ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«**НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**»
ЮРГИНСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Л.Б. Гиль, А.В. Тищенкова

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

ЧАСТЬ II
ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОГО ВЕЩЕСТВЕННОГО АРГУМЕНТА

2-е издание, исправленное и дополненное

*Рекомендовано в качестве учебного пособия
Научно-методическим советом
Юргинского технологического института (филиала)
Национального исследовательского
Томского политехнического университета*

Издательство
Томского политехнического университета
2010

УДК 517(075)
ББК 22.6я73
Г47

Гиль Л.Б.

Г47 Сборник задач по высшей математике. Часть II. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функции одного вещественного аргумента: учебное пособие / Л.Б. Гиль, А.В. Тищенкова; Юргинский технологический институт. – 2-е изд., испр. и дополн. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2010. – 113 с.

Данное пособие содержит примеры и задачи по теории пределов и дифференциальному исчислению функций одной переменной.

Каждая глава содержит необходимые для усвоения основных понятий теоретические сведения, опорные задачи, задачи разного уровня сложности на закрепление теоретического материала, многие из которых сопровождаются подробными решениями и иллюстрациями, а также проверочные тесты, варианты индивидуальных домашних заданий. Основные понятия и алгоритмы решения задач представлены в табличной форме. Для организации самостоятельной работы студентов предусмотрен автоматизированный самоконтроль при наличии устройства «Символ».

Предназначено для студентов, обучающихся в технических вузах.

УДК 517(075)
ББК 22.6я73

Рецензенты

Доктор физико-математических наук, профессор ТПУ
М.Р. Черкасов

Кандидат физико-математических наук, профессор ТПУ
Е.Т. Ивлев

Кандидат педагогических наук, заведующий кафедрой ЕНО ЮТИ ТПУ
Е.В. Полицинский

ПРЕДИСЛОВИЕ

Сборник задач охватывает традиционный курс высшей математики по темам: «Введение в математический анализ» и «Дифференциальное исчисление функции одного вещественного аргумента», написан в соответствии с действующими программами курса высшей математики. Данное учебное пособие можно использовать как для самообразования, так и для активной работы с преподавателем на практических занятиях.

Каждый раздел пособия начинается с необходимого теоретического минимума, включающего важнейшие определения, теоремы и формулы. Затем даются разнообразные примеры и задачи, полностью охватывающие данные темы. Часть из них (опорные задачи) сопровождаются подробными решениями. В конце каждого раздела предлагаются тесты «Проверь свои знания по теме» и варианты индивидуальных домашних заданий.

Для организации самостоятельной работы студентов предусмотрена возможность автоматизированного самоконтроля при наличии устройства «Символ».

ГЛАВА I. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Предметом математического анализа является изучение переменных величин и зависимостей между ними. Понятия о функции и о пределе переменной величины составляют основу математического анализа.

1.1. Множества и операции над ними

Понятие *множества* в математике является первичным и составляет основу при построении ее различных разделов: теории чисел, теории функций, теории вероятностей и многих других. Наиболее близкими по смыслу к этому понятию являются: *набор, семейство, совокупность*. Основоположник теории множеств немецкий математик Георг Кантор (1845–1918) определял понятие множества как «объединение в одно общее объектов хорошо различимых нашей интуицией или нашей мыслью».

Объекты, из которых состоит множество, называются его *элементами* или точками. С математической точки зрения физическая природа элементов множества при этом неважна. Можно рассматривать множество звезд в созвездии Большой Медведицы, множество четных целых чисел или множество жителей города Томска.

Множества обозначают большими буквами X, $У$, A, B, а их элементы − малыми буквами.

Если x − элемент множества X, то пишут $x \in X$ (читаем «икс принадлежит множеству X»). Если x не является элементом множества X, то пишут $x \notin X$.

Запись $X=\{x_1,x_2,\ldots x_n\}$ означает, что множество X состоит из n элементов: $x_1,x_2,\ldots x_n$. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым*, его часто обозначают знаком Ø. Множества могут находиться в различных отношениях друг к другу.

Множество A называется подмножеством множества B, если каждый элемент множества A является элементом множества B.

Например, пусть даны множества:

$U=\{1;\ 2;\ 3;\ldots,10\}$ – множество целых чисел от 1 до 10;

$B=\{2;4;6;8;10\}$ – множество четных целых чисел из этого промежутка;

$C=\{1;3;5;7;9\}$ – множество нечетных целых чисел из этого промежутка.

На примере этого множества поясним основные *отношения* между множествами.

Очевидно, что все элементы множества B, а также C входят (включены) в множество U. В этих случаях говорят, что множество B (или C) является включением множества U. Запись, соответствующая такому отношению между множествами, имеет вид $B \subset U$ или $C \subset U$, где $\subset$ − символ включения. Множества B и C в этом случае называются *подмножествами* множества U.

На множестве U введем в рассмотрение еще два множества: D − множество целых чисел, которые больше или равны 3, т.е. $D = \{3;4;5;...;10\}$ и E − множество чисел, которые меньше или равны 7, т.е. $E = \{1;2;3;...7\}$.

Нетрудно определить, что все элементы множества U принадлежат либо множеству D, либо множеству E, либо им обоим. Другими словами, U составлено из элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств D или E, т.е. U объединяет множества D и E.

Этому соответствует запись $U = D \bigcup E$, где «$\bigcup$» − символ объединения множеств. Очевидно, что также $U = B \bigcup C$. Однако ясно, что это отличные ситуации. В первом случае можно говорить о множестве F, содержащем элементы (числа), принадлежащие как D, так и E. Действительно, если $F = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, то его элементы являются общими и для D, и для E. В этом случае говорят, что множество F является *пересечением* множеств D и E. Этому соответствует запись $F = D \bigcap E$, здесь «$\bigcap$» − символ *пересечения* множеств. Очевидно, что $B \bigcap C = 0$, т.е. множество четных и множество нечетных чисел не имеют общих элементов − их пересечение есть пустое множество.

Теперь обратим внимание на то, что во множестве D есть элементы (числа), которые принадлежат только ему и не принадлежат множеству E, имеющему с D общие элементы. Пусть это будет множество A. Оно состоит из трех элементов $a_1 = 8$ и $a_2 = 9$, $a_3 = 10$, т.е. $A = \{8,9,10\}$. Множество A, образованное из множеств D и E таким образом, что его элементы принадлежат D и не принадлежат E, называют *разностью* между D и E. Запись, соответствующая этому отношению между тремя множествами, имеет вид $A = D \setminus E$.

Очевидно, можно образовать множество $E \setminus D$. Заметим, что операцию образования разности двух множеств не следует смешивать с действием определения разности двух чисел.

Рассматривая выше действия (операции) с множествами, мы всегда оставались в пределах исходного множества U. Такое множество принято называть *универсальным*. Конечно, приведенные рассуждения можно было бы привести, взяв в качестве универсального множества все множество целых положительных чисел $\mathbb{N}$ (множество натуральных чисел).

Отметим еще одну операцию с множествами − *дополнение*. Множество, обозначенное $\overline{B}$ есть *дополнение* множества B целых четных положительных чисел до универсального множества U или просто дополнение множества B, оно содержит все элементы из универсального множества U, не принадлежащие B. Таким образом, дополнение $\overline{B}$ к множеству B − это разность $U \setminus B$, где U универсальное множество.

Отношения между множествами объединение, пересечение, дополнение можно иллюстрировать с помощью диаграмм Венна. Прямоугольник обозначает универсальное множество U. Овалы изображают произвольные подмножества A, B, C, D множества U. Заштрихованные части соответствуют отношению между множествами, которое записано под прямоугольником.

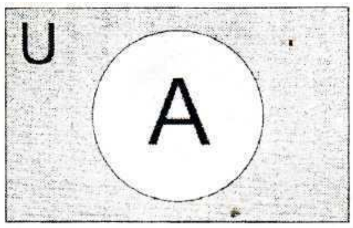
Для дальнейшей работы мы будем использовать математические символы. Приведем их в таблице 1.1.1.

Таблица 1.1.1

Символы

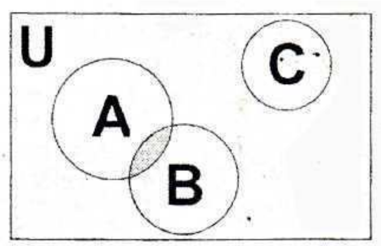
Символ(ы)	**Значение**
$\alpha \Rightarrow \beta$	из предложения α следует предложение β
$\alpha \Leftrightarrow \beta$	предложения равносильны
$\in$	принадлежит
$\notin$	не принадлежит
$\bigcup$	объединение множеств
$\bigcap$	пересечение множеств
$\exists$	существует, найдется
$\exists!$	существует, (причем) единственный
$\forall$	для любого, для всякого
$:$	имеет место; такое, что
$\rightarrow$	соответствие
$\rceil$	пусть
$\bigwedge$	и
$\bigvee$	или
$\neg(\overline{\ })$	не, отрицание
$\overline{\exists};\neg\exists$	не существует
$\forall x \in A : \alpha$	для всякого элемента x∈ A имеет место предложение α
$\forall \varepsilon > 0;\ \exists \delta > 0;\ \forall x :$	для любого положительного ε найдется такое положительное δ, что для всех x имеет место

а)



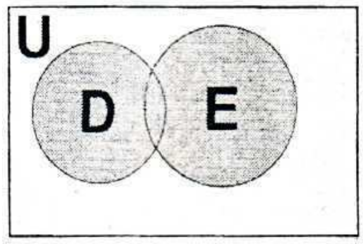
$\overline{A}=U \setminus A$ (дополнение)

б)



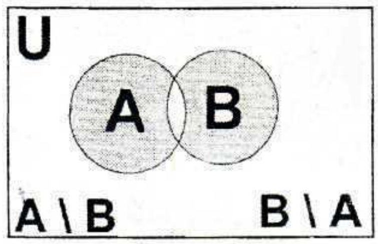
$D=A\bigcap B$; $A\bigcap C=\varnothing$
(пересечение)

в)



$F=D\bigcup E$ (объединение)

г)



$A \setminus B$ и $B \setminus A$ (разность)

Рис. 1.1.1 Операции над множествами

Свойства операций над множествами

Операции над множествами (рис.1.1.1) имеют ряд свойств и эти свойства аналогичны свойствам арифметических операций, выполняемых над числами. Вспомните: переместительный закон сложения $(a+b)=(b+a)$; распределительный закон умножения относительно сложения $a(b+c)=ab+ac$; сочетательный закон сложения $a+(b+c)=(a+b)+c$.

В таблице 1.1.2 приведены свойства операций над множествами, а также некоторые тождественные (равносильные) представления.
В третьем столбце таблицы указаны аналоги соответствующих свойств из алгебры вещественных чисел. Приведенные соотношения для множеств могут быть доказаны строго. Их справедливость можно подтвердить, используя диаграммы Венна. Сделайте это.

Таблица 1.1.2

Свойства операций над множествами

Коммутативность объединения	$A \bigcup B = B \bigcup A$	$a+b=b+a$	Переместительный закон сложения
Коммутативность пересечения	$A \bigcap B = B \bigcap A$	$ab=ba$	Переместительный закон умножения
Ассоциативность пересечения	$A \bigcap (B \bigcap C) =$ $= (A \bigcap B) \bigcap C$	$a(bc)=(ab)c$	Сочетательный закон умножения относительно сложения
Дистрибутивность пересечения относительно объединения	$A \bigcap (B \bigcap C) =$ $= (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$	$a(b+c)=$ $=ab+ac$	Распределительный закон умножения относительно сложения
Дистрибутивность объединения относитель-	$A \bigcup (B \bigcup C) =$ $= (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$	–	–
Свойства операций	$A \bigcup (A \bigcap B) = A$ $A \bigcap (A \bigcup B) = A$ $A \bigcup A = A$ $A \bigcap A = A$	–	–
Свойства пустого множества	$A \bigcup \varnothing = A$ $A \bigcap \varnothing = \varnothing$	$a+0=a$ $a \cdot 0 = 0$	Свойства нуля
Свойства универсального множества	$A \bigcap U = A$ $A \bigcup U = U$	–	–
Законы де Моргана	$\overline{A \bigcap B} = \overline{A} \bigcup \overline{B}$ $\overline{A \bigcup B} = \overline{A} \bigcap \overline{B}$	–	–
Следствия	$A \bigcup \overline{A} = U$ $A \bigcup \varnothing = \varnothing$ $\overline{U} = \varnothing$ $\overline{\varnothing} = U$	–	–

В заключение еще раз отметим, что теория множеств является основой построения формальной математически строгой и непротиворечивой теории во многих науках. В теории вероятностей, например, элементами множеств являются случайные события, а в математической логике − логические высказывания.

В математическом анализе рассматриваются числовые множества, их элементами являются вещественные числа − множества точек на числовой оси (множество R_1); пары вещественных чисел − множество точек на плоскости (множество R_2); тройки вещественных чисел − множество точек в объеме (множество R_3) и т.д.

Счетные и несчетные множества

Отметим, что всем элементам рассмотренного ранее множества U можно присвоить номер и их конечное число (десять элементов). В этом смысле множество U является *конечным и счетным*. Очевидно, множество N целых положительных чисел (натуральный ряд) также является счетным, но количество его элементов неограниченно велико. Такие множества называются бесконечными. Таким образом, *счетность* в теории множеств − это такое свойство множества, при котором всем элементам можно присвоить номера и, сделав это, ни один элемент в итоге не окажется без номера, т.е. не будет пропущенных элементов.

Рассмотрим множество $\mathbb{R}$ вещественных положительных чисел, меньших единицы, т.е. все десятичные дроби в промежутке [0;1]. Сделайте попытку пронумеровать эти числа. Попытка окажется безуспешной, если учесть, что между любыми двумя числами, допустим 0,21 и 0,22, всегда найдётся бесчисленное (бесконечное) множество других чисел. Их найдется бесконечно много и между числами 0,001 и 0,002. Подумав над этим, можно удивиться, но следует признать, что множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ не является счетным − оно *несчетно и бесконечно*.

Количество точек (вещественных чисел) на промежутке [0; 1] или [0; 100] и [0; 0,1] одинаково велико − их бесконечно много. Множество вещественных чисел в математике называют континуумом.

Таблица 1.1.3

Множества и операции над ними

Понятие	Содержание	Пример
Множество	совокупность, набор каких-либо предметов	– множество студентов института; – множество корней уравнения
Элементы множества	предметы, составляющие множество	–
Пустое множество ($\varnothing$)	множество, не содержащее ни одного элемента	–
Подмножество A (множества A) $A \subset B$	если каждый элемент множества A является элементом множества B	$A = \{2,3,5\}$ $B = \{1,2,3,4,5,6\}$
Равные множества $A = B$	если $A \subset B$ и $A \supset B$	$A = \{1,2,3,4,5,6\}$ $B = \{1,2,3,4,5,6\}$
Объединение (сумма) множеств $A \bigcup B$ (или $A + B$)	множество, состоящее из элементов, каждое из которых принадлежит хотя бы одному из множеств *A* или *B*; $A \bigcup B = \{x : x \in A \text{ или } x \in B\}$	$A = \{2,3,5,7\}$ $B = \{1,2,3,4,5,6\}$ $A \bigcup B = \{1,2,3,4,5,6,$
Пересечение (произведение) множеств $A \bigcap B$ (или $A \cdot B$)	множество, состоящее из элементов, каждый из которых принадлежит и множеству *A* и множеству *B*; $A \bigcap B = \{x : x \in A \text{ и } x \in B\}$	$A = \{2,3,5,7\}$ $B = \{1,2,3,4,5,6\}$ $A \bigcap B = \{2,3,5\}$
Разность множеств *A**B*	множество, состоящее из элементов, принадлежащих множеству *A*, не входящих в множество *B*; $A \setminus B = \{x : x \in A \text{ и } x \notin B\}$	*A*={2, 3, 5, 7} *B*={1, 2, 3, 4, 5, 6} $A \setminus B$={7} $B \setminus A$={1, 4, 6}
Интервал (числовой промежуток)	подмножества всех действительных чисел	–
Отрезок (сегмент, замкнутый промежуток) $[a;b]$	$\{x : a \le x \le b\}$	–

Интервал (открытый промежуток) $(a;b)$	$\{x: a < x < b\}$	–
Полуоткрытые интервалы (или полуоткрытые отрезки) $(a;b]$, $[a;b)$	$\{x: a < x \le b\}$, $\{x: a \le x < b\}$	–
Бесконечные интервалы (промежутки) $(-\infty;b]$, $(-\infty;b)$, $(-\infty;\infty)$	$\{x: x \le b\}$, $\{x: x < b\}$ $\{x: -\infty < x < \infty\}$	–
Окрестность точки	любой открытый интервал, содержащий эту точку	–
Отображение множества A в множество B	такое правило, при котором каждому элементу $a \in A$ некоторым способом поставлен в соответствие один элемент $b \in B$.	–
Отображение множества A на множество B	такое правило, при котором каждому элементу $a \in A$ некоторым способом поставлен в соответствие один элемент $b \in B$, и при этом каждый элемент множества B соответствует какому-либо элементу множества A.	–

1.2. Числовые функции одного вещественного аргумента

Пусть X и Y – два множества действительных чисел. Элементы этих множеств будем обозначать буквами x и y соответственно. Задать соответствие между множеством X и множеством Y – это значит указать правило, по которому для каждого числа x из множества X выбирается одно, несколько или даже бесконечно много чисел y из множества Y. При этом может оказаться, что некоторым числам $x \in X$ не будет соответствовать никакое число $y \in Y$. Например, если задать соответствие между множествами действительных чисел $X = R$ и $Y = R$ в виде формулы $x^2 + y^2 = 1$, то каждому числу $x \in (-1;1)$ будут соответствовать два числа: $y = \sqrt{1-x^2}$ и $y = -\sqrt{1-x^2}$.

Числам $x = 1$ и $x = -1$ соответствует единственное число $y = 0$, а всем остальным $x \in R$ не соответствует никакое y.

Соответствия между числовым множеством X и числовым множеством Y обычно обозначают буквами латинского алфавита $f, F, g...$ и пишут $X \xrightarrow{f} Y$, $X \xrightarrow{F} Y$, $X \xrightarrow{g} Y$.

Соответствие f, относящее каждому данному числу x из множества X единственное число y из множества Y, называют *числовой функцией* аргумента x, пишут $y = f(x)$.

При этом x называют независимой, а y – зависимой переменной; множество X – *областью определения* функции $f(x)$, а множество Y – *областью изменения* (или *множеством значений*) функции $f(x)$. Иногда областью определения и область изменения функции $y = f(x)$ обозначают $D(f)$ и $E(f)$ соответственно.

Числовая функция $y = f(x)$ может быть определена и как множество упорядоченных пар действительных чисел $(x; f(x))$ таких, что для каждого x в множестве этих пар имеется не более одной пары с первым элементом x. Например, функция, задаваемой формулой $y = x^2$, может быть также задана как множество всех упорядоченных пар вида $(x; x^2)$.

Если переменные x и y рассматривать как декартовы координаты точек на плоскости, то *графиком функции* $y = f(x)$ называют множество точек координатной плоскости Oxy с координатами $(x; f(x))$.

Способы задания функций

Существует три основных способа задания функции:

- аналитический,
- табличный,
- графический.

Аналитический способ. Рассмотрим основные формы аналитического задания функции.

1. *Явная форма задания функции*. Функция задается в виде формулы, указывающей операции (и последовательность их выполнения),

которые необходимо совершить над значением независимой переменной, в результате которых получаются соответствующие ей значения функции.

Например, пусть функция $y = f(x)$ имеет вид $y = (\sqrt{x} - 1)^2$. Область определения данной функции $D(f) = [0; +\infty)$.

Возьмем некоторое значение $x \in D(f)$. Для получения значений $y = f(x)$ над величиной x следует провести следующие операции, в результате которых получится величина y:

а) извлечь квадратный корень из числа x;

б) вычесть из полученного значения квадратного корня число единицу;

в) полученную разность возвести в квадрат.

При аналитическом способе задания функции при одних значениях аргумента $x \in D_1$ функция может задаваться одной формулой, а при других значениях аргумента $x \in D_2$ – другой формулой $\left(D_1 D_2 = D(f)\right.$ и $\left.D_1 \cap D_2 = \varnothing\right)$.

Примером такой функции в промежутке $(-\infty; +\infty)$ может служить функция, определяемая следующими условиями:

$f(x) = 1$, если $x > 0$,

$f(x) = -1$,если $x < 0$,

$f(0) = 0$.

Эта функция имеет специальное обозначение $sign\ x$ (читается «сигнум x») и называется «знак числа x».

2. *Неявная форма задания функции.* Под неявным заданием функции в виде уравнения с двумя переменными $F(x, y) = 0$.

Уравнение $F(x, y) = 0$ задает функцию лишь в том случае, если множество упорядоченных пар $(x; y)$, являющихся решением данного уравнения, таково, что для любого числа x имеется в этом множестве не более одной пары $(x; y)$ с первым элементом x. Например, уравнение $xy - 1 = 0$ задает функцию, в то время как уравнение вида $x^2 + y^2 = 1$ задает не функцию, а соответствие, так как среди множества упорядоченных пар $(x; y)$, являющихся решением данного уравнения, найдутся, например, две такие пары с совпадающим первым элементом: $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$ и $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

3. *Параметрическая форма задания функции.*

При параметрическом задании функции соответствующие друг другу значение переменных x и y выражаются через третью величину, называемую параметром $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$.

В некоторых случаях функция, заданная в параметрическом виде, может быть также записана и в явной форме.

Например, для функции $x=\sin t$, $y=\cos t$, $t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, заданной в параметрической форме, допускается запись в явной форме $y=\sqrt{1-x^2}$.

Табличный способ. Функция задается таблицей, содержащей значения аргумента и соответствующие значения функции.

Графический способ. Функция задается графиком – множеством точек плоскости, абсциссы которых есть значения аргумента x, а ординаты – соответствующие им значения функции $y=f(x)$.

Сумма, произведение, разность и частное двух функций.

Функции $f(x)$ и $g(x)$ называются *равными* на общей части их области определения $D(f)\cap D(g)$, если $f(x)=g(x)$ при всех $x\in D(f)\cap D(g)$.

Суммой двух функций $f(x)$ и $g(x)$, определённых на множествах значений независимой переменной $D(f)$ и $D(g)$ соответственно, называется функция $S(x)$, задаваемая условиями:

1) область определения функции $S(x)$ (если нет специальной оговорки) есть общая часть множеств $D(f)$ и $D(g)$, т.е. $D(S)=D(f)\cap D(g)$;

2) значение функции $S(x)$ в каждой точке $x_0\in D(S)$ вычисляются как сумма значений функций $f(x)$ и $g(x)$ в точке x_0: $S(x_0)=f(x_0)+g(x_0)$.

Аналогично определяются разность, произведение и частное двух функций, причем частное двух $\frac{f(x)}{g(x)}$ определено лишь при тех значениях $x\in D(f)\cap D(g)$, при которых функция $g(x)$ не обращается в нуль.

Сложная функция (суперпозиция функций). Пусть $y = f(x)$ – числовая функция с областью определения $D(f)$ и областью изменения (множеством значений) $E(f)$, а – числовая функция, заданная на множестве $E(f)$ или некотором его подмножестве, с областью изменения $E(g)$. Соответствие, относящее каждому данному числу x из множества $D(f)$ единственное число y из множества $E(f)$, а числу y – единственное число z из множества $E(g)$, называют *сложной функцией (или суперпозицией функций* $y = f(x)$ и $z = g(y)$) и записывают $z = g(f(x))$.

Большинство функций, изучаемых в элементарной математике и математическом анализе, можно рассматривать как сложные функции. Например, функция $z = \sqrt{x} - 1$. Может быть представлена как суперпозиция двух функций: $y = \sqrt{x}$, $z = y - 1$.

Четные и нечетные функции.

Числовая функция $y = f(x)$ *называется четной,* если выполняются условия:

1) область определения функции симметрична относительно точки О числовой оси (т.е. если точка x_0 принадлежит области определения функций, то и точка также принадлежит области определения функции);

2) для любого значения независимой переменной, принадлежащего области определения функции, выполняется равенство $f(x) = f(-x)$.

График четной функции симметричен относительно оси ординат.

Числовая функция $y = f(x)$ *называется нечетной,* если выполняются условия:

1) область определения функции симметрична относительно точки О числовой оси (т.е. если точка x_0 принадлежит области определения функции, то и точка $-x_0$ также принадлежит области определения функции);

2) для любого значения независимой переменной, принадлежащего области определения функции, выполняется равенство.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат, т.е. центрально симметричен.

Свойства четных и нечетных функций

1. Сумма, разность, произведение и частное двух четных функций есть четная функция.

2. Сумма и разность нечетных функций – нечетная функция, а произведение и частное – четная функция.

Доказательство четности (или нечетности) функции $y = f(x)$ проводится следующим образом. Выясняется симметричность области определения функции $y = f(x)$ относительно точки О числовой оси. Если область определения функции несимметрична относительно точки О, то функция не является ни четной, ни нечетной. Если же область определения функции симметрична относительно точки О, то переходят к проверке справедливости равенств $f(x) = f(-x)$, $f(x) = -f(-x)$. Если выполняется первое из равенств, то функция $f(x)$ – четная, если второе – то нечетная. Если не выполняется ни одно из приведенных равенств, то функция не является ни четной, ни нечетной.

Пример. 1.2.1. Функция $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ не является четной и не является нечетной, так как ее область определения несимметрична относительно точки О (в точке $x = 1$ функция определена, а в точке $x = -1$ не определена).

Пример. 1.2.2. Функция $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x}$ имеет симметричную относительно точки О область определения, но не является ни четной, ни нечетной, в чем легко убедиться на основании следующих вычислений:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 + (-x)}{-x} = \frac{x^2 - x}{-x} = -\frac{x^2 - x}{x};$$

$$-f(-x) = -\frac{(-x)^2 + (-x)}{-x} = -\frac{x^2 - x}{-x} = \frac{x^2 - x}{x}.$$

Нетрудно заметить, что $f(-x) \neq f(x)$ и $-f(-x) \neq f(x)$.

Пример. 1.2.3. Функция $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ имеет симметричную область определения относительно точки О числовой оси и удовлетворяет первому из равенств $f(x) = f(-x)$; $f(-x) = \dfrac{1}{(-x)^2 - 1} = \dfrac{1}{x^2 - 1} = f(x)$.

Следовательно, функция $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ – четная функция.

Взаимно обратные функции. Пусть $y = f(x)$ – числовая функция с областью определения $D(f)$ и областью изменения (множеством значений) $E(f)$. Далее для простоты будем полагать, что множества $D(f)$

и $E(f)$ представляют собой некоторые промежутки. Выберем какое-нибудь значение y_0 из множества значений функции $E(f)$, тогда во множестве $D(f)$ обязательно найдётся хотя бы одно значение $x = x_0$, такое, что $f(x_0) = y$.

Будем рассматривать функции, у которых каждому значению y_0 из области изменения функции соответствует единственное значение x_0 из области определения функции. *Соответствие*, относящее каждому данному числу y из множества $E(f)$ единственное число x_0 из множества $D(f)$, называют функцией, *обратной функции* f, и обозначают символом $f^{-1}: f^{-1}(y)$.

Не любая функция имеет обратную функцию. Функции, для которых существуют обратные функции, называют обратимыми; функции f и f^{-1} называют *взаимно обратными*.

Для того чтобы функция $y = f(x)$, определённая на промежутке $(a;b)$, имела обратную функцию, нужно, чтобы она была непрерывной и монотонной (возрастающей или убывающей) на этом промежутке. Тогда функция f^{-1} также будет монотонной и непрерывной на множестве значений функции $f(x)$.

Свойства взаимно обратных функций

1. Если функция f^{-1} является обратной для функции f, то и функция f будет обратной для функции f^{-1}.

2. Область определения функции является областью изменения функции f^{-1}, а область изменения функции f – областью определения функции f^{-1}.

3. Графики взаимно обратных функций симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов координатной плоскости *Oxy* (рис.1.2.1)

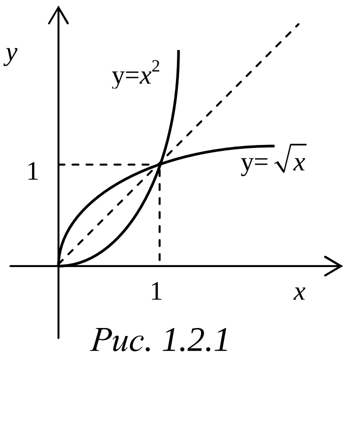
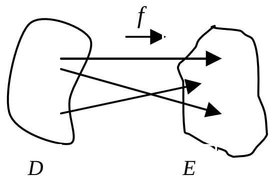
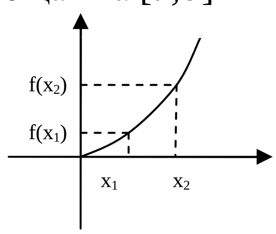
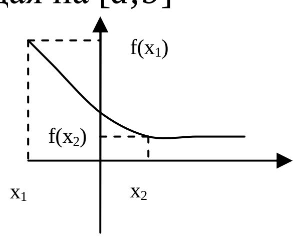
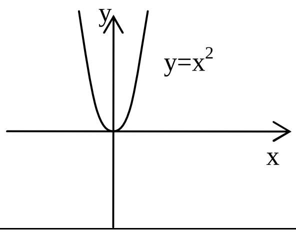
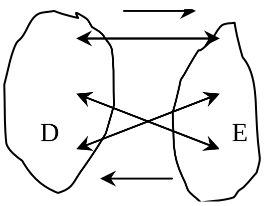


Рис. 1.2.1

Таблица 1.2.1

Функция

<table>
<tr><th colspan="3">Понятие</th><th>Содержание</th></tr>
<tr><td colspan="3">1. Функция (числовая) $y=f(x)$;
$f:D\to E$

</td><td>отображение числового множества D в числовое множество E.
$X\in D$; $y\in E$.</td></tr>
<tr><td colspan="3">2. Область определения функции: $D(f)$</td><td>числовое множество D при отображении $f:D\to E$</td></tr>
<tr><td colspan="3">3. Область значений функции: $E(f)$</td><td>числовое множество E при отображении $f:D\to E$</td></tr>
<tr><td colspan="3">4. Аргумент функции</td><td>элемент x, $x\in D$</td></tr>
<tr><td colspan="3">5. Значение функции</td><td>элемент y, $y\in E$</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Основные характеристики функции</td><td rowspan="2">четность</td><td>$y=f(x)$ – четная</td><td>$\forall x\in D: -x\in D$ и $f(-x)=f(x)$</td></tr>
<tr><td>$y=f(x)$ – нечетная</td><td>$\forall x\in D: -x\in D$ и
$f(-x)=-f(x)$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">монотонность</td><td>$y=f(x)$ – возрастающая на $[a;b]$

</td><td>$\forall x_1,x_2: x_1,x_2\in[a;b]$
$(x_1<x_2)\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$</td></tr>
<tr><td>$y=f(x)$ – убывающая на $[a;b]$

</td><td>$\forall x_1,x_2: x_1,x_2\in[a;b]$
$(x_1<x_2)\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$</td></tr>
<tr><td>невозрастающая</td><td>$f(x_1)\le f(x_2)$</td></tr>
<tr><td>неубывающая</td><td>$f(x_1)\ge f(x_2)$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td>периодичность</td><td>$y=f(x)$ – периодическая с периодом T</td><td>$\forall x\in D, \exists T>0:$
$(x+T)\in D$ и $f(x+T)=f(x)$.
$\sin(x+2\pi n)=\sin x$
$\cos(x+2\pi n)=\cos x$
$tg(x+\pi n)=tgx$
$ctg(x+\pi n)=ctgx$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$y=f(x)$ – ограниченная</td><td>$\exists M>0:\forall x\in D\Rightarrow \left|f(x)\right|\le M$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">6.</td><td rowspan="3">Способы задания функции</td><td>Аналитический $y=x^2$</td><td>в виде формул (ы)</td></tr>
<tr><td>Табличный
<table><tr><td>x</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>y</td><td>4</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>4</td></tr></table></td><td>таблица значений аргумента</td></tr>
<tr><td>Графический
</td><td>в виде графика</td></tr>
<tr><td colspan="3">7. Обратная функция $\varphi: E\to D$
$f:D\to E$

$\varphi: E\to D$
Пример:
<table><tr><td>$y=f(x)=x^2$, $[0;\infty]$</td><td>$x=\varphi(y)=\sqrt{y}$</td></tr><tr><td>$y=f(x)=2x$</td><td>$x=\varphi(y)=\dfrac{y}{2}$</td></tr></table></td><td>если каждому $y\in E$ соответствует единственное значение $x\in D$, то определена функция $x=\varphi(y)$ (обратная к $f(x)$)</td></tr>
</table>

Окончание таблицы 1.2.1

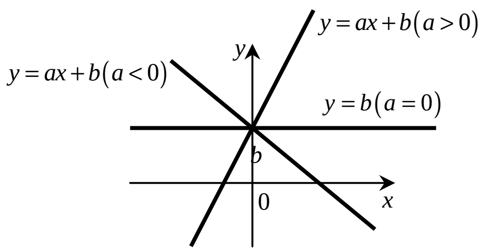
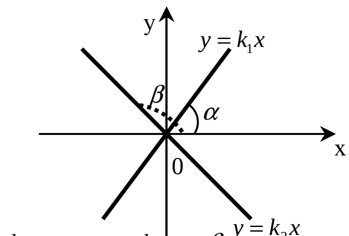
8. Сложная функция (функция от функции) $y = f\left[\varphi(x)\right]$ ↑ *промежуточный аргумент*	определены: функция $y = f(u)$ на D, функция $u = \varphi(x)$ на D_1, причем $\forall x \in D_1$: $u = \varphi(x) \in D$ тогда определена функция $y = f\left[\varphi(x)\right]$ на D_1

1.3. Основные элементарные функции и их графики

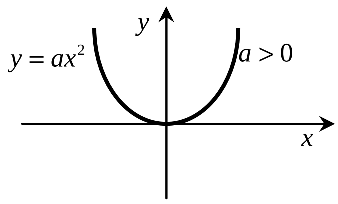
Функции, задаваемые одной формулой, составленной из основных элементарных функций и постоянных с помощью конечного числа арифметических операций (сложения, вычитания, умножения, деления) и операций взятия функции от функции, называются *элементарными функциями*. В таблице 1.3.1 приводятся наиболее важные свойства и графики основных элементарных функций.

Таблица 1.3.1

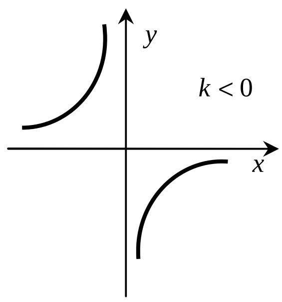
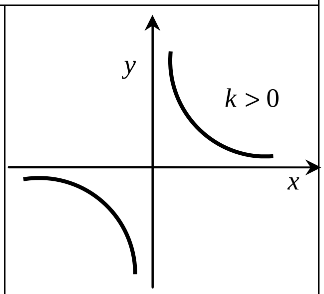
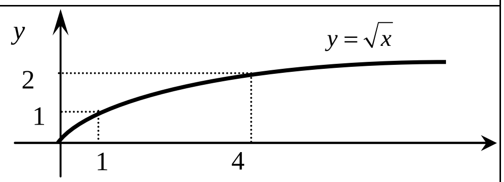
Линейная функция $y = ax + b$

$D(y) = \mathbb{R}$	График – прямая
При $a = 0$ $E(y) = \{b\}$ (постоянная), все точки – точки экстремума. При $a \neq 0$ $E(y) = \mathbb{R}$.	
При $a > 0$ возрастает на $\mathbb{R}$. При $a < 0$ убывает на $\mathbb{R}$. Экстремумов нет.	
Функция $y = kx$ – прямая пропорциональность ($k > 0$). Нечетная функция.	

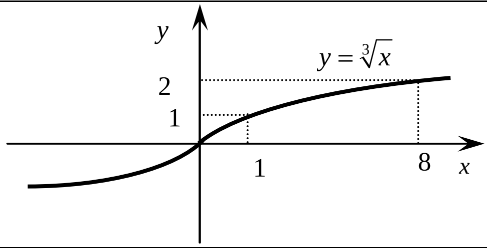
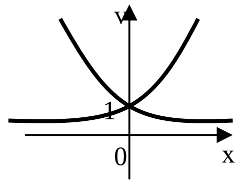
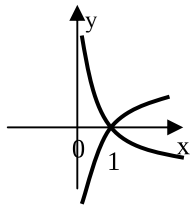
Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$

$D(y) = R$	Вид графика – парабола. Координаты вершины параболы: $x_0 = -\dfrac{b}{2a};\ y_0 = y(x_0)$. Ось симметрии $x = x_0$. При $a < 0$ y_0 – наибольшее значение. При $a > 0$ y_0 – наименьшее значение. Четная функция.
При $a > 0$ убывает на $(-\infty; x_0]$ и возрастает на $[x_0; +\infty)$, $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ – точка минимума, $y_0 = y(x_0)$ – минимум. $E(y) = [y_0; +\infty)$.	
При $a < 0$ возрастает на $(-\infty; x_0]$ и убывает на $[x_0; +\infty)$, $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ – точка максимума, $y_0 = y(x_0)$ – максимум. $E(y) = (-\infty; x_0]$.	

Дробно-линейная функция $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}(ad - bc \neq 0)$

Функция – обратная пропорциональность $y = \dfrac{k}{x} \quad (k \neq 0)$ $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Два промежутка монотонности $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$ при $k < 0$ функция на каждом из них возрастает, при $k > 0$ на каждом убывает. Нечетная функция.	Вид графика – гипербола, где $k = (bc - ad) / c^2$. Вертикальная асимптота $x = 0$. Горизонтальная $y = 0$.	
		
Функция $y = \sqrt{x}$		
$D(y) = [0; +\infty) = E(y)$. Возрастает на $D(y)$ Экстремумов нет. Четностью и нечетностью не обладает		

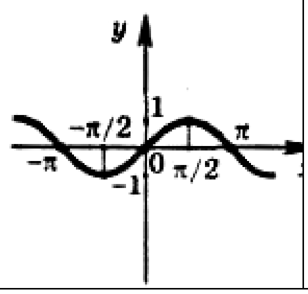
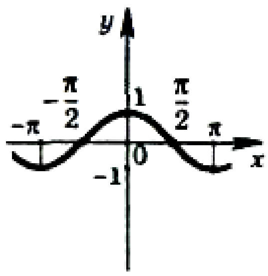
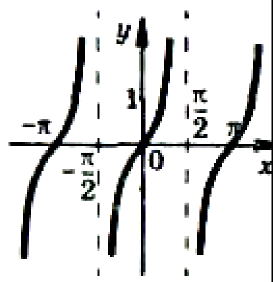
Продолжение таблицы 1.3.1

Функция $y = x^n$	
$D(y) = (-\infty; +\infty) = E(y)$. Возрастает на $D(y)$. Экстремумов нет. Нечетная функция.	
Показательная функция $y = a^x$ $(a > 0;\ a \neq 1)$	
$D(y) = R$; $E(y) = (0; +\infty)$. Один промежуток монотонности. Экстремумов нет. При $a > 0$ – возрастает на $\mathbb{R}$. При $0 < a < 1$ – убывает на $\mathbb{R}$.	
Логарифмическая функция $y = \log_a x (a > 0; a \neq 1)$	
$D(y) = (0; \infty)$; $E(y) = \mathbb{R}$; Один промежуток монотонности. Экстремумов нет. При $a > 1$ – возрастает на $D(y)$. При $0 < a < 1$ – убывает на $D(y)$.	

Тригонометрические функции

	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \operatorname{tg} x$
$D(y)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi r; \frac{\pi}{2} + \pi r\right)$ $r \in Z$
$E(y)$	[-1;1]	[-1;1]	$\mathbb{R}$
Бесконечное множество промежутков монотонности	убывает на $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi r; \frac{3\pi}{2} + 2\pi r\right]$ возрастает на $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi r; \frac{\pi}{2} + 2\pi r\right]$	убывает на $[2\pi r; \pi + 2\pi r]$; возрастает на $[-\pi + 2\pi r; 2\pi r]$	возрастает на каждом промежутке непрерывности $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi r; \frac{\pi}{2} + \pi r\right)$
Точки минимума	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi r$	$x = \pi + 2\pi r$	нет

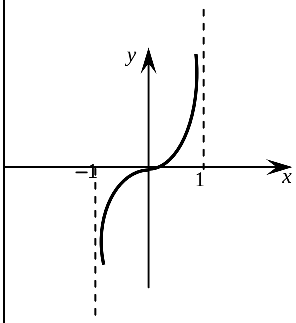
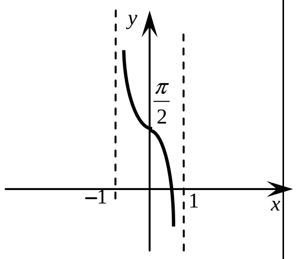
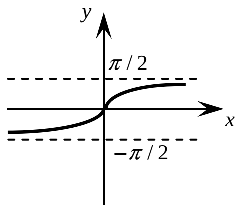
Продолжение таблицы 1.3.1

Точки максимума	$x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi r$	$x=2\pi r$	нет
Минимумы	-1	-1	нет
Максимумы	1	1	нет
Нули	$x=2\pi r$	$x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi r$	$x=2\pi r$
Промежутки знакопостоян-ства ($y>0$)	$(2\pi r;\pi+2\pi r)$	$\left(-\dfrac{\pi}{2}+\pi r;\dfrac{\pi}{2}+\pi r\right)$	$\left(\pi r;\dfrac{\pi}{2}+\pi r\right)$
Промежутки знакопостоян-ства ($y<0$)	$(-\pi+2\pi r;2\pi r)$	$\left[\dfrac{\pi}{2}+2\pi r;\dfrac{3\pi}{2}+2\pi r\right]$	$\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi r;\pi+\pi r\right)$
Период	2π	2π	π
Четность	нечетная $\sin(-x)=-\sin x$	четная $\cos(-x)=\cos x$	нечетная $\mathrm{tg}(-x)=-\mathrm{tg}x$
Асимптоты	нет	нет	вертикальные $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi r$
Производная	cos x	-sin x	$1/\cos^2 x$
Графики			

Обратные тригонометрические функции

	$y=\arcsin x$	$y=\arccos x$	$y=\mathrm{arctg}\,x$
$D(y)$	[-1;1]	[-1;1]	$\mathbb{R}$
$E(y)$	$\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$	$[0;\pi]$	$\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$
Монотонность	возрастает на $D(y)$	убывает на $D(y)$	возрастает на $D(y)$
Четность	нечетная	–	нечетная

Окончание таблицы 1.3.1

Производная	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(x \neq \pm 1)$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(x \neq \pm 1)$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
Графики			

Гиперболические функции

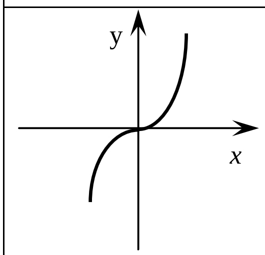
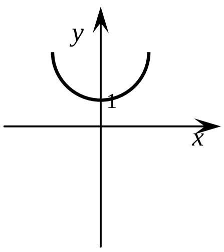
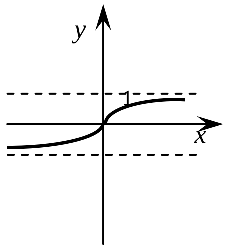
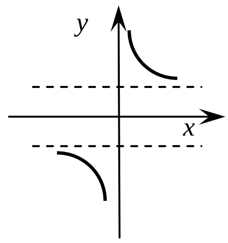
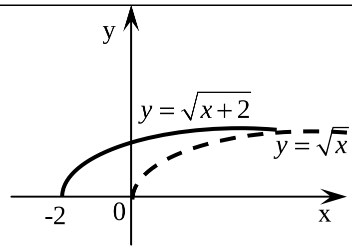
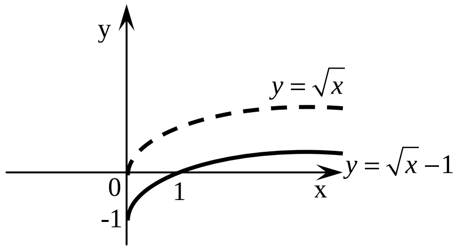
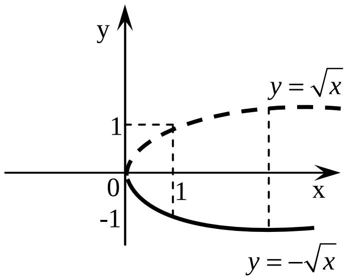
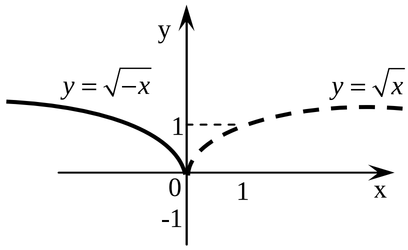
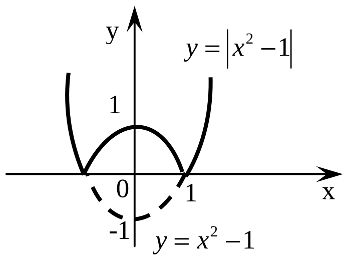
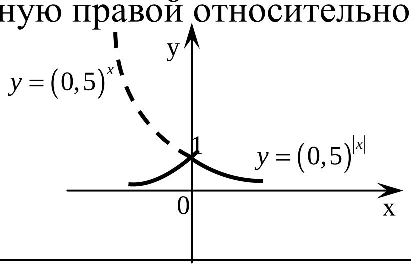
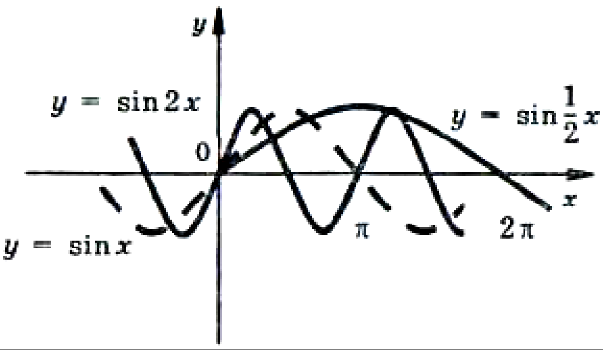
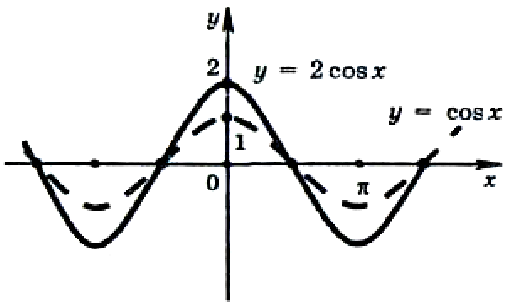
Гиперболический синус $y = \operatorname{sh} x$, где $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$	Гиперболический косинус $y = \operatorname{ch} x$, где $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$	Гиперболический тангенс $y = \operatorname{th} x$, где $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$	Гиперболический котангенс $y = \operatorname{cth} x$, где $\operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$
			

Таблица 1.3.2

Основные приёмы преобразования графиков

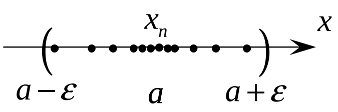
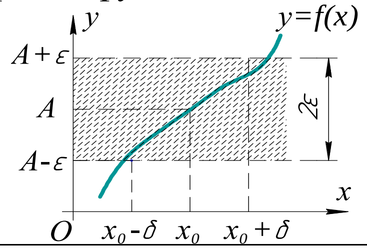
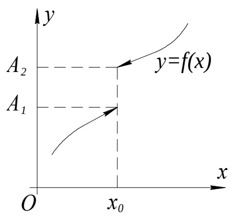
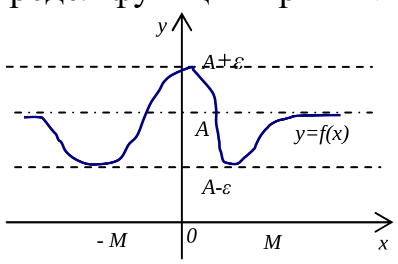
$f\left(x+a\right)$	Перенос графика $y=f\left(x\right)$ на вектор $\vec{\rho}(-a;0)$	
$f\left(x\right)+b$	Перенос графика $y=f\left(x\right)$ на вектор $\vec{\rho}(0;b)$	
$-f\left(x\right)$	Симметрия относительно оси абсцисс	
$f\left(-x\right)$	Симметрия относительно оси ординат	
$\left\|f\left(x\right)\right\|$	Часть графика в верхней полуплоскости и на оси абсцисс без изменения, а вместо части графика в нижней полуплоскости строим симметричную ей относительно оси Ox	

Окончание таблицы 1.3.2

$f\left(\lvert x\rvert\right)$	Часть графика в правой полуплоскости и на оси ординат без изменения, а вместо части в левой полуплоскости строим симметричную правой относительно оси Oy. 
$f(rx)$ $(r>0)$	При $r>1$ сжатие к точке (0; 0) вдоль оси абсцисс в r раз; при $0<r<1$ растяжение от точки (0; 0) вдоль оси абсцисс в $\frac{1}{r}$ раз. 
$rf(x)$ $(r>0)$	При $r>1$ растяжение от точки (0; 0) вдоль оси ординат в r раз; при $0<r<1$ сжатие к точке (0; 0) вдоль оси ординат в $\frac{1}{r}$ раз 

1.4. Предел и непрерывность

Таблица 1.4.1

Понятие	Содержание
Последовательность (числовая) $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$	Функция $x_n = f(n), n \in N$
Предел числовой последовательности  	$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ $(или\, x_n \to a) \Leftrightarrow$ $(\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N \Rightarrow \lvert x_n - a\rvert < \varepsilon)$. ***Геометрический смысл:*** число a называется пределом последовательности x_n $(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a)$, если для любой окрестности точки a найдётся натуральное число N, что все значения x_n, для которых $n > N$, попадут в ε-окрестность точки a.
Число e (неперово число) Непер Джон (1550-1617)	$e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, $e \approx 2{,}7...$
Предел функции в точке  	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \partial(\varepsilon) > 0:$ $\forall x : \lvert x - x_0\rvert < \partial \Rightarrow \lvert f(x) - A\rvert < \varepsilon$
Предел функции $y = f(x)$ $\dfrac{\text{слева}}{[\textit{справа}]}$  	$\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A_1}{\left[\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A_2\right]} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists \partial(\varepsilon) > 0:$ $\dfrac{\forall x \in (x_0 - \partial; x_0)}{[\forall x \in (x_0; x_0 + \partial)]} \Rightarrow \dfrac{\lvert f(x) - A_1\rvert < \varepsilon}{[\lvert f(x) - A_2\rvert < \varepsilon]}$
Предел функции при $x \to \infty$  	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\, \exists M > 0\ \forall x: \lvert x\rvert > M \Rightarrow$ $\lvert\lvert f(x) - A\rvert < \varepsilon\rvert$

Теоремы о пределах

Теорема 1. *Основная теорема о пределах.*

Прямая теорема. Если функция $y = f(x)$ при $x \to x_0$ имеет пределом число А, то в окрестности этой точки ее можно представить в виде суммы постоянного числа А, равного пределу функции, и бесконечно малой величины $\alpha(x)$, т.е. если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A,$ то $f(x) = A + \alpha(x)$.

Обратная теорема. Если функцию $y = f(x)$ в окрестности точки x_0 можно представить в виде суммы постоянного числа А и бесконечно малой величины $\alpha(x)$, то это постоянное число есть предел функции при $x \to x_0$, т.е. если $f(x) = A + \alpha(x),$ то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A.$

Теорема 2. *Об единственности предела*

Если функция имеет предел, то только один.

Теорема 3. *О пределе константы*

Если функция сохраняет постоянное значение для всех x, т.е. $f(x) = const$, то предел этой функции равен этой константе $\lim\limits_{x\to x_0} C = C.$ Или говорят, что предел константы равен самой констате.

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A,$ $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$, тогда имеют место следующие теоремы.

Теорема 4. *О пределе суммы (разности) двух функций*

Предел суммы (разности) двух функций, имеющих предел, равен сумме (разности) пределов этих функций

$$\lim_{x\to x_0}\left\{ f(x) \pm g(x)\right\} = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x) = A \pm B.$$

Теорема 5. О *пределе произведения двух функций*

Предел произведения двух функций, имеющих предел, равен произведению пределов этих функций

$$\lim_{x\to x_0}\left\{ f(x) \cdot g(x)\right\} = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = A \cdot B.$$

Следствие. Постоянный множитель можно выносить за знак предела

$$\lim_{x\to x_0}\left\{C \cdot f(x)\right\} = C \cdot \lim_{x\to x_0} f(x) = C \cdot A.$$

Теорема 6. *О пределе частного двух функций*

Предел отношения двух функций, имеющих предел, равен отношению пределов этих функций

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \frac{A}{B}, \quad B \neq 0.$$

<u>Теорема 7.</u> *О предельном переходе под знаком неравенства*

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ в окрестности точки x_0 удовлетворяют неравенству $f(x) < g(x)$, то можно перейти к пределу в этом неравенстве, причем $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) < \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

Свойство. К пределу можно переходить под знаком любой элементарной функции в области её определения:

$$\lim_{x\to x_0}\ln[f(x)] = \ln\lim_{x\to x_0}[f(x)]; \qquad \lim_{x\to x_0}\sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x\to x_0} f(x)};$$

$$\lim_{x\to x_0}\sin f(x) = \sin\lim_{x\to x_0} f(x); \qquad \lim_{x\to x_0} e^{f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}.$$

Таблица 1.4.2

Бесконечно малая и бесконечно большая функции (величины)

<table>
<tr><th colspan="2">Понятия</th><th>Содержание</th></tr>
<tr><td colspan="2">Бесконечно большая функция при $x \to x_0$ $\left(A(x), B(x)...\right)$</td><td>$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty \quad \left(f(x) \to \infty\right) \Leftrightarrow$
$\forall M > 0\ \exists \partial > 0\ \forall x : \left|x - x_0\right| < \partial, x \ne x_0 \Rightarrow \left|f(x)\right| > M$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Бесконечно большая функция при $x \to \infty$</td><td>$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty \quad \left(f(x) \to \infty\right) \Leftrightarrow$
$\forall M > 0\ \exists N > 0\ \forall x : \left|x\right| < N \Rightarrow \left|f(x)\right| > M$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Бесконечно малая функция при $x \to x_0$ (бесконечно малая величина) (α, β)</td><td>$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \quad \left(\forall \varepsilon > 0\ \exists \partial > 0\right)$
$\forall x : 0 < \left|x - x_0\right| < \partial \Rightarrow \left|f(x)\right| < \varepsilon$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Сравнение б.м.в.</td><td>α и β – б.м.в. одного порядка</td><td>$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha}{\beta} = A \ne 0$</td></tr>
<tr><td>α и β – б.м.в. эквивалентные $\alpha \sim \beta$</td><td>$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha}{\beta} = 1$</td></tr>
<tr><td>α – б.м.в. более высокого порядка, чем β</td><td>$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha}{\beta} = 0$</td></tr>
<tr><td>α – б.м.в. более низкого порядка, чем β</td><td>$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha}{\beta} = \infty$</td></tr>
</table>

Таблица 1.4.3

Эквивалентные бесконечно малые $(\alpha(x) \to 0 \ \ \text{при} \ \ x \to a)$

$\left.\begin{matrix} \sin\alpha(x) \\ tg\,\alpha(x) \\ \arcsin\alpha(x) \\ arctg\,\alpha(x) \end{matrix}\right\} \sim \alpha(x)$ $1-\cos\alpha \sim \alpha^2(x)/2$	$\left.\begin{matrix} e^{\alpha(x)}-1 \\ \ln(1+\alpha(x)) \\ \dfrac{(1+\alpha(x))^p-1}{p} \end{matrix}\right\} \sim \alpha(x)$ $\sqrt[n]{1-\alpha(x)}-1 \sim \alpha(x)/n$

Таблица 1.4.4

Свойства бесконечно-малых величин (бмв) и бесконечно-больших величин (ббв), связь между ними

$\alpha(x)+\beta(x)=\gamma(x)$	сумма конечного числа бесконечно малых величин есть величина бесконечно малая
$\alpha(x)\cdot\beta(x)=\gamma(x)$	произведение конечного числа бесконечно малых величин есть величина бесконечно малая
$C\cdot\alpha(x)=\beta(x)$, $\alpha(x)\cdot Z(x)=\beta(x)$	произведение бесконечно малой величины на константу С или ограниченную величину $Z(x)$ есть величина бесконечно малая
$A(x)+B(x)=C(x)$	сумма бесконечно больших величин есть величина бесконечно большая
$A(x)\cdot B(x)=C(x)$	произведение бесконечно больших величин есть величина бесконечно большая
$C\cdot A(x)=B(x)$, $A(x)\cdot Z(x)=B(x)$	произведение бесконечно большой величины на константу C или ограниченную величину $Z(x)$ есть величина бесконечно большая
$\dfrac{1}{\alpha(x)}=A(x)$	величина, обратная бесконечно малой, есть величина бесконечно большая
$\dfrac{1}{A(x)}=\alpha(x)$	величина, обратная бесконечно большой, есть величина бесконечно малая

Таблица 1.4.5

Некоторые часто встречающиеся пределы

$\lim\limits_{x\to\infty} a\,x = \infty$	первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1;\ (\text{x} - \text{радианная мера угла})$
$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{a} = \infty$	второй замечательный предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x} = \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e,\ e \approx 2{,}71828...$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a}{x} = \infty$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^k + a_1x^{k-1} + ... + a_k}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + ... + b_n} = \begin{cases} \infty, \text{если } k > n; \\ \dfrac{a_0}{b_0}, \text{если } k = n; \\ 0, \text{если } k < n. \end{cases}$
$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a}{x} = 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} 0, \lvert a\rvert < 1 \\ +\infty, \text{ если } a > 1 \\ -\infty, \text{ если } a < -1 \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0, \text{ если } \lvert a\rvert > 1 \\ +\infty, \text{ если } 0 < a < 1 \\ -\infty, \text{ если } -1 < a < 0 \end{cases}$ Замечание: *при* $a < 0$ *переменная* x *может принимать только целочисленные значения; для всех значений x при* $a < 0$ *функция* a^x *не определена.*
$\lim\limits_{x\to x_0} c = c,\ c -$ постоянная	

Вычисление пределов

При вычислении пределов необходимо прежде всего в выражение, стоящее под знаком предела, вместо переменной подставить ее предельное значение. Возможны две ситуации:

1. В результате подстановки и проведения необходимых вычислений получилось определенное число, которое и является ответом (в частности ноль или бесконечность).

2. В результате подстановки предельного значения переменной получаются неопределенности, которых несколько видов: $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^{∞}, 0^0, ∞^0. Для получения результата необходимо *раскрыть неопределенность.*

1. Неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$ возникает при вычислении предела отношения многочленов. Неопределенность раскрывается: а) посредством вынесения за скобки высшей степени в каждом многочлене; б) выделением главной части

2. Неопределенность $\frac{0}{0}$. Для раскрытия этой неопределенности применяют приемы:

а) разложение на множители;

б) предел отношения двух б.м.в. можно заменить пределом отношения эквивалентных им б.м.в. (используем таблицу эквивалентностей);

в) для иррациональных выражений ввести новую переменную для получения рационального выражения;

г) для иррациональных выражений перевод иррациональности из знаменателя в числитель и наоборот, что достигается домножением на сопряженное выражение числителя и знаменателя.

3. Неопределенность $\infty-\infty$ раскрывают либо приведением разности дробей к общему знаменателю, либо умножением на сопряженное выражение.

4. Неопределенность $0\cdot\infty$ сводится к неопределенностям $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, когда убираем один из множителей в знаменатель как обратную величину.

5. Неопределенность 1^{∞} раскрывается с использованием формулы второго замечательного предела.

Непрерывность функции. Точки разрыва и их классификация

Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке x_0, если при $x\to x_0$ предел функции существует и равен её частному значению в этой точке, т.е. если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Для непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

1) *функция должна быть определена в некотором интервале, содержащем точку x_0 (т.е. в самой точке x_0 и вблизи этой точки);*

2) *функция должна иметь одинаковые односторонние пределы* $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$;

3) *односторонние пределы должны быть равны значению функции в точке* x_0 *–* $f(x_0)$.

Функция $f(x)$ называется *разрывной* в точке x_0, если она определена в сколь угодно близких точках, но в самой точке x_0 не удовлетворяет хотя бы одному из условий непрерывности.

Разрыв функции $f(x)$ в точке x_0 называется *конечным*, или *1-го* рода, если существуют конечные односторонние пределы $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$.

Все другие случаи разрыва функции называются *разрывами 2-го* рода; в частности, если хотя бы один из указанных односторонних пределов окажется бесконечным, то и *разрыв* функции называется *бесконечным*.

Скачком функции $f(x)$ в точке разрыва x_0 называется разность ее односторонних пределов $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) - \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$, если они различны.

Если точка x_0 является левой или правой границей области определения функции $f(x)$, то следует рассматривать значения функции соответственно только справа или только слева от этой точки и в самой точке. При этом:

1) *если граничная точка* x_0 *входит в область определения функции, то она будет точкой непрерывности или точкой разрыва функции, смотря по тому, будет ли предел функции при* $x \to x_0$ *изнутри ее области определения равен или не равен* $f(x_0)$;

2) *если граничная точка* x_0 *не входит в область определения функции, то она является точкой разрыва функции.*

Функция называется *непрерывной* в некотором интервале, если она непрерывна во всех точках этого интервала.

Все элементарные функции непрерывны в тех интервалах, в которых они определены.

При отыскании точек разрыва функции можно руководствоваться следующими положениями.

1. Элементарная функция может иметь разрыв только в отдельных точках, но не может быть разрывной во всех точках какого-либо интервала.

2. Элементарная функция может иметь разрыв только в той точке, где она не определена, при условии, если она будет определена хотя бы с одной стороны от этой точки в сколь угодно близких к ней точках.

3. Неэлементарная функция может иметь разрыв как в точках, где она не определена, так и в точках, где она определена; в частности, если функция задана несколькими различными аналитическими выражениями (формулами) для различных интервалов изменения аргумента, то она может иметь разрывы в тех точках, где меняется ее аналитическое выражение.

Таблица 1.4.6

Непрерывность функции. Точки разрыва и их классификация

<table>
<tr><td colspan="3">$y=f\left(x\right)$ – непрерывная в точке x_0:
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$</td><td>$\begin{cases} 1) \text{ функция } y=f(x) \text{ определена в точке } x_0, \\ 2) \text{ существуют равные односторонние} \\ \quad \text{пределы в точке } x_0, \\ 3) \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0). \end{cases}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$y=f\left(x\right)$ – непрерывная в интервале $\left(a;b\right)$</td><td>$y=f\left(x\right)$ непрерывна в любой точке $x\in(a;b)$.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Точки разрыва функции, их классификация</td><td rowspan="2">I рода
(если существуют конечные пределы)
$\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A_1$
$\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A_2$</td><td>$x_0$ – точка устранимого разрыва</td><td>$A_1=A_2$</td></tr>
<tr><td>x_0 – точка конечного разрыва</td><td>$A_1\neq A_2$; $\left|A_1-A_2\right|$ – скачок функции</td></tr>
<tr><td>II рода
все другие случаи разрыва функции</td><td>x_0 – точка бесконечного разрыва</td><td>если хотя бы один из односторонних пределов равен бесконечности</td></tr>
</table>

1.5. Опорные задачи

1.5.1. Дана функция $f(x)=x^3-x^2+x+1$. Найти f (0), f (1), f (-1), f (2).

Решение. Чтобы вычислить значение f (0), надо вместо аргумента x подставить его значение $x=0$. Имеем $f(0)=0^3-0^2+0-1=1$. Аналогично получим $f(1)=-1$, $f(-1)=-5$ и $f(2)=1$.

1.5.2. Найти область определения функций:

1) $y=x^2$; 2) $y=\dfrac{1}{3}$; 3) $y=\dfrac{1}{2x-6}$; 4) $y=\dfrac{1}{x^2-5x+6}$.

Решение.

1) Здесь на x не накладывается никаких ограничений, поэтому функция $y=x^2$ определена на множестве $R=(-\infty;+\infty)$.

2) Если $x=0$, то y не имеет числового значения (на нуль делить нельзя). Для всех значений (кроме нуля) y принимает действительные значения, поэтому областью определения служит объединение промежутков $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

3) Функция определена для всех значений x, кроме тех, при которых знаменатель дроби обращается в нуль. Решив уравнение $2x-6=0$, найдем его корень $x=3$. Таким образом, область определения $D(y)=(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$.

4) Функция определена для всех значений аргумента, кроме тех, при которых знаменатель обращается в нуль. Решив уравнение $x^2-5x+6=0$, найдем его корни: $x_1=2$ и $x_2=3$. Следовательно, $D(y)=(-\infty;2)\cup(2;3)\cup(3;+\infty)$.

1.5.3. Найдите область определения функций:

1) $y=\sqrt{x}$; 2) $y=\sqrt{2x-4}$; 3) $y=\sqrt{x}+\sqrt{x-1}$; 4) $y=\sqrt{\dfrac{3x-2}{2x+6}}$.

Решение.

1) Квадратные корни определены для неотрицательных чисел. Поэтому функция $y=\sqrt{x}$ определена для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $x\geq 0$, т.е. $D(y)=[0;+\infty)$.

2) Решив неравенство $2x-4\geq 0$, получим $x\geq 2$, т.е $D(y)=[2;+\infty)$.

3) Найдем область определения каждого из слагаемых; общая часть

этих областей и будет областью определения данной функции. Для первого слагаемого $x \ge 0$, а для второго $x \ge 1$. Тогда областью определения суммы $\sqrt{x}+\sqrt{x-1}$ служит пересечение промежутков: $D(y)=[0;+\infty)\cap[1;+\infty)=[1;+\infty)$.

4) Функция определена на всех значениях x, удовлетворяющих неравенству $\dfrac{3x-2}{2x+6} \ge 0$.

$$\frac{3x-2}{2x+6} \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge \dfrac{2}{3}, \\ x > -3 \end{cases} \\ \begin{cases} x \le \dfrac{2}{3}, \\ x < -3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge \dfrac{2}{3}, \\ x < -3 \end{array}\right. .$$

Следовательно, областью определения функции является объединение промежутков $D(y)=(-\infty;-3)\cup\left[\dfrac{2}{3};+\infty\right)$.

1.5.4. Найти предел функции:

1) $f(x)=x^3-5x^2+2x+4$ при $x \to -3$;

2) $\varphi(t)=t\sqrt{t^2-20}-\lg\left(t+\sqrt{t^2-20}\right)$ при $t \to 6$.

Решение. Данные функции являются элементарными, они определены в предельных точках, поэтому находим предел функции как её частное значение в предельной точке:

1) $\lim\limits_{x\to -3} f(x)=f(-3)=(-3)^3-5\cdot(-3)^2+2(-3)+4=-74$;

2) $\lim\limits_{t\to 6}\varphi(t)=\varphi(6)=6\cdot\sqrt{6^2-20}-\lg\left(6+\sqrt{6^2-20}\right)=23$.

1.5.5. Найти пределы следующих функций:

1) $f(x)=2x-3-\dfrac{1}{x}$ при $x \to 1$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 1}\left(2x-3-\dfrac{1}{x}\right)=2\cdot 1-3-\dfrac{1}{1}=-2$.

2) $y=\dfrac{x^3-3x^2-2x-5}{x^2+2}$ при $x\to 1$.

Решение.

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3-3x^2+2x-5}{x^2+5}=\frac{\left(\lim\limits_{x\to -1}x\right)^3-3\left(\lim\limits_{x\to -1}x\right)^2+2\lim\limits_{x\to -1}x-5}{\left(\lim\limits_{x\to -1}x\right)^2+2}=$$

$$\frac{(-1)^3-3(-1)^2+2(-1)-5}{(-1)^2+2}=-\frac{11}{3}.$$

3) $f(x)=2x-3-\dfrac{1}{x}$ при $x\to 1$.

Решение.

$$\lim_{x\to 1}\left(2x-3-\frac{1}{x}\right)=\lim 2\cdot\lim x-\lim 3-\frac{\lim 1}{\lim x}=2\cdot 1-3-\frac{1}{1}=-2.$$

4) $y=\dfrac{x^3-3x^2-2x-5}{x^2+2}$ при $x\to -1$.

Решение.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2+2x-5}{x^2+2}=\frac{(\lim x)^3-3(\lim x)^2+2\lim x-5}{(\lim x)^2+2}=\frac{-1-3-2-5}{3}=-\frac{11}{3}.$$

5) $y=x\sin\dfrac{1}{x}$ при $x\to 0$.

Решение. При $x\to 0$ аргумент $\dfrac{1}{x}\to\infty$, а множитель $\sin\dfrac{1}{x}$ будет при этом колебаться между -1 и $+1$, не стремясь ни к какому определенному числу, т.е. этот множитель не имеет предела, но является величиной ограниченной $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\le 1$. Поэтому данная функция, представляющая произведение бесконечно малой x на величину, ограниченную $\sin\dfrac{1}{x}$, есть бесконечно малая величина, а её предел равен нулю $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$.

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+2n+1}{2-4n-7n^2}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2}{-7n^2}=-\dfrac{3}{7}.$

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right)=(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3(2x+1)-x^2(2x^2-1)}{(2x+1)(2x^2-1)}=$

$=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^4+x^3-2x^4+x^2}{(2x)(2x^2)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{4x^3}=\frac{1}{4}.$

8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x-1}-\sqrt{x}=(\infty-\infty)=+\infty$, так как выражение $x^2+2x-1>>x$ в силу большей степени *x*.

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\cos 5x}{\ln(1+x\cdot arctg 6x)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left|\begin{array}{c}1-\cos 5x\sim\frac{(5x)^2}{2}=\frac{25x^2}{2}\\ \ln(1+x\cdot arctg 6x)\sim x\cdot arctg 6x\sim 6x^2\end{array}\right|=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{25x^2}{2}}{6x^2}=\frac{25}{12}.$

10) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin 5x}{e^{\pi}-e^{x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left|\begin{array}{c}x-\pi=t\\ x=t+\pi\\ t\to 0\end{array}\right|=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin 5(t+\pi)}{e^{\pi}-e^{t+\pi}}=$

$=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin(5t+5\pi)}{e^{\pi}(1-e^{x})}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{-\sin 5t}{e^{\pi}(1-e^{x})}=\left|\begin{array}{c}1-e^{t}\sim -t,\\ sin5t\sim 5t\end{array}\right|=\lim\limits_{t\to 0}\frac{-5t}{e^{\pi}(-t)}=\frac{5}{e^{\pi}}.$

11) $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)=(\infty\cdot 0)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=$

$=\left|\begin{array}{c}x\to\infty\Rightarrow\frac{1}{x}\to 0,\\ e^{\frac{1}{x}}-1\sim\frac{1}{x}\end{array}\right|=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1.$

12) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x^2+5}\right)^{2x^2+x}=(1^\infty)=\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{3}{x^2+5}\right)^{\frac{x^2+5}{3}}\right\}^{\frac{3(2x^2+x)}{x^2+5}}=$

$$=\left|\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x^2+5}\right)^{\frac{x^2+5}{3}}=e\\ \lim\limits_{x\to\infty}\frac{3\left(2x^2+x\right)}{x^2+5}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^2}{x^2}=6\end{array}\right|=e^6.$$

1.5.6. При $n\to+\infty$ найти пределы следующих функций:

а) $S_1(n)=\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\frac{3}{n}+\ldots+\frac{n-1}{n}$;

б) $S_2(n)=\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}$;

в) $S_3(n)=\frac{1}{n^3}+\frac{2}{n^3}+\frac{3}{n^3}+\ldots+\frac{n-1}{n^3}$.

Решение. Каждая из данных функций представляет сумму $n-1$ членов арифметической прогрессии. Разность первой прогрессии $\frac{1}{n}$, второй $\frac{1}{n^2}$ и третьей $\frac{1}{n^3}$. Выполняя сложение и переходя к пределу, найдем:

$$S_1=\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{n-1}{n}\right)=\frac{1}{2}(n-1);\ \lim_{n\to+\infty}S_1=\frac{1}{2}(\lim n-1)=+\infty.$$

$$S_2=\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{n-1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right);\ \lim_{n\to+\infty}S_2=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\lim n}\right)=\frac{1}{2}.$$

$$S_3=\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{n^3}+\frac{n-1}{n^3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right);\ \lim_{n\to+\infty}S_3=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\lim n}-\frac{1}{(\lim n)^2}\right]=0.$$

В этих задачах при $n\to+\infty$ функции S_1, S_2 и S_3 являются суммами бесконечно малых величин, число которых неограниченно возрастает вместе с n. Полученные результаты показывают, что S_1 есть величина бесконечно большая, S_2 – величина, стремящаяся к $\frac{1}{2}$, S_3 – величина бесконечно малая.

Следовательно, решение этой задачи показывает: *если число слагаемых бесконечно малых неограниченно возрастает, их сумма может оказаться любой величиной.*

1.5.7. Доказать, что $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x^n}{n!}=0$ при любом значении x.

Решение. Каково бы не было значение x, всегда найдутся такие два последовательных целых положительных числа k и $k+1$, между которыми заключается $|x|$, т.е. $k<|x|<k+1$.

Исходя из этого получим очевидное неравенство

$$\left|\frac{x^n}{n!}\right|=\left|\frac{x^k}{k!}\cdot\frac{x}{k+1}\cdot\frac{x}{k+2}\cdot\frac{x}{k+3}\ldots\frac{x}{n}\right|<\left|\frac{x^k}{k!}\right|\cdot\left|\frac{x}{k+1}\right|^{n-k}.$$

Первый множитель $M_1=\left|\dfrac{x^k}{k!}\right|$ не зависит от n и при любом данном значении x является постоянным, второй множитель $M_2=\left|\dfrac{x}{k+!}\right|^{n-k}$ при $n\to+\infty$ будет величиной бесконечно малой, ибо $\left|\dfrac{x}{k+1}\right|<1$. Поэтому M_1, M_2, как произведение постоянной величины на бесконечно малую, есть величина бесконечно малая. Вследствие этого функция $\dfrac{x^n}{n!}$ также будет величиной бесконечно малой, т.е. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x^n}{n!}=0$ при любом значении x.

1.5.8. Показать, что элементарные функции $y=f(x)$ непрерывны во всей своей области определения: 1) $y=2x^2-1$; 2) $\upsilon=\cos ec\,x$.

Решение. Найдем область определения функции и затем убедимся, исходя из определения непрерывности, что функция будет непрерывна в этой же области.

1) областью определения функции y является вся числовая ось. Далее придадим аргументу x произвольное приращение Δx и, подставив в данное выражение функции вместо x наращенное значение $x+\Delta x$, найдем наращенное значение функции: $y+\Delta y=2(x+\Delta x)^2-1$. Вычитая из этого наращенного значения функции ее первоначальное значение, найдем приращение функции

$$\Delta y = 2(x+\Delta x)^2 - 1 - (2x^2 - 1) = 4x\cdot\Delta x + 2\Delta x^3.$$

Пусть теперь $\Delta x \to 0$. Тогда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x = 0$ при любом значении x. Следовательно, согласно определению непрерывности, функция y будет непрерывна при любом значении x, т.е. во всей своей области определения.

2) тригонометрическая функция $cosec\, x$ определена на всей числовой оси за исключением точек $x = k\pi$, $k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2$. Повторяя указанные выше рассуждения, найдем приращение функции $\Delta\upsilon$ и затем его предел при $\Delta x \to 0$:

$$\Delta\upsilon = cosec(x+\Delta x) - cosec x = \frac{1}{\sin(x+\Delta x)} - \frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x - \sin(x+\Delta x)}{\sin(x+\Delta x)\sin x} =$$

$$= \frac{2\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\sin\left(-\dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\sin(x+\Delta x)\sin x};$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta\upsilon = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\sin(x+\Delta x)\sin x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\sin\left(-\frac{\Delta x}{2}\right) = \frac{2\cos x}{\sin^3 x}\cdot 0 = 0.$$

При всех значениях x, кроме $x = k\pi$, $k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$

Следовательно, область непрерывности и область определения элементарной функции $cosec\ x$ полностью совпадают.

1.5.9. Найти точки разрыва функций, если они существуют, и скачок функции в каждой точке разрыва:

1) $f_1(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$.

Решение. Функция $f_1(x)$ определена, т.е. может быть вычислена при всех значениях x, кроме $x = \pm 2$. Эта функция элементарная, поэтому она непрерывна во всей области своего определения: $-\infty < x < -2$, $-2 < x < 2$, $2 < x < +\infty$. Она не определена в точках $x_1 = -2$ и $x_2 = 2$, но определена вблизи этих точек. Вследствие этого, ввиду несоблюдения 1-го условия непрерывности, данная функция в точках x_1 и x_2 имеет разрывы.

Для определения скачка функции в найденных ее точках разрыва вычислим односторонние пределы этой функции при стремлении аргумента x к точкам разрыва слева и справа: а) $\lim\limits_{x\to -2-0}\dfrac{1}{x^2-4} = +\infty$,так как при $x \to -2-0$ величина x^2-4 является положительной бесконечно малой, а обратная ей величина $\frac{1}{x^2-4}$ является положительной бесконечно большой; $\lim\limits_{x\to -2+0}\frac{1}{x^2-4}=-\infty$, так как при $x\to -2+0$ величина x^2-4 является отрицательной бесконечно малой, а обратная ей величина является отрицательной бесконечно большой.

Следовательно, в точке $x=-2$ функция имеет бесконечный разрыв.

б) $\lim\limits_{x\to 2-0}\frac{1}{x^2-4}=-\infty$, так как при $x\to 2-0$ величина x^2-4 есть отрицательная бесконечно малая, а обратная ей величина есть отрицательная бесконечно большая;

$\lim\limits_{x\to 2+0}\frac{1}{x^2-4}=+\infty$, так как при $x\to 2+0$ величина x^2-4 есть положительная бесконечно малая, а обратная ей величина есть положительная бесконечно большая. Следовательно, и в точке $x=2$ разрыв функции бесконечный (рис. 1.5.1).

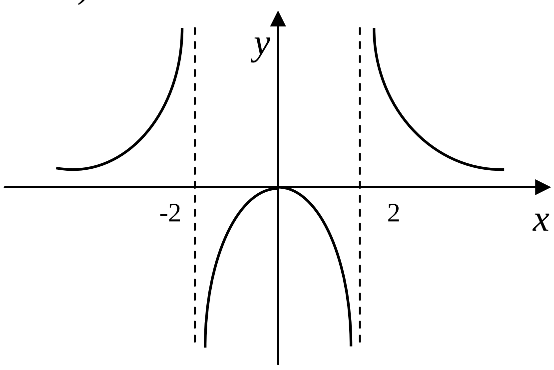


Рис. 1.5.1

2) $f_2(x)=\dfrac{3x-5}{x^2+2x+10}$.

Решение. Элементарная функция $f_2(x)$ определена на всей числовой оси (хотя она дробная, но корни знаменателя комплексные). Поэтому она и непрерывна на всей числовой оси, т.е. не имеет точек разрыва.

3) $f_3(x)=arcctg\dfrac{1}{x}$.

Решение. Элементарная функция $f_3(x)$ определена, а следовательно, и непрерывна на всей числовой оси, кроме точки $x=0$. В точке $x=0$ функция имеет разрыв, поскольку она определена в любой окрестности этой точки, за исключением самой точки. Найдем односторонние пределы функции в этой точке: $\lim\limits_{x\to -0} arcctg\frac{1}{x} = arcctg(-\infty) = \pi$;

$\lim\limits_{x\to +0} arcctg\frac{1}{x} = arcctg(+\infty) = 0$.

Следовательно, разрыв функции конечный; при $x = 0$ она имеет конечный скачок (рис. 1.5.2)

$$\lim_{x\to +0} f_3(x) - \lim_{x\to -0} f_2(x) = 0 - \pi = -\pi .$$

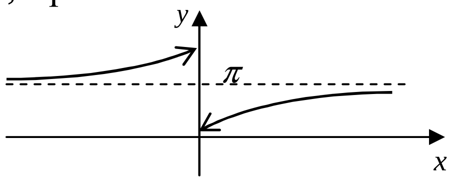


Рис. 1.5.2

4) $f_4(x) = \dfrac{|x-3|}{x-3}$.

Решение. Функция $f_4(x)$ определена и непрерывна на всей числовой оси, кроме точки $x = 3$. Из этого следует, что в точке $x = 3$ функция имеет разрыв.

Исследуем эту точку разрыва:

$\lim\limits_{x\to 3-0} \dfrac{|x-3|}{x-3} = -1$, так как при всяком значении $x < 3$ эта функция равна -1;

$\lim\limits_{x\to 3+0} \dfrac{|x-3|}{x-3} = 1$, так как при всяком значении $x > 3$ эта функция равна +1.

Следовательно, в точке $x = 3$ функция имеет конечный разрыв; ее скачок в этой точке разрыва конечный (рис. 1.5.3):

$$\lim_{x\to 3+0} f_4(x) - \lim_{x\to 3-0} f_4(x) = 1 - (-1) = 2 .$$

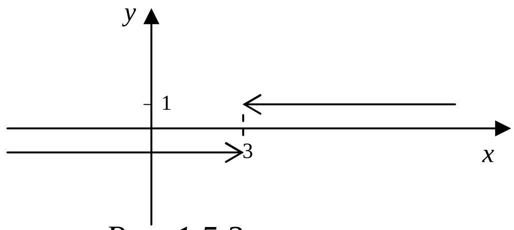


Рис. 1.5.3

5) $f_5(x) = \lg\left(x^2 + 3x\right)$.

Решение. Логарифмическая функция $y = \lg u$ определена только для положительных значений своего аргумента u. Поэтому элементарная функция $f_5(x) = \lg(x^2 + 3x)$ будет определена и непрерывна для значений x, удовлетворяющих неравенству $x^2 + 3x > 0$. Решая это неравенство, найдем область определения и область непрерывности функции, − она будет состоять из двух интервалов числовой оси: $-\infty < x < -3$ и $0 < x < +\infty$.

Во всех точках отрезка $-3 \le x \le 0$ данная функция не определена, однако точками её разрыва являются только граничные точки $x=-3$ и $x=0$. В этих граничных точках функция не определена, но она определена в сколь угодно близких точках слева от точки $x=-3$ и справа от точки $x=0$. Все остальные внутренние точки отрезка $[-3;0]$, в которых функция явно не определена, как и в точках $x=-3$ и $x=0$, не являются точками разрыва потому, что вблизи этих внутренних точек функция не определена. Точка, в которой функция не определена, будет точкой разрыва функции лишь при условии, если функция определена, хотя бы с одной стороны вблизи этой точки.

Найдя односторонние пределы функции при стремлении x к точкам разрыва изнутри области определения функции

$$\lim_{x\to-3-0}\lg(x^2+3x)=\lg 0=-\infty;$$

$$\lim_{x\to+0}\lg(x^2+3x)=\lg 0=-\infty,$$

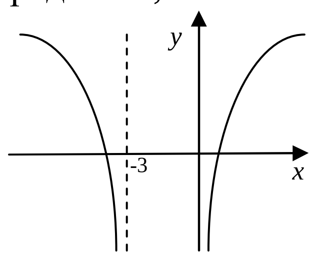


Рис. 1.5.4

заключаем, что в точках $x=-3$ и $x=0$ функция имеет бесконечные разрывы (рис. 1.5.4).

6) $$f(x)=\begin{cases} x, \ \textit{при} \ \ x\le-\pi, \\ \sin x, \ \textit{при} \ \ -\pi<x<\dfrac{\pi}{2}, \\ 1, \ \textit{при} \ \ x>\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Решение. Функции $y=x$, $y=\sin x$ и $y=1$ непрерывны на всей числовой прямой, поэтому данная функция может иметь разрывы только в точках, где меняется её аналитическое выражение, т.е. в точках $x_1=-\pi$ и $x_2=\dfrac{\pi}{2}$. Исследуем функцию на непрерывность в этих точках, для чего найдем соответствующие односторонние пределы и значения функции.

В точке $x_1=-\pi$ имеем

$$\lim_{x\to-\pi-0}f(x)=\lim_{x\to-\pi}x=-\pi,\quad \lim_{x\to-\pi+0}f(x)=\lim_{x\to-\pi}\sin x=0,\ f(-\pi)=-\pi.$$

Таким образом, в этой точке $\lim\limits_{x\to-\pi-0}f(x)=f(-\pi)\ne\lim\limits_{x\to-\pi+0}f(x)$, т.е. функция имеет разрыв первого рода и непрерывна слева. Скачок функции $f(x)$ в точке $x_1=-\pi$ равен $\Delta f(-\pi)=\lim\limits_{x\to-\pi+0}f(x)-\lim\limits_{x\to-\pi-0}f(x)=\pi.$

Аналогично для точки $x_2=\dfrac{\pi}{2}$ получим

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}-0} f(x)=\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}-0}\sin x=\sin\frac{\pi}{2}=1,\quad \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+0} f(x)=\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+0}1=1,$$

а значение $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ не определено. Отсюда следует, что $x_2=\frac{\pi}{2}$ − точка устранимого разрыва для функции $f(x)$ (рис. 1.5.5).

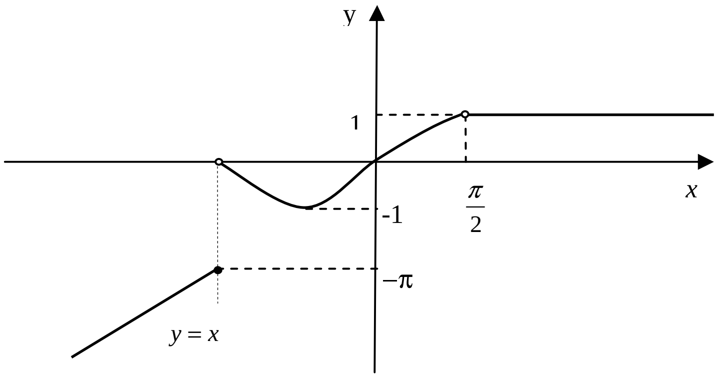


Рис. 1.5.5

7) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+2} & при\; x<1, x\neq-2,\\ x^2+1 & при\;\; x\geq 1.\end{cases}$

Решение. Как видно, точками возможного разрыва функции являются: $x_1=-2, x_2=1$, причём в точке $x_1=-2$ – разрыв второго рода (бесконечный разрыв). Исследуем эти точки.

Рассмотрим точку $x_1=-2$, $f(-2)$ − не существует,

$$\lim_{x\to-2+0} f(x)=\lim_{x\to-2+0}\frac{1}{x+2}=\infty,$$

Рассмотрим точку $x_2=1$, $f(1)=\left(x^2+1\right)\Big|_{x=1}=2$,

$$\lim_{x\to1-0} f(x)=\lim_{x\to1-0}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{3},\quad \lim_{x\to1+0} f(x)=\lim_{x\to1+0}(x^2+1)=2,$$

Таким образом, $\lim\limits_{x\to1-0} f(x)\neq\lim\limits_{x\to1+0} f(x)$ и точка $x_2=1$ – точка разрыва первого рода (конечного разрыва).

Скачок функции в этой точке разрыва

$$\lim_{x\to1+0} f(x)-\lim_{x\to1-0} f(x)=2-\frac{1}{3}=1\frac{2}{3}.$$

Построим график функции (рис. 1.5.6).

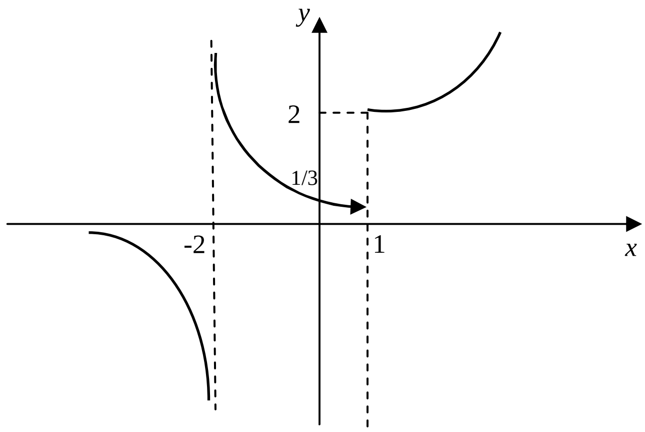


Рис. 1.5.6

1.6. Задачи для самостоятельной работы

1.6.1. 1) Дана функция $F(x)=x^4-x^3+2x^2+4$. Найдите $F(0)$, $F(-1)$ и $F(2)$.

2) Дана функция $s(t)=t^2-6t+8$. Найдите $s(0)$, $s(2)$, $s(-2)$.

1.6.2. 1) Дана функция $f(x)=x^4-x^2+1$. Покажите, что $f(1)=f(-1)$.

2) Дана функция $f(x)=x^4+x^2+5$. Покажите, что $f(2)=f(-2)$.

1.6.3. 1) Дана функция $f(x)=x^3+x$. Покажите, что $f(1)=f(-1)$.

2) Дана функция $f(x)=x^5+x^3$. Покажите, что $f(2)=-f(-2)$.

1.6.4. Найдите области определений функций:

1. $y=\dfrac{1}{4x-2}$;
2. $y=\dfrac{x+2}{2x-8}$;
3. $y=\dfrac{x^2-4}{x+2}$;
4. $y=\dfrac{4x-1}{x^2-x-12}$;
5. $y=\sqrt{x}+\sqrt{4-x}$;
6. $y=\sqrt{x-2}+\sqrt{x-5}$;
7. $y=3\cdot\sqrt{5-x}-\dfrac{4}{x-3}$;
8. $y=\sqrt{7-x}+\dfrac{1}{x-1}$;
9. $y=\sqrt{x^2+8x+15}$;
10. $y=\sqrt{(2-x)(5+x)}$;
11. $y=\sqrt{\dfrac{x-8}{12-x}}$;
12. $y=\sqrt{\dfrac{4x-8}{3-6x}}$.

1.6.5*. Записать одной формулой функцию, область определения которой состоит:

а) из одной точки;

б) из двух точек;

в) из множества всех целых чисел.

1.6.6*. Привести пример функции $f(x)$, для которой:

а) $D(f)=E(f)$;

б) $D(f)\supset E(f)$;

в) $D(f)\subset E(f)$.

1.6.7*. Могут ли существовать такие функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$, что $E(f_1)=E(f_2)=R$, но $E(f_1+f_2)=\{1\}$; $E(f_1\cdot f_2)=\{2\}$?

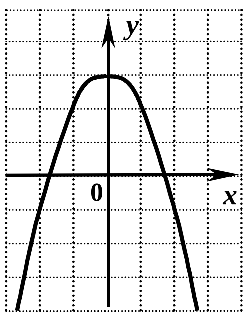
1.6.8*. Исключив параметр t, явно выразить функцию y:

а) $\begin{cases} x=t+3, \\ y=t^2+6t+10; \end{cases}$

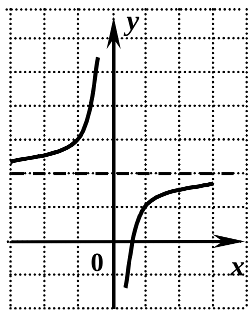
б) $\begin{cases} x=3\cos^2 t, \\ y=2\sin^2 t. \end{cases}$

1.6.9. На одном из следующих рисунков (рис. 1.6.1) изображен график нечетной функции. Укажите этот рисунок.

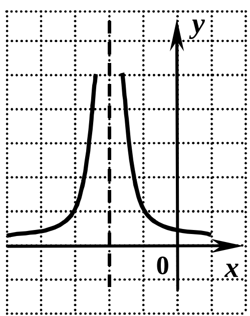
а)



б)



в)



г)

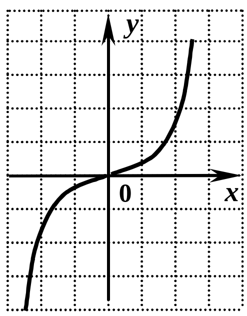


Рис. 1.6.1

1.6.10. Найти следующие пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{2x+1}$;

2. $\lim\limits_{x\to -2}\left(x^2+5x+6\right)$;

3. $\lim\limits_{x\to -1}\left(x^5-x^{5x+1}+3\right)$;

4. $\lim\limits_{x\to -2}\lg\left(2-2x-x^2-x^3\right)$;

5. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\sin x\sin 2x\sin 3x$;

6. $\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t^3+3^t}{\sqrt{t+3}}$;

7. $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{(2x-y)^3-\sin y}{x^2+y^2+tg2y}$;

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8}{1-2^{ctgx}}$;

9. $\lim\limits_{x\to \pi}5\sin\dfrac{3x}{x-\pi}$;

10. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{5x+4}{5x-2}\right)^{\frac{3x-1}{4}}$.

1.6.11. Найти пределы*:*

1. (ШЮЛ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+2x-1}{x^2+4x+1}$;

2. (МК) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos^3 x}$;

3. (ДИ) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)$;

4. (ЖГ) $\lim\limits_{x\to \infty}x-\sqrt{x^2+5x}$;

5. (ЖДИ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+x-3}{x^2+x-2}$;

6. (ПСЖ) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3-x+1}{x^2+2x-5}$;

7. (МАЦ) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2-4x^5+1}{2x^5+3x^3-x}$;

8. (ЛЖГ) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^5-x^2+x}{x^4+2x+5}$;

9. (СЭЖ) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{2x+1}$;

10. (КБИ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$;

11. (КЦШ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x-2}$;

12. (ИСА) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2-3x+2}$;

13. (ПСЖ) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3-3x+1}{x^2+x-4}$;

14. (ЖЭЭ) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{4x^3+3x^2-1}{2x^3-3x+1}$;

15. (ЖШМ) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{6x^3-2x+7}{3x^3-5x+2}$;

16. (ЖШЛ) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{x+4}-1}{\sqrt{3-2x}-3}$;

17. (ЮИС) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x}{2+x}\right)^{3x}$;

18. (ПИЖ) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{2x^2-5x+1}$;

19. (СИА) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-10x+3}{x^2-2x-3}$;

20. (ГСС) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3+3x-1}{2x^3+x^2-4}$;

21. (ИЮБ) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-2x^3+2}{x^4+2x}$;

22. (ЛГК) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{6x^6-3x^2-2}{2x^2+x+5}$;

23. (БЦМ) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{x^2-4}$;

24. (ЮБЭ) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-5x-4}$;

25. (КГИ) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{3x^2-14x+5}{x^2-6x+5}$;

26. (ЖИД) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2+2x-3}$;

27. (ПСЖ) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^5-3x^2+1}{3x^4+2x+3}$;

28. (ЦЭЭ) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^7+6x-5}{4x^7+2x^3-3}$;

29. (ДЛМ) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{x+6}-2}{x^2-4}$;

30. (ЖИЭ) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+3x+1}{2x^2-3x-5}$;

31. (БДЛ) $\lim\limits_{x\to-6}\dfrac{2x^2-9x-18}{x^2-7x+6}$;

32. (ЖМФ) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x-3}{x^2+3x+1}$;

33. (ДПМ) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-3x^2+2}{5x^4-3x-2}$;

34. (ЛДЛ) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-5x+2}{2x^4+3x^2-x}$;

35. (СЭЮ) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{2x+1}-3}$;

36. (ЦСМ) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x}{3x+5}\right)^{2x+1}$;

37. (ПИЖ) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-2x-1}{x^2+4x+1}$;

38. (ЖДИ) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2+x-3}{x^2+x-2}$;

39. (КЦШ) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x+1}{x^2+2x-5}$;

40. (ДАГ) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x^5+1}{2x^5+3x^3-x}$;

41. (МАК) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^5-x^2+x}{x^4+2x+5}$;

42. (МГД) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{9-x^2}-3}$;

43. (БЦЭ) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x+1}\right)^{x-2}$;

44. (ЛДЛ) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$;

45. (ЮЖФ) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{2x^2+5x+1}{x^2+2x-3}$;

46. (ГЛК) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{2x^2-11x+5}{x^2-7x+10}$;

47. (СЛИ) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x+1}{x^2+3x-4}$;

48. (МКГ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{9x^5-4x^3+2}{3x^4-2x+3}$;

49. (ДКЦ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{6x^4-4x^3+8}{2x^3-3x^2+1}$.

1.6.12. Привести пример функции, бесконечно малой при $x\to1$, $x\to2$ и $x\to3$, но не являющейся бесконечно малой в окрестности других точек.

1.6.13. Записать все точки разрыва (слева направо), указывая следом за точкой тип разрыва для функций:

1. а) (4701.РП) $f_1(x)=\dfrac{\sin(x-2)}{x^2-4}+arctg\,\dfrac{2}{x}$;

б) (ДТ01.РП) $f_2(x)=\begin{cases}\dfrac{x+3}{x^2-9} & \text{при } x<0,\\ \dfrac{x-1}{x^2-4} & \text{при } x>0.\end{cases}$

2. а) (ДП11.РП) $f_1(x)=\dfrac{\sin(x-3)}{\left|x^2-9\right|}+\dfrac{e^x-1}{5x}$;

б) (5912.РП) $f_2(x)=\begin{cases}\dfrac{x+4}{x^2-16} & \text{при } x\le 0,\\ \dfrac{\sin x}{x^2-9} & \text{при } x>0.\end{cases}$

3. а) (Д911.РП) $f_1(x)=x\sin\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x-1}arctg\,\dfrac{1}{x-2}$;

б) (8912.РП) $f_2(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x}{x^2-1} & \text{при } x\le 0,\\ \dfrac{\sin^2 x}{x^3-2x^2} & \text{при } x>0.\end{cases}$

4. а) (3604.РП) $f_1(x)=\dfrac{|x+2|}{x^2-4}+\dfrac{\sin 3x}{x}$;

б) (9604.РП) $f_2(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x-2)}{x^2-4} & \text{при } x<2,\\ \dfrac{\sin(x-3)}{x^2-9} & \text{при } x\ge 2.\end{cases}$

5. а) (1111.РП) $f_1(x)=arctg\,\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{\sin(x-2)}{x^2-4}$;

б) (8912.РП) $f_2(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x+5)}{x^2-25} & \text{при } x\le 0,\\ \dfrac{x}{x^2-1} & \text{при } x>0.\end{cases}$

6. а) (5211.РП) $f_1(x)=\dfrac{\left|x^2-1\right|}{x^2+3x+2}+\dfrac{\sin(x-3)}{x-3}$;

б) (9812.РП) $f_2(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x+2)}{x^2-4} & \text{при } x\le 1,\\ \dfrac{x}{x^2-9} & \text{при } x>1.\end{cases}$

7. а) (3Д71.РП) $f_1(x)=\dfrac{\sin(2x)}{\sqrt{x^2}}+\dfrac{x+1}{x^2-1}$;

б) (9971.РП) $f_2(x)=\begin{cases}\dfrac{x+2}{x^2-4} & \text{при } x\le 0,\\ \dfrac{x^2-x}{x^2-5x+4} & \text{при } x>0.\end{cases}$

8. а) (С081.РП) $f_1(x)=arctg\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{\sin(x-2)}{x^2-4}$;

б) (П781.РП) $f_2(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x^2-9} & \text{при } x\le 0,\\ \dfrac{x\sin\left(x^3-1\right)}{x-1} & \text{при } x>0.\end{cases}$

9. а) (Р591.РП) $f_1(x)=\dfrac{\sin(x+3)}{\sqrt{(x+3)^2}}+\dfrac{\sin(x-3)}{x^2-4x+3}$;

б) (СА91.РП) $f_2(x)=\begin{cases}\dfrac{x+2}{x^2-4} & \text{при } x\le 0,\\ \dfrac{|x-1|}{x^2-4x+3} & \text{при } x>0.\end{cases}$

10. а) (6А10.РП) $f_1(x)=\dfrac{\sin(x+3)}{\left|x^2-9\right|}+\dfrac{e^{3x}-1}{x}$;

б) (5410.РП) $f_2(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x^2-x-6} & \text{при } x\le 1,\\ \dfrac{x}{x^2-4} & \text{при } x>1.\end{cases}$

1.6.14. Найти точки разрыва и определить их род:

1. $f(x)=\dfrac{2}{3x+6}$;

2. $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-4}$;

3. $f(x)=\dfrac{1}{x-6}$;

4. $f(x)=\dfrac{4}{x^2-2x+1}$;

5. $f(x)=\dfrac{-4}{x-4}$;

6. $f(x)=\dfrac{2}{(5-x)^2}$;

7. $f(x)=\dfrac{x}{x-6}$;

8. $f(x)=\dfrac{1}{2x^2-5x}$;

9. $f(x)=\dfrac{x}{2x-1}$;

10. $f(x)=\dfrac{3}{x^2-5x+6}$;

11. $f(x)=\dfrac{-x}{x+4}$;

12. $f(x)=\dfrac{4}{2x^2+5}$;

13. $f(x)=\dfrac{2}{3x+6}$;

14. $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-4}$;

15. $f(x)=\dfrac{4}{x^2-2x+1}$;

16. $f(x)=\dfrac{2}{(5-x)^2}$;

17. $f(x)=\dfrac{(x-3)(x+1)}{3x(x+2)(x^2-1)}$;

18. $f(x)=\dfrac{|x-3|}{x-3}$;

19. $f(x)=\dfrac{(x+3)(x+2)}{3x(x+1)(x^2-4)}$;

20. $f(x)=x+\dfrac{|x+2|}{x+2}$;

21. $f(x)=\dfrac{(x-3)(x+1)}{3x(x+2)(x^2-9)}$;

22. $f(x)=-\dfrac{|x-4|}{x-4}$;

23. $f(x)=\dfrac{(x-3)(x+4)}{2x(x+2)(x^2-16)}$;

24. $f(x)=-\dfrac{x+4}{|x+4|}$;

25. $f(x)=\dfrac{(x-2)(x-1)}{x(x+4)(x^2-1)}$;

26. $f(x)=-\dfrac{x+1}{|x+1|}$;

27. $f(x)=\dfrac{(x-5)(x+3)}{3x(x+2)(x^2-25)}$;

28. $f(x)=\dfrac{x-1}{|x-1|}$;

29. $f(x)=\dfrac{(x-3)(x+1)}{3x(x+2)(x^2-1)}$;

30. $f(x)=\dfrac{1}{x-6}$;

31. $f(x)=\dfrac{-4}{x-4}$;

32. $f(x)=\dfrac{x}{2x+6}$;

33. $f(x)=\dfrac{(x+3)(x+1)}{x(x+2)(x^2-1)}$; 34. $f(x)=\dfrac{|x+3|}{x+3}$.

1.6.15*. Как изменится внутренний угол α_n и апофема h_n правильного многоугольника, когда число его сторон n неограниченно возрастает?

1.7. Проверь свои знания

Решите задание, сравните полученный ответ с предложенными. В ответе укажите номер правильного ответа.

Вариант № 1

1. (ЖЖФ) Функция f определена на всей числовой прямой. Если для любых x_1 и x_2, удовлетворяющих условию $x_1 > x_2$, выполняется неравенство $f(x_1)-f(x_2)<0$, то f обязательно:

1) возрастает; 2) ограничена; 3) убывает;
4) неограниченна; 5) отрицательна.

2. (ЖИД) Функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой. Если для любого С существует А такое, что для любого x из $|x|>A$ следует $f(x)>C$, то обязательно:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$;
4) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty$; 5) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$.

3. (МБМ) Бесконечно малая $\cos x-\cos 2x$ при $x\to 0$ эквивалентна:

1) $\dfrac{x}{2}$; 2) $-x$; 3) x^2 4) $\dfrac{3x^2}{2}$; 5) $-\dfrac{x}{2}$.

4. (ЖИД) Предел последовательности $x_n=\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{2n^2+1}$ равен:

1) $\dfrac{1}{2}$; 2) $\dfrac{1}{4}$; 3) 1; 4) 0; 5) 2.

5. (ИАА) Значение $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^3}-\sqrt{1-x^3}}{4\sin x^3}$ равно:

1) 0; 2) ∞; 3) $\dfrac{1}{2}$; 4) $\dfrac{1}{4}$; 5) 2.

6. (ЖШМ) Значение $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-e^{x/2}}{\sin 2x}$ равно:

1) 0,5; 2) 0,75; 3) 1; 4) 1,5; 5) 2,5.

7. (ЦЮЦ) Функция $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}, & x\neq 1\\ a, & x=1\end{cases}$ непрерывна на всей числовой оси, если a равно:

1) 0; 2) 2; 3) 3; 4) -2; 5) -3.

Вариант № 2

1. (ШФЛ) Функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой. Если существует $C<0$ такое, что для любого x выполняется неравенство $f(x)<C$, то $f(x)$ обязательно:

1) положительна; 2) ограничена; 3) убывает;
4) отрицательна; 5) неограниченна.

2. (ШДГ) Функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a. Если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что для любого x из $0<|x-a|<\delta$ следует $|f(x)-A|<\varepsilon$, то обязательно:

1) $\lim\limits_{x\to A} f(x)=a$; 2) $\lim\limits_{x\to A} f(x)=0$; 3) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$;
4) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$; 5) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=a$.

3. (ЖЛМ) Бесконечно малая $\ln\left(\sqrt{1+x^3}\right)$ при $x\to 0$ эквивалентна:

1) x^3; 2) $\dfrac{x^3}{3}$; 3) $\dfrac{x^3}{2}$; 4) x^2; 5) $\dfrac{x^2}{2}$.

4. (СПШ) Предел последовательности $x_n=\sqrt{n^2+3n}-n$ равен:

1) 3; 2) 2; 3) 1,5; 4) 0; 5) 0,5.

5. (ЭСЖ) Значение $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x^2}{x^5-3x^4}$ равно:

1) -1; 2) $-\dfrac{1}{2}$; 3) $\dfrac{1}{2}$; 4) $-\dfrac{1}{3}$; 5) $-\dfrac{1}{6}$.

6. (СЛИ) Значение $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2+5}{x^2-1}\right)^{x^2+1}$ равно:

1) e^4; 2) e^5; 3) e^6; 4) e^3; 5) e^{-5}.

7. (ЦШЮ) Функция $f(x)=\dfrac{tgx\cdot arctg\left(1/(x-3)\right)}{x(x-5)}$ имеет неустранимый разрыв первого рода в точке x, равной:

1) -3; 2) 3; 3) 0; 4) 5; 5) -5.

1.8. Индивидуальное домашнее задание

Задание 1. Найти область определения функции:

1.1. (АП3.РП) $f(x)=\sqrt{x-4}+\sqrt{8-x}$;

1.2. (С61.РП) $f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-7x+12}}$;

1.3. (Т59.РП) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}}$;

1.4. (507.РП) $f(x)=\sqrt{\lg\dfrac{3x-x^2}{2}}$;

1.5. (0А4.РП) $f(x)=\arcsin\dfrac{x-4}{3}+\lg(5-x)$;

1.6. (012. РП) $f(x)=\sqrt{\arcsin(\log_4 x)}$;

1.7. (079. РП) $f(x)=\lg(9-x^2)$;

1.8. (А67.РП) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+4^{\arcsin(x-2)}+\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$;

1.9. (Д54. РП) $f(x)=\lg\left(arc\sin\dfrac{6x-x^2}{8}\right)$;

1.10. (ЭБК) $f(x)=\lg(|x|-x)$.

Задание 2. Вычислить значение функции:

2.1. Дана функция $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$. Найдите $f\left[f(x)\right]$. (2А4) Вычислите $2f\left[f(x)\right]$.

2.2. Дана функция $f(x)=\sin x$, $\varphi(x)=x^2$. Найдите $f\left[\varphi(x)\right]$ и $\varphi\left[f(x)\right]$. (3С2) Вычислите $2\varphi\left[f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$.

2.3. Даны функции $f(x)=\log_2 x$, $\varphi(x)=\sqrt{x}$.Найдите $\psi(x)=f\left[\varphi(x)\right]$, $\phi(x)=\varphi\left[f(x)\right]$, $f\left[f(x)\right]$, $\varphi\left[\varphi(x)\right]$. (350). Вычислите ψ (16).

2.4. Дана функция $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$. (878) Вычислите значение этой функции в тех точках, в которых $\dfrac{1}{x}+x=3$.

2.5. Дана функция $f(x+2)=x^2-5x+4$. (445. 5П) Найдите $f(x)$. (826) Вычислите $f(0)$.

2.6. (Р83) Вычислите значение функции $f(x)=x^4+\frac{1}{x^4}$ в тех точках, в которых $\frac{1}{x}+x=4$.

2.7. Дана функция $f(x+2)=\frac{x-4}{x+5}$. (С10) Найдите $\varphi(x)=(x+3)f(x)$. (0А1) Вычислите $f(0)$.

2.8. (858) Даны функции $f(x)=x+1$, $\varphi(x)=x-2$. Решите уравнение $f\left[\varphi(x)\right]+\varphi\left[f(x)\right]=10$.

2.9. (2Д5.5П) Даны функции $f(x)=x^2-1$, $\varphi(x)=x^2+4$. Найдите корни уравнения $f\left[\varphi(x)\right]-\varphi\left[f(x)\right]=20$.

2.10. Дано, что $f(x+1)=\frac{x^2+3}{x^2+5}$. Найдите $f(x)$. (573) Вычислите $f(0)$.

Задание 3. Найдите пределы:

3.1.

а) (ДЮШ) $\lim\limits_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$;

б) (ЦЮЦ) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2^{x+1}+3^{x+1}}{2^x+3^x}$;

в) (ФФЛ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{6x^3}$;

г) (ЖКИ) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)^{\frac{2x^3}{x+1}}$;

д) (ЛГК) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x^2-5x+6}-\frac{1}{x-2}\right)$.

3.2.

а) (ДЖЛ) $\lim\limits_{x\to 8}\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$;

б) (ЮГМ) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{10+x\sqrt{x}}$;

в) (ПЖД) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{1-tgx}$;

г) (ФИБ) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{3x+1}$;

д) (ПМЦ) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x-2}-\sqrt[3]{x}\right)$.

3.3.

а) (ЛЖГ) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-5x+10}{x^2-25}$; б) (ПИЖ) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1}$;

в) (ГЭЛ) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1-\cos 2h}{htg(h)}$; г) (ПШЮ) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{2x^2+1}\right)^{x^2}$;

д) (ЛСС) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{2}{3x-x^2}-\dfrac{1}{9-x^2}\right)$.

3.4.

а) (ДАГ) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$; б) (ГЭЛ) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}}$;

в) (КБЖ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{\sin^3 x}$; г) (ЭГЮ) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\ln(x+5)-\ln x\right]$;

д) (ДАЮ) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{x^3-1}-\dfrac{2}{x-1}\right)$.

3.5.

а) (СЮЮ) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+20)^{30}}{(2x+1)^{50}}$; б) (ЛЭЛ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$;

в) (АИС) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{1-\cos 8x}$; г) (ЖБЖ) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x-3}\right)^{3x}$;

д) (ЖКБ) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-\dfrac{x^3}{x^2-1}\right)$.

3.6.

а) (МБА) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x^2-1}$; б) (СЦШ) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}$;

в) (ЦЭБ) $\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{1-\cos^2\left(\dfrac{a}{4}\right)}{a^2}$; г) (ЖКИ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2}{n}\right)^{n+5}$;

д) (ЮЦЭ) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{1}{x^2-4}\right)$.

3.7.

а) (ДБЦ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2-x+2}$; б) (ШБК) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n^3-4n^2+1}{2n^3-2n+3}$;

в) (СЦШ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)-\sin^2 x}{acr\sin x}$;　　г) (КСС) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)^{x^2+4}$;

д) (ЛЦЛ) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^2+3x}\right)$.

3.8.

а) (ЮЛМ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x}-x}{x-2}$;　　б) (ЖЦЭ) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10^x-1}{10^x+1}$;

в) (МДИ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$;　　г) (ЮИИ) $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{3x}{x-2}}$;

д) (ЮИШ) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x^2-9}-\dfrac{1}{x^2-3x}\right)$.

3.9.

а) (МИШ) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{2x+7}-5}{3-\sqrt{x}}$;　　б) (ДГГ) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)^2+(x+1)^2}{(x-1)^3-(x+1)^3}$;

в) (ЮСД) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax-x^3}{\sin^2\beta x}$;　　г) (ЦЖЦ) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+2}{2x+1}\right)^{\sqrt{x}}$;

д) (МЛЭ) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$.

3.10.

а) (ЖЮФ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$;　　б) (ЦБГ) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^4+(n+1)^4}{(2n+1)^4-(n+1)^4}$;

в) (ЛИС) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$　　г) (ЭГЭ) $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\dfrac{5t}{5t+1}\right)^{\frac{t}{2}}$;

д) (ДАЮ) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x^2-4}-\dfrac{1}{x^2-12x+20}\right)$.

3.11.

а) (ГЛК) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$;　　б) (ЖКФ) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3-(n+1)^2}{(n-1)^3-(n+1)^3}$;

в) (ЮМШ) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{x^2-\pi^2}{\sin x}$;　　г) (ААС) $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\dfrac{t-1}{t+3}\right)^{t+2}$;

д) (СЭШ) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+7x^2+15x+9}{x^3+8x^2+21x+18}$.

3.12.

а) (ЖЭМ) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$; б) (ЖИЭ) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^2+(3+n)^2}{(3-n)^2-(3+n)^2}$;

в) (ШПК) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$; г) (ПЦМ) $\lim\limits_{t\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{t}\right)^{\frac{t^2-5}{2t}}$;

д) (ЖАИ) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

3.13.

а) (СМК) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$; б) (ПИЖ) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sin(n)}{n^2+1}$;

в) (СЖК) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 2x}$; г) (ГАС) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$;

д) (ЭКБ) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-4x^2-3x+18}{x^3-5x^2+3x+9}$.

3.14.

а) (ЮИД) $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$; б) (ЖКБ) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^3-(2-n)^4}{(1-n)^4-(1+n)^3}$;

в) (ЭШФ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\sin(\pi x)}$; г) (ЦЦБ) $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\dfrac{6t-7}{6t+4}\right)^{3t+2}$;

д) (ЭКБ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

3.15.

а) (ЦБД) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$; б) (ЮИД) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-4n)^2}{(n-3)^3-(n+3)^2}$;

в) (ЛИС) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin^2 x-tg^2 x}{(x-\pi)^2}$; г) (ЖФЭ) $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\dfrac{2t+3}{2t+1}\right)^{t+1}$;

д) (ЦЮЦ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^3-(1+3x)}{x^2+x^5}$.

3.16.

а) (ЮКМ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x+x^2}-(1+x)}{x}$; б) (ЦЖЦ) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^3}{(n+1)^2-(n+1)^3}$;

в) (ЛЖЛ) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{tg3x}{tgx}$;

г) (ЮСС) $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\dfrac{t+1}{t-4}\right)^t$;

д) (МББ) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-2x-1}{x^4+2x+1}$.

3.17.

а) (ПШЮ) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[7]{x}}$;

б) (ГШК) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2n^2+1}{(n-1)(n+4)}$;

в) (ПИК) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos3x}{\sin^2 7x}$;

г) (ЮИА) $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\dfrac{t+3}{t+5}\right)^{t+4}$;

д) (ЖИЮ) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{2x^2+5x-3}{x+3}$.

3.18.

а) (ЮМФ) $\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{10-x-6\sqrt{1-x}}{2+\sqrt[3]{x}}$;

б) (КМБ) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^2-(n-2)^2}{(n+3)^2}$;

в) (ПГФ) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin9x}{tg2x}$;

г) (ЮКМ) $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\dfrac{t+4}{t+2}\right)^{t+3}$;

д) (ЖШЦ) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+2x-3}{x^3+4x^2+3x}$.

3.19.

а) (ФЭЭ) $\lim\limits_{x\to16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$;

б) (ПИЖ) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-3n-2}{n+n^4}$;

в) (ЦШЮ) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{tg(\pi x)}{x+2}$;

г) (ЛСГ) $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\dfrac{t+1}{t+2}\right)^t$;

д) (СЦШ) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-x-1}{x^3-1}$.

3.20.

а) (АСФ) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt[3]{9x}-3}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}$;

б) (ГСС) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+5n^2+8n+4}{n^3+3n^2-4}$;

в) (ЮСД) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{x-\pi}{\sin x}$;

г) (ЮИА) $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\dfrac{t^2+1}{t^2+3}\right)^{t^2}$;

д) (ЛЦЛ) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-3x-2}{x-2}$.

Задание 4. Исследовать функции на непрерывность; найти точки разрыва и установить их характер, в случае устранимого разрыва доопределить функцию до непрерывной, в пункте б) построить график.

4.1.

а) $y = \ln(\cos x);$ б) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{при } x \geq 1, \\ \dfrac{1}{x+2} & \text{при } x < 1, x \neq -2. \end{cases}$

4.2.

а) $y = \dfrac{6x}{\sin 4x};$ б) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } x \leq 3, \\ 2x + 1 & \text{при } x > 3. \end{cases}$

4.3.

а) $y = e^{\frac{1}{x^3}};$ б) $f(x) = \begin{cases} x & \text{при } x \leq 0, \\ 1 - x & \text{при } 0 < x < 1, \\ \dfrac{1}{1-x} & \text{при } x > 1. \end{cases}$

4.4.

а) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{x};$ б) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } x < 0, \\ 1 & \text{при } x = 0, \\ tgx + 1 & \text{при } x > 0. \end{cases}$

4.5.

а) $y = \dfrac{\sqrt{7+x} - 3}{x^2 - 4};$ б) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{при } x \leq -1, \\ \dfrac{2}{x-1} & \text{при } x > -1. \end{cases}$

4.6.

а) $y = 1 + e^{\frac{1}{1-x}};$ б) $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{при } x \leq \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{при } \dfrac{\pi}{2} < x < \pi, \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{при } x \geq \pi. \end{cases}$

4.7.

а) $y=\dfrac{1+x^3}{1+x}$;

б) $f(x)=\begin{cases}-2(x+1) & \text{при } x\le -1,\\ (x+1)^3 & \text{при } -1<x<0,\\ x & \text{при } x\ge 0.\end{cases}$

4.8.

а) $y=\dfrac{4x}{|x|}$;

б) $f(x)=\begin{cases}x & \text{при } x\le 0,\\ tgx & \text{при } 0<x\le \dfrac{\pi}{4},\\ 2 & \text{при } x>\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$

4.9.

а) $y=e^{\frac{1}{1-x}}$;

б) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2} & \text{при } x\le 0,\\ 1 & \text{при } 0<x\le 2,\\ x-2 & \text{при } x>2.\end{cases}$

4.10.

а) $y=\dfrac{1}{1+10^{\frac{1}{x}}}$;

б) $f(x)=\begin{cases}x-3 & \text{при } x<0,\\ x+1 & \text{при } 0\le x\le 4,\\ 3+\sqrt{x} & \text{при } x>4.\end{cases}$

4.11.

а) $y=\dfrac{9-10x^2}{\sqrt{4x^2-1}}$;

б) $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$.

4.12.

а) $y=\dfrac{-8-x^2}{\sqrt{x^2-4}}$;

б) $f(x)=\begin{cases}2^x & \text{при } -1\le x<1,\\ x-1 & \text{при } 1<x\le 4,\\ 1 & \text{при } x=1.\end{cases}$

4.13.

а) $y=\dfrac{x^2-11}{4x-3}$;

б) $f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x} & \text{при } 0\le x\le 1,\\ 1-2x & \text{при } 1<x<2{,}5,\\ 2x-7 & \text{при } 2{,}5\le x\le 4.\end{cases}$

4.14.

а) $y=\dfrac{x^2+1}{|x-3|}$;

б) $f(x)=\begin{cases}\cos x & \text{при } -\dfrac{\pi}{2}\le x<\dfrac{\pi}{4},\\ 1 & \text{при } x=\dfrac{\pi}{4},\\ x^3-\dfrac{\pi^3}{16} & \text{при } \dfrac{\pi}{4}<x\le\pi.\end{cases}$

4.15.

а) $y=\dfrac{1-x^3}{x^2-5x+4}$;

б) $f(x)=\begin{cases}1-\cos x & \text{при } -\dfrac{3\pi}{2}\le x\le 0,\\ 1+\dfrac{x^2}{2} & \text{при } 0<x<2,\\ 5-x & \text{при } x\ge 2.\end{cases}$

4.16.

а) $y=\ln(\sin x)$;

б) $f(x)=\dfrac{|3x-5|}{3x-5}$.

4.17.

а) $y=\dfrac{2-x^2}{\sqrt{9x^2-4}}$;

б) $f(x)=\begin{cases}1+\sin x & \text{при } -2\pi\le x\le 0,\\ 2-x^2 & \text{при } 0<x<2,\\ x-4 & \text{при } x\ge 2.\end{cases}$

4.18.

а) $y=\dfrac{e^{2(x+1)}}{2(x+1)}$;

б) $f(x)=\dfrac{1}{x^2(x-1)}$.

4.19.

а) $y=\ln\dfrac{x}{x-2}$;

б) $f(x)=3^{\frac{x}{4-x^2}}$.

4.20.

а) $y=1+\dfrac{1}{x}$;

б) $f(x)=\dfrac{e^{2-x}}{2-x}$.

ГЛАВА II. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

2.1. Понятие производной, правила дифференцирования

Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке X. Возьмем точку $x \in X$. Дадим значению x приращение $\Delta x \neq 0$, тогда функция получит приращение $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$.

Производной функции $y = f(x)$ называется предел отношения приращения функции к приращению независимой переменной при стремлении последнего к нулю (если этот предел существует).

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Производная функции имеет несколько обозначений: y', $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$. Иногда в обозначении производной используется индекс, указывающий, по какой переменной взята производная, например, y'_x.

Касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке M_0 называется предельное положение секущей M_0M при стремлении точки M по кривой к точке M_0 (рис. 2.1.1).

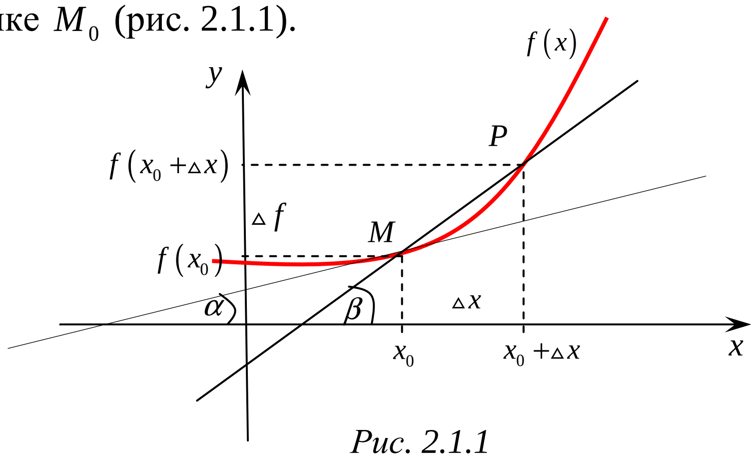


Рис. 2.1.1

Геометрически производная y' функции $y = f(x)$ представляет угловой коэффициент касательной к графику этой функции: $y' = \operatorname{tg}\alpha$.

Уравнение касательной в точке x_0

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Механический смысл производной: производная пути по времени $s'(t_0)$ есть скорость точки в момент t_0: $v(t_0) = s'(t_0)$.

Функция называется *дифференцируемой* в некоторой точке x, если в этой точке она имеет определённую производную, при этом функция будет непрерывной в этой точке.

Непрерывность функции есть необходимое (но недостаточное) условие дифференцируемости функции.

Например, в точках a, b, c и d функция не дифференцируема (рис. 2.1.2). В точке a не существует $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, нет определённой касательной, есть две различные односторонние касательные; в точках b, c, d функция имеет бесконечные производные, график функции имеет вертикальные касательные.

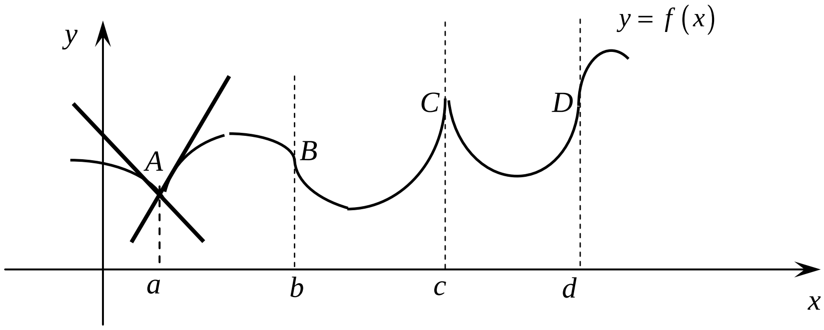


Рис. 2.1.2

Понятие производной широко применяется для решения разнообразных задач в математике, физике, технике, экономике и т.д. Однако практически производную находят не путём предельного перехода, а по формулам и правилам дифференцирования.

Основные правила дифференцирования

Пусть c − константа, а $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные в некоторой точке x.

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

2. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$, в частности, $(cu)' = c \cdot u'$;

3. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$;

4. $y'(x_0) = y'(u_0) \cdot u'(x_0)$, где $y = f(\varphi(x))$ и функция $u = \varphi(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $y = f(u)$ – в точке $u_0 = \varphi(x_0)$.

Таблица 2.2.1

Производные основных элементарных функций

Простые функции	**Сложные функции**
1. $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1}$	1. $\left(U^{\alpha}\right)' = \alpha U^{\alpha-1} \cdot U'$
2. $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	2. $\left(\sqrt{U}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{U}} \cdot U'$
3. $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$	3. $\left(\dfrac{1}{U}\right)' = -\dfrac{1}{U^2} \cdot U'$
4. $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$	4. $\left(\ln U\right)' = \dfrac{1}{U} \cdot U'$
5. $\left(a^{x}\right)' = a^{x} \cdot \ln a$	5. $\left(a^{U}\right)' = a^{U} \cdot \ln a \cdot U'$
6. $\left(e^{x}\right)' = e^{x}$	6. $\left(e^{U}\right)' = e^{U} \cdot U'$
7. $\left(\sin x\right)' = \cos x$	7. $\left(sinU\right)' = cosU \cdot U'$
8. $\left(\cos x\right)' = -\sin x$	8. $\left(cosU\right)' = -sinU \cdot U'$
9. $\left(tgx\right)' = \dfrac{1}{cos^2 x}$	9. $\left(tgU\right)' = \dfrac{1}{cos^2 U} \cdot U'$
10. $\left(ctgx\right)' = -\dfrac{1}{sin^2 x}$	10. $\left(ctgU\right)' = -\dfrac{1}{sin^2 U} \cdot U'$
11. $\left(arc\sin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	11. $\left(arc\sin U\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-U^2}} \cdot U'$
12. $\left(arc\cos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	12. $\left(arc\cos U\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-U^2}} \cdot U'$
13. $\left(arctgx\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	13. $\left(arctgU\right)' = \dfrac{1}{1+U^2} \cdot U'$
14. $\left(arcctgx\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$	14. $\left(arcctgU\right)' = -\dfrac{1}{1+U^2} \cdot U'$
15. $(shx)' = chx$	15. $(shu)' = chu \cdot u'$
16. $(chx)' = shx$	16. $(chu)' = shu \cdot u'$
17. $(thx)' = \dfrac{1}{ch^2 x}$	17. $(thu)' = \dfrac{1}{ch^2 u} u'$
18. $\left(U^{V}\right)' = VU^{V-1} \cdot U' + U^{V} \ln U \cdot V'$	

5. Логарифмическое дифференцирование:

а) прологарифмировать по основанию e обе части уравнения $y = f(x)$: $\ln y = \ln f(x) = \varphi(x)$;

б) продифференцировать обе части полученного равенства, где $\ln y$ – сложная функция от x;

в) заменить y его выражением через x и определить y'.

6. Производная от функции, заданной параметрически, $x = f(t)$, $y = f(t)$:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}; \qquad y''_{xx} = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}; \qquad y''' = \frac{\left(y''_{xx}\right)'_t}{x'_t}.$$

7. Производная от функции, заданной неявно, $F(x;y) = 0$, где $y = y(x)$, тогда

$y'_x = -\dfrac{F'_x}{F'_y}$, ($F'_x, F'_y$ – частные производные функции $F(x;y)$).

2.2. Дифференциал функции

Из определений производной $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ и предела переменной следует, что $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \varepsilon$ или $\Delta y = y'\Delta x + \varepsilon \Delta x$, где $\varepsilon \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Главная часть приращения функции, линейная относительно приращения независимой переменной, называется *дифференциалом* функции и обозначается d: $dy = f'(x)\Delta x$.

Дифференциал первого порядка (dy) функции равен произведению её производной и дифференциала независимой переменной $dy = y'dx = f'(x)dx \Rightarrow y' = \dfrac{dy}{dx}$.

Так как дифференциал функции отличается от её приращения на бесконечно малую высшего порядка по сравнению с величиной dx, то $\Delta y = dy$, или $f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)dx$, откуда

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)dx.$$

Полученная формула часто применяется для приближенного вычисления значения функции при малом приращении Δx независимой переменной x.

Дифференциалом n-го порядка функции $y=f\left(x\right)$ называется дифференциал от дифференциала $\left(n-1\right)$-го порядка этой функции, т.е.

$$d^n y = d(d^{n-1}y).$$

Если функция $y=f\left(x\right)$, где x – независимая переменная, то

$$d^2y = y''dx^2,\ d^3y = y'''dx^3,\ \ldots, d^ny = y^{(n)}dx^n.$$

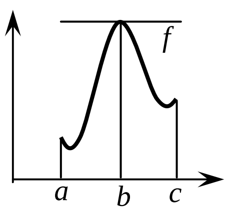
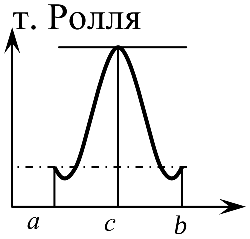
Если функция $y=f\left(u\right)$, где $u=\varphi\left(x\right)$, то $d^2y = y''(du)^2 + y'd^2u$, где дифференцирование функции y выполняется по переменной u. (Это имеет место и для дифференциалов более высоких порядков).

2.3. Теоремы о дифференцируемых функциях

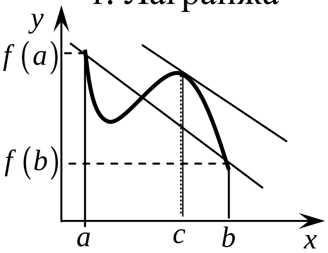
Применение дифференциального исчисления в естествознании и технике основывается на теоремах Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши и Тейлора (таблица 2.3.1). В каждой из них утверждается существование некоторого среднего значения аргумента $x=c$ (поэтому они называются теоремами о среднем).

Таблица 2.3.1

Основные теоремы дифференциального исчисления

Теорема (т)	**Содержание теоремы**
Теорема о связи непрерывности и дифференцируемости	Если функция дифференцируема в точке x_0, то она и непрерывна в этой точке
т. Ферма. 	Если $y=f\left(x\right)$ 1) непрерывна на $[a;b]$, 2) в некоторой точке $c\in[a;b]$ достигает своего наибольшего или наименьшего значения, дифференцируема в точке c, то $f'(c)=0$
т. Ролля 	Если $y=f\left(x\right)$ 1) непрерывна на $[a;b]$, 2) дифференцируема на $(a;b)$, 3) $f\left(a\right)=f\left(b\right)$, то $\exists$ c $\in$ $(a;b)$: $f'(c)=0$

Окончание таблицы 2.3.1

т. Лагранжа 	Если $y=f(x)$ 1) непрерывна на $[a;b]$, 2) дифференцируема на $(a;b)$, то $\exists\, c$: $c\in(a;b)$: $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ (касательная в точке c параллельна хорде, стягивающей концы дуги кривой)
Теорема Коши	Если $y=f(x)$ и $g(x)$: 1) непрерывны на $[a;b]$, 2) дифференцируемы на $(a;b)$, 3) $g'(x)\neq 0$; при $x\in(a;b)$, то $\exists\ c\in(a;b)$: $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$
Теорема Тейлора (общая теорема о среднем)	Функция $y=f(x)$ дифференцируемая $n+1$ раз в некотором интервале, содержащем точку a, может быть представлена в виде суммы многочлена n- ой степени и остаточного члена $f(x)=f(a)+\dfrac{f'(a)}{1!}+\dfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots$ $\ldots+\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n;\ R_n=\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1};$ c – некоторое среднее между a и x. Формула Тейлора позволяет: 1) приближенно представить произвольную функцию $f(x)$ в виде многочлена: $f(x)\approx f(a)+\dfrac{f'(a)}{1!}+\dfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots$ $\ldots+\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n;$ 2) оценить возникшую при этом погрешность R_n. Формула Маклорена – формула Тейлора (при $a=0$).

2.4. Правило Лопиталя

Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0(\infty)$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0(\infty)$; тогда $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Таблица 2.4.1

Нахождение предела по правилу Лопиталя

Неопределённости	**Алгоритм вычисления предела:**
$\left[\dfrac{0}{0}\right]$; $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$	1) найти $f'(x)$; 2) найти $\varphi'(x)$; 3) $\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$; если $\lim\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}:\left[\dfrac{0}{0}\right]$ или $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, снова и снова применять правило Лопиталя
$[0\cdot\infty]$ $[\infty-\infty]$	1) преобразовать функцию к виду дроби, числитель и знаменатель которой одновременно стремятся к нулю или к бесконечности; 2) см. алгоритм выше.
1^{∞} ∞^{0} 0^{0}	1) пусть $a=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{\varphi(x)}$; 2) найти $\ln a=\ln\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{\varphi(x)}=$ $=\lim\limits_{x\to x_0}\ln f(x)^{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)\ln f(x)=p$; 3) записать ответ $a=e^{p}$.

2.5. Исследование функции и построение графика

Исследование функции является одним из важнейших приложений теории пределов, непрерывности функции и производных. При построении графика функции чаще всего, оказывается, недостаточно знать только простейшие свойства функций, такие как монотонность, чётность, нечётность, периодичность, нули функции, а строить график по произвольным точкам слишком нерационально. Поэтому для получения полной картины поведения функции привлекается теория пределов и непрерывности функции, производные первого и второго порядков. Схема полного исследования представлена в приложении 1 (стр. 75).

Асимптоты

Асимптота данной кривой − прямая, к которой неограниченно приближается точка кривой при неограниченном удалении её от начала координат. В таблице 2.5.1 представлены типы асимптот и их нахождение.

Таблица 2.5.1

Асимптоты

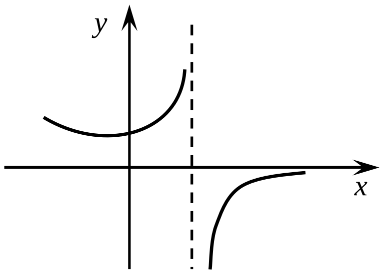
<table>
<tr>
<td>

<u>*Вертикальная*</u> асимптота

вертикальная прямая $x = x_0$, если

$\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \pm\infty$ или

$\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = \pm\infty$.



</td>
<td>

<u>*Наклонная*</u> асимптота

$y = kx + b$

левая

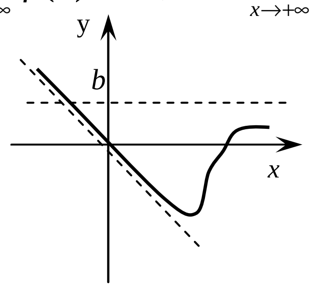
$k = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$;

$b = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - kx$;

правая

$k = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$;

$b = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - kx$



</td>
</tr>
<tr>
<td>

Алгоритм нахождения вертикальной асимптоты

1. $D(f)$

2.

если x_0- [-точка разрыва функции; -граничная точка $D(f)$;

↓

найти $\lim\limits_{x\to x_0\pm0} f(x)$

↓

если $\lim\limits_{x\to x_0\pm0} f(x) = \pm\infty$ или $\neg\exists$

↓

$x = x_0$ − *вертикальная* асимптота

</td>
<td>

Алгоритм нахождения наклонной асимптоты

если $\begin{cases} k = 0, \\ b \neq 0, \end{cases}$ → $y = b$ горизонтальная асимптота $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$

если $\begin{cases} k = \infty \text{ или } \neg\exists \\ b = \infty \text{ или } \neg\exists \end{cases}$ → наклонных асимптот нет

если $\begin{cases} k \neq 0, \\ b \neq 0, \end{cases}$ → $y = kx + b$ - *наклонная* асимптота

</td>
</tr>
</table>

Экстремум функции

Многие функции изменяются не монотонно. В одних интервалах изменения независимой переменной они возрастают, а в других – убывают. Возрастание и убывание функции $y = f(x)$ характеризуется знаком её производной (таблица 2.5.2).

Таблица 2.5.2

Экстремум функции

Знак производной	**Поведение функции**
$f'(x) > 0 \ \forall x \in (a,b)$	функция возрастает
$f'(x) < 0 \ \forall x \in (a,b)$	функция убывает

Пусть $x = x_0$ − некоторая внутренняя точка, $x_0 \in D(f)$.

Функция имеет в точке $x = x_0 \dfrac{\text{максимум}}{\text{минимум}}$, если значение функции в этой точке является $\dfrac{\text{наибольшим}}{\text{наименьшим}}$ по сравнению со значениями функции в соседних точках, т.е. $\dfrac{f(x_0) \geq f(x)}{f(x_0) \leq f(x)}$.

Функция имеет в точке $x = x_0$ экстремум, если она имеет в этой точке $\dfrac{\text{максимум}(\max)}{\text{минимум}(\min)}$.

Условия существования экстремума непрерывной в точке x_0 и ее окрестности функции $y = f(x)$:

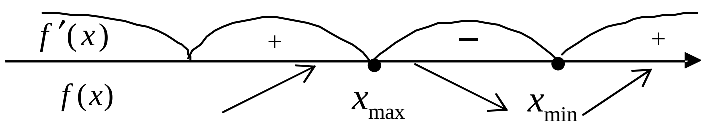
необходимое

$$\left\{ * \left[\begin{array}{l} f'(x_0) = 0 \\ f'(x_0) = \infty \ \lim\limits_{x \to \infty} \\ f'(x_0) - \neg \exists \end{array} \right. \right.$$

* x_0 − критическая − точка − $\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} f'(x_0) = 0 \\ f'(x_0) = \infty \\ f'(x_0) - \neg \exists \end{array} \right. \\ x_0 \in D(f) \end{array} \right.$

и (1)^{ое} достаточное

$f'(x)$ *меняет знак при переходе через точку* x_0



(2)^{ое} достаточное,

если $\begin{cases} f'(x)=0, \\ f''(x)\neq 0 \end{cases} \Rightarrow x_0$ − точка экстремума, при этом

если $\left(\dfrac{f''(x_0)<0}{f''(x_0)>0}\right) \Rightarrow x_0$ − точка $\dfrac{\textit{максимума}}{\textit{минимума}}$.

Наибольшее и наименьшее значение функции на интервале $[a;b]$

Схема нахождения наибольшего (наименьшего) значения функции

1. Найти точки экстремума функции.
2. Найти значения функции в точках экстремума, принадлежащих интервалу $[a;\ b]$.
3. Найти значения функции на концах промежутка $\left[\ f(a);\ f(b)\right]$.
4. Сравнить значения, найденные в п. 2, 3.
5. Выбрать наибольшее (наименьшее) значения функции.

Выпуклость, вогнутость. Точки перегиба

Кривая называется *выпуклой* в интервале, если все ее точки лежат ниже любой касательной, проведенной к этой кривой в данном интервале (рис. 2.5.1).

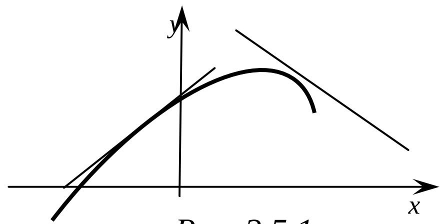


Рис. 2.5.1

Кривая называется *вогнутой* в интервале, если все ее точки лежат выше любой касательной, проведенной к этой кривой в данном интервале (рис. 2.5.2).

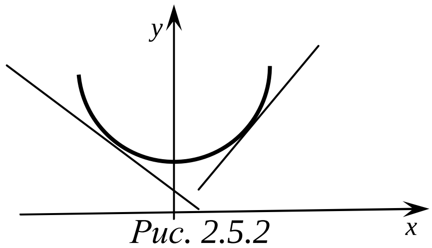


Рис. 2.5.2

Точки на кривой, разделяющие участки выпуклости и вогнутости, называются *точками перегиба* (рис. 2.5.3).

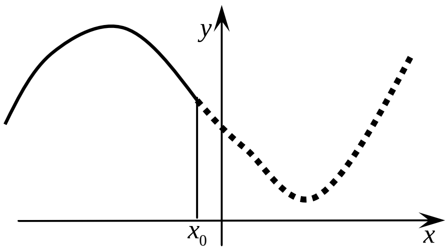


Рис. 2.5.3

Если информацию об интервалах возрастания и убывания функции, наличия точек экстремума мы получаем из ее первой производной, то информацию об интервалах выпуклости, вогнутости и точках перегиба можно получить только из второй производной функции.

Достаточные условия выпуклости и вогнутости

Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в интервале $[a;b]$, тогда:

а) если вторая производная функция $y''(x) < 0 \ \forall x \in [a;b]$, то линия, являющаяся графиком функции $y = f(x)$, выпуклая в данном интервале;

б) если вторая производная функции $y''(x) > 0 \ \forall x \in [a;b]$, то линия, являющаяся графиком функции $y = f(x)$, вогнута в данном интервале.

Условия существования точек перегиба

Для того чтобы точка с абсциссой x_0 являлась точкой перегиба графика функции $y = f(x)$:

необходимо, чтобы вторая производная функции в этой точке $y''(x_0) = 0,\ y''(x_0) = \infty$, либо $y''(x_0)$ не существовала;

достаточно, чтобы вторая производная функция при переходе через эту точку меняла свой знак.

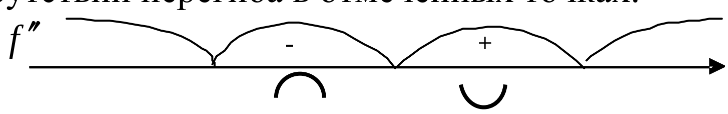
Схема нахождения точек перегиба

1. Находим область определения функции $D(y)$.

2. Находим первую и следом вторую производные функции и из условий $y''(x_0) = 0$, $y''(x_0) = \infty$, $y''(x_0)$ не существует, определяем абсциссы точек возможного перегиба.

3. Наносим абсциссы полученных точек и точек разрыва функции (если они есть) на числовую ось и определяем знак второй производной в окрестностях каждой из этих точек.

4. По смене знака второй производной делаем вывод о наличии или отсутствии перегиба в отмеченных точках.

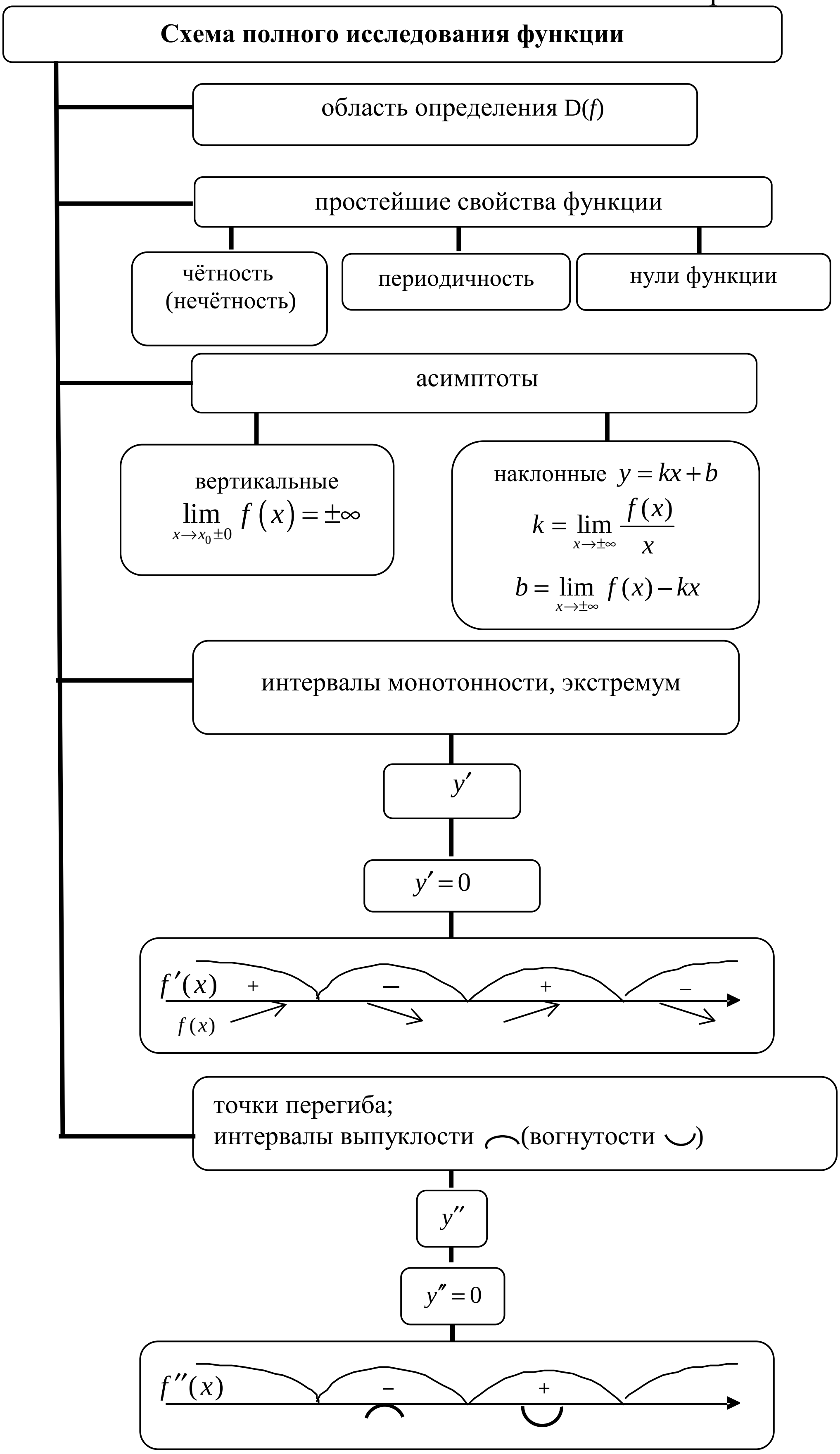


5. Вычисляем значения функции в отмеченных точках.

Замечание 1. Параллельно отысканию точек перегиба по знаку второй производной определяем интервалы выпуклости и вогнутости кривой $y = f(x)$.

Замечание 2. Точки, в которых функция терпит разрыв, или граничные точки области определения не могут являться точками перегиба.

Приложение 1



2.6. Опорные задачи

2.6.1. Найти производные $\dfrac{dy}{dx}$ данных функций:

а) $y(x)=2x^{\frac{3}{4}}-4x^{\frac{7}{5}}+3x^{-2}$; в) $y(x)=x^3\left(\sqrt[4]{x}+1\right)$;

б) $y(x)=\dfrac{a}{\sqrt[4]{x^5}}-\dfrac{b}{x\sqrt[3]{x}}$ (a и b – $const$); г) $y(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2}$.

Решение.

а) Применяем правило дифференцирования суммы степенной функции $y'=2\cdot\dfrac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1}-4\cdot\dfrac{7}{5}x^{\frac{7}{5}-1}+3\cdot(-2)\cdot x^{-2-1}=\dfrac{3}{2}x^{-\frac{1}{4}}-\dfrac{28}{5}x^{\frac{2}{5}}-6x^{-3}$;

б) в подобных случаях удобнее освободиться от радикалов и записать $y=ax^{-5/4}-bx^{-4/3}$, а затем находить производную

$$y'=-\frac{5}{4}ax^{(-5/4)-1}+\frac{4}{3}bx^{(-4/3)-1}=-\frac{5}{4}ax^{-9/4}+\frac{4}{3}bx^{-7/3}=-\frac{5a}{4x^2\sqrt[4]{x}}+\frac{4b}{3x^2\sqrt[3]{x}};$$

в) применим правило дифференцирования произведения двух функций $y'=\left(x^3\right)'\left(x^{\frac{1}{4}}+1\right)+x^3\left(x^{\frac{1}{4}}+1\right)'=$

$$=3x^2\left(x^{\frac{1}{4}}+1\right)+x^3\left(\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}+0\right)=x^2\left(\frac{13}{4}\sqrt[4]{x}+3\right);$$

г) применим правило дифференцирования частного двух функций

$$y'=\frac{\left(x^3-1\right)'x^2-\left(x^3-1\right)\left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2}=\frac{3x^2\cdot x^2-\left(x^3-1\right)\cdot 2x}{x^4}=$$

$$=\frac{3x^3-2x^3+2}{x^3}=\frac{x^3+2}{x^3}.$$

2.6.2. Применяя правило дифференцирования сложной функции, найти производную функции:

а) $y(x)=\left(\sqrt{x}+5\right)^4$;

б) $y=\sin^2 3x$;

в) $y=\ln\left(\operatorname{arctg}5x\right)$.

г) $y(x)=\left(\sin^2 x\right)^{\cos 3x}$.

Решение:

а) функцию можно представить в виде $y=u^4$, где $u=\sqrt{x}+5$, поэтому на основании 4 правила дифференцирования

$$y'=4u^3\cdot u'=4\left(\sqrt{x}+5\right)^3\cdot\left(\sqrt{x}+5\right)'=\frac{4\left(\sqrt{x}+5\right)^3}{2\sqrt{x}};$$

б) данная функция является композицией трех функций $u=\sin v$, $f(u)=u^2$, $v=3x$, с учетом правила дифференцирования сложной функции получим

$$y'=\left(u^2\right)'=2u\cdot u'\cdot v'=2\sin 3x\cdot\cos 3x\cdot 3=3\sin 6x;$$

в) функцию можно представить в виде $y=\ln u$, где $u=arctg\,v$, $v=5x$, получим

$$y'=\left(\ln u\right)'=\frac{1}{u}\cdot u'\cdot v'=\frac{1}{arctg5x}\cdot\frac{1}{1+\left(5x\right)^2}\cdot 5=\frac{5}{\left(1+25x^2\right)arctg5x};$$

г) прологарифмируем по основанию e обе части уравнения

$$\ln y=\ln(\sin^2 x)^{\cos 3x}=\cos 3x\ln\sin^2 x=2\cos 3x\ln\sin x,$$

продифференцируем обе части полученного равенства

$$\frac{y'}{y}=2\left[\left(\cos 3x\right)'\ln\sin x+\cos 3x\left(\ln\sin x\right)'\right]=$$

$$=2\left[-3\sin 3x\ln\sin x+\cos 3x\frac{1}{\sin x}\cos x\right];$$

заменим функцию y её выражением через x и определим y'

$$y'=e^{\cos 3x\cdot\ln\sin^2 x}\cdot\left(-3\sin 3x\cdot\ln\sin^2 x+\cos 3x\cdot\frac{2\sin x\cos x}{\sin^2 x}\right)=$$

$$=\left(\sin^2 x\right)^{\cos 3x}\cdot\left(-3\sin 3x\ln\sin^2 x+2\cos 3x\cdot ctgx\right).$$

2.6.3. Найти производную функции y, заданной уравнением $x^2-xy+\ln y=2$, и вычислить её значение в точке $(2;1)$.

Решение.

Дифференцируя обе части равенства и учитывая, что y есть функция от x, получим $2x-y-xy'+\dfrac{y'}{y}=0$, откуда $y'=\dfrac{2xy-y^2}{xy-1}$.

2.6.4. Найти $\frac{d^2y}{dx^2}$ от следующих функций:

а) $y=\left(1+x^2\right)arctgx;$ в) $y=\ln\left(x+\sqrt{9+x^2}\right);$

б) $y=\sqrt{1-x^2}\arcsin x;$ г) $y=e^{\sqrt{x}}.$

Решение:

а) применим правило дифференцирования произведения двух функций, найдем первую производную

$$y'(x)=2x\cdot\mathrm{arctg}x+\frac{1+x^2}{1+x^2}=2x\mathrm{arctg}x+1,$$

затем, найдем вторую производную

$$y''(x)=2\mathrm{arctg}x+\frac{2x}{1+x^2};$$

б) применим правило дифференцирования произведения двух функций, найдем первую производную

$$y'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\arcsin x+\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{-x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+1,$$

$$y''(x)=\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{x^2}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}\right)\arcsin x-\frac{x}{1-x^2}=$$

$$=-\frac{\arcsin x}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}-\frac{x}{1-x^2};$$

в) применим правило дифференцирования сложной функции

$$y'=\left[\ln\left(x+\sqrt{9+x^2}\right)\right]'=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{9+x^2}}}{x+\sqrt{9+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{9+x^2}},$$

$$y''(x)=\left[\left(9+x^2\right)^{-1/2}\right]'=-\frac{1}{2}\left(9+x^2\right)^{-3/2}\cdot 2x=-\frac{x}{\left(\sqrt{9+x^2}\right)^3};$$

г) применим правило дифференцирования сложной функции

$$y'=(e^{\sqrt{x}})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}},$$

$$y''=-\frac{1}{4\sqrt{x^3}}e^{\sqrt{x}}+\frac{1}{4x}e^{\sqrt{x}}=\frac{e^{\sqrt{x}}}{4x}(1-\frac{1}{\sqrt{x}})=\frac{e^{\sqrt{x}}}{4x\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1).$$

2.6.5. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x)=x^4-2x^2+3$ на отрезке [-2,1].

Решение. Так как функция f дифференцируема на всей числовой оси, то подозрительные на экстремум точки совпадают со стационарными точками, которые находим из условия $f'(x)=4x^3-4x=4x(x^2-1): x_1=0,\ x_2=-1,\ x_3=1.$

Точки $x_1=0$ и $x_2=-1$ являются внутренними для отрезка [-2,1]. Находим $f(0)=3,\ f(-1)=1-2+3=2$, затем – значения функции в граничных точках отрезка $x_4=-2$ и $x_5=1,\quad f(-2)=16-8+3=11,$ $f(1)=2.$

Сравнивая найденные значения, видим, что наибольшее значение достигается в точке $x=-2$ и равно 11, а наименьшее – в точках $x=\pm1$ и равно 2.

2.6.6. Найти дифференциал функции $y=\sin^5 3x$.

Решение. Находим производную данной функции

$$y'=5\sin^4 3x\cdot\cos 3x\cdot 3,\ \text{тогда}\ dy=15\sin^4 3x\cdot\cos 3x dx.$$

2.6.7. Найти дифференциал второго порядка функции $y=\ln(1+x^2).$

Решение. Найдем производную первого порядка $y'=2x/(1+x^2)$, затем производную второго порядка

$$y''=(2(1+x^2)-4x^2)/(1+x^2)^2=2(1-x^2)/(1+x^2)^2.$$

Тогда $d^2y=\dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)}dx^2.$

2.6.8. Вычислить приращение стороны куба, если известно, что его объем увеличится от 27 до 27,1 м^3.

Решение. Если x – объем куба, то его сторона $y=\sqrt[3]{x}$. По условию задачи $x=27$, $\Delta x=0{,}1$. Тогда приращение стороны куба

$$\Delta y\approx dy=y'(x)\Delta x=\frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}}\cdot 0{,}1=\frac{0{,}1}{27}\approx 0{,}0037\,(\text{м}).$$

2.6.9. Найти приближенно sin 31^0.

Решение. Представим функцию синуса через формулу синус суммы $\sin 31^0 = \sin\left(30^0 + 1^0\right)$. Полагаем $x = \frac{\pi}{6}$, тогда

$$\Delta x = 1^0 \cdot \frac{\pi}{180^0} = 0{,}017,$$

$$\sin 31^0 \approx \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6} \cdot 0{,}017 = 0{,}5 + 0{,}017 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}515.$$

С помощью дифференциала функции вычисляют абсолютную погрешность функции e_y, если известна абсолютная погрешность e_y аргумента. В практических задачах значения аргумента находятся с помощью измерений, и его абсолютная погрешность считается неизвестной.

Пусть требуется вычислить значение функция $y = f\left(x\right)$ при некотором значении аргумента *x*, истинная величина которого нам неизвестна, но дано его приближенное значение x_0 с абсолютной погрешностью $e_x : x = x_0 + dx,\ \left|dx\right| \le e_x$. Тогда

$$\left| f(x) - f(x_0) \right| \approx \left| f'(x_0) \right| \ \left|dx\right| < \left| f'(x_0) \right| \ \varepsilon_x .$$

Отсюда видно, что $e_y = \left| f'\left(x_0\right)\right| \cdot e_x$.

Относительная погрешность функции δ_y выражается формулой

$$\delta_y = \frac{\varepsilon_y}{\left|f(x)\right|} = \left|\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}\right| \varepsilon_x = \left|(\ln f(x_0))'\right| \ \varepsilon_x .$$

Например, если в примере 2.6.7 принять $e_x = 0{,}017$, то

$$\varepsilon_y = \left|\cos\frac{\pi}{6}\right| \cdot 0{,}017 = 0{,}015,$$

$$\delta_y = \frac{0{,}015}{0{,}5} \cdot 100\% = 3\%.$$

2.6.10. Удовлетворяет ли функция $f\left(x\right) = 3 - x^2$ условиям теоремы Ферма на отрезке [1, 4]?

Решение. Данная функция условиям теоремы Ферма на отрезке [1, 4] не удовлетворяет, так как она монотонно убывает на этом отрезке и, следовательно, принимает наибольшее значение при $x = 1$ и наименьшее значение при $x = 4$, т. е. не во внутренних точках отрезка $\left[1,4\right]$. Поэтому теорема Ферма здесь неприменима; иными словами, нельзя утверждать, что $f\left(1\right) = f\left(4\right) = 0$. Действительно, $f\left(1\right) = -2$, $f\left(4\right) = -8$.

2.6.11. Справедлива ли теорема Ролля:

1) для функции $f(x) = x^2 + 6x - 35$ на отрезке [-5, -1];

2) для функции $f(x) = \sqrt[3]{(x-4)^2}$ на отрезке [0, 8]?

Решение.

1. Так как функция $f(x)$ непрерывна и дифференцируема при всех x и ее значения на концах отрезка [-5,-1] равны, т.е. $f(-5) = f(-1) = -40$, то в данном случае все условия теоремы Ролля выполняются. Значение $x = c$, при котором производная $f'(x)$ обращается в нуль, найдем из уравнения $f'(c) = c + 6 = 0$, откуда $c = -3$.

2. Функция непрерывна на отрезке $[0,8]$, кроме того, $f(0) = f(8) = 2\sqrt[3]{2}$; значит, два условия теоремы Ролля выполнены. Однако производная $f'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x-4}}$ не существует во внутренней точке $x = 4$ интервала (0,8) и, следовательно, третье условие теоремы Ролля не выполняется. Таким образом, эта теорема к данной функции неприменима. В самом деле, $f'(x) \neq 0$ на отрезке $[0,8]$.

2.6.12. На дуге AB кривой $y = x^3 - 3x$ найти точку, в которой касательная параллельна хорде, соединяющей точки $A(-1;2)$ и $B(3;18)$.

Решение. Функция $y = x^3 - 3x$ на отрезке [-1, 3] непрерывна и дифференцируема, поэтому она удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа. Запишем формулу Лагранжа применительно к данной функции $f(3) - f(-1) = f'(c)\big[3 - (-1)\big]$, т.е. $18 - 2 = \left(3c^2 - 3\right) \cdot 4$, откуда

$$c_1 = -\sqrt{\frac{7}{3}},\ c_2 = \sqrt{\frac{7}{3}}.$$

Очевидно, что только значение c_2 удовлетворяет условию задачи, так как c_2 является внутренней точкой отрезка [-1, 3]. Подставив это значение в уравнение кривой, найдем $y = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}$. Итак, $M\left(\sqrt{\frac{7}{3}}; -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}\right)$ – искомая точка.

2.6.13. Проверить, что функции $f(x)=x^2+4x$ и $\varphi(x)=x^3-x-2$ удовлетворяют условиям теоремы Коши на отрезке [1, 3], и найти соответствующее значение c.

Решение. Функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны при всех x, а значит и на отрезке [1, 3]; их производные $f'(x)=2x+4$ и $\varphi'(x)=3x^2-1$ существуют везде; кроме того, $\varphi'(x)$ на заданном отрезке в нуль не обращается.

Следовательно, к данным функциям применима теорема Коши

$$\frac{f(3)-f(1)}{\varphi(3)-\varphi(1)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)},\text{ т.е. }\frac{21-5}{22-(-2)}=\frac{2c+4}{3c^2-1}$$

откуда находим два значения c: $c_1=\dfrac{3-\sqrt{93}}{6}$, $c_2=\dfrac{3+\sqrt{93}}{6}$.

Из полученных значений только c_2 удовлетворяет условию задачи, так как c_1 является внутренней точкой отрезка [1, 3].

2.6.14. Найти пределы, используя правило Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x^3+5x^2-6x-16}$.

Решение. Имеет место случай $\dfrac{0}{0}$, применяем правило Лопиталя

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x^3+5x^2-6x-16}=\lim_{x\to 2}\frac{4x^3}{3x^2+10x-6}=\frac{32}{26}=\frac{16}{13}.$$

2. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$.

Решение. Имеет место случай $\dfrac{0}{0}$, применяем правило Лопиталя

$$\lim_{x\to a}\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}=\lim_{x\to a}\frac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}}=\frac{m}{n}a^{m-n}.$$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos ax}{1-\cos bx}$.

Решение. Имеет место случай $\dfrac{0}{0}$, применяем правило Лопиталя

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{1-\cos bx}=\lim_{x\to 0}\frac{a\sin ax}{b\sin bx}=\lim_{x\to 0}\frac{a^2\cos ax}{b^2\cos bx}=\frac{a^2}{b^2}.$$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{kx}}{x^n}$, где $k>0$, n – натуральное число.

Решение. Имеет место случай $\dfrac{\infty}{\infty}$, применяем правило Лопиталя

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{kx}}{x^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ke^{kx}}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{k^2e^{kx}}{n(n-1)x^{n-1}}=\ldots=\lim_{x\to+\infty}\frac{k^ne^{kx}}{n!}=+\infty.$$

Здесь правило Лопиталя применено дважды.

5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{tgx}{\sec x}$.

Решение. Имеет место случай $\dfrac{\infty}{\infty}$, применяем правило Лопиталя

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{tgx}{\sec x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2 x}{\sec xtgx}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec x}{tgx}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{tgx}{\sec x}=\ldots$$

$$\ldots=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x=1.$$

Здесь правило Лопиталя применено n раз.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$.

Решение. Имеет место случай $\dfrac{\infty}{\infty}$, применяем правило Лопиталя

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos x}{1+\cos x}.$$

Здесь применение правила Лопиталя бесполезно, ибо отношение производных $\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}=tg^2\dfrac{x}{2}$ не имеет предела при $x\to\infty$.

Искомый предел можно найти так:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-sin\,x}{x+sin\,x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\dfrac{sin\,x}{x}}{1+\dfrac{sin\,x}{x}}=1,\text{ так как } |sin\,x|\le 1.$$

7. $\lim\limits_{x\to 0}xctg2x$.

Решение. Имеет место случай $[0\cdot\infty]$, преобразуем функцию к виду дроби, числитель и знаменатель которой одновременно стремятся к нулю или к бесконечности, затем применяем правило Лопиталя

$$\lim_{x\to 0} x ctg 2x = \lim_{x\to 0}\frac{x}{tg 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2 sec^2 2x} = \frac{1}{2}.$$

2.6.15. Исследовать на экстремум с помощью второй производной функции:

1. $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

Решение. Находим производную $f'(x) = 2x - 2$. Решая уравнение $f'(x) = 0$, получим критическую точку $x = 1$. Найдём вторую производную $f''(x) = 2$. Так как вторая производная в критической точке положительна, то при $x = 1$ функция имеет минимум $f\,min = f(1) = -4$.

2. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 12$.

Решение. Находим $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$.

$(3x^2 - 18x + 24 = 0) \Leftrightarrow (x^2 - 6x + 8 = 0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 4 \end{array}\right.$. Найдём теперь вторую производную $f''(x) = 6x - 18$. Определим знак второй производной в критических точках. Так как $f''(4) = 6\cdot 8 - 18 > 0$, то при $x = 4$ функция имеет минимум. Вычислим значение функции в точках экстремума:

$f\max = f(2) = 2^3 - 9\cdot 2^2 + 24\cdot 2 - 12 = 8,$

$f\min = f(4) = 4^3 - 9\cdot 4^2 + 24\cdot 4 - 12 = 4.$

2.6.16. Найти асимптоты кривых:

1) $y = \frac{1}{x-3}$; 2) $y = \frac{x}{x-1}$; 3) $y = e^{\frac{1}{x}}$; 4) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

1) *Решение*. Так как

$$\lim_{x\to 3-0}\frac{1}{x-3} = -\infty,\ \lim_{x\to 3+0}\frac{1}{x-3} = +\infty,$$

следовательно, кривая имеет вертикальную асимптоту $x = 3$. Найдем наклонную асимптоту $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x(x-3)} = 0,\ b = \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - kx\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-3} = 0.$$

Следовательно, прямая $y = 0$ является горизонтальной асимптотой (рис.2.6.1).

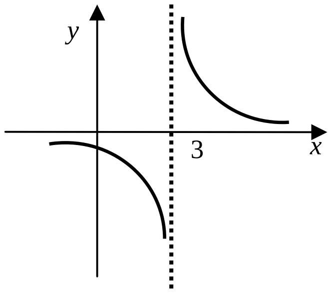


Рис. 2.6.1

2) *Решение*. Имеем $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{1}{x-1}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{1}{x-1}=+\infty;$, значит, $x=1$ – точка разрыва 2 рода и, следовательно, кривая имеет вертикальную асимптоту $x=1$.

Найдем наклонную асимптоту $y=kx+b$.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{(x-1)x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-1}=0,\ b=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-1}=1,$$

т.е. $y=1$ – горизонтальная асимптота графика (рис. 2.6.2).

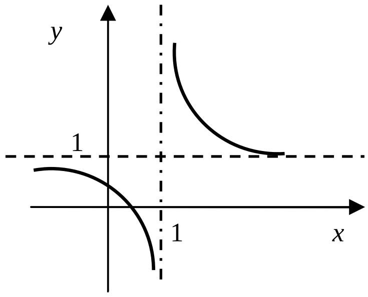


Рис. 2.6.2

3) *Решение*. Найдем вертикальную асимптоту $\lim\limits_{x\to 0+0}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0-0}e^{\frac{1}{x}}=0$, следовательно, $x=0$ – вертикальная асимптота. Так как $\lim\limits_{x\to\pm\infty}e^{\frac{1}{x}}=1$, то горизонтальной асимптотой служит прямая $y=1$ (рис.2.6.3).

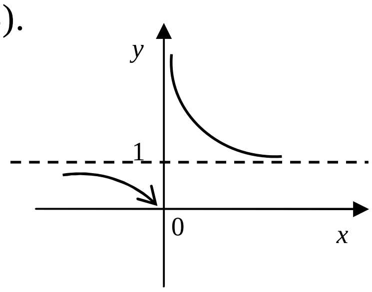


Рис. 2.6.3

4) *Решение.* Найдем горизонтальную асимптоту

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=\frac{1}{\sqrt{1+0}}=1,\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

При $x\to+\infty$ асимптотой служит прямая $y=1$, а при $x\to-\infty$ – прямая $y=-1$ (рис.2.6.4).

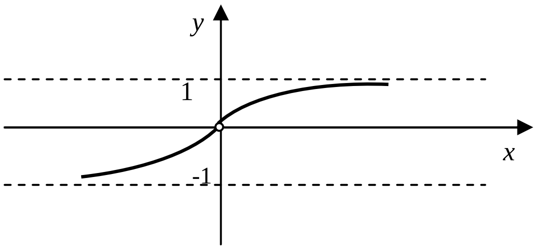


Рис. 2.6.4

2.6.17. Найти асимптоты кривой $y=\dfrac{x^2}{x-1}$.

Решение. Находим наклонную асимптоту

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{(x-1)x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1+1}{x-1}=\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{1}{x-1})=1;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f\left(x\right)-kx\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^2}{x-1}-x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x-1}=1.$$

Итак, $k=1$ и $b=1$, следовательно, при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$ график функций имеет наклонную асимптоту $y=x+1$. Если $x\to1$, то $y\to\pm\infty$, значит, прямая $x=1$ является вертикальной асимптотой (рис.2.6.5).

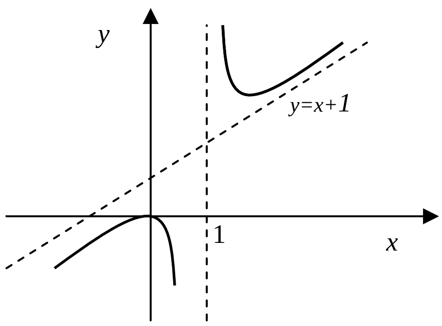


Рис. 2.6.5

2.6.18. Каковы должны быть размеры (радиус основания R и высоты H) открытого сверху цилиндрического бака максимальной вместимостью, если для его изготовления отпущено $S = 27\pi \approx 84{,}82$ м^2 материала?

Решение. Вместимость бака $V = \pi R^2 H$, а на его изготовление пойдёт материал площадью $S = \pi R^2 + 2\pi RH$. Отсюда определяем высоту бака $H = \dfrac{S - \pi R^2}{2\pi R}$. Тогда вместимость бака $V = \pi R^2 \dfrac{S - \pi R^2}{2\pi R} = \dfrac{SR - \pi R^3}{2} = V(R)$.

Найдём то значение R, при котором вместимость $V(R)$ будет максимальной. Имеем $\mathrm{V}' = \dfrac{1}{2}(S - 3\pi R^2)$; $V' = 0$; $S - 3\pi R^2 = 0$;

$$R = \sqrt{\frac{S}{3\pi}} = \sqrt{\frac{27\pi}{3\pi}} = 3 \text{ (м).}$$

Так как $V'' = -3\pi R < 0$, то при найденном значении $R = 3$ вместимость бака будет максимальной.

Высота бака находится из полученного выше соотношения:

$$H = \frac{S - \pi R^2}{2\pi R} = \frac{S - \pi \dfrac{S}{3\pi}}{2\pi\sqrt{S/(3\pi)}} = \sqrt{\frac{S}{3\pi}} = 3 \text{ (м).}$$

2.6.19. Сечение оросительного канала имеет форму равнобочной трапеции, боковые стороны которой равны меньшему основанию. При каком угле наклона боковых сторон этой трапеции сечения канала будет иметь наибольшую площадь?

Решение.

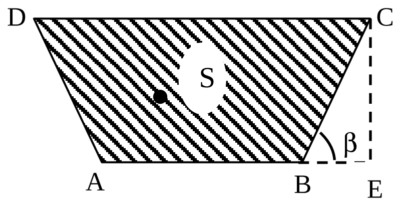


Рис.2.6.6

Определим площадь сечения канала как функцию угла β, считая, что боковые стороны и меньшее основание трапеции равны a. Тогда, как видно из рисунка (рис.2.6.6),

$$S=\frac{|AB|+|DC|}{2}\cdot|CE|=\frac{2a+2a\cos\beta}{2}a\sin\beta=a^2\left(\sin\beta+\frac{1}{2}\sin 2\beta\right).$$

Исследуем S как функцию аргумента a на экстремум. Имеем

$$S'=a^2(\cos\beta+\cos 2\beta).$$

В критических точках $S'=0$, т.е. $\cos\beta+\cos 2\beta=0$, $2\cos\left(\frac{3\beta}{2}\right)\cdot 2\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)=0$.

Так как $0<\beta<\frac{\pi}{2}$, то $\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\neq 0$. Поэтому, если $\cos\left(\frac{3\beta}{2}\right)=0$, то $\frac{3\beta}{2}=\frac{\pi}{2}$ или $\beta=\frac{\pi}{3}$.

Докажем, что при $\beta=\frac{\pi}{3}$ функция S достигает наибольшего значения на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Действительно, $S''=a^2\left(-\sin\beta-2\sin\beta\right)$, $S''(\frac{\pi}{3})=a^2(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3})=-a^2\,\frac{3\sqrt{3}}{2}<0$. Поэтому при $\beta=\frac{\pi}{3}$ имеем локальный максимум $S\left(\frac{\pi}{3}\right)=S_{max}=\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$, который на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ будет также наибольшим значением функции S, поскольку $S\left(0\right)=0$, $S\left(\frac{\pi}{2}\right)=a^2<S_{max}$.

2.6.20. Известно, что прочность бруса с прямоугольным поперечным сечением пропорциональна его ширине b и квадрату высоты h. Найти размеры бруса наибольшей прочности, который можно вырезать из бревна радиусом $R=2\sqrt{3}$ дм.

Решение.

Прочность бруса $N=kh^2b$, где k – коэффициент пропорциональности, $k>0$. Из рисунка (рис.2.6.7) видно, что $h^2+b^2=4R^2$, т.е. $h^2=4R^2-b^2$. Тогда $N=k(4R^2-b^2)b.$

Найдём экстремум функции $N=N\left(b\right):N'=k(4R^2-3b^2).$

Если $N' = 0$, то $4R^2 - 3b^2 = 0$, откуда $b = \dfrac{2R}{\sqrt{3}}$, $b = 4$ дм. Тогда $h = \sqrt{4R^2 - b^2} = \sqrt{4R^2 - 4R^2/3} = 2R\sqrt{2/3} = b\sqrt{2}$, $h = 4\sqrt{2}$ дм.

Так как $N'' = -6kb < 0$, то при найденных значениях b и h прочность бруса будет максимальной.

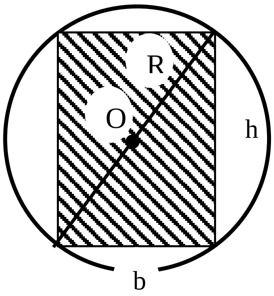


Рис. 2.6.7

2.7. Задачи для самостоятельной работы

2.7.1. Вычислить производные функций:

1. $y = \ln^3 x$;
2. $y = \sin^2 x$;
3. $y = \left(x^2 + 2x + 2\right)e^{-x}$;
4. $y = 3x^3 \ln x - x^3$;
5. $y = \sqrt[3]{tg^2 x}$;
6. $y = 2^{1/x}$;
7. $y = \log_3 \sqrt{2x^2 - 5x + 1}$;
8. $y = \sin arcctgx$;
9. $y = \dfrac{2}{\cos 5x}$;
10. $y = e^{2^x}$;
11. $y = \arcsin \sin x$;
12. $y = \dfrac{\sin x^2}{x}$;
13. $y = tg^2 x - ctgx^2$;
14. $y = 2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x} - 1\right)$;
15. $y = e^{-x} \ln tgx$;
16. $y = \sin 8x \cdot \ln \dfrac{x}{8}$;
17. $y = \cos(1 - \pi x)\sqrt{1 - e^{2x}}$;
18. $y = 6\sqrt[3]{e^{4x}} - 7^{tgx}$;
19. $y = \dfrac{\ln tgx}{e^{1-2x}}$;
20. $y = \sqrt{7 - 4x}ctg 3x$;
21. $y = \cos^2 \dfrac{x}{3} tg \dfrac{x}{2}$;
22. $y = 2^{x^2 - x} tg\left(\dfrac{\pi}{6} - 3x\right)$;
23. $y = \dfrac{\ln \cos x}{\ln \sin x}$;
24. $y = \ln\left(x^2 - a^2\right) + \ln \dfrac{x - a}{x + a}$;
25. $y = \dfrac{\arcsin 7x}{1 - 7x}$;

26. $y=\frac{1}{3}sin^3 x\left(6cos^2 x+7\right);$

27. $y=\ln\frac{\sqrt[3]{x^2-3}}{2x+1};$

28. $y=\sqrt{1+x^2}arctg5x^3;$

29. $y=\sqrt{sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)};$

30. $y=ln^2 ln x;$

31. $y=sin^2 tgx;$

32. $y=ln log_4 sin x;$

33. $y=2arccos\sqrt{sin x};$

34. $y=ln tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right);$

35. $y=cos ln\left(2x-x^2\right);$

36. $y=ln\left(1+sin^2 x\right);$

37. $y=e^{ctg\left(-\frac{1}{x}\right)};$

38. $y=x^2 ln^3\left(-\frac{1}{x}\right);$

39. $y=\sqrt{sin x}e^{\sqrt{sin x}};$

40. $y=\frac{1}{cos^2 3x};$

41. $y=7^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}};$

42. $y=\frac{cos\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}};$

43. $y=sin x\cdot e^{0,5ctg^2 x};$

44. $y=e^{-x^2}\sqrt{sin\frac{x}{2}};$

45. $y=ln x sin\sqrt{ln x};$

46. $y=ln\frac{1+sin3x}{1-sin3x};$

47. $y=5arctg\sqrt{e^{5x}}-ln\left(e^{5x}+1\right);$

48. $y=\sqrt{e^x-1}-arctg\sqrt{e^{x-1}};$

49. $y=\frac{4^{tg\sqrt{x}}}{\sqrt{x}};$

50. $y=\frac{1}{6}arctg\frac{e^{3x}-e^{-3x}}{2};$

51. $y=\frac{arcsin^2 2x}{2}-\sqrt{1-4x^2};$

52. $y=\frac{2^{3x}}{3^{2x}};$

53. $y=ln\left(2x^3+3x^2\right);$

54. $y=\sqrt{1-3x^2};$

55. $y=x\,arccos\frac{x}{2}-\sqrt{4-x^2};$

56. $y=\sqrt{x}\,arcsin\sqrt{x}+\sqrt{1-x};$

57. $y=\left(sin\frac{x}{2}-cos\frac{x}{2}\right)^2;$

58. $y=cos^3\left(x/3\right);$

59. $y=ln tg\frac{2x+1}{4};$

60. $y=ln\sqrt{\frac{1+sin x}{1-sin x}};$

61. $y=\frac{2}{3}tg^2 2x+\frac{1}{5}tg^5 2x;$

62. $y=\frac{1}{3}sin^3\sqrt{x}-\frac{1}{7}sin^7\sqrt{x};$

63. $y=ln\left(3x^2+\sqrt{9x^4+1}\right);$

64. $y=\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}arcsin\frac{x}{a};$

65. $y=ln\frac{\sqrt{4tgx+1}-2\sqrt{tgx}}{\sqrt{4tgx+1}+2\sqrt{tgx}};$

66. $y=-\mathrm{ctg}^2\frac{x}{2}-2\ln\sin\frac{x}{2}$;

67. $y=arctg\sqrt{4x^2-1}$;

68. $y=arctg\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$;

69. $y=arctg\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$;

70. $y=arcsin\frac{2x^3}{1+x^6}$, *если* $|x|<1$;

71. $y=arccos\frac{9-x^2}{9+x^2}$;

72. $y=e^{-x}-\sin e^{-x}\cos e^{-x}$;

73. $y=arctg\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$;

74. $y=\ln\frac{(x-1)(x-3)^3}{(x-2)^3(x-4)}$;

75. $y=1-e^{\sin^2 3x}\cos^2 3x$;

76. $y=\ln\frac{2\ln^3\sin x+3}{2\ln^2\sin x-3}$;

77. $y=\ln(\sec x+tgx)$;

78. $y=-\ln(\cos ecx+ctgx)$;

79. $y=e^{\sqrt{2x}}\left(\sqrt{2x}-1\right)$;

80. $y=\ln\frac{x^5}{x^5+2}$;

81. $y=\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2$;

82. $y=\arcsin\frac{\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$;

83. $y=-\cos ec^2\left(x/2\right)$;

84. $y=\sin(\ln x)\cdot\cos x-\ln\left(\frac{1}{x}\right)$;

85. $y=\left(x^5+3\right)\cdot\left[\ln\left(x^5+3\right)-1\right]$;

86. $y=\arcsin\sqrt{1-0,2x^2}$;

87. $y=\arcsin e^x+\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}$;

88. $y=\frac{x}{\sqrt{1-mx^2}}$;

89. $y=x^2+2x\sin x\cos x+\cos^2 x$;

90. $y=\frac{\sin x}{1+\ln\sin x}$;

91. $y=3x\sin^2 x+3\cos x-\cos^3 x$;

92. $y=\ln\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}$;

93. $y=\sin e^x\cos^3 e^x-\sin^3 e^x\cos e^x$;

94. $y=arctg\,(x+1)+\frac{x+1}{x^2+2x+2}$;

95. $y=x\left(\ln^3 x-3\ln^2 x+6\ln x-6\right)$;

96. $y=\ln\sin\sqrt{x}tg\sqrt{x}-\sqrt{x}$;

97. $y=arctg\frac{x^x-x^{-x}}{2}$;

98. $y=\ln tg\frac{x}{2}+\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x$;

99. $y=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x$;

100. $y=-\frac{2\cos(x/2)}{\sin(x/2)+3\cos(x/2)}$;

101. $y=\frac{1}{2}tg^2\sin x+\ln\cos\sin x$;

102. $y=\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}$;

103. $y=\ln\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x+1}$;

104. $y=2xtg2x+\ln\cos 2x-2x^2$;

105. $y=\arccos\left(2e^{2x}-1\right)$;

106. $y=\ln\ln x(\ln\ln\ln x-1)$;

107. $y=\frac{x-e^{2x}}{x+e^{2x}}$;

108. $y=\ln\frac{x\ln x-1}{x\ln x+1}$;

109. $y=arctg\frac{3x-x^2}{1-3x^2}$;

110. $y=\ln tg\frac{e^{2\sin x}}{4}$;

111. $y=tg^3 tgx+3tgtgx$;

112. $y=\frac{arctgx}{x}-\ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;

113. $y=\frac{\ln x}{x^5}+\frac{1}{5x^5}$;

114. $y=\sqrt{2x+1}\left[\ln(2x+1)-2\right]$;

115. $y=\sec x(1+\ln\cos x)$;

116. $y=e^x\sqrt{1-e^{2x}}-\arcsin e^x$;

117. $y=2^{\cos^3 x-3\cos x}$;

118. $y=\frac{e^x\cdot 2^{5x}}{3^{4x}}$;

119. $y=\frac{x+1}{x}-e^{-\ln\frac{x}{x+1}}$;

120. $y=x\sin x\cos x+\frac{1}{2}\cos^2 x$;

121. $y=\frac{x^2e^{x^2}}{x^2+1}$;

122. $y=\ln tg\frac{x}{2}-\frac{x}{\sin x}$;

123. $y=2\left(tg\sqrt{x}-\sqrt{x}\right)$;

124. $y=\ln\frac{x-a}{x+a}+\frac{1}{2a}arctg\frac{x}{a}$;

125. $y=\ln\frac{\sqrt{x^4+1}-x^2}{\sqrt{x^4+1}+x^2}$;

126. $y=e^{0,5tg^2}\cos x$;

127. $y=arctg\frac{2x^4}{1-x^8}$;

128. $y=x^2e^{x^2}\ln x$;

129. $y=\arccos\sqrt{1-2^x}$;

130. $y=\log_{x^2}2$;

131. $y=\log_2\sin^2 x$;

132. $y=\log_a\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)$;

133. $y=x^{x+1}$;

134. $y=x^{\sin 2x}$;

135. $y=\left(\sqrt{x}\right)^{tg\,2x}$;

136. $y=(\cos x)^{\sqrt[3]{x}}$;

137. $y=(\sin 3x)^{x^2-1}$;

138. $y=(\cos 2x)^{\sin x}$;

139. $y=(\mathrm{arctgx})^{\sqrt{x^2+1}}$;

140. $y=\left(\frac{1}{x}\right)^{\arcsin x}$;

141. $y=x^{\arcsin x}$;

142. $y=\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$;

143. $y=\frac{2^x(x+1)^3}{(x-1)^2\sqrt{2x+1}}$;

144. $y=\ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right)$;

145. $y=\arccos\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$;

146. $y=|x|\ (x\neq 0)$;

147. $y=|f(x)|$;

148. $y=|3x-5|$;

149. $y=e^{|x|}$;

150. $y=|x|+|x-2|$;

151. $y=\dfrac{x^2\sqrt{x+1}}{(x-1)^3\sqrt[5]{5x-1}}$;

152. $y=\dfrac{x^x}{e^x}(x\ln x-x-1)$;

153. $y=\log_{\cos x}\sin x$;

154. $y=\log_{e^2}\left(x^n+\sqrt{x^{2n}+1}\right)$;

155. $y=\log_x e$;

156. $y=xe^x(\sin x-\cos x)+e^x\cos x$;

157. $y=\log_{x^2}x$;

158. $y=\log_{x^2}x^x$;

159. $y=x^{1/\ln x}$;

160. $y=x^x$;

161. $y=x^{-x}\cdot 2^x\cdot x^2$.

2.7.2. Вычислить производные функций в данной точке:

1. (ЖСЖ) $y=3-5x$, $x_0=1$;
2. (КПК) $y=4x^2-0{,}6x+7$, $x_0=1$;
3. (ПЖД) $y=11x^3-x^2-0{,}4$, $x_0=1$;
4. (ЮИГ) $y=x^5-4x^3-x^2+\dfrac{x}{2}$, $x_0=1$;
5. (ЦФШ) $y=-9x^3+0{,}2x^2-0{,}14x+5$, $x_0=1$;
6. (ЛЦГ) $y=ax^3+2ax^2+(3a+b)x-2a$, $a=1$;
7. (ЖИИ) $y=2x^{-2}-x^{-1}+5$, $x_0=1$;
8. (ЦДГ) $y=x^{-4}-3x^{-3}-0{,}7x^{-2}$, $x_0=1$;
9. (ПСД) $r=0{,}32\varphi^{-3}-0{,}11\varphi^{-1}+0{,}24\varphi$, $\varphi=1$;
10. (ДДМ) $y=\dfrac{2}{x}-\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{5}{x^3}-\dfrac{6}{7x^4}$, $x_0=1$;
11. (КСГ) $y=\dfrac{7}{x^3}$, $x_0=1$;
12. (ЦИЖ) $y=\dfrac{3}{4}x\sqrt[3]{x}$, $x_0=8$;
13. (ЮШМ) $y=x^3\sqrt{x}-\dfrac{4}{11}x^5\sqrt{x}+\dfrac{2}{15}x^7\sqrt{x}$, $x_0=1$;
14. (ДАК) $y=\dfrac{3x^2-6x+7}{4x}$, $x_0=1$;
15. (ЖСБ) $y=\dfrac{6x^4-7x^3+x^2-5x+3}{2x^3}$, $x_0=1$;
16. (АЖЖ) $y=x^{1/4}-8x^{3/4}$, $x_0=1$;
17. (КЦЮ) $y=x^{3/2}-2x^{2/3}+3x^{1/3}$, $x_0=1$;
18. (ДММ) $y=4x^{7/2}-9x^{5/2}+2x^{-3/2}$, $x_0=1$;
19. (ЛИС) $y=6x^{-1/3}-3x^{-2/3}+1$, $x_0=1$;

20. (ШЖЛ) $s = 5t^{1/2} - 2t^{-2/3} + 3t^{-1}$, $t = 1$;

21. (ЛДГ) $y = 5\sqrt{x} + 3x\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x}$, $x_0 = 1$;

22. (ШДБ) $y = 6x^2 - \dfrac{5}{x^3} - \sqrt[3]{x^2}$, $x_0 = 1$;

23. (СШД) $y = (3x-2)(7x+4)$, $x_0 = 1$;

24. (ДАЖ) $y = (2x+5)(4x+2-3x^2)$, $x_0 = 1$;

25. (КИЭ) $y = (9-2x)(2x^3 - 9x^2 + 1)$, $x_0 = 1$;

26. (ГЦЛ) $y = \left(\dfrac{2}{x} + 3x\right)(\sqrt{x} - 1)$, $x_0 = 1$;

27. (ДСЭ) $y = \left(3x^2 - \dfrac{1}{x^3}\right)(\sqrt[3]{x} + 0{,}1x)$, $x_0 = 1$;

28. (ДИА) $y = \dfrac{x}{x+1}$, $x_0 = 1$;

29. (ЛГЦ) $y = \dfrac{x-1}{5x-2}$, $x_0 = 1$;

30. ГЖФ) $y = \dfrac{2x+3}{3x+7}$, $x_0 = 1$;

31. (БГЖ) $y = \dfrac{5x^2}{x-3}$, $x_0 = 1$;

32. (ПДЦ) $y = \dfrac{x^2+2x}{3-4x}$, $x_0 = 1$;

33. (ЦДЭ) $y = \dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$, $x_0 = 4$;

34. (ФМД) $y = \dfrac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x} + 2}$, $x_0 = 1$;

35. (ЖШШ) $s = \dfrac{\sqrt[3]{t^2} - t}{t + \sqrt[3]{t^2}}$, $t = 1$,

36. (БЦЭ) $y = \dfrac{x^2 + 7x + 5}{x^2 - 3x}$, $x_0 = 1$;

37. (ЖЖШ) $y = \dfrac{-x^2 + 2x + 3}{x^3 - 2}$, $x_0 = 1$;

38. (ЭЛШ) $r = \dfrac{\sqrt{\varphi} - 2\varphi}{\sqrt[4]{\varphi} + 1}$, $\varphi = 1$;

39. (ДКК) $y = 3\sin x - 5x\cos x$, $x_0 = 0$;

40. (ЮАС) $y = \dfrac{1 + 4\sin x}{2 - 3\cos x}$, $x_0 = 0$;

41. (МПЭ) $r = \dfrac{2\cos\phi - \sin\phi}{3\sin\phi + \cos\phi}$, $\varphi = 0$;

42. (ЖФИ) $y = \dfrac{tgx}{\sin x + 2}$, $x_0 = 0$;

43. (ЖСД) $y = \pi x^2 - \arccos x$, $x_0 = 0$;

44. (ЛАБ) $y = \dfrac{arctgx}{x^3}$, $x_0 = 1$;

45. (ЮМД) $y = (x - arcctgx)(arctgx - 2x)$, $x_0 = 1$;

46. (КИА) $y = \dfrac{3}{arctgx + arcctgx}$, $x_0 = 1$;

47. (ЦСЖ) $y = e^x - 3x^2$, $x_0 = 0$;

48. (ШЛЮ) $y = 8\sin x - 4^x$, $x_0 = 0$;

49. (ЖГМ) $y = e^x tgx$, $x_0 = 0$;

50. (ЖКБ) $y=\frac{\cos x}{e^x}$, $x_0=0$;

51. (СГИ) $y=x^2 3^x$, $x_0=0$;

52. (ССК) $y=\frac{9^x-1}{9^x+1}$, $x_0=0$;

53. (ГИЛ) $y=5^x\left(x^5-10x\right)$, $x_0=0$;

54. (ЛАС) $y=2\ln x-\frac{3}{x^2}$, $x_0=1$;

55. (ЦШ) $y=x^2\log_4 x$, $x_0=1$;

56. (ЦЛЮ) $y=\frac{3\ln x}{x}$, $x_0=1$;

57. (ЖЖФ) $y=\frac{tgx}{e^x-x}$, $x_0=0$;

58. (ЦБС) $y=(5x+2)^4$, $x_0=0$;

59. (ФЮЭ) $y=\cos\left(\frac{\pi}{6}-3x\right)$, $x_0=0$;

60. (СДЮ) $y=\arcsin\frac{x}{2}$, $x_0=0$;

61. (ГСГ) $y=arctg\left(3-x^2\right)$, $x_0=1$;

62. (ДЦЭ) $y=arctg5^{-x}$, $x_0=0$;

63. (СГИ) $y=arctg\ln x$, $x_0=1$;

64. .(ДЖЛ) $y=arctg\frac{1}{\sqrt{x}}$, $x_0=1$;

65. (ПШЮ) $y=\cos\frac{x}{x+1}$, $x_0=0$;

66. (ГЭЛ) $y=\frac{1}{6}\left(e^{6x}-e^{-6x}\right)$, $x_0=0$;

67. (АГБ) $y=2\ln\ln x-\ln 2x$, $x_0=e$;

68. (ГСС) $y=(x-2)\sqrt{x^2+1}$, $x_0=0$;

69. (ЛЭЛ) $y=(3-2x)^3(x-1)^2$, $x_0=1$;

70. (ФСК) $y=e^{-x^3}\ln x$, $x_0=1$;

71. (ЖПЭ) $y=3x\sqrt{1-x^3}$, $x_0=0$;

72. (ИЮК) $y=\frac{x^2-1}{\sin 3x}$, $x_0=\frac{\pi}{6}$;

73. (КМБ) $y=\frac{\ln\cos x}{x^2+1}$, $x_0=0$;

74. (МАА) $y=\frac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x}$, $x_0=0$;

75. (ЦШЮ) $y=\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}$, $x_0=1$;

76. (СМБ) $y=\sqrt{4-x^2}+2\arcsin\frac{x}{2}$, $x_0=0$;

77. (КШИ) $y=\frac{\arcsin x^2}{2-3x}$; $x_0=0$.

2.7.3* . Доказать частный случай (при $n=2$) формулы Лейбница для второй производной произведения: если $u(x)$ и $v(x)$ имеют вторые производные, то $(uv)''=u''v+2u'v'+uv''$.

2.7.4. Найти дифференциалы первого порядка следующих функций:

а) $y=xtg^2x$;

б) $y=\sqrt{arctg\,x}+(arcsin\,x)^2$;

в) $y = ln\left(x + \sqrt{4 + x^2}\right)$.

2.7.5. Найти дифференциал второго порядка функции $y = e^{-x^3}$.

2.7.6. Найти дифференциал третьего порядка функций:

а) $y = sin^2 2x$;

б) $y = \dfrac{ln\,x}{x}$.

2.7.7. Найти дифференциал первого, второго и третьего порядков функции $y = x^3 ln\,x$.

2.7.8. Найти дифференциал первого и второго порядков функции $y = (x^2 + 1)arctg\ \ x$.

2.7.9. Найти дифференциал второго и третьего порядков функции $y = e^{-3x} cos\,2x$.

2.7.10. Найти приближенное значение функции при $x = x_0$ с точностью до двух знаков после запятой:

а) (ДФЭ) $y = x^3 - 4x^2 + 5x + 3$, $x_0 = 2{,}02$;

б) (ДИГ) $y = \sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x}}$, $x_0 = 0{,}1$;

в) (БИШ) $y = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$, $x_0 = 0{,}98$;

г) (ЛКК) $y = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 12}$, $x_0 = 1{,}3$.

2.7.11. (ЛИА) Найти приближенное значение $\sqrt[4]{17}$ с точностью до двух знаков после запятой.

2.7.12*. Вычислить приближённо:

а) $\sqrt{\dfrac{x+3}{x}}$ при $x = 1{,}04$; б) $\sqrt[5]{\dfrac{1{,}98}{2{,}02}}$.

2.7.13. Показать, что функция $y = 3 + 2x - x^2$ удовлетворяет условиям теоремы Ферма на отрезке [0, 4], и найти соответствующее значение c.

2.7.14. Проверить справедливость теоремы Ролля для следующих функций:

а) $f(x) = x^2 - 3x + 5$ на отрезке $[1{,}2]$;

б) $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ на отрезке $[-1{,}1]$;

в) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 9x + 14}$ на отрезке $[-7{,}2]$;

г) $f\left(x\right)=\ln sin\,x$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$.

Найти соответствующие значения c.

2.7.15. Функция $f\left(x\right)=x^2+\sqrt[3]{x^2}$ принимает на концах отрезка $\left[-1;1\right]$ равные значения $f\left(-1\right)=f\left(1\right)=2$. Справедлива ли для этой функции теорема Ролля на отрезке $\left[-1;1\right]$?

2.7.16. Показать, что производная многочлена $f\left(x\right)=x^3-6x^2+11x-6$ имеет действительный корень, лежащий в интервале (1, 3).

Указание: найти корни данного многочлена и воспользоваться теоремой Ролля.

2.7.17. Проверить справедливость теоремы Лагранжа для следующих функций:

а) $f\left(x\right)=2x-x^2$ на отрезке $\left[0,1\right]$;

б) $f\left(x\right)=\sqrt{x}$ на отрезке $\left[1,4\right]$;

в) $f\left(x\right)=x^3-4x^2+5x$ на отрезке $\left[0,3\right]$;

г) $f\left(x\right)=\ln x$ на отрезке $\left[1,e\right]$.

Найти соответствующие значения c.

2.7.18. Показать, что теорема Лагранжа на отрезке [-2, 2] неприемлема к функциям $f_1(x)=\frac{1}{x}$ и $f_2(x)=1-\sqrt[5]{x^4}$. Пояснить это утверждение графически.

2.7.19. В какой точке касательная к кривой $y=x^2-8x$ параллельна хорде, стягивающей точки $A\left(-1,9\right)$ и $B\left(5,-15\right)$?

2.7.20. Проверить справедливость теоремы Коши для следующих пар функций:

а) $f\left(x\right)=x^3, \varphi\left(x\right)=x^2$ на отрезке $\left[1,2\right]$;

б) $f\left(x\right)=x^2-2x+3,\ \varphi\left(x\right)=x^3-7x^2+20x-5$ на отрезке $\left[1,4\right]$;

в) $f\left(x\right)=\sqrt{x+9},\ \varphi\left(x\right)=\sqrt{x}$ на отрезке $\left[0,16\right]$;

г) $f\left(x\right)=\sin x,\ \varphi\left(x\right)=\cos x$ на отрезке $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Найти соответствующие значения c.

2.7.21. На рисунке (рис.2.7.1) изображены графики функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$, заданных на промежутке [–3;6]. Укажите множество всех значений *x*, для которых выполняется неравенство $f(x) \geq g(x)$.

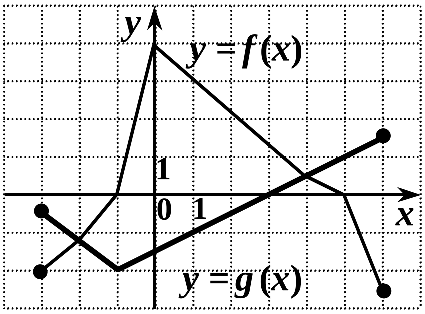


Рис. 2.7.1

1) [– 1; 5];

2) [– 3; – 2] ⋃ [4; 6];

3) [– 3; – 1] ⋃ [5; 6];

4) [– 2;4].

2.7.22. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-4;5)$. На рисунке (рис.2.7.2) изображен график ее производной. Найдите число касательных к графику функции $y = f(x)$, которые наклонены под углом в 45° к положительному направлению оси абсцисс.

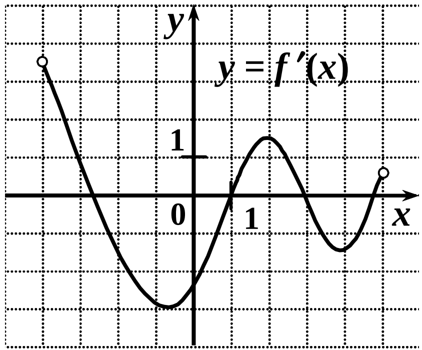


Рис. 2.7.2

2.7.23. Найти предел, используя правило Лопиталя:

1. (КСС) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-4x^2+4x}{x^3-12x+16}$;

2. (ЮКД) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos 3x}{\cos x}$;

3. (КСА) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x}{\ln(1+x)}$;

4. (ПАБ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos 2x}$;

5. (ЖЛД) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg}5x}{\operatorname{tg}3x}$.

6. (МСЖ) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.

7. (ЦЖЦ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin x}{\ln\sin 5x}$.

8. (СЦЮ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}2x}{\arcsin 5x}$.

9. (ЛАГ) $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{ctg}2x$;

10. (СШИ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\sin x}$.

2.7.24*. Показать, что предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\cos x}{x+\cos x}$ не может быть вычислен по правилу Лопиталя. Найти этот предел другим способом.

2.7.25. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

1. $f(x)=x^3-12x+7$; $[0;3]$.
2. $f(x)=x^5-\dfrac{5}{3}x^3+2$; $[0;2]$.
3. $f(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\cos x$; $[0;\pi/2]$.
4. $f(x)=3x^4-16x^3+2$; $[-3;1]$.
5. $f(x)=x^3-3x+1$; $[1/2;2]$.
6. $f(x)=x^4+4x$; $[-2;2]$.
7. $f(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x-\sin x$; $[0;\pi/2]$.
8. $f(x)=81x-x^4$; $[-1;4]$.
9. $f(x)=3-2x^2$; $[-1;3]$.
10. $f(x)=x-\sin x$; $[-\pi;\pi]$.

2.7.26. Найти асимптоты кривых:

1) $y=\dfrac{2}{x+2}$;

2) $y=\dfrac{5}{x^2-25}$;

3) $y=\dfrac{x^3}{x-1}$;

4) $y=\sqrt{\dfrac{1}{x}-1}$;

5) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$;

6) $y=\dfrac{1}{1-e^x}$;

7) $y=\dfrac{x^2+6x-5}{x}$;

8) $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$;

9) $y=\dfrac{x^2}{x+3}$;

10) $y=\dfrac{3x^2}{x^2+5}$;

11) $y=\dfrac{x^2+1}{x}$;

12) $y=\dfrac{x^2-5x+4}{x-4}$.

2.7.27. Найти наклонные асимптоты кривых:

1) $y = x + e^{-x}$; 2) $y = \sqrt{x^2 - 1}$; 3) $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$.

2.7.28. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования.

1.

- Область определения $x = (-\infty; 4) \cup (4; \infty)$.
- Вертикальные асимптоты $x = 4$.
- Горизонтальные асимптоты $y = 0$ $(x \to +\infty)$.
- Наклонные асимптоты $y = x$ $(x \to -\infty)$.
- Стационарные точки $-1; 2$.
- Точки, где $y' = \infty$ $-2;\ 0$
- Интервалы монотонности:

а) возрастания $(-\infty; -2)$, $(-2; -1)$, $(0; 2)$, $(2; 4)$;

б) убывания $(-1; 0)$, $(4; \infty)$.

- Интервалы выпуклости и вогнутости:

а) выпуклости $(-2; 0)$, $(0; 2)$;

б) вогнутости $(-\infty; -2)$, $(2; 4)$, $(4; \infty)$.

- Значения функций в некоторых точках:

$y(-2) = 0$, $y(-1) = 2$, $y(0) = 0$, $y(2) = 3$, $y(5) = 2$.

2.

- Область определения $x = (-2; \infty)$.
- Вертикальные асимптоты $x = -2$.
- Горизонтальные асимптоты $y = 2$ $(x \to +\infty)$.
- Наклонные асимптоты –
- Стационарные точки $-1;\ 2$.
- Точки, где $y' = \infty$ $-2;\ 0$.
- Интервалы монотонности:

а) возрастания $(-1; 0)$, $(1; 2)$, $(2; \infty)$;

б) убывания $(-2; -1)$, $(0; 1)$.

- Интервалы выпуклости и вогнутости:

а) выпуклости $(2; \infty)$;

б) вогнутости $(-2; 0)$, $(0; 2)$.

- Значения функций в некоторых точках:

$$y(-1)=-2;\quad y(0)=0;\quad y(1)=-2;\quad y(2)=0.$$

2.7.29. Исследовать функции на экстремум с помощью первой производной (ответ записать в виде $f_{min}(a)=b$ или $f_{max}(c)=d$).

1. (ГПЮ) $f(x)=x^2-x$;
2. (ЮЭА) $f(x)=x^2+3$;
3. (СДГ) $f(x)=-x^2+2x$;
4. (ЛБФ) $f(x)=-x^2-x$;
5. (АЮЮ) $f(x)=x^2-8x+12$;
6. (ИМБ) $f(x)=x^2-4x+3$;
7. (МАШ) $f(x)=x–10x+9^{\ 2}$;
8. (МГЮ) $f(x)=-x^2+2x+3$;
9. (СШИ) $f(x)=-x^2-x+6$;
10. (ФЦЮ) $f(x)=-2x^2+x+1$;
11. (ЛЦЛ) $f(x)=2x^2-x$;
12. (ЮСШ) $f(x)=-\frac{1}{4}x^4+8x$;
13. (ГЭЛ); (ЖМС) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x$;
14. (ПКИ); (ПЮС) $f(x)=2x^3-3x^2-12x+8$;
15. (КМЭ); (МММ) $f(x)=2x\ \ -9x^2+12x-8$;
16. (ГББ); (СКЖ) $f(x)=2x^3-3x^2-12x+8$;
17. (ПСЦ); (ЭДФ) $f(x)=2x^3+9x^2+12x-2$;
18. (ШДЖ) $f(x)=5-2\sqrt[3]{x^2}$;
19. (ЭПА); (ЭЖЖ) $f(x)=3\sqrt[3]{x^2}-x$;
20. (ШЮМ); (АЖМ) $f(x)=6\sqrt[3]{x^2}(x+1)$;
21. (ШПД); (ДАА) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}(10-x)$;
22. (ГЮЖ) $f(x)=e^{x}+e^{-x}$;
23. (МПС); (ЭЮБ) $f(x)=x^2x^{-x}$;
24. (ЮЦФ) $f(x)=x-2\ln x$;
25. (БПЭ) $f(x)=x\ln x$.

2.7.30. Исследуйте на экстремум с помощью второй производной следующие функции (ответ записать в виде $f_{min}(a)=b$ или $f_{max}(c)=d$).

1. (ИЮШ) $f(x)=2x^2-3$;
2. (АДС) $f(x)=x^2-2x$;
3. (ШФМ) $f(x)=2x^2-5x+2$;
4. (МГИ) $f(x)=-x^2+4x$;
5. (ЦББ) $f(x)=-x^2+x+6$;
6. (ЛСЮ); (ДГЮ) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+4$;
7. (КИК); (БЛА) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2+5x+5$;
8. (МЛС); (КИА) $f(x)=x^3-\frac{9}{2}x^2+6x-2$;
9. (КЖФ) $f(x)=x^4+3x^2-4$;
10. (БЮМ); (ИФС) $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$;
11. (ГДШ); (МШЖ) $f(x)=\frac{3x}{x^2+1}$.

2.7.31. Решить следующие задачи.

1. (КДШ) Траектория движения тела – кубическая парабола $12y=x^3$. В каких ее точках скорости возрастания абсциссы и ординаты одинаковы (в ответе указать абсциссы точек в порядке возрастания в виде *a;b*)?

2. (ЭГМ) Закон движения материальной точки $s=\frac{3t^2}{4}-3t+7$. В какой момент времени скорость ее движения будет равна 2 м/с?

3. (ГДЛ) По оси Ox движутся две материальные точки. Законы движения которых $x=4t^2-7$ и $x=3t^2-4t+38$. С какой скоростью эти точки удаляются друг от друга в момент встречи?

4. (ЮБД) Материальная точка движется по гиперболе $xy=12$ так, что ее абсцисса x равномерно возрастает со скоростью 1 м/с. С какой скоростью изменяется ордината точки, когда она проходит положение (6, 2)?

5. (БГЮ) В какой точке параболы $y^2=4x$ ордината возрастает вдвое быстрее, чем абсцисса?

6. (ФКК) Закон движения материальной точки $s=t^4-3t^2+2t-4$. Найти скорость движения точки в момент $t=2$ с.

7. (ГБС) Закон движения материальной точки $s = 3t^4 - 3t^3 + 4t^2 + 6$. Найти скорость движения точки в момент $t = 2$ с.

8. (ЮИЭ) Закон движения материальной точки $s = 4cos\left(\frac{t}{4} + \frac{\pi}{4}\right) + 6$. Найти ее скорость в момент времени $t = \pi$ с.

9. (ИЛЖ) Закон движения материальной точки $s = 4\sin\left(\frac{t}{3} + \frac{\pi}{6}\right) - 8$. Найти ее скорость в момент времени $t = \frac{\pi}{2}$ с.

10. (АМК) Закон движения материальной точки $s = -3cos\left(\frac{t}{4} + \frac{\pi}{12}\right) + 10$. Найти ее скорость в момент времени $t = \frac{\pi}{3}$ с.

11. (ГЛК) Закон движения материальной точки $s = \frac{5}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 7$. В какой момент времени её скорость будет равна 42 м/с?

12. (МФЭ) Закон движения материальной точки $s = 4t^3 - 2t + 11$. В какой момент времени её скорость будет равна 190 м/с?

13. (ШФС) Закон движения материальной точки $s = \frac{5}{3}t^3 - 2t + 7$. Найти скорость ее движения в момент времени $t = 4$ с.

14. (МГК) Закон движения материальной точки $s = 2t^5 - 6t^3 - 58$. Найти скорость ее движения в момент времени $t = 2$ с.

15. (ЭФЖ) По оси Ox движутся две материальные точки, законы движения которых $x = 3t^2 - 8$ и $x = 2t^2 + 5t + 6$. С какой скоростью удаляются эти точки друг от друга в момент встречи?

16. (АКЮ) По оси Ox движутся две материальные точки, законы движения которых $x = 5t^2 - t + 6$ и $x = 4t^2 + 18$. С какой скоростью удаляются эти точки друг от друга в момент встречи?

17. (ИИА) По оси Ох движутся две материальные точки, законы движения которых $x = \frac{4}{3}t^3 - 7t + 16$ и $x = t^3 + 2t^2 + 5t - 8$. В какой момент времени их скорости окажутся равными?

18. (МЛМ) Закон движения материальной точки $s = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 - 11t + 275$. В какой момент времени её скорость будет равна 10 м/с?

19. (ДГА) Материальная точка движется по гиперболе $xy = 20$ так, что ее абсцисса x равномерно возрастает со скоростью 1 м/с. С какой

скоростью изменяется ордината точки, когда она проходит положение (4, 5)?

20.(ЛПК) В какой точке параболы $y^2 = 8x$ ордината возрастает вдвое быстрее, чем абсцисса?

21. (ИАЮ) По оси Ox движутся две материальные точки, законы движения которых $5t^2 + 2t + 6$ и $x = 4t^2 + 3t + 18$. С какой скоростью удаляются эти точки друг от друга в момент встречи?

2.7.32*. При каком значении α функция $y = x^4 + \alpha \ln x$ имеет единственную точку перегиба при $x = 1$?

2.8. Проверь свои знания

Решите задание, сравните полученный ответ с предложенными.
В ответе укажите номер правильного ответа.

Вариант № 1

1. (ЦСЖ) Уравнение касательной, проведенный к графику кривой, заданной уравнением $2y \cdot \ln y = x$ в точке (0;1), имеет вид:

1) $y = \frac{1}{2}x + 1$; 2) $y = 2x + 1$; 3) $y = 1 - \frac{1}{2}x$;
4) $y = 1 - 2x$; 5) $y = \frac{x}{2}$.

2. (СПШ) Если функция f(x) дифференцируемая, то предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x - \Delta x) - f(x + 3\Delta x)}{2\Delta x}$ равен:

1) $f'(x)$; 2) $2f'(x)$; 3) $-2f'(x)$;
4) $-4f'(x)$; 5) $-f'(x)$.

3. (СЛИ) Значение производной функции $y = \ln sin\frac{2x + 4}{x + 1}$ в точке $x_0 = 0$ равно:

1) $2ctg4$; 2) $2tg4$; 3) $-2ctg4$;
4) $-2tg4$; 5) $2ctg2$.

4. (МБМ) Значение производной функции $y = (x^2 + 1)^{x^3}$ в точке $x_0 = 1$ равно:

1) 3; 2) 6; 3) 3ln2;
4) 2(ln8+1); 5) 4(ln8+1).

5. (СЛИ) Производная $\frac{dy}{dx}$ функции $\begin{cases} x = sin5t \\ y = cos\frac{t}{2} \end{cases}$, заданной параметрически, равна:

1) $\frac{sin5t}{5cos(t/2)}$; 2) $\frac{-cos(t/2)}{sin5t}$; 3) $-\frac{sin(t/2)}{10cos5t}$;
4) $-\frac{10\cos t}{\sin t}$; 5) $\frac{5sin5t}{cos(t/2)}$.

6. (ШДГ) Разность между приращением и дифференциалом функции $y = -2x^3 + 5$ в точке $x = 4$ при $\Delta x = -0{,}1$ равна:

1) 0,241; 2) -0,242; 3) -0,236;
4) -0,238; 5) -0,252.

7. (СГИ) Если касательная к графику функции $f(x) = -\frac{1}{x+4}$, проведенная в точке с абсциссой $x_0 \in (-2;4)$, параллельна отрезку, соединяющему точки $(-2; f(-2))$, $(4; f(4))$, то x_0 равно:

1) 0; 2) $\sqrt{2}$; 3) $1+\sqrt{2}$;
4) $1-\sqrt{2}$; 5) $-\sqrt{2}$.

8. (МДФ) Уравнение наклонной асимптоты графика функции $y = \frac{-3x^2 - 5x - 4}{x+1}$ имеет вид:

1) $y = -2x - 1$; 2) $y = -3x + 2$; 3) $y = -3x - 1$;
4) $y = -3x - 2$; 5) $y = -2x + 1$.

9. (ГЮГ) Функция $y = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$ возрастает в интервале:

1) (-4;-2); 2) (0;1/2); 3) (2;4);
4) (4;6); 5) (6;∞).

10. (МДФ) Число точек экстремума функции $y = x^2 \cdot e^{-x^2}$ равно:

1) 1; 2) 2; 3) 4;
4) 3; 5) 5.

11. (ГМГ) Если m и M – наименьшее и наибольшее значения функции $y = x + \frac{25}{x+4}$ на отрезке [-2;6], то значение выражения $m + 2M$ равно:

1) 7; 2) 27; 3) 22,5;
4) 26,5; 5) 32.

12. (ГЦЛ) Точка А (1;3) является точкой перегиба кривой

$y = ax^3 + bx^2$, при условии:

1) $a=-1{,}5\,;b=4{,}5$; 2) $a=-1\,;b=4$; 3) $a=-2\,;b=1$;
4) $a=-1\,;b=2{,}5$; 5) $a=-1\,;b=-2{,}5$.

13. (ЖПЭ) Если в некоторой окрестности точки x_0 функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, и x_0 является точкой максимума, тогда:

1) $f''(x_0)=0$; 2) $f''(x_0)\ge 0$; 3) $f''(x_0)\le 0$;
4) $f''(x_0)\ne 0$; 5) $f''(x_0)$ не существует.

14. (ГГК) Значение $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 3x)^{\frac{1}{x^2}}$ равно:

1) $e^{-4,5}$; 2) $e^{-3,5}$; 3) $e^{-1,5}$;
4) $e^{-0,5}$; 5) 1.

15. (ШАС) В разложении функции $y=\sqrt{x+2}$ по формуле Тейлора по степеням $x-2$ коэффициент при $(x-2)^2$ равен:

1) $\frac{1}{32}$; 2) $-\frac{1}{32}$; 3) $\frac{1}{16}$;
4) $-\frac{1}{64}$; 5) $-\frac{1}{8}$.

16. (ЦЖЦ) В разложении функции $y=\frac{x}{3}\sin x^3$ по формуле Маклорена коэффициент при x^7 равен:

1) 0; 2) $\frac{1}{6}$; 3) $-\frac{1}{6}$;
4) $\frac{1}{18}$; 5) $-\frac{1}{18}$.

Вариант № 2

1. (ЦКЖ) Уравнение касательной к линии $y=x^3+3x^2-5$ и перпендикулярной прямой $2x-6y+1=0$ имеет вид:

1) $y=-3x+6$; 2) $y=3x-6$; 3) $y=-3x-6$;
4) $y=\frac{1}{3}x+6$; 5) $y=-\frac{1}{3}x-6$.

2. (ИГИ) Если функция $f(x)$ дифференцируемая, то предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x-\Delta x)-2f(x+4\Delta x)+f(x)}{3\Delta x}$ равен:

1) $-f'(x)$; 2) $-4f'(x)$; 3) $f'(x)$;
4) $2f'(x)$; 5) $-3f'(x)$.

3. (ГГК) Значение производной функции $y=\dfrac{e^{x^2}}{e^x+e^{-x}}$ в точке $x_0=0$ равно:

1) 0; 2) $-\dfrac{1}{2}$; 3) $\dfrac{1}{2}$;
4) $-\dfrac{1}{4}$; 5) 1.

4. (ЖЭЭ) Значение производной функции $y=e^{x^x}$ в точке $x_0=1$ равно:

1) 1; 2) e; 3) e^2;
4) 2e; 5) $2e^2$.

5. (ИГИ) Производная $\dfrac{dy}{dx}$ функции $\begin{cases} x=\sqrt{1-t^2} \\ y=arcsint \end{cases}$, заданной параметрически, равна

1) $-\dfrac{2t}{1-t^2}$; 2) $\dfrac{t}{2\sqrt{1-t^2}}$; 3) $2t\sqrt{1-t^2}$;
4) $-t$; 5) $-\dfrac{1}{t}$.

6. (ГМГ) Если в точке максимума функция дифференцируема, то в этой точке при любом ненулевом приращении аргумента дифференциал функции будет:

1) больше нуля; 2) равен нулю; 3) меньше нуля;
4) может иметь разные знаки; 5) не существует.

7. (ЖЮФ) Если касательная к графику функции $f(x)=\dfrac{2}{2-x}$, проведенная в точке с абсциссой $x_0\in(-4;0)$, параллельна отрезку, соединяющему точки $(-4; f(-4))$, $(0; f(0))$, то x_0 равно:

1) $2-3\sqrt{3}$; 2) $3-2\sqrt{3}$; 3) $2-2\sqrt{3}$;
4) $1-2\sqrt{3}$; 5) $3-3\sqrt{3}$.

8. (МЦЭ) Уравнение наклонной асимптоты графика функции $y=\dfrac{5x^2+17x-7}{x+4}$ имеет вид:

1) $y=-5x+2$; 2) $y=5x-2$; 3) $y=5x-1$;
4) $y=-5x+1$; 5) $y=5x-3$.

9. (ИФШ) Функция $y=\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$ убывает в интервале:

1) (-∞;-5); 2) (-4;-2); 3) (6;8);

4) (2;4); 5) $(10;\infty)$.

10. (СГИ) Число точек экстремума функции $y=(1-x)\cdot e^{-x^2}$ равно:

1) 2; 2) 3; 3) 1;
4) 0; 5) 4.

11. (ЦКЖ) Если m и M – наименьшее и наибольшее значения функции $y=x+\dfrac{49}{x+2}$ на отрезке [3;8], то значение выражения $2m-M$ равно

1) 12,5; 2) 42; 3) 11,1;
4) 10,1; 5) 14.

12. (ЦШЮ) Точка А (-2;2) является точкой перегиба кривой $y=ax^3+bx^2-4$, при условии:

1) $a=\dfrac{1}{8}$; $b=\dfrac{1}{4}$; 2) $a=\dfrac{3}{8}$; $b=\dfrac{9}{4}$; 3) $a=\dfrac{3}{2}$; $b=\dfrac{3}{4}$;
4) $a=2$; $b=3$; 5) $a=\dfrac{1}{8}$; $b=9$.

13. (ИГИ) Вторая производная функции $f(x)=x^3\cdot e^{2x}$ в точке $x=-1$ равна:

1) e^{-2}; 2) $-e^{-2}$; 3) $-24e^{-2}$;
4) $-18e^{-2}$; 5) $2e^{-2}$.

14. (ГСС) Значение $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+ln\,x^{10}}{1+x}\right)$ равно:

1) 1; 2) ∞; 3) 2;
4) $\dfrac{1}{2}$; 5) 10.

15. (ГЛК) В разложении многочлена $y=x^4+4x^2-x+3$ по формуле Тейлора по степеням $x-1$ коэффициент при $(x-1)^3$ равен:

1) 8; 2) 6; 3) 4;
4) 12; 5) 24.

16. (ЖМФ) В разложении функции $y=2x^2\cdot\ln(1+x^2)$ по формуле Маклорена коэффициент при x^6 равен:

1) 1; 2) -1; 3) 2;
4) -2; 5) $\dfrac{1}{2}$.

2.9. Индивидуальное домашнее задание

Задание 1. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$:

1.1. а) $y=\frac{x}{x^2-1}$; б) $x=\cos\frac{t}{2},\ y=t-\sin t.$

1.2. а) $y=\ln ctg 2x$; б) $x=t^3+8t,\ \ y=t^5+2t.$

1.3. а) $y=x^3\ln x$; б) $x=t-\sin t,\ y=1-\cos t.$

1.4. а) $y=xarctgx$; б) $x=e^{2t},\quad y=\cos t.$

1.5. а) $y=arctgx$; б) $x=3\cos^2 t,\ y=2\sin^3 t.$

1.6. а) $y=e^{ctg3x}$; б) $x=3\cos t,\ y=4\sin^2 t.$

1.7. а) $y=e^x\cos x$; б) $x=3t-t^3,\ y=3t^2.$

1.8. а) $y=e^{-x}\sin x$; б) $x=2t-t^3,\ y=2t^2.$

1.9. а) $y=x\sqrt{1+x^2}$; б) $x=t+\ln\cos t,\ y=t-\ln\sin t.$

1.10. а) $y=xe^{-x^2}$; б) $x=\ln t,\ y=\frac{1}{2}(t+\frac{1}{t}).$

Задание 2. Используя логарифмирование, найти $\frac{dy}{dx}$.

2.1. $y=\frac{(x-2)^3(3x+2)}{(x+1)^2}$;

2.2. $y=\sqrt{\frac{x+3}{(2x-5)^3(x-7)^5}}$;

2.3. $y=\sqrt{\frac{(x+1)(x-5)^3}{\sqrt[3]{x+2}}}$;

2.4. $y=\sqrt{\frac{(x+3)(x-5)^3}{1+x^2}}$;

2.5. $y=\left(1+x^2\right)^x$;

2.6. $y=\left(\frac{1}{x}\right)^x$;

2.7. $y=\frac{(x-2)^3(3x+2)}{(x+1)^2}$;

2.8. $y=\sqrt{\frac{x+3}{(2x-5)^3(x-7)^5}}$;

2.9. $y=\sqrt{\frac{(x+1)(x-5)^3}{\sqrt[3]{x+2}}}$;

2.10. $y=\sqrt{\frac{(x+3)(x-5)^3}{1+x^2}}$.

Задание 3. Вычислить приближенно, используя дифференциал:

1. $\sqrt{3,84}$;

6. $\sqrt[3]{8,06}$;

2. $1{,}02^{10}$;

3. $0{,}92^{15}$;

4. $\sqrt{3{,}84}$;

5. $\sqrt[3]{8{,}06}$;

7. $0{,}92^{8}$;

8. $\sqrt[5]{1{,}12^{3}}$;

9. $1{,}02^{10}$;

10. $0{,}92^{8}$.

Задание 4. Найти наибольшее и наименьшее значения функций в указанных интервалах:

4.1. а) $y = x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 2,\ \left[-\frac{1}{2};\, 3\right]$; б) $y = \frac{x-4}{x^2+9},\ [-4; 6]$;

в) $y = \frac{1}{2}x - \sin x,\ \left[-2\pi;\, -\frac{3}{2}\pi\right]$.

4.2. а) $y = 3x^4 - 16x^3 + 2,\ [-3;1]$; б) $y = \frac{x-2}{x^2+5},\ [-2;3]$;

в) $y = \frac{1}{2} - \sin x,\ \left[\frac{3}{2}\pi;\, 2\pi\right]$.

4.3. а) $y = x^3 - 3x + 1,\ \left[\frac{1}{2}; 2\right]$; б) $y = \frac{4-x^2}{4+x^2},\ [-1;3]$;

в) $y = \sqrt{5-4x},\ [-1;\, 1]$.

4.4. а) $y = x^3 - 12x + 7,\ [0;3]$; б) $y = \frac{\ln x}{x},\ [0;\, \infty]$;

в) $y = x + \frac{1}{x},\ [0{,}01;\, 100]$.

4.5. а) $y = x^3 - 18x^2 + 96x,\ [0;9]$; б) $y = \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2,\ [-4;\, 0]$;

в) $y = \cos 2x - 2x,\ \left[-\frac{\pi}{2};\, \frac{\pi}{2}\right]$.

4.6. а) $y = x^3 - 12x + 7,\ [-3;0]$; б) $y = \mathrm{tg}x - x,\ \left[-\frac{\pi}{4};\, \frac{\pi}{4}\right]$;

в) $y = \frac{x^3+16}{x},\ [1;\, 4]$.

4.7. а) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1,\ [-1;5]$; б) $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2},\ [-2;\, 0{,}5]$;

в) $y = \sqrt[3]{2x^2+1},\ [-2;\, 1]$.

4.8. а) $y=2x^3+3x^2-12x+1$, $[-3;0]$; б) $y=\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$, $[-3;\ 0]$;

в) $y=\arcsin x^2$, $\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

4.9. а) $y=x^4+4x$, $[-2;2]$; б) $y=x-\sin x$, $[0;\ 2\pi]$;

в) $y=\sqrt{100-x^2}$, $[-6;\ 8]$.

4.10. а) $y=81x-x^4$, $[-1;4]$; б) $y=\dfrac{4-x^2}{4+x^2}$, $[-1;\ 3]$;

в) $y=2\sin x-\sin 2x$, $\left[0;\ \dfrac{3}{2}\pi\right]$.

Задание 5. Исследовать и построить графики функций:

5.1. а) $y=3\sqrt[3]{x^2}-2x$; б) $y=\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2$; в) $y=x^3e^x$.

5.2. а) $y=x^3\ln x$; б) $y=x+\dfrac{2x}{x^2-1}$; в) $y=x+\dfrac{1}{x^2}$.

5.3. а) $y=2x-\arcsin x$; б) $y=\ln\dfrac{x-1}{x+2}$; в) $y=\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^3}$.

5.4. а) $y=\sqrt[3]{\left(x^2-8\right)^2}$; б) $y=\dfrac{1-x^3}{x^2}$; в) $y=\dfrac{e^x}{x}$.

5.5. а) $y=\ln\left(x^2-4\right)$; б) $y=\dfrac{2}{x^2-4}$; в) $y=xe^{-x}$.

5.6. а) $y=\dfrac{2-4x^2}{1-4x^2}$; б) $y=2^{\frac{1}{3-x}}$; в) $y=x^2e^x$.

5.7. а) $y=\ln\left(x^2-4x+8\right)$; б) $y=\dfrac{x-1}{x^2-2x}$; в) $y=(x+1)e^{3x}$.

5.8. а) $y=\ln\left(x^2-2x+2\right)$; б) $y=x-\sqrt[3]{x^2}$; в) $y=\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^2$.

5.9. а) $y=\dfrac{1}{e^{2x}-1}$; б) $y=\dfrac{x^3+16}{x}$; в) $y=x^2-2\ln x$.

5.10. а) $y=4x-\dfrac{x^3}{3}$; б) $y=\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$; в) $y=\ln\left(2x^2+3\right)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2-х частях − М.: Высш. шк, 1986. − Ч. 1. − 304 с.; Ч. 2. − 415 с.

2. Запорожец Г.И. руководство к решению задач по математическому анализу. − М.: Изд-во «Высшая школа», 1966. − 460 с.

3. Лунгу К.Н., Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике. 1курс. − М.: Рольф, 2001. − 576 с.

4. Магазинников Л. И., Магазинников А. Л. Высшая математика. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление: Учебное пособие. − Томск: Томский межвузовский центр дистанционного образования, 2003. − 191 с.

5. Подольский В.А., Суходский А.М., Мироненко Е.С. Сборник задач по математике: Учеб. Пособие. − 2-е изд., перераб. и доп. − М.: Высш. шк., 1999. − 495 с.

6. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: В 3-х ч. / А.П. Рябушко, В.В.Бархатов, В.В. Державец, И.Е. Юруть / под ред. А.П. Рябушко. – Минск: Высш. шк, 1990–1991. − Ч. 1. − 1990. − 270 с.; Ч. 2. − 1991. − 352 с.; Ч. 3. − 1991. − 288 с.

7. Терехина Л.И., Фикс И.И. Высшая математика. Часть 2. Предел. Непрерывность. Производная функции. Приложения производной. Функции нескольких переменных. Учебное пособие. Томск: Изд-во ТПУ, 2000. −180 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

ГИЛЬ Людмила Болеславна
ТИЩЕНКОВА Анна Владимировна

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

ЧАСТЬ II
ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОГО ВЕЩЕСТВЕННОГО АРГУМЕНТА

Учебное пособие

Научный редактор
доктор физико-математических наук,
профессор *К.П. Арефьев*

Редакторы *Т.В. Казанцева*
Л.А. Холопова

Компьютерная верстка *Л.Б. Гиль, А.В. Тищенкова*

Дизайн обложки *Л.Б. Гиль, А.В. Тищенкова*

Подписано к печати 18.02.2010. Формат 60x84/16. Бумага «Снегурочка».
Печать RISO. Усл. печ. л. 6,63. Уч. - изд. л. 6,0.
Заказ 1184. Тираж 50 экз.

Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту ISO 9001:2000

nqa. ISO 9001 Registered

UKAS QUALITY MANAGEMENT 015

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30.
Тел./ факс 8(3822)056-35-35, www.tpu.ru