

Синтез логических схем по заданной функции

Представление логических функций (ЛФ)

3 способа представления логических функций:

1. графиком (в виде временной диаграммы напряжения);
2. аналитическим (булевым выражением);
3. таблицей истинности.

В аналитическом виде ЛФ может быть представлена различными сочетаниями операций сложения и умножения переменных. Однако наиболее удобно представлять ЛФ в двух формах записи:

- 1) как суммы произведений переменных:

$$Y + \overline{X}Y + X\overline{Y}Z + \overline{X}Y\overline{Z}.$$

Такая запись функции называется **дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ)**.

- 2) как произведения сумм переменных:

$$Y(\overline{X} + Y)(\overline{X} + Y + Z)(X + \overline{Y} + Z)$$

Такая запись функции называется **конъюнктивной нормальной формой (КНФ)**.

Представление логических функций (ЛФ)

Переход от одной формы записи функции к другой осуществляется инверсией функции по теореме де Моргана. Например, логическая функция дана в ДНФ:

$$F = Y + \bar{X}Z + X\bar{Y}Z.$$

$$\begin{aligned}\overline{X + Y} &= \bar{X} \cdot \bar{Y} \\ \overline{X \cdot Y} &= \bar{X} + \bar{Y}\end{aligned}$$

Инвертируем и получаем функцию в КНФ:

$$\bar{F} = \overline{Y + \bar{X}Z + X\bar{Y}Z} = (\bar{Y})(\overline{\bar{X}Z})(\overline{X\bar{Y}Z}) = \bar{Y}(X + \bar{Z})(\bar{X} + Y + \bar{Z}).$$

Пользуясь законами логики, можно любую ЛФ преобразовать к ДНФ и КНФ. Для одной и той же ЛФ может существовать несколько равносильных дизъюнктивных и конъюнктивных форм. Однако существует только один вид ДНФ и КНФ, в которых функция может быть записана единственным образом – это **совершенные нормальные формы**.

В **совершенной дизъюнктивной нормальной форме (СДНФ)** каждое слагаемое содержит произведение всех переменных и/или их отрицаний и нет одинаковых слагаемых.

В **совершенной конъюнктивной нормальной форме (СКНФ)** каждый сомножитель содержит суммы всех переменных и/или их отрицаний и нет одинаковых сомножителей.

Наиболее наглядно и полно логическая функция представляется таблицей истинности. Переход от аналитического выражения ЛФ к таблице истинности осуществляется определением значения функции для всех вариантов сочетания значений переменных функции (т.е. **методом перебора**).

Представление логических функций (ЛФ)

№ комб.	X	Y	Z	F
1	0	0	0	0
2	0	0	1	1
3	0	1	0	1
4	0	1	1	0
5	1	0	0	0
6	1	0	1	0
7	1	1	0	1
8	1	1	1	0

Рассмотрим на примере переход от табличной формы представления функции к аналитической записи ее в СДНФ или СКНФ.

Пусть функция задана таблицей истинности.

Функция $F=1$ (истинна) в комбинациях переменных 2,3,7.

$$\overline{X}\overline{Y}Z = 1, \quad \overline{X}Y\overline{Z} = 1, \quad XY\overline{Z} = 1$$

Комбинации переменных, при которых функция истинна называют **минтермами**.

Функция в СДНФ есть сумма комбинаций переменных, при которых функция истинна, т.е.

$$F = \overline{X}\overline{Y}Z + \overline{X}Y\overline{Z} + XY\overline{Z}$$

Функцию можно представить не только единичными, но и нулевыми значениями.

Функция $F = 0$ (ложна) или $\overline{F} = 1$, если

$$\overline{X}\overline{Y}\overline{Z} = 0, \quad \overline{X}YZ = 0, \quad X\overline{Y}\overline{Z} = 0, \quad X\overline{Y}Z = 0, \quad XY\overline{Z} = 0, \quad XYZ = 0.$$

$$\overline{F} = \overline{X}\overline{Y}\overline{Z} + \overline{X}YZ + X\overline{Y}\overline{Z} + X\overline{Y}Z + XY\overline{Z} + XYZ.$$

Воспользовавшись теоремой де Моргана, получаем функцию в СКНФ:

$$F = (X + Y + Z)(X + \overline{Y} + Z)(\overline{X} + Y + Z)(\overline{X} + Y + \overline{Z})(\overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}).$$

Комбинации переменных, при которых функция ложна называют **макстермами**.

Методы минимизации логических функций

Минимизация – упрощение формы записи логической функции, направленное на устранение избыточности в записи функции.

При синтезе логических схем минимизированная функция реализуется с наименьшим числом логических элементов.

Минимизация производится:

1. алгебраическими способами;
2. методом карт Карно.

1. Использование законов булевой алгебры:

- а) добавление существующих слагаемых: $X + X + X = X$;
- б) умножение отдельных слагаемых на функцию вида: $X + \bar{X} = 1$;
- в) выделение слагаемых вида: $X + \bar{X} = 1$.

Пример.

$$\begin{aligned}\bar{X}YZ + X\bar{Y}Z + XY\bar{Z} + XYZ &= \underline{\bar{X}YZ} + \underline{X\bar{Y}Z} + \underline{XY\bar{Z}} + \underline{XYZ} + \underline{XYZ} + \underline{XYZ} = \\ &= YZ(\bar{X} + X) + XZ(\bar{Y} + Y) + XY(\bar{Z} + Z) = YZ + XZ + XY.\end{aligned}$$

Преобразование алгебраическими способами требует громоздких математических выкладок и больших временных затрат. Существуют приемы, основанные на правилах алгебры логики, позволяющие минимизировать функцию более быстро и просто (и даже безошибочно!)

Методы минимизации логических функций

2. Метод карт Карно (или диаграммы Вейча)

Метод используется для минимизаций функций с числом переменных до 5-6.

Карты Карно представляют собой таблицу, в которую заносятся значения всех возможных комбинаций переменных.

Количество полей в таблице составляет 2^n , где n – количество переменных.

«1» - прямое значение переменной;
«0» - инверсное значение переменной.

		A	
		0	1
B	0	$\bar{A}\bar{B}$	$A\bar{B}$
	1	$\bar{A}B$	AB

Карта Карно из двух переменных

Правила записи карты Карно

1. Разметка вертикальной оси не зависит от разметки горизонтальной.
2. Разметку осей можно начинать с любого сочетания переменных.
3. По каждой оси должны быть перечислены все сочетания переменных.
4. Карта составляется таким образом, чтобы соседние клетки отличались только одной переменной. Соседними клетками также считаются крайние клетки каждого столбца или строки.

Методы минимизации логических функций

Пример 1. $F = AB + A\bar{B}$

	$\bar{A}$	A
$\bar{B}$	0	1
B	0	1

Для каждого сочетания переменных AB в соответствующую ячейку пишется «1».

В незаполненные клетки – «0».

Соседние единицы объединяем в один контур по 2 или 4 или 8 единиц.

Каждый контур – член упрощенного булева выражения.

В примере имеется 1 контур. Это означает, что новое минимизированное выражение будет состоять из одного члена.

В контуре встречается комбинация с B и $\bar{B}$, в соответствии с правилами булевой алгебры B и $\bar{B}$ дополняют друг друга и их можно опустить, т.е. $(B + \bar{B})=1$. Т.о. $F=AB+A\bar{B} = A(B+\bar{B})=A$.

Ответ: $F = A$.

Пример 2. $F = AB\bar{C}D + \bar{A}BCD + ABCD$

	$\bar{A}\bar{B}$	$\bar{A}B$	AB	$A\bar{B}$
$\bar{C}\bar{D}$	0	0	0	0
$\bar{C}D$	0	0	1	0
CD	0	1	1	0
$C\bar{D}$	0	0	0	0

Карта Карно из
четырех переменных

На карте имеется два контура, следовательно новое минимизированное выражение будет состоять из двух членов, связанных функцией ИЛИ.

В горизонтальном контуре опускаем $(A + \bar{A})=1$;
в вертикальном контуре опускаем $(C + \bar{C})=1$.
Ответ: $F = BCD + ABD$.

В итоге, получили функцию, форма которой не подлежит дальнейшей минимизации и называется **тупиковой**.

Правила использования карт Карно

1. Нанести на карту Карно единицы в соответствии с заданной функцией (логическая функция должна быть представлена в СДНФ).
2. Объединяем соседние единицы контурами по 2, 4 или 8 клеток.
3. Проводим упрощения, исключая взаимодополняющие переменные внутри контура
4. Оставшиеся члены объединяем функцией ИЛИ. Полученное выражение записываем в ДНФ.

Методы минимизации логических функций

Пример 3.

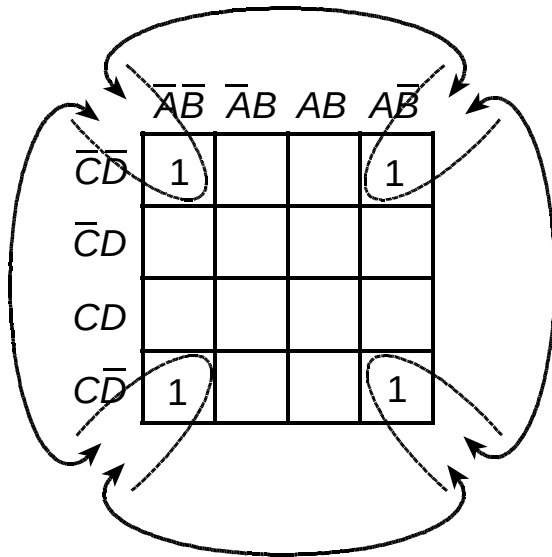
$$F = \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}\overline{B}\overline{C}D + \overline{A}\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}\overline{B}CD + \overline{A}B\overline{C}\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}D$$

Объединяем в два контура по 2 и 4 единицы.

Результат минимизации: $F = \overline{A}D + \overline{A}\overline{B}C$

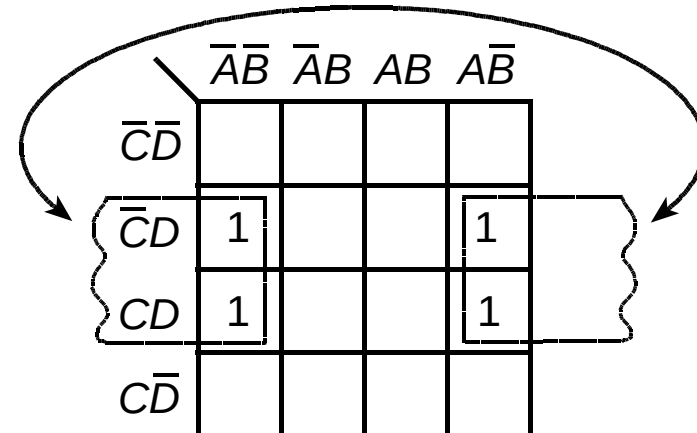
	$\overline{A}\overline{B}$	$\overline{A}B$	AB	$A\overline{B}$
$\overline{C}\overline{D}$				1
$\overline{C}D$	1	1		1
CD	1	1		
$C\overline{D}$				

Существуют также нестандартные способы построения контуров.



$$F = BD.$$

Здесь опускаются A и $\overline{A}$ и C и $\overline{C}$.



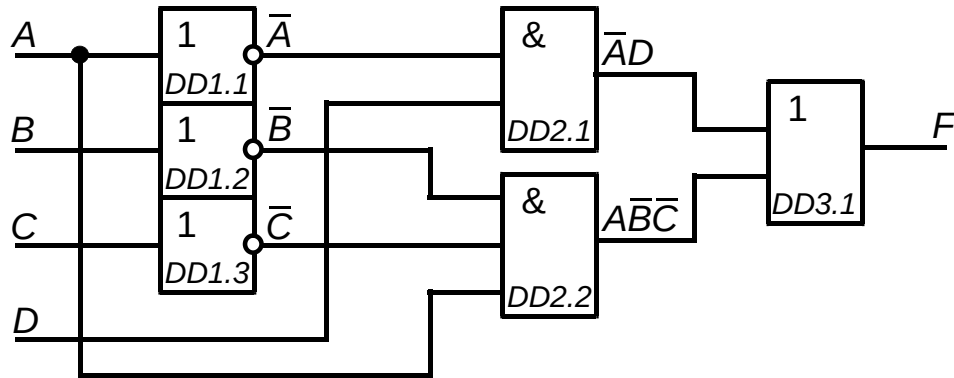
$$F = \overline{B}D.$$

Здесь опускаются C и $\overline{C}$ и A и $\overline{A}$.

Синтез электронных схем по заданной функции

В результате минимизации: $F = \overline{A}D + A\overline{B}\overline{C}$

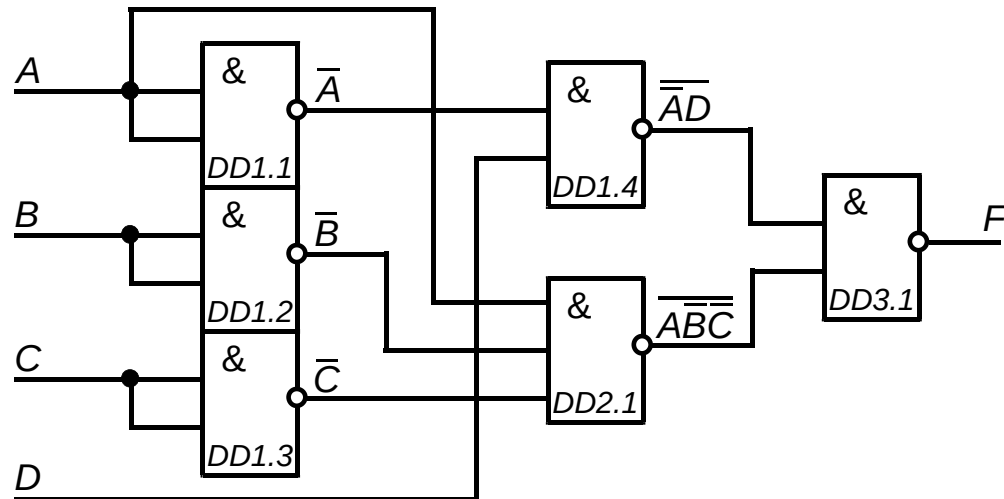
1. Реализация ЛФ в смешанном базисе.



2. Реализация ЛФ в базисе И-НЕ.

Преобразуем функцию к виду, в котором будет использоваться функция И-НЕ.

$$F = \overline{\overline{F}} = \overline{\overline{AD + A\overline{B}\overline{C}}} = \overline{\overline{AD} \cdot \overline{A\overline{B}\overline{C}}} = \overline{\overline{AD}} \cdot \overline{\overline{A\overline{B}\overline{C}}}$$

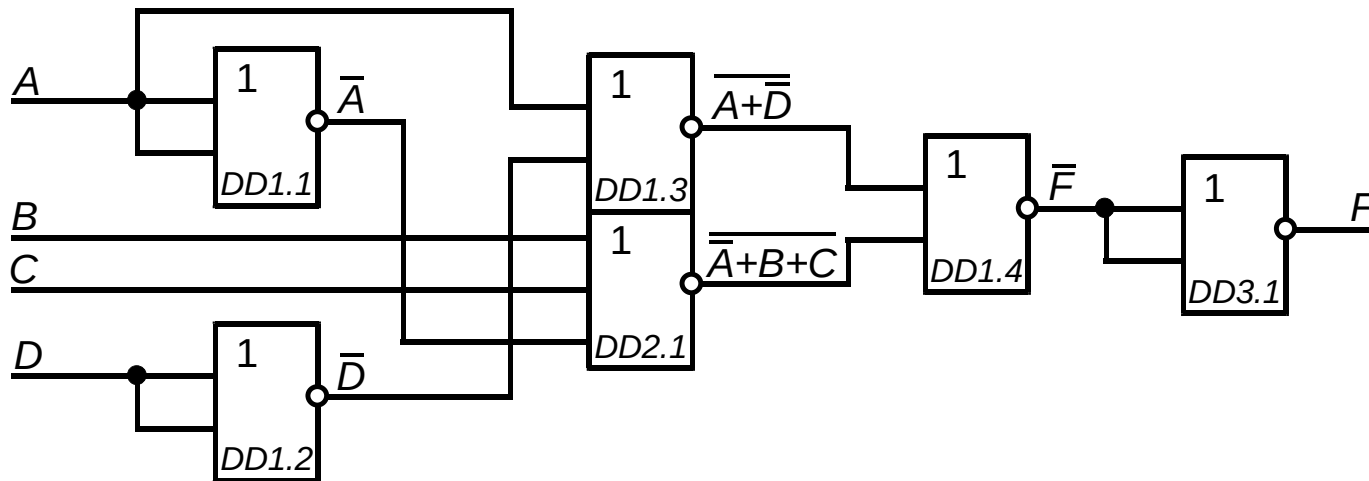


Синтез электронных схем по заданной функции

3. Реализация ЛФ в базисе ИЛИ-НЕ.

Преобразуем функцию к виду, где используется только логическая функция ИЛИ-НЕ.

$$F = \overline{A}D + A\overline{B}\overline{C} = \overline{\overline{F}} = \overline{\overline{\overline{A}D} \cdot \overline{\overline{A\overline{B}\overline{C}}}} = \overline{(A + \overline{D})(\overline{A} + B + C)} = \overline{(A + \overline{D}) + (\overline{A} + B + C)}$$



1. Забродин Ю.С. Промышленная электроника: Учебник для вузов. – М.: Альянс, 2008. – 496 с.: ил.
2. Лачин В.И., Савёлов Н.С. Электроника: Учебное пособие. – Ростов н/Д: Феникс, 2007. – 703, [1] с.
3. Гусев В.Г., Гусев Ю.М. Электроника и микропроцессорная техника: Учеб. для вузов. – М.: Высш. шк., 2008. – 798 с.: ил.