ периодов продолжительностью $T = \theta/n$.

Обозначим:

$s_{НЗ}$ - первоначальный уровень запаса (к началу первого периода);

$s_i$ - запас за $i$-тый период;

$r_i$ - спрос за $i$-тый период;

$q_i$ - пополнение запаса за $i$-тый период;

Тогда к концу $n$-го периода на склад поступит $r = \sum_{i=1}^{n} r_i$ единиц, т.е.

$$s_n = s_{НЗ} + \sum_{i=1}^{n} q_i - \sum_{i=1}^{n} r_i, \qquad (1)$$

или
$$s_n = s - r, \qquad (2)$$

где
$$s = s_{НЗ} + \sum_{i=1}^{n} q_i, \qquad (3)$$

$$r = \sum_{i=1}^{n} r_i. \qquad (4)$$

Требуется найти оптимальный объем партии заказа, который необходимо сделать за последний $n$-ный период, предшествующий поступлению сделанного ранее заказа.

Математическое ожидание суммарных затрат в этом случае определяется по формуле:

$$C(s) = c_2 \sum_{r=0}^{s} (s - r) p(r) + c_3 \sum_{r=s+1}^{\infty} (r - s) p(r) \qquad (5)$$

а оптимальный запас $s$ находится по формуле:

$$F(s_0) < \rho < F(s_0 + 1) \qquad (6)$$

Найдя оптимальный запас $s_0$ и зная $q_1, q_2, ..., q_{n-1}$, можно вычислить $q_n$ по формуле:

$$q_n = s_0 - \left( s_{НЗ} + \sum_{i=1}^{n-1} q_i \right). \qquad (7)$$

**Пример.**

Ежедневно заказываемый скоропортящийся товар поступает в магазин спустя 7 дней после заказа. В момент очередного заказа запас товара составил в стоимостном выражении 10 ден. ед. Товар, проданный в день изготовления, приносит прибыль 0,95 ден. ед., а не проданный в этот день товар может быть затем реализован с убытком 0,10 ден. ед. На основании опытных данных получено следующее распределение спроса на данный товар, табл,1.

Таблица 1

| r | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| p(r) | 0,00 | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,05 | 0,08 | 0,11 | 0,12 | 0,14 | 0,13 | 0,10 |
| r | 110 | 120 | 130 | 140 | 150 | 160 | 170 | 180 | 190 | 200 | >200 |
| p(r) | 0,08 | 0,05 | 0,03 | 0,02 | 0,02 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,00 | 0,00 |

Необходимо определить оптимальный объем заказанного товара $q_7$ на седьмой день после заказа.

**Решение**

Плотность убытка из-за дефицита товара определяется по формуле $\rho = \frac{c_2}{c_2 + c_3}$. Таким образом, $\rho$=0,95(0,95+0,1)=0,905. Учитывая условие $F(s) = p(r < s)$, найдем значения функции распределения спроса, табл. 2.

Таблица 2

| *s* | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *r* | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 |
| *F(s)* | 0,00 | 0,00 | 0,01 | 0.03 | 0,08 | 0,16 | 0,27 | 0,39 | 0,53 | 0,76 |

| *s* | 100 | 110 | 120 | 130 | 140 | 150 | 160 | 170 | 180 | 190 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *r* | 100 | 110 | 120 | 130 | 140 | 150 | 160 | 170 | 180 | 190 |
| *F(s)* | 0,86 | 0,84 | 0,89 | 0 .92 | 0,94 | 0,96 | 0,97 | 0,98 | 0,99 | 1,00 |

Условию задачи удовлетворяет $s_0 = 120$, так как $F(120) < 0{,}905 < F(130)$.

Таким образом, оптимальный запас товара за 7 дней должен быть на сумму 120 ден. ед., откуда оптимальный объем заказанного товара на седьмой день составит:

$$q_7 = 120 + (10 - (10 + 20 + 10 + 10 + 20 + 10)) = 30 \text{ ден. ед.}$$

# Оглавление

Учебное издание

# ТЕОРИЯ ИГР
# И
# ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Учебное пособие

Составитель
ШЕВЕЛЁВ Геннадий Ефимович

Научный редактор
*доктор технических наук*,
*профессор О.Г. Берестнева*

**В авторской редакции**

Компьютерная верстка Г.Е. Шевелев

Национальный исследовательский
Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Издательства Томского политехнического университета
сертифицирована в соответствии с требованиями ISO 9001:2008

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30.
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru