МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ЮРГИНСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

УТВЕРЖДАЮ
Директор ЮТИ ТПУ
____________Д.А. Чинахов
«30» июня 2020 г.

Л.Б. Гиль

НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Методические указания по математике для студентов
всех направлений и форм обучения

Издательство
Юргинский технологический институт (филиал)
Томского политехнического университета
2020

УДК 517.075

Неопределённый интеграл: Методические указания по математике для студентов всех направлений и форм обучения / Сост. Л.Б. Гиль – Юрга: Изд-во Юргинского технологического института (филиала) Томского политехнического университета, 2020. – 73 с.

Рецензент
кандидат физико-математических наук,
доцент Е.П. Теслева

Методические указания рассмотрены и рекомендованы к изданию методическим семинаром ЮТИ ТПУ протокол №5 от «30» июня 2020 г.

Зам. директора – начальника ОО
кандидат технических наук, доцент______________ С.А. Солодский

СОДЕРЖАНИЕ

В дифференциальном исчислении рассматривались методы вычисления производной заданной функции. В интегральном исчислении решается обратная задача: по данной функции $f(x)$ требуется найти такую функцию, для которой $f(x)$ была бы производной.

1. Первообразная

Определение 1. *Функция* $F(x)$ *называется первообразной для функции* $f(x)$ *в промежутке* X*, если для всех* $x \in \mathrm{X}$ *справедливо равенство*

$$F'(x) = f(x). \tag{1.1}$$

Замечание. Если промежуток X специально не оговорён, это означает, что равенство (1.1) справедливо для всех x из области определения функции $f(x)$.

Пример 1.1. Пусть $f(x) = \sin 2x$.

Легко установить, что $F(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x$. Действительно, $(-\frac{1}{2}\cos 2x)' = -\frac{1}{2}(-\sin 2x) \cdot 2 = \sin 2x$. Заметим, что любая функция вида $-\frac{1}{2}\cos 2x + C$, где C – число, является первообразной для функции $\sin 2x$.

Легко показать, что если $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ в промежутке X, то любая функция $F(x) + C$, где C – число, является первообразной для функции $f(x)$ в промежутке X. Действительно,

$$(F(x) + C)' = F'(x) = f(x).$$

Теорема 1. *Пусть* $F(x)$ *является первообразной для функции* $f(x)$ *в промежутке* X*. Тогда любая другая первообразная для функции* $f(x)$ *в этом промежутке имеет вид* $F(x) + C_0$*, где* C_0 *– число.*

Доказательство. Предположим, что функция $f(x)$ имеет в промежутке X, кроме первообразной $F(x)$, отличную от неё первообразную $\Phi(x)$, т. е. $\Phi'(x) = f(x)$. Составим разность $\Psi(x) = \Phi(x) - F(x)$. Заметим, что

$$\Psi'(x) = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

при всех $x \in \mathrm{X}$. Рассмотрим любые $x_1, x_2 \in \mathrm{X}\, (x_1 < x_2)$. По теореме Лагранжа

$$\Psi(x_2) - \Psi(x_1) = \Psi'(c)(x_2 - x_1), \quad c \in (x_1, x_2).$$

Следовательно, $\Psi(x_2)-\Psi(x_1)=0$ для любых $x_1, x_2 \in \mathrm{X}$. Таким образом, при $x \in \mathrm{X}$ имеем $\Psi(x) \equiv const$.

Отсюда следует, что

$$\Phi(x)=F(x)+C_0,$$

где C_0 – постоянная.

2. Определение неопределённого интеграла

Определение 2. *Пусть функция* $F(x)$ *является первообразной для функции* $f(x)$ *для всех* $x \in \mathrm{X}$. *Выражение* $F(x)+C$, *где* C *может принимать любое постоянное значение, называется неопределённым интегралом от функции* $f(x)$ *и обозначается*

$$\int f(x)dx.$$

Таким образом,

$$\int f(x)dx = F(x)+C, \tag{2.1}$$

где $F'(x)=f(x)$.

Функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, произведение $f(x)dx$ – *подынтегральным выражением*, а слагаемое C – *произвольной постоянной*. Процесс определения первообразной или неопределённого интеграла от функции $f(x)$ называется *интегрированием* функции $f(x)$.

Замечание. Обозначение неопределённого интеграла представляет собой символ интеграла «$\int$», за которым следует дифференциальное выражение $f(x)\mathrm{d}x$. Последнее является дифференциалом искомой первообразной. Действительно,

$$f(x)dx = F'(x)dx = dF(x).$$

Такое обозначение очень удобно для объяснения и осуществления некоторых методов интегрирования. В частности, такое обозначение явно указывает переменную, по которой ведется интегрирование.

Перечислим свойства неопределённого интеграла, которые вытекают непосредственно из его определения.

1. $$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x), \tag{2.2}$$

или

$$d\int f(x)dx = f(x)dx, \tag{2.3}$$

то есть знак дифференциала «уничтожает» знак интеграла.

2. $\int F'(x)dx = F(x) + C,$ (2.4)

или

$$\int dF(x) = F(x) + C, \quad (2.5)$$

т. е. знак интеграла «уничтожает» знак дифференциала, но при этом появляется постоянное слагаемое.

Формула (2.2) дает возможность проверять правильность вычисления неопределённого интеграла: производная от неопределённого интеграла должна быть равна подынтегральной функции.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Любая непрерывная в данном промежутке функция имеет в нём первообразную.*

Замечание. Все элементарные функции непрерывны в области своего задания. Следовательно, по теореме 2 существование первообразных для этих функций обеспечено. Однако далеко не всегда первообразную от элементарной функции можно выразить в терминах элементарных функций. Так, например, невозможно выразить с помощью элементарных функций неопределённые интегралы:

$$\int e^{x^2}dx, \quad \int \sin(x^2)dx, \quad \int \frac{\sin x}{x}dx.$$

Иными словами, не существует таких элементарных функций, производные от которых были бы равны e^{x^2}, $\sin(x^2)$, $\frac{\sin x}{x}$. Интегралы, не выражающиеся через элементарные функции, называются *не берущимися*.

По аналогии интегралы, которые можно выразить в терминах элементарных функций, назовем *берущимися*.

3. Таблица неопределённых интегралов

Приведём формулы, которые необходимо знать наизусть. Они лежат в основе всего процесса интегрирования. Первые десять формул получены непосредственно из таблицы производных основных элементарных функций. Перечислим их.

1. $\int 0dx = C$, где $C = const.$ (3.1)

2. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$, если $a \neq -1$. (3.2)

В частности,

$\int dx = x + C$, (см. также формулу) (2.5).

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$. (3.3)

Поясним появление в этой формуле символа модуля. Таблица производных даёт формулу $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. Здесь автоматически предполагается, что $x > 0$, и, следовательно, для $x > 0$ справедливо соотношение

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C. \qquad (3.4)$$

Рассмотрим теперь функцию $\ln(-x)$, определённую при $x < 0$. Поскольку

$$(\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x},$$

то для $x < 0$ справедливо равенство

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C. \qquad (3.5)$$

Из (3.4) и (3.5) получаем, что для любого промежутка X, не содержащего ноль, формула (3.3) нашей таблицы справедлива.

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0; \quad a \neq 1)$. (3.6)

Частный случай:

$\int e^x dx = e^x + C$.

Заметим, что функция e^x не изменяется ни при интегрировании, ни при дифференцировании. Говорят, что она инвариантна по отношению к обеим этим операциям.

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$. (3.7)

6. $\int \cos x dx = \sin x + C$. (3.8)

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$. (3.9)

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C$. (3.10)

9. $\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \mathrm{arctg} x + C$. (3.11)

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$. (3.12)

Следующие четыре формулы получены не из таблицы производных и требуют вывода, который будет проведен в последующих параграфах. Они очень часто встречаются в различных задачах.

11. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0)$. (3.13)

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \quad (a > 0)$. (3.14)

13. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \quad (a \neq 0)$. (3.15)

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+m}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+m}\right| + C \quad (m \neq 0)$ (3.16)

Таким образом, можно записать таблицу основных интегралов. Интегралы, помещённые в таблицу, называются *табличными*.

3.1.Таблица интегралов

Таблица 1

№	Неопределенный интеграл	№ формулы
1.	$\int 0dx = C$, где $C = const$; $\int \mathrm{dx} = \mathrm{x} + \mathrm{C}$	(3.1)
2.	$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$, если $a \neq -1$	(3.2)
3.	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	(3.3)
4.	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \qquad (a>0; \quad a \neq 1)$	(3.6)
5.	$\int e^x dx = e^x + C$	
6.	$\int \sin x dx = -\cos x + C$	(3.7)
7.	$\int \cos x dx = \sin x + C$	(3.8)
8.	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$	(3.9)
9.	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$	(3.10)

Таблица интегралов (продолжение)

10.	$\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C$	(3.11)
11.	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$	(3.12)
12.	$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0)$	(3.13)
13.	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \quad (a > 0)$	(3.14)
14.	$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + C \quad (a \neq 0)$	(3.15)
15.	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+m}} = \ln\left\|x+\sqrt{x^2+m}\right\| + C \quad (m \neq 0)$	(3.16)

Справедливость каждой строчки таблицы можно проверить, опираясь на формулу (2.2): производная от функции, стоящей в правой части равенства, равна подынтегральной функции. Для примера проверим справедливость формулы (3.16) в случае, когда $x+\sqrt{x^2+m} > 0$. Действительно,

$$(\ln(x+\sqrt{x^2+m}))' = \frac{(x+\sqrt{x^2+m})'}{x+\sqrt{x^2+m}} = \frac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+m}}}{x+\sqrt{x^2+m}} =$$

$$= \frac{(x+\sqrt{x^2+m})}{(x+\sqrt{x^2+m})\sqrt{x^2+m}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+m}}.$$

Приведём ряд примеров использования таблицы.

В примерах 3.1 – 3.8 использован интеграл (3.2). Однако, прежде, чем им воспользоваться, нужно записать подынтегральную функцию в виде x^a.

3.2. Опорные задачи

Пример 3.1. $\int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2}dx = -x^{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$.

Пример 3.2. $\int \sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$.

Пример 3.3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C$.

Пример 3.4. $\int \sqrt[12]{x^5}\, dx = \int x^{\frac{5}{12}} dx = \frac{12}{17} x^{\frac{17}{12}} + C$.

Пример 3.5. $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x^3}} = \int x^{-\frac{3}{5}} dx = \frac{5}{2} x^{\frac{2}{5}} + C$.

Пример 3.6. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{3}{2}} dx = -2x^{-\frac{1}{2}} + C$.

Пример 3.7. $\int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt[3]{x}} = \int x^{-\frac{7}{3}} dx = -\frac{3}{4} x^{-\frac{4}{3}} + C$.

Пример 3.8. $\int (x \cdot \sqrt[5]{x})^3 dx = \int x^{\frac{18}{5}} dx = \frac{5}{23} x^{\frac{23}{5}} + C$.

В примерах 3.9 – 3.13 использован интеграл (3.6).

Пример 3.9. $\int 5^x dx = \frac{5^x}{\ln 5} + C$.

Пример 3.10. $\int \frac{dx}{3^x} = \int \left(\frac{1}{3}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^x}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)} + C = -\frac{1}{3^x \ln 3} + C$.

Пример 3.11. $\int 2^x \cdot 3^x dx = \int 6^x dx = \frac{6^x}{\ln 6} + C$.

Пример 3.12. $\int (2^x)^3 dx = \int 8^x dx = \frac{8^x}{\ln 8} + C = \frac{(2^x)^3}{3\ln 2} + C$.

Пример 3.13. $\int 3^{2x} dx = \int 9^x dx = \frac{9^x}{\ln 9} + C = \frac{3^{2x}}{2\ln 3} + C$.

В примерах 3.14 – 3.15 использована формула (3.13).

Пример 3.14. $\int \frac{dx}{x^2 + 16} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x}{4} + C$.

Пример 3.15. $\int \frac{dx}{13 + x^2} = \frac{1}{\sqrt{13}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{13}} + C$.

В следующем примере применён табличный интеграл (3.14).

Пример 3.16. $\int \frac{dx}{\sqrt{14 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{14}} + C$.

В следующих двух примерах воспользуемся формулой (3.16) нашей таблицы.

Пример 3.17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-14}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-14}\right| + C$.

Пример 3.18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+14}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+14}\right| + C$.

В последующих интегралах применим формулу (3.15).

Пример 3.19. $\int \frac{dx}{x^2-9} = \frac{1}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C$.

Пример 3.20. $\int \frac{dx}{x^2-10} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{10}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{10}}{x+\sqrt{10}}\right| + C$.

4. Правила интегрирования

I. Вынесение постоянного множителя за знак интеграла

Теорема 3. *Постоянный множитель можно выносить за знак неопределённого интеграла, то есть*

$$\int \alpha f(x)dx = \alpha\int f(x)dx \tag{4.1}$$

где α *– число.*

Доказательство. Возьмём производную от правой части равенства (4.1) и вынесем постоянный множитель за знак производной:

$$(\alpha\int f(x)dx)' = \alpha(\int f(x)dx)'.$$

Воспользуемся формулой (2.2). Так как $(\int f(x)dx)' = f(x)$, получим, что

$$(\alpha\int f(x)dx)' = \alpha f(x),$$

то есть правая часть (4.1) является совокупностью первообразных для функции $\alpha f(x)$. Этим теорема 3 доказана.

Приведём примеры применения теоремы 3.

Пример 4.1. $\int 3^{x+2}dx = 9\int 3^x dx = 9\frac{3^x}{\ln 3} + C = \frac{3^{x+2}}{\ln 3} + C$.

Пример 4.2.

$$\int \frac{dx}{4x^2+9} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2+\left(3/2\right)^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x}{3} + C = \frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{2x}{3} + C.$$

Проверка: $\left(\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{2x}{3}+C\right)' = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1+\frac{4x^2}{9}}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{9}\cdot\frac{9}{9+4x^2} = \frac{1}{4x^2+9}$.

Пример 4.3. $\int\frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}} = \frac{1}{3}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2-x^2}} = \frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{4}+C$.

Проверка: $\left(\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{4}\right)' = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{9x^2}{16}}}\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{\sqrt{16-9x^2}}$.

II. Представление интеграла в виде суммы нескольких слагаемых

Теорема 4. *Неопределённый интеграл от алгебраической суммы двух функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций, то есть*

$$\int\left(f(x)\pm g(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx. \qquad (4.2)$$

Доказательство. Так же, как при доказательстве теоремы 3, продифференцируем правую часть равенства (4.2). Учитывая, что производная алгебраической суммы равна алгебраической сумме производных, получим

$$(\int f(x)dx \pm \int g(x)dx)' = (\int f(x)dx)' \pm (\int g(x)dx)'.$$

Так как $(\int f(x)dx)' = f(x)$ и $(\int g(x)dx)' = g(x)$, получим, что

$$(\int f(x)dx \pm \int g(x)dx)' = f(x) \pm g(x).$$

Таким образом, теорема 4 доказана.

Замечание. Формула (4.2) может быть распространена на любое количество функций. При вычислении интегралов в правой части (4.2) возникает несколько произвольных постоянных. Из самого смысла неопределённого интеграла как совокупности первообразных вытекает, что не нужно выписывать все постоянные, а достаточно ввести одну произвольную постоянную в окончательное выражение.

4.1. Опорные задачи

Приведём примеры совместного применения теорем 3 и 4.

Пример 4.4. $\int\left(3\sqrt{x^3}-\frac{7}{\sqrt{x^3}}+\frac{2}{\sqrt{9x^2+1}}\right)dx =$

$$=3\int x^{\frac{3}{2}}dx-7\int x^{-\frac{3}{2}}dx+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{1}{9}}}=$$

$$=\frac{6}{5}x^{\frac{5}{2}}+14x^{-\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}\ln\left|x+\sqrt{x^2+\frac{1}{9}}\right|+C.$$

Пример 4.5. $\int\left(\frac{5}{\sin^2 x}+2^{x-4}-\frac{3}{7-2x^2}\right)dx=$

$$=5\int\frac{dx}{\sin^2 x}+\frac{1}{16}\int 2^x dx-\frac{3}{2}\int\frac{dx}{7/2-x^2}=$$

$$=-5\mathrm{ctg}x+\frac{2^{x-4}}{\ln 2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{7}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{7/2}}{x+\sqrt{7/2}}\right|+C.$$

Следующие примеры показывают, что часто подынтегральную функцию приходится сначала преобразовать, подготовив её к применению теорем 3 и 4.

Пример 4.6.

$$\int\frac{5x^2+\sqrt{x}+3x}{x^2}dx=\int 5dx+\int\frac{dx}{x^{3/2}}+3\int\frac{dx}{x}=5x-2x^{-\frac{1}{2}}+3\ln|x|+C$$

Пример 4.7.

$$\int\frac{2x^2+1}{x^2+1}dx=\int\frac{2(x^2+1)-1}{x^2+1}dx=\int 2dx-\int\frac{dx}{x^2+1}=2x-\mathrm{arctg}x+C.$$

Пример 4.8.

$$\int\frac{3\cos^2 x+2\sin^2 x+4}{\cos^2 x}dx=\int\frac{\cos^2 x+6}{\cos^2 x}dx=\int\left(1+\frac{6}{\cos^2 x}\right)dx=$$

$$=\int dx+6\int\frac{dx}{\cos^2 x}=x+6\mathrm{tg}x+C.$$

Пример 4.9. $\int\frac{x^4+5}{x^2+2}dx=\int\frac{\left(x^4-4\right)+9}{x^2+2}dx=\int\left(x^2-2\right)dx+9\int\frac{dx}{x^2+2}=$

$$=\frac{x^3}{3}-2x+\frac{9}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$$

III. Формирование под знаком дифференциала линейного выражения $ax+b$

Теорема 5. *Пусть известно, что*

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad , \text{т. е. } F'(x) = f(x).$$

Тогда

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C, \tag{4.3}$$

где a и b – числа, $a \neq 0$.

Доказательство. Как обычно, продифференцируем правую часть формулы (4.3) и покажем, что её производная равна подынтегральной функции, стоящей в левой части. Отметим, что функция $F(ax+b)$ является сложной функцией аргумента x и её можно представить в виде

$$F(ax+b) = F(z(x)), \text{ где } z(x) = ax+b.$$

Тогда справедлива цепочка равенств

$$F'_x(ax+b) = F'_x(z(x)) = F'_z(z(x)) \cdot z'(x) = f(z(x)) \cdot a = a\, f\left(ax+b\right).$$

Следовательно,

$$\left(\frac{1}{a}F\left(ax+b\right)\right)' = \frac{1}{a}\left(F\left(ax+b\right)\right)' = \frac{1}{a} \cdot a \cdot f\left(ax+b\right) = f(ax+b).$$

Теорема 5 доказана.

Заметим, что формулу (4.3) можно получить, введя под знаком интеграла новую переменную $z = ax+b$. При этом следует помнить, что

$$dz = d(ax+b) = adx.$$

Выражая dx из правой части этого равенства, получим

$$dx = \frac{1}{a}dz.$$

Итак, установим цепочку равенств:

$$\begin{aligned}\int f\left(ax+b\right)dx &= \frac{1}{a}\int f\left(ax+b\right)d\left(ax+b\right) = \\ &= \frac{1}{a}\int f(z)dz = \frac{1}{a}F(z) + C = \frac{1}{a}F\left(ax+b\right) + C.\end{aligned} \tag{4.4}$$

Именно цепочкой (4.4) и удобно пользоваться, вычисляя конкретные интегралы. При этом введение новой переменной можно опускать, переходя сразу к последнему равенству.

Пример 4.10. $I = \int \sin\left(5x+2\right)dx = \frac{1}{5}\int \sin\left(5x+2\right)d(5x+2).$ Введём новую переменную $z = 5x+2$. Тогда

$$I = \frac{1}{5}\int \sin z dz = -\frac{1}{5}\cos z + C = -\frac{1}{5}\cos(5x+2) + C.$$

Проверка:

$$\left(-\frac{1}{5}\cos(5x+2)\right)' = -\frac{1}{5}\cdot\left(-\sin(5x+2)\right)\cdot 5 = \sin(5x+2).$$

Пример 4.11. $I = \int \frac{dx}{3-7x} = -\frac{1}{7}\int \frac{d(3-7x)}{3-7x}$. Введём новую переменную $z = 3-7x$. Тогда $I = -\frac{1}{7}\int \frac{dz}{z} = -\frac{1}{7}\ln|z| + C = -\frac{1}{7}\ln|3-7x| + C$.

Пример 4.12.

$$\int 3^{2x}dx = \frac{1}{2}\int 3^{2x}d(2x) = \frac{3^{2x}}{2\ln 3} + C,$$

(см. пример 3.13).

Пример 4.13. $\int \frac{dx}{4x^2+9} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x)}{(2x)^2+9} = \frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{2x}{3} + C$,

(см. пример 4.2).

В примерах (4.14) и (4.15) подынтегральные функции предварительно представим в таком виде, чтобы можно было применить к ним таблицу интегралов.

Пример 4.14.

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{17+6x+9x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{16+(1+3x)^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x+1)}{\sqrt{16+(3x+1)^2}}.$$

Введём новую переменную $z = 3x+1$. Тогда

$$I = \frac{1}{3}\int \frac{dz}{\sqrt{z^2+16}} = \frac{1}{3}\ln\left|z+\sqrt{z^2+16}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|3x+1+\sqrt{17+6x+9x^2}\right| + C.$$

Пример 4.15. $I = \int \frac{dx}{15-4x-4x^2} = \int \frac{dx}{16-(1+2x)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x+1)}{16-(2x+1)^2}$.

Введём новую переменную $z = 2x+1$. Тогда

$$I = -\frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^2-16} = -\frac{1}{2\cdot 2\cdot 4}\ln\left|\frac{z-4}{z+4}\right| + C = \frac{1}{16}\ln\left|\frac{2x+5}{2x-3}\right| + C.$$

Пример 4.16. $\int \sqrt[3]{4x+3}dx = \frac{1}{4}\int \left(4x+3\right)^{1/3}d(4x+3) =$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}(4x+3)^{4/3} + C = \frac{3}{16}(4x+3)^{4/3} + C.$$

Пример 4.17. $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{2-9x}} = -\frac{1}{9}\int \left(2-9x\right)^{-1/5}d(2-9x) =$

$$=-\frac{1}{9}\cdot\frac{5}{4}(2-9x)^{4/5}+C=-\frac{5}{36}(2-9x)^{4/5}+C.$$

Пример 4.18. $\int\frac{dx}{\sqrt{8+6x-9x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{9-(1-3x)^2}}=$

$$=-\frac{1}{3}\int\frac{d(1-3x)}{\sqrt{9-(1-3x)^2}}=-\frac{1}{3}\arcsin\frac{1-3x}{3}+C=\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x-1}{3}+C.$$

Проверка: $\left(\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x-1}{3}\right)'=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{(3x-1)^2}{3^2}}}=\frac{1}{\sqrt{9-\left(3x-1\right)^2}}.$

Пример 4.19. $\int \mathrm{tg}^2 5x dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 5x}-1\right)dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 5x}\right)dx-\int dx=$

$$=\frac{1}{5}\int\frac{d(5x)}{\cos^2(5x)}-x=\frac{1}{5}\mathrm{tg}5x-x+C.$$

Пример 4.20. $\int\frac{x+5}{\sqrt{x-2}}dx=\int\frac{(x-2)+7}{\sqrt{x-2}}dx=$

$$=\int\sqrt{x-2}\,d(x-2)+7\int\frac{d(x-2)}{\sqrt{x-2}}=\frac{2}{3}(x-2)^{3/2}+14(x-2)^{1/2}+C.$$

Пример 4.21. $\int\frac{x+2}{\sqrt{3x+4}}dx=\int\frac{\frac{1}{3}(3x+4)+\frac{2}{3}}{\sqrt{3x+4}}dx=$

$$=\frac{1}{3}\int\sqrt{3x+4}dx+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{\sqrt{3x+4}}=$$

$$=\frac{1}{9}\int\left(3x+4\right)^{1/2}d(3x+4)+\frac{2}{9}\int\left(3x+4\right)^{-1/2}d(3x+4)=$$

$$=\frac{2}{27}(3x+4)^{3/2}+\frac{4}{9}(3x+4)^{1/2}+C\,.$$

Обратимся теперь к таблице 1 и выведем предпоследние три интеграла, т. е. формулы (3.13), (3.14) и (3.15) с помощью теоремы 5.

- Вычислим интеграл (3.13) на основе интеграла (3.11) таблицы.

$$\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\int\frac{dx}{a^2\left(1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)}=\frac{1}{a}\int\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a}+C.$$

- Интеграл (3.14) вычислим на основе интеграла (3.12) таблицы.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int \frac{dx}{a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

- Для вычисления интеграла (3.15) используем табличный интеграл (3.3).

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2}=\int \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)dx=\frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x-a}-\frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x+a}=$$

$$=\frac{1}{2a}\int \frac{d(x-a)}{x-a}-\frac{1}{2a}\int \frac{d(x+a)}{x+a}=\frac{1}{2a}\ln|x-a|-\frac{1}{2a}\ln|x+a|+C=$$

$$=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C.$$

5. Замена переменной в неопределённом интеграле

Свойство III, описанное в разделе 4, является частным случаем общего метода замены переменной в неопределённом интеграле. Основой метода является следующее утверждение.

Теорема 6. *Пусть известно, что*

$$\int f(x)dx=F(x)+C, \text{ т. е. } F'(x)=f(x). \tag{5.1}$$

Тогда $$\int f(z(x))\cdot z'(x)dx=F(z(x))+C. \tag{5.2}$$

Доказательство. Продифференцируем правую часть формулы (5.2), учитывая, что $F(z(x))$ является сложной функцией аргумента x, а $F_z'(z)=f(z)$ по условию (5.1) теоремы. Тогда получаем

$$\big(F(z(x))+C\big)_x'=F_z'(z(x))\cdot z_x'(x)=f(z(x))\cdot z'(x).$$

Следовательно, производная правой части (5.2) равна подынтегральной функции, стоящей в левой части (5.2). Это доказывает теорему 6.

Формулу (5.2) можно переписать так

$$\int f(z(x))dz(x)=F(z(x))+C. \tag{5.3}$$

Таким образом, переменная, по которой ведется интегрирование, не обязательно является независимой переменной. Она может быть функцией другой переменной. Метод замены переменной как раз в том и состоит, что вводится новая переменная интегрирования.

Этот метод эффективен, прежде всего тогда, когда подынтегральное выражение можно представить в виде $f(z(x))dz(x)$, а первообразная

$F(z)$ функции $f(z)$ уже известна. Далеко не все подынтегральные выражения допускают такое представление. С другой стороны, не всегда легко увидеть, что это представление возможно. В умении вводить замену переменной состоит, пожалуй, основная трудность при вычислении неопределённого интеграла.

5.1. Опорные задачи

Приведём примеры, в которых замена множителя $z'(x)dx$ на $dz(x)$ позволяет представить все подынтегральное выражение как выражение, зависящее от одной и той же функции $z(x)$.

Пример 5.1. $I=\int \operatorname{tg} x dx=\int \frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int \frac{d(\cos x)}{\cos x}$. Введём $z=\cos x$. Тогда $I=-\int \frac{dz}{z}=-\ln|z|+C=-\ln|\cos x|+C.$

Пример 5.2. $\int \operatorname{ctg} x dx=\int \frac{\cos x}{\sin x}dx=\int \frac{d(\sin x)}{\sin x}=\ln|\sin x|+C.$

Пример 5.3. $I=\int \frac{xdx}{x^2+9}=\frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+9)}{x^2+9}$. Введём $z=x^2+9$. Тогда

$$I=\frac{1}{2}\int \frac{dz}{z}=\frac{1}{2}\ln|z|+C=\frac{1}{2}\ln(x^2+9)+C.$$

Пример 5.4. $I=\int \frac{xdx}{x^4+16}=\frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{(x^2)^2+16}$. Введём $z=x^2$. Тогда

$$I=\frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^2+16}=\frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{z}{4}+C=\frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{4}+C.$$

Пример 5.5. $I=\int \frac{xdx}{\sqrt{2x^2-3}}=\frac{1}{4}\int \frac{d(2x^2-3)}{\sqrt{2x^2-3}}$. Введём $z=2x^2-3$. Тогда $I=\frac{1}{4}\int \frac{dz}{\sqrt{z}}=\frac{1}{2}\sqrt{z}+C=\frac{1}{2}\sqrt{2x^2-3}+C$.

Пример 5.6. $\int \frac{x^3+2x}{\sqrt{x^4+5}}dx=\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^4+5}}+\int \frac{2x}{\sqrt{x^4+5}}dx=$

$$=\frac{1}{4}\int \frac{d(x^4+5)}{\sqrt{x^4+5}}+\int \frac{d(x^2)}{\sqrt{(x^2)^2+5}}=\frac{1}{2}\sqrt{x^4+5}+\ln\left(x^2+\sqrt{x^4+5}\right)+C.$$

Пример 5.7. $\int \frac{e^x dx}{e^x+2}=\int \frac{d(e^x+2)}{e^x+2}=\ln\left(e^x+2\right)+C$.

Пример 5.8. $\int \frac{dx}{e^x+2}=\int \frac{e^{-x}dx}{1+2e^{-x}}=$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{d\left(2e^{-x}+1\right)}{2e^{-x}+1} = -\frac{1}{2}\ln\left(2e^{-x}+1\right)+C.$$

Пример 5.9.

$$\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+4e^x+3} = \int \frac{d(e^x)}{(e^x+2)^2-1} = \int \frac{d(e^x+2)}{(e^x+2)^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x+1}{e^x+3}\right|+C.$$

Пример 5.10. $\int \frac{dx}{x(\ln^2 x-25)} = \int \frac{d\ln x}{\ln^2 x-25} = \frac{1}{10}\ln\left|\frac{\ln x-5}{\ln x+5}\right|+C.$

В следующих двух примерах применим искусственный приём, выделяющий дифференциал от функции tgx.

Пример 5.11. $\int \frac{\mathrm{tg}x dx}{\cos^2 x+3\sin^2 x} = \int \frac{\mathrm{tg}x dx}{\cos^2 x(1+3\mathrm{tg}^2 x)} = \int \frac{\mathrm{tg}x d\mathrm{tg}x}{3\mathrm{tg}^2 x+1} =$

$$= \frac{1}{6}\int \frac{d(3\mathrm{tg}^2 x+1)}{3\mathrm{tg}^2 x+1} = \frac{1}{6}\ln\left|3\mathrm{tg}^2 x+1\right|+C.$$

Пример 5.12. $\int \frac{dx}{\cos^2 x+4} = \int \frac{dx}{5\cos^2 x+4\sin^2 x} =$

$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x(5+4\mathrm{tg}^2 x)} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2\mathrm{tg}x)}{5+(2\mathrm{tg}x)^2} = \frac{1}{2\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\frac{2\mathrm{tg}x}{\sqrt{5}}+C.$$

В рассмотренных примерах мы выделяли в подынтегральном выражении дифференциал некоторой функции, которую и объявляли новой переменной интегрирования. Замену переменной можно осуществить и по другому, заменив переменную интегрирования какой-то функцией. Обычно такой приём используется при интегрировании иррациональных функций. При этом новая функция выбирается так, чтобы избавиться от иррациональности.

Приведём примеры такой замены переменной.

Пример 5.13. Вычислить $\int \sqrt{4-x^2}\,dx$.

Выберем замену в виде $x = 2\sin t$, где $t \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Тем самым $\sqrt{4-x^2} = 2\cos t$, и иррациональное выражение исчезает, превращаясь в тригонометрическое. Далее,

$$dx = 2\cos t dt.$$

Здесь еще раз подчеркнём, что мы перешли к новой переменной t во всем подынтегральном выражении, в том числе и в дифференциале. Тогда

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = 4\int \cos^2 t dt = 2\int \left(1+\cos 2t\right)dt = 2t+\sin 2t+C.$$

Теперь вернёмся к переменной x:

$$t=\arcsin\left(\frac{x}{2}\right);\quad \sin 2t=2\sin t\cos t=2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}.$$

В итоге, $\int\sqrt{4-x^2}\,dx=2\arcsin\frac{x}{2}+\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}+C.$

Пример 5.14. Вычислить $\int\frac{\sqrt{x}dx}{1+x}$.

Выбираем замену в виде $x=z^2$. Тогда $dx=2zdz$. В результате,

$$\int\frac{\sqrt{x}dx}{1+x}=2\int\frac{z^2dz}{1+z^2}=2\int\frac{(z^2+1)-1}{1+z^2}dz=2\int dz-2\int\frac{dz}{1+z^2}=$$

$$=2z-2\operatorname{arctg}z+C=2\sqrt{x}-2\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C.$$

6. Интегрирование по частям

Теорема 7. *Справедливо тождество*

$$\int u(x)dv(x)=u(x)v(x)-\int v(x)du(x) \tag{6.1}$$

Доказательство. Проинтегрируем известное тождество вида

$$d\big(u(x)\cdot v(x)\big)=v(x)\cdot du(x)+u(x)\cdot dv(x). \tag{6.2}$$

Получим

$$\int d\big(u(x)\cdot v(x)\big)=\int v(x)\cdot du(x)+\int u(x)\cdot dv(x). \tag{6.3}$$

Но

$$\int d\big(u(x)\cdot v(x)\big)=u(x)v(x)+C. \tag{6.4}$$

Тогда из (6.3) следует (6.1), где постоянная C из равенства (6.4) включена в состав интеграла $\int v(x)du(x)$. Теорема 7 доказана.

Замечание. Обычно формулу (6.1) записывают коротко:

$$\int udv=uv-\int vdu. \tag{6.5}$$

Формулу (6.1) имеет смысл применять тогда, когда $\int vdu$ оказывается проще, чем $\int udv$. Чаще всего это «упрощение» происходит в том случае, когда производная $u'(x)$ имеет более «простой» вид, чем сама функция $u(x)$.

Пусть, например, нужно вычислить $\int x\sin 5xdx$. Принимаем в качестве $u(x)$ функцию x. Тогда $du(x)=dx$. В качестве $dv(x)$ возьмём дифференциальное выражение $\sin 5xdx$ и вычислим $v(x)$:

$$v(x)=\int \sin 5xdx=-\frac{1}{5}\cos 5x+C.$$

Поскольку в тождестве (6.1) нужна лишь одна первообразная от функции $v(x)$, можем положить $C=0$. Итак,

$$\int x\sin 5xdx=-\frac{1}{5}x\cos 5x+\frac{1}{5}\int \cos 5xdx=-\frac{1}{5}x\cos 5x+\frac{1}{25}\sin 5x+C.$$

Отметим здесь, что в результате применения формулы (6.1) мы свели вычисление неизвестного интеграла $\int x\sin 5xdx$ к вычислению известного интеграла $\int \cos 5xdx$.

Перечислим ниже типы интегралов, которые следует вычислять, используя формулу интегрирования по частям (6.1).

I. $\int x^n e^{ax+b}dx, \quad n\in N; \quad a,b\in R, a\neq 0.$

II. $\int x^n \sin(ax+b)dx, \quad n\in N; \quad a,b\in R, a\neq 0.$

III. $\int x^n \cos(ax+b)dx, \quad n\in N; \quad a,b\in R, a\neq 0.$

IV. $\int x^a \ln xdx, \quad a\in R, \quad a\neq -1.$

V. $\int x^m \mathrm{arctg} xdx, \quad m=0,1,2,\ldots$.

VI. $\int x^m \arcsin xdx, \quad m=0,1,2,\ldots$.

В интегралах типов I, II, III в качестве $u(x)$ следует выбрать x^n, в качестве $dv(x)$ – оставшуюся часть подынтегрального выражения. Формулу (6.1) для этих интегралов придется применять n раз. В интегралах типа IV в качестве $u(x)$ принимается $\ln x$, в качестве $dv(x)$ принимается $x^a dx$. В интегралах типов V, VI в качестве $u(x)$ принимается обратная тригонометрическая функция, а в качестве $dv(x)$ принимается $x^m dx$.

6.1. Опорные задачи

Приведём примеры интегрирования по частям.

Пример 6.1. $I=\int \ln x\,dx$. Положим $u=\ln x,\quad dv=dx$. Получим $du=\dfrac{dx}{x},\quad v=x$. Тогда $I=x\ln x-\int dx=x\ln x-x+C$.

Пример 6.2. $I=\int \arcsin x dx$. Положим $u=\arcsin x,\quad dv=dx$. Получим $du=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\quad v=x$. Тогда

$$I=x\arcsin x-\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=x\arcsin x+\frac{1}{2}\int\frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}=$$
$$=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C.$$

Пример 6.3. $I=\int \operatorname{arctg} x dx$. Положим $u=\operatorname{arctg} x,\quad dv=dx$. Получим $du=\dfrac{dx}{1+x^2},\quad v=x$. Тогда

$$I=x\operatorname{arctg} x-\int\frac{xdx}{1+x^2}=x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\int\frac{d(1+x^2)}{1+x^2}=$$
$$=x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.$$

Пример 6.4. $I=\int \sqrt[3]{x}\ln x dx$. Полагаем $u=\ln x,\quad dv=\sqrt[3]{x}dx$. Получим $du=\dfrac{dx}{x},\quad v=\dfrac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}$. Тогда

$$I=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\ln x-\frac{3}{4}\int x^{\frac{1}{3}}dx=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\ln x-\frac{9}{16}x^{\frac{4}{3}}+C.$$

Пример 6.5. $I=\int x^2 e^{3x-2}\,dx$. Положим $u=x^2,\quad dv=e^{3x-2}\,dx$. Найдём $du=2xdx,\quad v=\int e^{3x-2}\,dx=\dfrac{1}{3}e^{3x-2}$. Получим

$$I=\frac{1}{3}e^{3x-2}x^2-\frac{2}{3}\int x\,e^{3x-2}dx.$$

Снова интегрируем по частям. Положим $u_1=x,\quad dv_1=e^{3x-2}\,dx$. Получим $du_1=dx,\quad v_1=\dfrac{1}{3}e^{3x-2}$. Тогда

$$I=\frac{1}{3}e^{3x-2}x^2-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}e^{3x-2}x-\frac{1}{3}\int e^{3x-2}\,dx\right)=\frac{1}{3}x^2e^{3x-2}-$$

$$-\frac{2}{9}x\,e^{3x-2}+\frac{2}{9}\int e^{3x-2}\,dx=\frac{1}{3}x^2\,e^{3x-2}-\frac{2}{9}x\,e^{3x-2}+\frac{2}{27}e^{3x-2}+C.$$

Пример 6.6. $I=\int \ln^2 x dx$. Положим $u=\ln^2 x, \quad dv=dx$. Вычислим $du=\frac{2\ln x}{x}dx, \quad v=x$. Тогда $I=x\ln^2 x-2\int \ln x dx$.

Интеграл $\int \ln x dx$ вычислен в примере 6.1. Получим

$$I=x\ln^2 x-2x\ln x+2x+C.$$

Пример 6.7. $I=\int \frac{x}{\cos^2 x}dx$. Положим $u=x, \quad dv=\frac{dx}{\cos^2 x}$. Получим $du=dx, \quad v=\int \frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg} x$. Тогда

$$I=x\operatorname{tg} x-\int \operatorname{tg} x dx=x\operatorname{tg} x+\ln|\cos x|+C.$$

Пример 6.8. $I=\int \frac{\ln x}{x^3}dx$. Положим $u=\ln x, \quad dv=\frac{dx}{x^3}$. Получим $du=\frac{dx}{x}, \quad v=\int x^{-3}dx=-\frac{1}{2x^2}$. Тогда

$$I=-\frac{\ln x}{2x^2}+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^3}=-\frac{\ln x}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}+C.$$

6.1. Циклические интегралы

(Интегралы, приводящиеся к самим себе).

Иногда в результате применения формулы (6.1) мы получаем новый интеграл, который отличается от исходного интеграла $\int udv$ лишь множителем. Тогда формулу (6.1) можно рассматривать как уравнение относительно $\int udv$. Такие интегралы называются интегралами, приводящимися к себе.

Пример 6.9. $I=\int \sqrt{x^2+a}dx$, где $a\neq 0$.

Применим интегрирование по частям, где $u=\sqrt{x^2+a}, \quad dv=dx$. Тогда

$$du=\frac{xdx}{\sqrt{x^2+a}}, \quad v=x.$$

Получим

$$I=\int\sqrt{x^2+a}\,dx=x\sqrt{x^2+a}-\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a}}dx\ . \qquad (6.6)$$

Проведём тождественные преобразования:

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a}}dx=\int\frac{(x^2+a)-a}{\sqrt{x^2+a}}dx=\int\sqrt{x^2+a}dx-a\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=$$

$$=I-a\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C.$$

Подставляем полученный результат в формулу (6.6). Тогда

$$I=x\sqrt{x^2+a}-I+a\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C\,.$$

Мы получили уравнение относительно I. Решаем его. В итоге,

$$I=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a}+a\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\right)+C\,.$$

Пример 6.10. $I=\int \mathrm{e}^{ax}\sin bxdx$, где $a\neq 0,\ \ b\neq 0$.

Применяем интегрирование по частям. Положим $u=\mathrm{e}^{ax},\quad dv=\sin bxdx$. Получим $du=a\,\mathrm{e}^{ax}\,dx,\quad v=-\dfrac{1}{b}\cos bx$. Тогда

$$I=-\frac{1}{b}\mathrm{e}^{ax}\cos bx+\frac{a}{b}\int \mathrm{e}^{ax}\cos bxdx\,. \qquad (6.7)$$

Снова применим интегрирование по частям в интеграле $I_1=\int \mathrm{e}^{ax}\cos bxdx$. Положим $u_1=\mathrm{e}^{ax},\quad dv_1=\cos bxdx$. Найдём $du_1=a\,\mathrm{e}^{ax}\,dx,\quad v_1=\dfrac{1}{b}\sin bx$. Тогда $I_1=\dfrac{1}{b}\mathrm{e}^{ax}\sin bx-\dfrac{a}{b}\int \mathrm{e}^{ax}\sin bxdx$.

Подставим интеграл I_1 в (6.7) и получим уравнение относительно I.

$$I=-\frac{1}{b}\mathrm{e}^{ax}\cos bx+\frac{a}{b^2}\mathrm{e}^{ax}\sin bx-\frac{a^2}{b^2}I\,.$$

Решая это уравнение, определяем I.

$$I=\frac{(-b\cos bx+a\sin bx)\,\mathrm{e}^{ax}}{(a^2+b^2)}\,.$$

7. Интегрирование дробно-рациональных функций

Определение 3. *Дробно-рациональной функцией (или рациональной дробью) будем называть частное от деления двух многочленов. Общий вид рациональной дроби таков*

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

где $P_n(x)$ *– многочлен степени* n*, а* $Q_m(x)$ *– многочлен степени* m.

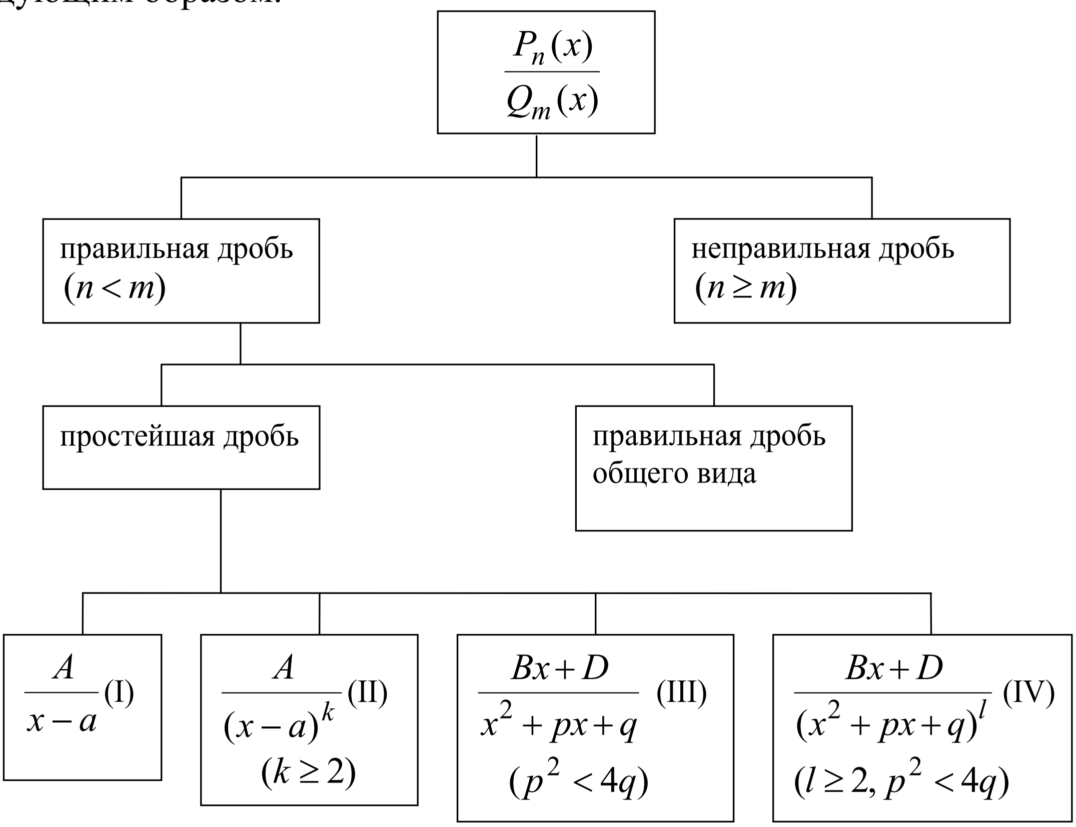
Если $n < m$, то рациональная дробь называется *правильной*, если $n \geq m$, то рациональная дробь называется *неправильной*. Из общей совокупности правильных дробей выделяются четыре специальных типа дробей, называемых *простейшими*. Простейшие дроби имеют вид

$$\frac{A}{x-a}, \quad \frac{A}{(x-a)^k} \; (k \geq 2, \text{целое}),$$

$$\frac{Bx+D}{x^2+px+q}, \quad \frac{Bx+D}{\left(x^2+px+q\right)^l} \; (l \geq 2, \text{целое}),$$

где *A, B, D, a, p, q* – действительные числа, а трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней ($p^2 < 4q$), т. е. не раскладывается на множители первой степени.

В целом классификацию рациональных дробей можно представить следующим образом.



Интегралы от рациональных дробей всегда являются берущимися. Покажем это, двигаясь по приведённой здесь схеме, поднимаясь с нижнего уровня на верхний уровень.

7.1. Интегрирование простейших дробей

1. Интеграл типа (I) берётся с использованием формулы (3.3) таблицы 1 и линейной замены.
$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C.$$
2. Интеграл типа (II) берётся с использованием формулы (3.2) таблицы 1 и линейной замены.
$$\int \frac{Adx}{(x-a)^k} = A\int (x-a)^{-k}\, d(x-a) = \frac{A}{-k+1}(x-a)^{-k+1} + C =$$
$$= -\frac{A}{k-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C. \text{ (Здесь } k \ge 2\text{ .)}$$
3. Рассмотрим интеграл типа (III) $I = \int \frac{Bx+D}{x^2+px+q}dx$, где $p^2 < 4q$.

Чтобы вычислить интеграл I, найдём сначала производную знаменателя подынтегральной функции:
$$(x^2+px+q)' = 2x+p.$$
Далее представим числитель как сумму двух слагаемых:
$$Bx+D = \frac{B}{2}(2x+p) + (-\frac{B}{2}p + D),$$
т. е. «выделим» в числителе производную знаменателя. Теперь I можно представить как сумму двух слагаемых:
$$I = \frac{B}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + (-\frac{B}{2}p + D)\int \frac{dx}{x^2+px+q}. \qquad (7.1)$$
Вычислим каждый из интегралов, стоящих в правой части (7.1), отдельно:

- $\int \frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q} = \int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} = \ln(x^2+px+q) + C,$
- $\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \int \frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2 + (q-\frac{p^2}{4})} = \int \frac{d(x+\frac{p}{2})}{(x+\frac{p}{2})^2 + (q-\frac{p^2}{4})} =$

$$=\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C.$$

Таким образом,

$$I=\frac{B}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{(D-\frac{Bp}{2})}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C. \qquad (7.2)$$

Заметим, что x^2+px+q всегда можно представить как сумму квадратов в силу того, что $q-\frac{p^2}{4}>0$.

Формула (7.2) сложна для запоминания. Как правило, ею не пользуются, а непосредственно применяют к конкретному интегралу изложенный здесь метод.

7.1.1.Опорные задачи.

Пример 7.1. $\int\frac{5dx}{(2-x)^3}=-5\int\frac{dx}{(x-2)^3}=\frac{5}{2}\frac{1}{(x-2)^2}+C$.

Пример 7.2. $I=\int\frac{(3x+7)dx}{x^2+4x+8}$. Найдём производную знаменателя $(x^2+4x+8)'=2x+4$. Выделим эту производную в числителе $3x+7=\frac{3}{2}(2x+4)+1$. Тогда

$$I=\frac{3}{2}\int\frac{(2x+4)dx}{x^2+4x+8}+\int\frac{dx}{x^2+4x+8}==\frac{3}{2}\int\frac{d(x^2+4x+8)}{x^2+4x+8}+$$

$$+\int\frac{d(x+2)}{(x+2)^2+4}=\frac{3}{2}\ln(x^2+4x+8)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{2}+C$$

Пример 7.3. $I=\int\frac{(7-5x)}{x^2+6x+25}dx$. Воспользуемся формулами

$$(x^2+6x+25)'=2x+6,\quad 7-5x=-\frac{5}{2}(2x+6)+22.$$ Тогда

$$I=-\frac{5}{2}\int\frac{(2x+6)dx}{x^2+6x+25}+22\int\frac{dx}{(x+3)^2+16}=$$

$$=-\frac{5}{2}\ln(x^2+6x+25)+\frac{11}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{4}+C.$$

4. Для интеграла типа (IV) $I=\int\frac{Bx+D}{(x^2+px+q)^l}dx$, где $l\ge 2$, $p^2<4q$, непосредственное интегрирование является столь громоздким, что следует пользоваться справочником.

7.2. Интегрирование правильных дробей

Рассмотрим правильную дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ $(n<m)$, которая не является простейшей дробью. Чтобы проинтегрировать такую функцию, её нужно представить в виде суммы простейших дробей.

Представление правильной дроби в виде суммы простейших дробей осуществляется по следующему правилу.

1) Знаменатель $Q_m(x)$ следует разложить на множители вида

$$(x-a)^k \text{ и } (x^2+px+q)^r,$$

где $k,r\ge 1$, а $p^2<4q$. Заметим, что (x^2+px+q) при условии $p^2<4q$ на множители разложить нельзя.

2) Следует построить «общий вид» представления с неопределёнными пока коэффициентами. При этом каждому множителю $(x-a)^k$ должна соответствовать сумма дробей

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-a)^k}, \tag{7.3}$$

а каждому множителю $(x^2+px+q)^r$ должна соответствовать сумма дробей

$$\frac{B_1x+D_1}{x^2+px+q}+\frac{B_2x+D_2}{(x^2+px+q)^2}\ldots+\frac{B_rx+D_r}{(x^2+px+q)^r}, \tag{7.4}$$

где коэффициенты A_i $(i=1,\ldots,k)$, B_j,D_j $(j=1,\ldots,r)$ пока неизвестны и представлены буквами. В суммах (7.3) и (7.4) должны обязательно присутствовать все перечисленные выше слагаемые (k слагаемых в сумме (7.3) и r слагаемых в (7.4)). Общий вид представления содержит в себе все суммы (7.3) и (7.4).

3) Следует определить коэффициенты представления, полученного в пункте 2, исходя из тождественного равенства правильной дроби и суммы простейших дробей, полученной в пункте 2.

Покажем на конкретных примерах, как пользоваться данным правилом.

7.2.1.Опорные задачи

Пример 7.4. $I = \int \frac{(5x+2)dx}{x^3+4x^2+4x}$.

Применим сформулированное выше правило.

1) Разложим знаменатель дроби, стоящей под знаком интеграла, на множители:

$$x^3+4x^2+4x = x(x^2+4x+4) = x(x+2)^2.$$

2) Построим для дроби, стоящей под знаком интеграла, представление в виде суммы простейших дробей с неизвестными пока коэффициентами

$$\frac{5x+2}{x^3+4x^2+4x} = \frac{A}{x} + \frac{B_1}{x+2} + \frac{B_2}{(x+2)^2}. \tag{7.5}$$

Множитель x имеет степень 1, и ему соответствует в сумме одно слагаемое, множитель $(x+2)$ имеет степень 2, и ему в сумме соответствуют два слагаемых.

3) Приведём правую часть равенства (7.5) к общему знаменателю. Получим

$$\frac{5x+2}{x^3+4x^2+4x} = \frac{A(x+2)^2 + B_1 x(x+2) + B_2 x}{x(x+2)^2}. \tag{7.6}$$

Равенство (7.6) должно выполняться при всех значениях x. Поскольку знаменатели дробей, стоящих в левой и правой частях (7.6), одинаковы, числители этих дробей должны быть тождественно равными. Таким образом,

$$5x+2 = A(x+2)^2 + B_1 x(x+2) + B_2 x \tag{7.7}$$

при всех значениях x. Чтобы определить A, B_1 и B_2, подставим в (7.7) три каких-либо значения x и получим систему трёх уравнений относительно неизвестных A, B_1 и B_2. Если представление правильной дроби в виде суммы простейших дробей составлено правильно, то эта система имеет единственное решение. Значения x обычно выбирают так, чтобы расчеты были как можно более простыми. В нашем случае выгодно выбрать $x_1 = -2,\ x_2 = 0$ и $x_3 = -1$. Последовательно подставляя эти значения x в тождество (7.7), получим систему

$$\begin{cases} -8 = -2B_2 \\ \ \ 2 = 4A \\ -3 = A - B_1 - B_2 \end{cases} \tag{7.8}$$

Система (7.8) имеет решение:

$$A = \frac{1}{2};\ B_2 = 4;\ B_1 = -\frac{1}{2}.$$

Замечание. Если коэффициенты A, B_1, B_2 найдены верно, то слева и справа в (7.7) стоят одинаковые многочлены. Следовательно, их коэффициенты при одинаковых степенях должны быть равны. Установим это:

коэффициенты при	слева в (7.7)	справа в (7.7)
x^2	0	$A+B_1=0$
x	5	$4A+2B_1+B_2=2-1+4=5$
x^0	2	$4A=2$

Таким образом, коэффициенты найдены верно. Итак, мы получили тождество

$$\frac{5x+2}{x^3+4x^2+4x}=\frac{1}{2x}-\frac{1}{2(x+2)}+\frac{4}{(x+2)^2}.$$

Тогда

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+2}+4\int\frac{dx}{(x+2)^2}=\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x+2|-\frac{4}{x+2}+C.$$

Пример 7.5. $I=\int\frac{(x^2+3x+3)dx}{(x+1)(x^2+4x+5)}$.

Представим дробь, стоящую под знаком интеграла, в виде суммы простейших дробей. Так как оба множителя, стоящих в знаменателе, имеют степень 1, представление будет иметь вид

$$\frac{x^2+3x+3}{(x+1)(x^2+4x+5)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+D}{x^2+4x+5} \qquad (7.9)$$

Заметим, что если в знаменателе стоит квадратный трёхчлен $\left(x^2+4x+5\right)$, то в числителе обязательно должен стоять многочлен первой степени $(Bx+D)$.

Приводим правую часть (7.9) к общему знаменателю. Тогда

$$\frac{x^2+3x+3}{(x+1)(x^2+4x+5)}=\frac{A(x^2+4x+5)+(Bx+D)(x+1)}{(x+1)(x^2+4x+5)},$$

откуда следует

$$x^2+3x+3=A(x^2+4x+5)+(Bx+D)(x+1). \qquad (7.10)$$

Нужно определить три коэффициента A, B и D. Используем удобные значения: $x_1=-1,\ x_2=0,\ x_3=1$. Подставим их последовательно в (7.10). Получим

$$\left.\begin{aligned} 1 &= 2A \\ 3 &= 5A + D \\ 7 &= 10A + 2B + 2D \end{aligned}\right\} \qquad (7.11)$$

Система (7.11) имеет решение:

$$A = \frac{1}{2};\ B = \frac{1}{2};\ D = \frac{1}{2}.$$

Проверим полученный результат.

коэффициенты при	слева в (7.10)	справа в (7.10)
x^2	1	$A + B = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$
x	3	$4A + B + D = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3$
x^0	3	$5A + D = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3$

Получено тождество

$$\frac{x^2 + 3x + 3}{(x+1)(x^2 + 4x + 5)} = \frac{1}{2(x+1)} + \frac{x+1}{2(x^2 + 4x + 5)}.$$

Следовательно,

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{(x+1)dx}{x^2 + 4x + 5}.$$

Отдельно вычислим $I_1 = \int \frac{(x+1)dx}{x^2 + 4x + 5}$, используя формулы

$$(x^2 + 4x + 5)' = 2x + 4, \quad x + 1 = \frac{1}{2}(2x + 4) - 1.$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+4)dx}{x^2 + 4x + 5} - \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2 + 4x + 5)}{x^2 + 4x + 5} - \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2 + 1} = \frac{1}{2}\ln(x^2 + 4x + 5) - \operatorname{arctg}(x+2) + C.$$

Итак,

$$I = \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{4}\ln(x^2 + 4x + 5) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x+2) + C.$$

Пример 7.6. $I = \int \frac{(3x+1)dx}{(x^2 + 2x - 3)(x^2 + 1)}$.

Разлагаем знаменатель на множители:

$$(x^2+2x-3)(x^2+1)=(x-1)(x+3)(x^2+1).$$

Выписываем общий вид представления дроби в виде суммы простейших дробей и сразу же приводим сумму дробей к общему знаменателю:

$$\frac{(3x+1)}{(x^2+2x-3)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}+\frac{Ex+D}{x^2+1}=$$

$$=\frac{A(x+3)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Ex+D)(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+3)(x^2+1)}.$$

Составляем равенство числителей двух равных дробей с одинаковыми знаменателями:

$$3x+1=A(x+3)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Ex+D)(x-1)(x+3). \quad (7.12)$$

Выбираем удобные значения x: $x_1=1$, $x_2=-3$, $x_3=0$, $x_4=-1$ и составляем систему уравнений для определения четырёх коэффициентов: A,B,E,D.

$$\left.\begin{aligned} 4&=8A\\ -8&=-40B\\ 1&=3A-B-3D\\ -2&=4A-4B+4E-4D \end{aligned}\right\} \qquad (7.13)$$

Решаем систему (7.13):

$$A=\frac{1}{2},\ B=\frac{1}{5},\ D=\frac{1}{3}(-1-B+3A)=\frac{1}{3}(-1-\frac{1}{5}+\frac{3}{2})=\frac{1}{10},$$

$$E=\frac{1}{2}(-1-2A+2B+2D)=\frac{1}{2}(-1-1+\frac{2}{5}+\frac{1}{5})=-\frac{7}{10}.$$

Проверим полученные значения.

Коэффициенты при	Слева в (7.12)	справа в (7.12)
x^3	0	$A+B+E=\frac{5}{10}+\frac{2}{10}-\frac{7}{10}=0$
x^2	0	$3A-B+D+2E=\frac{15}{10}-\frac{2}{10}+\frac{1}{10}-\frac{14}{10}=0$
x	3	$A+B-3E+2D=\frac{5}{10}+\frac{2}{10}+\frac{21}{10}+\frac{2}{10}=3$
x^0	1	$3A-B-3D=\frac{15}{10}-\frac{2}{10}-\frac{3}{10}=1$

Таким образом,

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x+3}+\frac{1}{10}\int\frac{1-7x}{x^2+1}dx=$$
$$=\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{5}\ln|x+3|+\frac{1}{10}\operatorname{arctg}x-\frac{7}{20}\ln(x^2+1)+C.$$

7.3. Интегрирование неправильных дробей

Чтобы проинтегрировать неправильную дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $n\geq m$, её следует представить в виде суммы многочлена и правильной дроби. Для этого сначала следует представить $P_n(x)$ в виде

$$P_n(x)=Q_m(x)M(x)+R(x), \qquad (7.14)$$

где степень многочлена $R(x)$ меньше, чем степень многочлена $Q_m(x)$. Представление (7.14) равносильно делению многочлена $P_n(x)$ на многочлен $Q_m(x)$ с остатком. В формуле (7.14) многочлен $M(x)$ является частным, а многочлен $R(x)$ является остатком. Затем равенство (7.14) следует почленно поделить на $Q_m(x)$. Мы получим

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=M(x)+\frac{R(x)}{Q_m(x)}.$$

Здесь $\frac{R(x)}{Q_m(x)}$ – правильная дробь.

Представление (7.14) иногда легко угадать (если $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ имеют достаточно простой вид), но, как правило, оно получается в результате деления $P_n(x)$ на $Q_m(x)$ «уголком».

7.3.1.Опорные задачи

Пример 7.7. $\int\frac{x+5}{x+3}dx=\int\frac{(x+3)+2}{x+3}dx=\int(1+\frac{2}{x+3})dx=$

$$=\int dx+2\int\frac{dx}{x+3}=x+2\ln|x+3|+C.$$

Пример 7.8. $\int\frac{2x^2+3x+4}{x^2+3}dx=\int\frac{2(x^2+3)+(3x-2)}{x^2+3}dx=$

$$=\int 2dx+\int\frac{3x-2}{x^2+3}dx=2x+\frac{3}{2}\ln(x^2+3)-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C.$$

Пример 7.9. $I=\int\frac{x^3+5x^2+3x}{x^2+2x+5}dx$. Подынтегральная функция является неправильной рациональной дробью. Разделим числитель этой дроби на знаменатель с остатком.

$$\begin{array}{r|l} -\; x^3+5x^2+3x & \underline{x^2+2x+5} \\ \underline{x^3+2x^2+5x} & x+3 \\ -\;3x^2-2x & \\ \underline{3x^2+6x+15} & \\ -8x-15 & \end{array}$$

$$I=\int\frac{\left(x^2+2x+5\right)\left(x+3\right)-8x-15}{x^2+2x+5}dx=\int\left(x+3\right)dx-\int\frac{\left(8x+15\right)dx}{x^2+2x+5}.$$

Вычислим отдельно

$$\int\frac{(8x+15)dx}{x^2+2x+5}=\int\frac{4(2x+2)+7}{x^2+2x+5}dx=4\int\frac{d(x^2+2x+5)}{x^2+2x+5}+7\int\frac{dx}{(x+1)^2+4}=$$

$$=4\ln(x^2+2x+5)+\frac{7}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C.$$

Окончательно,

$$I=\frac{x^2}{2}+3x-4\ln(x^2+2x+5)-\frac{7}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C.$$

Пример 7.10. $I=\int\frac{x^4+2}{x^2+2x-3}dx$. Поделим числитель на знаменатель с остатком.

$$\begin{array}{r|l} -\; x^4+2 & \underline{x^2+2x-3} \\ \underline{x^4+2x^3-3x^2} & x^2-2x+7 \\ -\;-2x^3+3x^2+2 & \\ \underline{-2x^3-4x^2+6x} & \\ -\;7x^2-6x+2 & \\ \underline{7x^2+14x-21} & \\ -20x+23 & \end{array}$$

$$I=\int\left(x^2-2x+7-\frac{20x-23}{x^2+2x-3}\right)dx=\int(x^2-2x+7)dx-\int\frac{20x-23}{x^2+2x-3}dx$$

Вычислим отдельно $I_1 = \int \frac{20x-23}{x^2+2x-3}dx$. Разложим правильную дробь на простейшие дроби.

$$\frac{20x-23}{x^2+2x-3} = \frac{20x-23}{(x+3)(x-1)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1}.$$

$$20x-23 = A(x-1) + B(x+3).$$

Подставим в полученное тождество последовательно значения переменной $x=1$, $x=-3$. Тогда

$$\left.\begin{array}{r} -3 = 4B \\ -83 = -4A \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -\dfrac{3}{4} \\ A = \dfrac{83}{4}. \end{cases}$$

Получим $I_1 = \int \frac{83}{4(x+3)}dx - \int \frac{3}{4(x-1)}dx$.

Окончательно,

$$I = \frac{x^3}{3} - x^2 + 7x - \frac{83}{4}\ln|x+3| + \frac{3}{4}\ln|x-1| + C.$$

8. Интегрирование тригонометрических функций

8.1. Интегрирование произведений синусов и косинусов различных аргументов

Для вычисления интегралов этого типа нужно последовательно осуществлять преобразование произведений пар тригонометрических функций в суммы пар тригонометрических функций, согласно формулам:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right),$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)),$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)).$$

Приведём примеры.

Пример 8.1. $\int \sin x\cos 2x dx = \frac{1}{2}\int(\sin 3x + \sin(-x))dx =$

$$=\frac{1}{2}\int(\sin 3x-\sin x)dx=-\frac{1}{6}\cos 3x+\frac{1}{2}\cos x+C.$$

Пример 8.2. $\int\cos x\sin 2x\cos 3xdx=\frac{1}{2}\int(\cos 4x+\cos 2x)\sin 2xdx=$

$$=\frac{1}{2}\int\cos 4x\sin 2xdx+\frac{1}{2}\int\cos 2x\sin 2xdx=$$

$$=\frac{1}{4}\int(\sin 6x-\sin 2x)dx+\frac{1}{4}\int\sin 4xdx=$$

$$=-\frac{1}{24}\cos 6x+\frac{1}{8}\cos 2x-\frac{1}{16}\cos 4x+C.$$

Пример 8.3. $\int\cos\frac{x}{2}\cos(2x+1)dx=$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\cos\left(\frac{5x}{2}+1\right)+\cos\left(\frac{3x}{2}+1\right)\right)dx=\frac{1}{5}\sin\left(\frac{5}{2}x+1\right)+\frac{1}{3}\sin\left(\frac{3}{2}x+1\right)+C$$

8.2. $\int\sin^m x\cos^n xdx$.

Здесь следует выделить два случая:

1) одно из чисел: m или n, является целым, положительным, нечётным;
2) оба числа m и n являются целыми, неотрицательными ($m^2+n^2\neq 0$), чётными.

В случае 1) нужно выделить из нечётной степени $\sin^m x$ или $\cos^n x$ один множитель (соответственно $\sin x$ или $\cos x$) и объединить этот множитель с дифференциалом dx. Далее, нужно выразить подынтегральное выражение только через $\cos x$ или только через $\sin x$, воспользовавшись тем, что $\sin x\,dx=-d\cos x$, $\cos xdx=d\sin x$, а $\sin^2 x+\cos^2 x=1$.

Приведём примеры.

Пример 8.4. $I=\int\sin^3 x\ \cos^2 x\ dx=\int(\sin^2 x\cos^2 x)(\sin x)\ dx=$

$=-\int(1-\cos^2 x)\cos^2 x\ d\cos x$. Сделаем замену переменной $z=\cos x$.

Получим $I=-\int(1-z^2)z^2dz=\int(z^4-z^2)dz=$

$$=\frac{z^5}{5}-\frac{z^3}{3}+C=\frac{\cos^5 x}{5}-\frac{\cos^3 x}{3}+C.$$

Пример 8.5. $\int \cos x \sin^{11} x\,dx = \int \sin^{11} x\, d\sin x = \dfrac{\sin^{12} x}{12} + C$.

Пример 8.6. $I = \int \cos^5 x\ \sqrt[3]{\sin x}\ dx = \int \cos^4 x\,\sqrt[3]{\sin x}(\cos x)dx =$

$= \int (1-\sin^2 x)^2 \cdot \sqrt[3]{\sin x}\ d\sin x.$ Введём новую переменную $z = \sin x$. Тогда

$$I = \int (1-z^2)^2 \cdot (\sqrt[3]{z})dz = \int (z^{\frac{1}{3}} - 2z^{\frac{7}{3}} + z^{\frac{13}{3}})dz =$$

$$= \frac{3}{4}z^{\frac{4}{3}} - 2\cdot\frac{3}{10}z^{\frac{10}{3}} + \frac{3}{16}z^{\frac{16}{3}} + C =$$

$$= \frac{3}{4}(\sin x)^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{5}(\sin x)^{\frac{10}{3}} + \frac{3}{16}(\sin x)^{\frac{16}{3}} + C.$$

Заметим, что если обе степени m и n положительные и нечётные, то отделять множитель выгодно от степени с меньшим показателем.

Пример 8.7. $\int \cos^3 x \sin^7 x\,dx = \int \cos^2 x \sin^7 x \cdot \cos x\,dx =$

$$= \int (1-\sin^2 x)\sin^7 x\,d\sin x = \frac{\sin^8 x}{8} - \frac{\sin^{10} x}{10} + C.$$

В случае 2) нужно воспользоваться формулами

$$\sin^2 \alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2},$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2},$$

$$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2},$$

позволяющими понизить степень функций, входящих в подынтегральное выражение.

Пример 8.8. $\int \cos^2 x dx = \dfrac{1}{2}\int (1+\cos 2x)dx = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}\sin 2x + C.$

Пример 8.9.

$$\int \sin^4 x dx = \frac{1}{4}\int (1-\cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)dx =$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\int (1+\cos 4x)dx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

Пример 8.10. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx = \int (\sin x \cos x)^2 \cos^2 x dx =$

$$=\frac{1}{4}\int\sin^2 2x\ \cos^2 x\,dx=\frac{1}{8}\int\sin^2 2x(1+\cos 2x)dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int\sin^2 2xdx+\frac{1}{8}\int\sin^2 2x\cos 2xdx=$$

$$=\frac{1}{16}\int(1\text{-}\cos 4x)dx+\frac{1}{16}\int\sin^2 2x\,d\sin 2x=$$

$$=\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin 4x+\frac{1}{48}\sin^3 2x+C.$$

8.3. $\int tg^n xdx, \int ctg^n xdx$ (n=1,2,…)

Ранее уже были найдены

$$\int \mathrm{tg}xdx=-\ln|\cos x|+C,$$

$$\int \mathrm{ctgx}dx=\ \ln|\sin x|+C.$$

Для вычисления интегралов от прочих натуральных степеней функций $\mathrm{tg}x$ и $\mathrm{ctg}x$ следует воспользоваться формулами

$$\mathrm{tg}^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}-1 \quad \text{и} \quad \mathrm{ctg}^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}-1$$

соответственно, записав предварительно интегрируемые функции в виде

$$\mathrm{tg}^n x=\mathrm{tg}^{n-2}x\cdot\mathrm{tg}^2 x,$$

$$\mathrm{ctg}^n x=\mathrm{ctg}^{n-2}x\cdot\mathrm{ctg}^2 x.$$

При этом следует учесть, что $d\left(\mathrm{tg}x\right)=\dfrac{dx}{\cos^2 x}$, а $d\left(\mathrm{ctg}x\right)=-\dfrac{dx}{\sin^2 x}$.

Пример 8.11.

$$\int\mathrm{tg}^2 xdx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}-\int dx=\mathrm{tg}x-x+C.$$

Пример 8.12. $\int\mathrm{ctg}^3 xdx=\int\mathrm{ctg}x\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-1\right)dx=\int\dfrac{\mathrm{ctg}xdx}{\sin^2 x}-\int\mathrm{ctg}xdx=$

$$=-\int\mathrm{ctg}xd\mathrm{ctg}x-\int\mathrm{ctg}xdx=-\frac{\mathrm{ctg}^2 x}{2}-\ln|\sin x|+C.$$

Пример 8.13. $\int\mathrm{tg}^4 xdx=\int\mathrm{tg}^2 x\cdot\mathrm{tg}^2 xdx=\int\mathrm{tg}^2 x\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=$

$$= \int \mathrm{tg}^2 x d\mathrm{tg}x - \int \mathrm{tg}^2 x dx = \frac{\mathrm{tg}^3 x}{3} - (\mathrm{tg}x - x) + C = \frac{\mathrm{tg}^3 x}{3} - \mathrm{tg}x + x + C.$$

9. Интегрирование некоторых иррациональных функций.

I. Рассмотрим здесь интегралы вида

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx,$$

где A, B, a, b, c – числа, $a \neq 0$.

Чтобы вычислить этот интеграл, следует вычислить производную подкоренного выражения:

$$(ax^2+bx+c)' = 2ax+b.$$

Затем в числителе подынтегральной функции следует выделить эту производную, поделив «уголком» числитель на полученную производную, то есть представить числитель в виде суммы двух слагаемых:

$$Ax+B = \frac{A}{2a}(2ax+b) + (B - \frac{Ab}{2a}).$$

Тогда

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \frac{A}{2a}\int \frac{(2ax+b)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + (B - \frac{Ab}{2a})\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}. \tag{9.1}$$

Рассмотрим каждый из интегралов, стоящих в правой части (9.1), отдельно.

a) $I = \int \frac{(2ax+b)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$. Положим $z = ax^2+bx+c$. Тогда

$$I = \int \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{z} + C = 2\sqrt{ax^2+bx+c} + C.$$

b) $$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)}}. \tag{9.2}$$

Здесь в подкоренном выражении выделен полный квадрат. В результате правая часть равенства (9.2) приведена к табличному интегралу. Если $a > 0$, это интеграл типа (3.16) из таблицы, если $a < 0$ – интеграл типа (3.14).

Пример 9.1. $I=\int\frac{(5x+2)dx}{\sqrt{4x^2+8x+10}}$. Воспользуемся формулами $\left(4x^2+8x+10\right)'=8x+8$, $5x+2=\frac{5}{8}\left(8x+8\right)-3$. Тогда

$$I=\frac{5}{8}\int\frac{(8x+8)dx}{\sqrt{4x^2+8x+10}}-3\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+8x+10}}=$$

$$=\frac{5}{8}\int\frac{d\left(4x^2+8x+10\right)}{\sqrt{4x^2+8x+10}}-3\int\frac{d(x+1)}{\sqrt{4\left(x+1\right)^2+6}}=$$

$$=\frac{5}{4}\sqrt{4x^2+8x+10}-\frac{3}{2}\ln\left|2\left(x+1\right)+\sqrt{4x^2+8x+10}\right|+C.$$

Пример 9.2. $I=\int\frac{3x+7}{\sqrt{10+4x-x^2}}dx$. Воспользуемся формулами $\left(10+4x-x^2\right)'=-2x+4,\quad 3x+7=-\frac{3}{2}\left(-2x+4\right)+13$. Получим

$$I=-\frac{3}{2}\int\frac{d\left(10+4x-x^2\right)}{\sqrt{10+4x-x^2}}+13\int\frac{dx}{\sqrt{10+4x-x^2}}=$$

$$=-3\sqrt{10+4x-x^2}+13\int\frac{d(x-2)}{\sqrt{14-\left(x-2\right)^2}}=$$

$$=-3\sqrt{10+4x-x^2}+13\arcsin\frac{x-2}{\sqrt{14}}+C.$$

Пример 9.3. $I=\int\frac{2-x}{\sqrt{x^2+6x+25}}dx$. Воспользуемся формулами $\left(x^2+6x+25\right)'=2x+6,\quad -x+2=-\frac{1}{2}\left(2x+6\right)+5$. Получим

$$I=-\frac{1}{2}\int\frac{(2x+6)dx}{\sqrt{x^2+6x+25}}+5\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+25}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+6x+25\right)}{\sqrt{x^2+6x+25}}+5\int\frac{d(x+3)}{\sqrt{\left(x+3\right)^2+16}}=$$

$$=-\sqrt{x^2+6x+25}+5\ln\left|\left(x+3\right)+\sqrt{x^2+6x+25}\right|+C.$$

II. В разделе 7 мы показали, как интегрировать дробно-рациональные функции. В дальнейшем основным приёмом интегрирования будет отыскание таких подстановок $x = \varphi(t)$ (раздел 5), которые позволят избавиться от радикалов и приведут подынтегральное выражение к рациональному виду и тем самым позволят выразить исходный интеграл в виде функции аргумента t. Данный приём называется *рационализацией* подынтегрального выражения. Если при этом функция $x = \varphi(t)$ такая, что существует обратная и можно выразить t через x с помощью элементарных функций, то интеграл представится и в виде функции аргумента x. Рассмотрим здесь тригонометрическую рационализацию для интегралов вида $\int R(x, \sqrt{x^2 \pm a^2})dx$ и $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})dx$, где через R обозначена дробно-рациональная функция двух аргументов.

1). В интеграле $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})dx$ положим

$$x = a\sin t \quad (t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]) \tag{9.3}$$

и вычислим

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} = a\sqrt{1 - \sin^2 t} = a\sqrt{\cos^2 t} = a\cos t$$

.

Продифференцируем (9.3) и найдём $dx = a\cos t dt$. Тогда исходный интеграл примет вид $\int R(a\sin t, a\cos t)\, a\cos t\, dt$. Вычисляя его, получим функцию, зависящую от t и тригонометрических функций аргумента t. Чтобы вернуться к переменной x, следует из (9.3) выразить тригонометрическую функцию

$$\sin t = \frac{x}{a}, \tag{9.4}$$

откуда $t = \arcsin\frac{x}{a}$. Затем в прямоугольном треугольнике отметим острый угол t (рис. 1), противолежащий ему катет x и гипотенузу a. Тогда по теореме Пифагора прилежащий катет равен $\sqrt{a^2 - x^2}$.

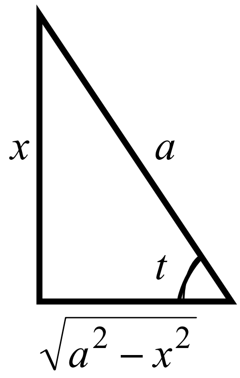


Рис. 1.

В этом треугольнике необходимые нам значения тригонометрических функций аргумента t выражаем как соотношения известных длин катетов и гипотенузы.

<u>Замечание.</u> Изложенный приём определения тригонометрических функций аргумента t применим лишь для $t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Но в силу свойств тригонометрических функций все формулы справедливы и для других значений t.

В примере 5.13 уже был применён приём рационализации для интеграла такого типа.

Пример 9.4 [6]. $I = \int x^2 \sqrt{4 - x^2}\,dx$. Воспользуемся заменой (9.3), где $a = 2$, и формулами $\sqrt{4 - x^2} = 2\cos t$, $dx = 2\cos t\,dt$. Получим:

$$I = 16\int \sin^2 t \cos^2 t\,dt = 4\int \sin^2 2t\,dt = 2\int (1 - \cos 4t)\,dt =$$

$$= 2\left(t - \frac{1}{4}\sin 4t\right) + C = 2t - \sin 2t \cos 2t + C =$$

$$= 2t - 2\sin t \cos t\left(\cos^2 t - \sin^2 t\right) + C.$$

Вернёмся теперь к переменной x. Из (9.4) следует $\sin t = \frac{x}{2}$ и $t = \arcsin\frac{x}{2}$, а из треугольника, изображенного на рисунке 1, видно, что $\cos t = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{2}$. Тогда

$$I = 2\arcsin\frac{x}{2} - 2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\left(\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2\right) + C =$$

$$= 2\arcsin\frac{x}{2} - \frac{x}{4}\sqrt{4-x^2}\left(2-x^2\right) + C.$$

2). В интеграле $\int R(x,\sqrt{x^2+a^2})dx$ положим

$$x = a\cdot\operatorname{tg} t \quad (t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)) \qquad (9.5)$$

и вычислим

$$\sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{a^2\operatorname{tg}^2 t + a^2} = a\sqrt{\operatorname{tg}^2 t + 1} = a\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}} = \frac{a}{\cos t}.$$

Продифференцируем (9.5) и найдём $dx = \frac{a}{\cos^2 t}dt$. Тогда исходный интеграл примет вид $\int R(a\operatorname{tg} t, \frac{a}{\cos t})\frac{a}{\cos^2 t}dt$. Решая его, получим функцию, зависящую от t и тригонометрических функций аргумента t. Чтобы вернуться к переменной x, следует из (9.5) выразить тригонометрическую функцию

$$\operatorname{tg} t = \frac{x}{a}, \qquad (9.6)$$

откуда $t = \operatorname{arctg}\frac{x}{a}$. Затем в прямоугольном треугольнике отметим острый угол t (рис. 2), противолежащий ему катет x и прилежащий к нему катет a. Тогда по теореме Пифагора гипотенуза равна $\sqrt{x^2+a^2}$.

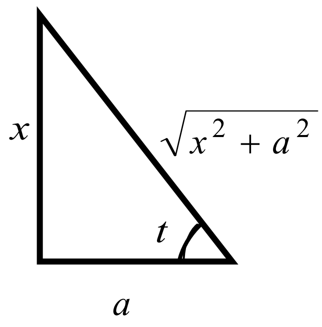


Рис. 2.

Далее необходимые нам значения тригонометрических функций аргумента t выразим как соотношения известных длин катетов и гипотенузы в этом треугольнике. Приведём примеры применения приёма рационализации для интеграла рассмотренного типа.

Пример 9.5. Воспользуемся заменой (9.5), где $a=\sqrt{3}$, и формулами $\sqrt{x^2+3}=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos t}$, $dx=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2 t}dt$. Получим

$$I=\int\frac{\sqrt{3}\cos t\,dt}{3\,\mathrm{tg}^2 t\cos^2 t\sqrt{3}}=\frac{1}{3}\int\frac{\cos t\,dt}{\sin^2 t}=\frac{1}{3}\int\frac{d\sin t}{\sin^2 t}=-\frac{1}{3\sin t}+C.$$

Вернёмся теперь к переменной x. Для этого обратимся к рисунку 2 и выразим $\sin t=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$. Тогда $I=-\dfrac{\sqrt{x^2+3}}{3x}+C$.

В интеграле $\int R(x,\sqrt{x^2-a^2})dx$ положим $x=\dfrac{a}{\cos t}$ (9.7)

и вычислим

$$\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t}-a^2}=a\sqrt{\mathrm{tg}^2 t}=a\,\mathrm{tg}\,t.$$

Продифференцируем (9.7) и найдём $dx=\dfrac{a\sin t}{\cos^2 t}dt$. Тогда исходный интеграл примет вид $\int R(\dfrac{a}{\cos t},a\,\mathrm{tg}\,t)\dfrac{a\sin t}{\cos^2 t}dt$**.** Решая его, получим функцию, зависящую от t и тригонометрических функций аргумента t. Чтобы вернуться к переменной x, следует из (9.7) выразить тригонометрическую функцию

$$\cos t=\frac{a}{x}, \qquad (9.8)$$

откуда $t=\arccos\dfrac{a}{x}$. Затем в прямоугольном треугольнике отметим острый угол t (рис. 3), прилежащий к нему катет a и гипотенузу x. Тогда по теореме Пифагора противолежащий ему катет равен $\sqrt{x^2-a^2}$.

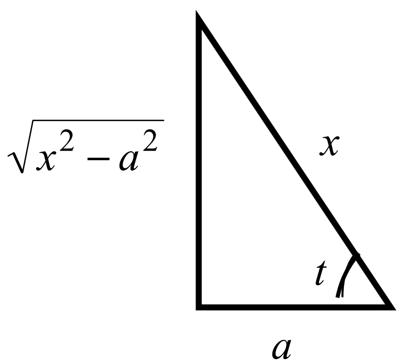


Рис. 3.

Затем необходимые значения тригонометрических функций аргумента t выразим как соотношения известных длин катетов и гипотенузы в этом треугольнике. Приведём пример применения приёма рационализации

Приведём пример применения приёма рационализации для интеграла третьего типа.

Пример 9.6. $I=\int\frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2-4}}$. Введём новую функцию

$$x=\frac{2}{\cos t} \qquad (9.9)$$

и воспользуемся формулами $\sqrt{x^2-4}=2\operatorname{tg}t$, $dx=\frac{2\sin t}{\cos^2 t}dt$. Получим:

$$I=\int\frac{2\sin t\,dt}{\cos^2 t\left(\frac{2}{\cos t}-2\right)2\operatorname{tg}t}=\frac{1}{2}\int\frac{\sin t}{\cos t(1-\cos t)\operatorname{tg}t}dt=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1-\cos t}=$$

$$=\int\frac{d\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}=-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}+C=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\cos t}{\sin t}+C.$$

Теперь из (9.9) выразим $\cos t=\frac{2}{x}$. Из прямоугольного треугольника, изображенного на рисунке 3, видно, что $\sin t=\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}$. Тогда

$$I=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\frac{2}{x}}{\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}}+C=-\frac{x+2}{2\sqrt{x^2-4}}+C.$$

III. Рационализацию интеграла вида $\int R(x,\sqrt[\alpha]{ax+b},\sqrt[\beta]{ax+b},...\sqrt[\gamma]{ax+b})dx$,

где R означает рациональную функцию двух и более аргументов, осуществим с помощью замены

$$ax+b=z^m. \qquad (9.10)$$

Здесь показатель степени m равен такому числу, которое делится нацело на $\alpha,\beta,\ldots,\gamma$, другими словами m есть наименьшее общее кратное для чисел $\alpha,\beta,\ldots,\gamma$. Это позволит нам избавиться от радикалов. Продифференцируем равенство (9.10)

$$adx=mz^{m-1}dz$$

и найдём $dx=\frac{m}{a}z^{m-1}dz$. Таким образом, все подынтегральное выражение будет сведено к рациональной функции одного аргумента z.

Ранее в примере 5.14 этот приём уже применялся. Приведём еще один пример.

Пример 9.7. $I = \int \frac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt[4]{(2x+1)^3}+1} dx$. Сделаем замену $2x+1 = z^4$, продифференцируем это равенство

$$2dx = 4z^3 dz$$

и найдём $dx = 2z^3 dz$. Получим $I = \int \frac{z^2 \cdot 2z^3}{z^3+1} dz = 2\int \frac{z^5}{z^3+1} dz$. Подынтегральная функция является неправильной рациональной дробью. Выделим её целую часть, поделив числитель на знаменатель.

$$\begin{array}{r|l} -z^5 & z^3+1 \\ \cline{2-2} \underline{z^5+z^2} & z^2 \\ -z^2 & \end{array}$$

Тогда $I = 2\int \left(z^2 - \frac{z^2}{z^3+1} \right) dz = \frac{2z^3}{3} - \frac{2}{3}\int \frac{d\left(z^3+1\right)}{z^3+1} = \frac{2z^3}{3} - \frac{2}{3}\ln\left|z^3+1\right| + C$.

Затем вернёмся к старой переменной по формуле $z = \sqrt[4]{2x+1}$. Получим

$$I = \frac{2}{3}\sqrt[4]{(2x+1)^3} - \frac{2}{3}\ln\left(\sqrt[4]{(2x+1)^3}+1\right) + C.$$

10. Опорные задачи на применение нескольких приёмов интегрирования

Ниже приведены задачи, решение которых требует применения нескольких приёмов интегрирования. Почти во всех этих задачах нужно сначала угадать выгодную замену переменной, которая привела бы в итоге к какой-нибудь стандартной формуле.

Пример 10.1.
$I = \int \sin^3(1-5x)\cos^2(1-5x)\,dx$. Сделаем замену переменной $1-5x = z$. Тогда $I = -\frac{1}{5}\int \sin^3 z \cos^2 z\, dz = \frac{1}{5}\int \sin^2 z \cos^2 z \, d\cos z =$

$=\frac{1}{5}\int\left(1-\cos^2 z\right)\cos^2 z\,d\cos z$. Снова введём новую переменную $\cos z=u$.

Тогда $I=\frac{1}{5}\int u^2du-\frac{1}{5}\int u^4du=\frac{u^3}{15}-\frac{u^5}{25}+C$. Возвращаясь к старой переменной по формуле $u=\cos(1-5x)$, получим

$$I=\frac{\cos^3(1-5x)}{15}-\frac{\cos^5(1-5x)}{25}+C.$$

Пример 10.2. $\int\sin 3x\cos^2 x\,dx=\int\sin 3x\cdot\frac{1}{2}\left(1+\cos 2x\right)dx=$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\sin 3x+\sin 3x\cos 2x\right)dx=\frac{1}{2}\int\sin 3xdx+\frac{1}{2}\int\sin 3x\cos 2xdx=$$

$$=\frac{1}{6}\int\sin 3xd3x+\frac{1}{4}\int\left(\sin x+\sin 5x\right)dx=$$

$$=-\frac{1}{6}\cos 3x-\frac{1}{4}\cos x-\frac{1}{20}\cos 5x+C.$$

Пример 10.3.

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\int\frac{\frac{d\left(x/2\right)}{\cos^2 x/2}}{\frac{\sin x/2}{\cos x/2}}=\int\frac{d\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

Пример 10.4. $\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{\cos xdx}{\cos^2 x}=\int\frac{d\sin x}{1-\sin^2 x}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C$.

Пример 10.5. $\int\arcsin\left(3x+2\right)dx$. Введём новую переменную $z=3x+2$ и получим $I=\frac{1}{3}\int\arcsin zdz$ (см. пример 6.2. из раздела 6 интегрирование по частям). Тогда

$$I=\frac{1}{3}\left(z\arcsin z+\sqrt{1-z^2}+C\right)=$$

$$=x\arcsin\left(3x+2\right)+\frac{2}{3}\arcsin\left(3x+2\right)+\frac{1}{3}\sqrt{1-\left(3x+2\right)^2}+C.$$

Пример 10.6. $I=\int e^x \sin^2\left(5e^x+2\right)dx$. Введём новую переменную $z=5e^x+2$ и найдём $dz=5e^x dx$. Получим $I=\frac{1}{5}\int \sin^2 z dz=$

$$=\frac{1}{10}\int\left(1-\cos 2z\right)dz=\frac{z}{10}-\frac{1}{20}\sin 2z+C=$$
$$=\frac{5e^x+2}{10}-\frac{1}{20}\sin\left(10e^x+4\right)+C=\frac{e^x}{2}-\frac{1}{20}\sin\left(10e^x+4\right)+C.$$

Пример 10.7. $I=\int\frac{\sin^3\left(2\ln x+7\right)}{x}dx$. Сделаем замену переменной $z=2\ln x+7$. Тогда $dz=\frac{2dx}{x}$. Получим $I=\frac{1}{2}\int\sin^3 z\,dz=$

$$=-\frac{1}{2}\int\sin^2 z\,d\cos z=-\frac{1}{2}\int\left(1-\cos^2 z\right)d\cos z=$$
$$=-\frac{1}{2}\left(\cos z-\frac{\cos^3 z}{3}\right)+C=\frac{\cos^3\left(2\ln x+7\right)}{6}-\frac{\cos\left(2\ln x+7\right)}{2}+C.$$

Пример 10.8. $\int\frac{\sin 2x}{\sqrt[5]{\cos x}}dx=2\int\frac{\sin x\cos x}{\sqrt[5]{\cos x}}dx=-2\int\cos^{\frac{4}{5}}x\,d\cos x=$

$$=-\frac{10}{9}\cos^{\frac{9}{5}}x+C.$$

Пример 10.9. $I=\int\frac{\sin^4\left(\mathrm{ctg}x\right)}{\sin^2 x}dx$. Введём новую переменную $z=\mathrm{ctg}x$ и найдём $dz=-\frac{dx}{\sin^2 x}$.

Тогда $I=-\int\sin^4 zdz=-\frac{1}{4}\int(1-\cos 2z)^2dz=-\frac{1}{4}\int\left(1-2\cos 2z+\cos^2 2z\right)dz=$

$$=-\frac{z}{4}+\frac{1}{4}\sin 2z-\frac{1}{8}\int\left(1+\cos 4z\right)dz=-\frac{3z}{8}+\frac{1}{4}\sin 2z-\frac{1}{32}\sin 4z+C=$$
$$=-\frac{3}{8}\mathrm{ctg}x+\frac{1}{4}\sin(2\mathrm{ctg}x)-\frac{1}{32}\sin(4\mathrm{ctg}x)+C.$$

Пример 10.10. $I=\int\frac{\arcsin x dx}{\left(\arcsin^2 x+4\arcsin x-5\right)\sqrt{1-x^2}}$. Сделаем замену $z=\arcsin x$ и найдём $dz=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Получим

$I=\int\frac{zdz}{z^2+4z-5}=\int\frac{zdz}{(z-1)(z+5)}$. Представим правильную дробь как сумму простейших дробей:

$$\frac{z}{(z-1)(z+5)}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z+5}=\frac{A(z+5)+B(z-1)}{(z-1)(z+5)}.$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов выпишем тождественное равенство исходного и вновь полученного числителей:

$$z=A(z+5)+B(z-1).$$

Придадим переменной значение $z=1$. Тогда $1=6A$, откуда $A=\frac{1}{6}$. Затем при $z=-5$ тождество примет вид: $-5=-6B$, откуда $B=\frac{5}{6}$. Тогда

$$I=\frac{1}{6}\int\frac{dz}{z-1}+\frac{5}{6}\int\frac{dz}{z+5}=\frac{1}{6}\ln|z-1|+\frac{5}{6}\ln|z+5|+C=$$

$$=\frac{1}{6}\ln|\arcsin x-1|+\frac{5}{6}\ln|\arcsin x+5|+C.$$

Пример 10.11. $I=\int x^2\operatorname{arctg}x\,dx$. Воспользуемся формулой интегрирования по частям. Положим $u=\operatorname{arctg}x, dv=x^2dx$. Найдём $du=\frac{dx}{1+x^2}$ и $v=\int x^2dx=\frac{x^3}{3}$. Тогда

$$I=\frac{x^3}{3}\operatorname{arctg}x-\int\frac{x^3}{3}\cdot\frac{dx}{(1+x^2)}=\frac{x^3}{3}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{3}\int\frac{x^2\cdot x\,dx}{1+x^2}=$$

$$=\frac{x^3}{3}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{6}\int\frac{(x^2+1)-1}{1+x^2}dx^2=\frac{x^3}{3}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{6}\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx^2=$$

$$=\frac{x^3}{3}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{6}\int dx^2+\frac{1}{6}\int\frac{d(1+x^2)}{1+x^2}=\frac{x^3}{3}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}\ln(1+x^2)+C.$$

Пример 10.12. $I=\int x^2\ln(x+2)dx$. Применим здесь формулу интегрирования по частям, полагая $u=\ln(x+2),\quad dv=x^2dx$. Тогда $du=\frac{dx}{x+2},\quad v=\frac{x^3}{3}$. Отсюда $I=\frac{x^3}{3}\ln(x+2)-\frac{1}{3}\int\frac{x^3}{x+2}dx$. Выделим в неправильной рациональной дроби целую часть делением числителя на знаменатель.

$$
\begin{array}{r|l}
-\,x^3 & x+2 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3+2x^2} & x^2-2x+4 \\
-\;\;-2x^2 & \\
\underline{-2x^2-4x} & \\
-\,4x & \\
\underline{4x+8} & \\
-8 &
\end{array}
$$

Получим

$$I=\frac{x^3}{3}\ln(x+2)-\frac{1}{3}\int\left(x^2-2x+4-\frac{8}{x+2}\right)dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}\ln(x+2)-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{3}-\frac{4}{3}x+\frac{8}{3}\ln(x+2)+C.$$

Пример 10.13.

$$\int \mathrm{ctg}x\,\ln(\sin x)\,dx=\int\ln(\sin x)\,d\left(\ln(\sin x)\right)=\frac{1}{2}\ln^2(\sin x)+C.$$

Здесь мы заметили, что $\left(\ln(\sin x)\right)'=\dfrac{\cos x}{\sin x}=\mathrm{ctg}x$.

Пример 10.14. $I=\int\dfrac{\left(e^{2x}+5e^x\right)dx}{e^{2x}+6e^x+25}$. Введём новую переменную $z=e^x$.

Тогда $dz=e^x dx$. Получим $I=\int\dfrac{(z+5)dz}{z^2+6z+25}$. Воспользуемся формулами

$\left(z^2+6z+25\right)'=2z+6,\quad z+5=\dfrac{1}{2}(2z+6)+2$. Тогда

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{(2z+6)dz}{z^2+6z+25}+2\int\frac{d(z+3)}{(z+3)^2+16}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(z^2+6z+25\right)+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{z+3}{4}+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+6e^x+25\right)+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{e^x+3}{4}+C.$$

Пример 10.15. $I=\int\dfrac{\sqrt{4x+5}}{\sqrt{4x+4}}dx$. Введём новую переменную $z=\sqrt{4x+4}$.

Найдём $4x+5=z^2+1$. Тогда $4dx=2zdz$, откуда $dx=\dfrac{1}{2}zdz$. Таким образом $I=\int\frac{\sqrt{z^2+1}\,zdz}{2z}=\frac{1}{2}\int\sqrt{z^2+1}dz$. Получили интеграл, вычисленный ранее в примере 6.9.

$$I=\frac{1}{4}\left(z\sqrt{z^2+1}+\ln\left|z+\sqrt{z^2+1}\right|\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\sqrt{4x+4}\cdot\sqrt{4x+5}+\ln\left(\sqrt{4x+4}+\sqrt{4x+5}\right)\right)+C.$$

Пример 10.16. $I=\int\frac{e^x+4}{e^x+2}dx=\int\frac{(e^x+4)e^x}{(e^x+2)e^x}dx$. Сделаем замену переменной $z=e^x$. Тогда $dz=e^xdx$ и $I=\int\frac{(z+4)dz}{(z+2)z}$. Разложим правильную дробь в сумму простейших дробей:

$$\frac{z+4}{z(z+2)}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z+2}=\frac{A(z+2)+Bz}{z(z+2)}.$$

Из тождественного равенства числителей $z+4=A(z+2)+Bz$ найдём неизвестные буквенные коэффициенты.

При $z=0$ тождество принимает вид $4=2A$, откуда $A=2$.

При $z=-2$ тождество принимает вид $2=-2B$, откуда $B=-1$.

Отсюда $I=2\int\frac{dz}{z}-\int\frac{dz}{z+2}=2\ln|z|-\ln|z+2|+C=$

$=2\ln e^x-\ln\left(e^x+2\right)+C=2x-\ln\left(e^x+2\right)+C.$

Предложим другое решение, которое использует интеграл, взятый в примере 5.8.

$\int\frac{e^x+4}{e^x+2}dx=\int\left(1+\frac{2}{e^x+2}\right)dx=x-\ln\left(2e^{-x}+1\right)+C=$

$=x-\ln\left(\left(2+e^x\right)e^{-x}\right)+C=x-\ln\left(2+e^x\right)+x+C=2x-\ln\left(2+e^x\right)+C.$

Пример 10.17. $I=\int\frac{dx}{1+x^3}$. Разложим подынтегральную функцию в сумму простейших дробей.

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+D}{x^2-x+1}=$$

$$=\frac{A\left(x^2-x+1\right)+(Bx+D)(x+1)}{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}.$$

Рассмотрим тождественное равенство исходного числителя и вновь полученного

$$1\equiv A\left(x^2-x+1\right)+(Bx+D)(x+1).$$

Положим в нём последовательно $x=-1;\quad x=0$, а затем приравняем друг другу коэффициенты при x^2. Тогда получим систему уравнений для нахождения неизвестных буквенных коэффициентов:

$$\left.\begin{aligned}1&=3A\\1&=A+D\\0&=A+B\end{aligned}\right\}.$$

Решая её, найдём $A=\frac{1}{3}, D=\frac{2}{3}, B=-\frac{1}{3}$. Тогда

$$I=\int\frac{\frac{1}{3}dx}{x+1}+\int\frac{-\frac{x}{3}+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}dx=\frac{1}{3}\int\frac{d(x+1)}{x+1}-\frac{1}{3}\int\frac{x-2}{x^2-x+1}dx=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{3}\int\frac{x-2}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx.$$

Вычислим отдельно $I_1=\int\frac{x-2}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx$. Сделаем замену $x-\frac{1}{2}=z$.

Найдём $x=z+\frac{1}{2}, dx=dz$. Получим $I_1=\int\frac{z+\frac{1}{2}-2}{z^2+\frac{3}{4}}dz=$

$$=\int\frac{zdz}{z^2+\frac{3}{4}}-\frac{3}{2}\int\frac{dz}{z^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(z^2+\frac{3}{4}\right)}{z^2+\frac{3}{4}}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{\frac{3}{4}}}+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|z^2+\frac{3}{4}\right|-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2z}{\sqrt{3}}+C.$$

Тогда

$$I=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln\left|x^2-x+1\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{(x+1)^3}{x^3+1}\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

Пример 10.18. $I=\int\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}dx$.

Сделаем замену $x=z^{12}$ и найдём $dx=12z^{11}dz$.

Получим $I=\int\frac{z^4\cdot 12z^{11}}{z^6+z^3}dz=12\int\frac{z^{12}}{z^3+1}dz$.

Подынтегральная функция является неправильной рациональной дробью. Выделим из неё целую часть.

$$\frac{z^{12}}{z^3+1}=z^9-z^6+z^3-1+\frac{1}{z^3+1}$$

$$
\begin{array}{l|l}
-\,z^{12} & z^3+1 \\
\quad \underline{z^{12}+z^9} & \overline{z^9-z^6+z^3-1} \\
\quad -\quad -z^9 & \\
\qquad \underline{-z^9-z^6} & \\
\qquad\quad -\quad z^6 & \\
\qquad\qquad \underline{z^6+z^3} & \\
\qquad\qquad -\quad -z^3 & \\
\qquad\qquad\quad \underline{-z^3-1} & \\
\qquad\qquad\qquad\quad 1 &
\end{array}
$$

Тогда $I=12\int\left(z^9-z^6+z^3-1+\dfrac{1}{z^3+1}\right)dz=$

$$=12\frac{z^{10}}{10}-12\frac{z^7}{7}+12\frac{z^4}{4}-12z+12\int\frac{dz}{z^3+1}.$$

Последний интеграл взят в предыдущем примере 10.17. Воспользуемся этим результатом.

$$I=\frac{6}{5}z^{10}-\frac{12}{7}z^7+3z^4-12z+12\left(\frac{1}{6}\ln\left|\frac{(z+1)^3}{z^3+1}\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2z-1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

Затем вернёмся к старой переменной $z=\sqrt[12]{x}$.

$$I=\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-\frac{12}{7}\sqrt[12]{x^7}+3\sqrt[3]{x}-12\sqrt[12]{x}+2\ln\frac{\left(\sqrt[12]{x}+1\right)^3}{\sqrt[4]{x}+1}+4\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[12]{x}-1}{\sqrt{3}}+C.$$

Пример 10.19. $I=\int\dfrac{dx}{\sqrt{2-x}+3}$. Сделаем замену переменной $2-x=z^2$.

При этом $x=2-z^2,\quad dx=-2zdz$. Тогда

$$I=\int\frac{-2zdz}{z+3}=-2\int\frac{z+3-3}{z+3}dz=-2\int\left(1-\frac{3}{z+3}\right)dz=-2\int dz+6\int\frac{d(z+3)}{z+3}=$$

$$=-2z+6\ln|z+3|+C=-2\sqrt{2-x}+6\ln\left|\sqrt{2-x}+3\right|+C.$$

Пример 10.20. Вычислить $I=\int\dfrac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}$.

Пусть $x>0$. $I=\int\frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{\frac{4}{x^2}-1}}=\int\frac{d\left(\frac{-1}{x}\right)}{\sqrt{\left(\frac{2}{x}\right)^2-1}}=$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{\left(\frac{2}{x}\right)^2-1}}=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2}{x}+\sqrt{\frac{4}{x^2}-1}\right|+C=-\frac{1}{2}\ln\frac{2+\sqrt{4-x^2}}{|x|}+C.$$

При $x<0$: $I=-\int\frac{dx}{x^2\sqrt{\frac{4}{x^2}-1}}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2}{x}+\sqrt{\frac{4}{x^2}-1}\right|+C=$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2}{x}-\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\right|+C=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2+\sqrt{4-x^2}}{x}\right|+C=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\frac{2+\sqrt{4-x^2}}{|x|}+C.$$

ИДЗ «НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ»

Вариант 1.

Задание: Вычислить интегралы:

1. $\int\left(x^2-2x+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx;$
2. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x}};$
3. $\int\frac{x^2}{\left(1+3x^3\right)^2}dx;$
4. $\int\frac{x}{1+3x^2}dx;$
5. $\int\frac{\cos x}{1-2\sin x}dx;$
6. $\int e^{-x^2}xdx;$
7. $\int\sin 2x\,dx;$
8. $\int\left(\cos\frac{x}{3}+1\right)dx;$
9. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}};$
10. $\int\frac{3^x}{3^{2x}+1}dx;$
11. $\int\frac{dx}{x^2-2x+4};$
12. $\int xe^{-2x}\,dx;$
13. $\int x^2\ln x\;dx;$
14. $\int\frac{2x-1}{x^2-3x+2}dx;$
15. $\int\frac{x^4+2}{x^3+3x}dx;$

16. $\int \frac{dx}{1+3\cos x}$;

17. $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$;

18. $\int \sin x \cos 2x \, dx$;

19. $\int \cos^2 x \, dx$;

20. $\int \left(e^x+2\right)^3 dx$.

Вариант 2.

Задание: Вычислить интегралы:

1. $\int \left(x^4 - \frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x^3} - 11\right)dx$;
2. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$;
3. $\int \frac{xdx}{\left(5x^2+1\right)^2}$;
4. $\int 7^x \sqrt{3\cdot 7^x + 4}dx$;
5. $\int \frac{x^2}{1+3x^3}dx$;
6. $\int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+4}dx$;
7. $\int \sin 5x \, dx$;
8. $\int \frac{dx}{1+3x^2}$;
9. $\int tg 3x \, dx$;
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+4x^2}}$;
11. $\int \frac{\cos x \, dx}{\sin^2 x - 3}$;
12. $\int (x+3)e^{2x}dx$;
13. $\int x \arccos x \; dx$;
14. $\int \frac{3x^2-1}{x^3-x}dx$;
15. $\int \frac{x^3+1}{x^2-4}dx$;
16. $\int \frac{dx}{2-2\sin x}$;
17. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x+1}+\sqrt[4]{3x+1}}$;
18. $\int \cos 3x \sin 2x \, dx$;
19. $\int \sin^4 x \cdot \cos x^5 \, dx$;
20. $\int \sqrt{e^x+1} \, dx$.

Вариант 3.

Задание: Вычислить интегралы:

1. $\int \left(x^2 - \sqrt[4]{x^3} + \frac{2}{x} - 3\right)dx$;
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$;
3. $\int \frac{x^2}{\left(1-4x^3\right)^2}dx$;
4. $\int \frac{x\,dx}{x^2+5}$;
5. $\int \frac{\cos 3x}{1+\sin 3x}dx$;
6. $\int e^{-2x^2} \cdot xdx$;
7. $\int a^{3x} \, dx$;
8. $\int (2+\sin 2x)dx$;
9. $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}dx$;

10. $\int 2^x tg 2^x dx;$ 11. $\int \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}} dx;$ 12. $\int xe^x dx;$

13. $\int x \arcsin 5x \ dx;$ 14. $\int \frac{x^2+2x-2}{x^3-9x} dx;$ 15. $\int \frac{x^3+1}{x^3-2x} dx;$

16. $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x};$ 17. $\int \frac{\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt{x}} dx;$ 18. $\int \cos 4x \cdot \cos 5x \, dx;$

19. $\int \sin^3 x \, dx;$ 20. $\int \left(e^x - 4\right)^2 dx.$

Вариант 4.

Задание: Вычислить интегралы:

1. $\int \left(1 - 2\sqrt[3]{x} + \frac{7}{x^4}\right) dx;$ 2. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x}};$ 3. $\int \frac{xdx}{\left(3+x^2\right)^3};$

4. $\int \frac{arctg 2x}{1+4x^2} dx;$ 5. $\int \frac{x^2}{1+4x^3} dx;$ 6. $\int \frac{e^x}{1-2e^x} dx;$

7. $\int e^{-x^3} x^2 dx;$ 8. $\int \sin 2x \, dx;$ 9. $\int \frac{dx}{\cos^2 3x};$

10. $\int \frac{x \, dx}{\sin x^2};$ 11. $\int \frac{dx}{5+4x^2};$ 12. $\int (x+2)\cos 5x \ dx;$

13. $\int \arcsin 4x \ dx;$ 14. $\int \frac{x-3}{x^3+8} dx;$ 15. $\int \frac{x^3-2}{x^3+2x^2+x} dx;$

16. $\int \frac{dx}{2+\sin x};$ 17. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}} dx;$ 18. $\int \sin x \cdot \cos 3x \, dx;$

19. $\int \cos^4 x \, dx;$ 20. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+e^x}}.$

Вариант 5.

Задание: Вычислить интегралы:

1. $\int \left(x^4 - \frac{1}{2}x + \sqrt[3]{3x}\right) dx;$ 2. $\int \frac{xdx}{\left(1+x^2\right)^5};$ 3. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^3}};$

4. $\int \frac{dx}{x+3}$; 5. $\int \frac{\cos x}{1+3\sin x}dx$; 6. $\int e^{2x}dx$;

7. $\int 2^{-x^2}\, xdx$; 8. $\int (1-\sin 3x)dx$; 9. $\int \frac{dx}{\cos^2 4x}$;

10. $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$; 11. $\int tg3x\, dx$; 12. $\int (x+5)e^{2x}dx$;

13. $\int x^7 \ln x\ \ dx$; 14. $\int \frac{x+2}{x^3-x^2-2x}dx$; 15. $\int \frac{x^4-3}{x^2-25}dx$;

16. $\int \frac{dx}{\cos x+3\sin x}$; 17. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x+1}+\sqrt[4]{3x+1}}$; 18. $\int \cos 3x \sin 2x\, dx$;

19. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x}dx$; 20. $\int \sqrt{4+e^x}\ dx$.

Вариант 6.

Задание: Вычислить интегралы:

1. $\int \left(2x^7 - \frac{3}{\sqrt{x}} + e^x\right)dx$; 2. $\int \frac{x^2dx}{\left(1+3x^3\right)^3}$; 3. $\int \sqrt{1-5x}dx$;

4. $\int \frac{arctg^2 x}{1+x^2}dx$; 5. $\int \frac{e^x}{e^x+4}dx$; 6. $\int e^{\sin 2x}\cos 2xdx$;

7. $\int 2^{-x^2}\, xdx$; 8. $\int \frac{dx}{\sin^2 3x}$; 9. $\int tg2xdx$;

10. $\int \frac{e^x}{\sin e^x}dx$; 11. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}}$; 12. $\int x\cos 2x\ \ dx$;

13. $\int 3x^2 \ln(x+2)dx$; 14. $\int \frac{2-3x}{x^3-4x}dx$; 15. $\int \frac{x^3+2}{x^2-2x+3}dx$.

16. $\int \frac{dx}{\sin x-2\cos x}$; 17. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-4}+\sqrt[4]{5x^2-4}}$; 18. $\int \sin 2x \cdot \cos 7x\, dx$;

19. $\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x\, dx$; 20. $\int \left(5+e^x\right)^2\ dx$.

Вариант 7.

Задание: Вычислить интегралы:

1. $\int \frac{x^3 - 2\sqrt{x^3} + 3\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}} dx$; 2. $\int \frac{x^2 dx}{\left(1-2x^3\right)^2}$; 3. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$;

4. $\int \frac{\cos 2x}{1-\sin 2x} dx$; 5. $\int \frac{x}{4x^2-3} dx$; 6. $\int e^{\cos 3x} \sin 3x dx$;

7. $\int 2^{-3x^2} xdx$; 8. $\int \sin \frac{x}{5}\ dx$; 9. $\int \frac{dx}{\cos^2 3x}$;

10. $\int tg\left(1-x\right) dx$; 11. $\int \frac{2^x dx}{4^x+1}$; 12. $\int x \sin 3x\ dx$;

13. $\int x \cdot arctgx\, dx$; 14. $\int \frac{x+3}{x^3+10x^2+25x} dx$; 15. $\int \frac{x^5+3x^2}{x^2+x} dx$;

16. $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x+\sin x} dx$. 17. $\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}} dx$; 18. $\int \sin x \cdot \sin 3x\, dx$;

19. $\int \cos^2 x \cdot \sin^3 x\, dx$; 20. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-9}}$.

Вариант 8.

Задание: Вычислить интегралы:

1. $\int \left(2\sqrt{x} - \frac{3}{x^2} + 1\right) dx$; 2. $\int \sqrt{2x+3} dx$; 3. $\int \frac{x}{\left(1+4x^2\right)^2} dx$;

4. $\int \frac{dx}{5-x}$; 5. $\int \frac{dx}{4x - x\ln x}$; 6. $\int xe^{x^2-3} xdx$;

7. $\int x \cos 2x^2\, dx$; 8. $\int \left(1-\sin\frac{x}{5}\right) dx$; 9. $\int ctg 2x dx$;

10. $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx$; 11. $\int \frac{xdx}{4+x^4}$; 12. $\int e^{2x} \cos x dx$;

13. $\int arctg 3x\, dx$; 14. $\int \frac{x^2-x+2}{x^3+4x^2+3x} dx$; 15. $\int \frac{x^2-x+2}{x^3+4x^2+3x} dx$;

16. $\int \frac{dx}{3-2\cos x}$; 17. $\int \frac{\sqrt[4]{x}}{1+2\sqrt{x}}dx$; 18. $\int \sin x \cdot \sin 3x\, dx$;

19. $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$; 20. $\int \sqrt{e^x - 3}dx$.

Вариант 9.

Задание: Вычислить интегралы:

1. $\int \left(2 - 3\sqrt[5]{x^4} + \frac{1}{x^3}\right)dx$; 2. $\int \frac{xdx}{\left(1+3x^2\right)^5}$; 3. $\int \sqrt{1-2x}dx$;

4. $\int \frac{x^2}{1+2x^3}dx$; 5. $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3}dx$; 6. $\int e^{-x^3} x^2 dx$;

7. $\int \sqrt{3^x}\sqrt{5^x}dx$; 8. $\int \frac{x^3}{\sin^2 x^4}dx$; 9. $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cdot \cos x}dx$;

10. $\int \frac{dx}{\sin^2 4x}$; 11. $\int (2-3\cos 2x)dx$; 12. $\int \left(1-x^2\right)\sin 3x\, dx$;

13. $\int \ln\left(x^2+5\right)dx$; 14. $\int \frac{x^2+4x}{x-x^2-2x^3}dx$; 15. $\int \frac{x^4}{1-x^2}dx$;

16. $\int \frac{dx}{a\sin x + 3\cos x}$; 17. $\int \frac{\sqrt{x}}{4-\sqrt[4]{x}}dx$; 18. $\int \sin 2x \cdot \sin 8x\, dx$;

19. $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x\, dx$; 20. $\int \frac{dx}{\sqrt{16-e^x}}$.

Вариант 10.

Задание: Вычислить интегралы:

1. $\int \left(\sqrt{x} - 2x^3 - \frac{1}{x^2}\right)dx$; 2. $\int (1-\sin 2x)^5 \cos 2x dx$; 3. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$;

4. $\int \frac{x^3 dx}{1+4x^4}$; 5. $\int \frac{\sin x}{1+2\cos x}dx$; 6. $\int 2^{-x^3} x^2 dx$;

7. $\int \left(e^x+1\right)^2 dx$; 8. $\int e^x \sin e^x dx$; 9. $\int \cos 3x dx$;

10. $\int \frac{dx}{\sin^2(1-x)}$; 11. $\int \cos 2x \sin 3x\, dx$; 12. $\int e^{-2x}(2x+5)\, dx$;

13. $\int\left(\sin^2 x+1\right)xdx$; 14. $\int\frac{x+4}{x^3-2x^2+3x}dx$; 15. $\int\frac{x^4+x}{27+x^3}dx$;

16. $\int\frac{\cos x}{1+\cos x-\sin x}dx$; 17. $\int\frac{\sqrt{x}}{1+3\sqrt[4]{x}}dx$; 18. $\int\sin 5x\cdot\cos 8x\,dx$;

19. $\int\cos^5 xdx$; 20. $\int\left(e^x-3\right)^2 dx$.

Решение типового варианта ИДЗ

Задание: Вычислить интеграл:

1. $\int\left(x^5+\frac{4}{x^3}-\sqrt[3]{x^2}-7\right)dx$; 2. $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1+2x)^3}}$; 3. $\int\frac{x^4}{\sin^2 x^5}dx$;

4. $\int 3^{2-7x}dx$; 5. $\int\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$; 6. $\int e^x\cdot\sin e^x dx$;

7. $\int\frac{x}{\sqrt{4-x^4}}dx$; 8. $\int\frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-7}}dx$; 9. $\int\frac{\sin 5x}{4-\cos^2 5x}dx$;

10. $\int x\cdot\operatorname{tg}x^2dx$; 11. $\int\frac{3^x}{9^x+4}dx$; 12. $\int x^2\cdot\cos x\,dx$;

13. $\int\arccos x\,dx$; 14. $\int\frac{x^2+3x+6}{x^3-5x^2+6x}dx$; 15. $\int\frac{x^6}{x^2-x+1}dx$;

16. $\int\frac{dx}{\sin x\left(2+\cos x-2\sin x\right)}$ 17. $\int\frac{3x\,dx}{\sqrt{3x^2-2}+\sqrt[4]{3x^2-}}$ 18. $\int\cos 3x\cos 5x\,dx$

19. $\int\sin^4 x\,dx$; 20. $\int\frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$;

***Решение*:**

1) Найдём интеграл, применив свойства неопределённого интеграла и формулы (**1**) и (**2**) из табличного интегрирования (см. п.3.1):

$$\int\left(x^5+\frac{4}{x^3}-\sqrt[3]{x^2}-7\right)dx=\int\left(x^5+4\cdot x^{-3}-x^{\frac{2}{3}}-7\right)dx=\int x^5dx+4\int x^{-3}dx-\int x^{\frac{2}{3}}dx-7\int dx=$$

$$=\frac{x^{5+1}}{5+1}+4\cdot\frac{x^{-3+1}}{-3+1}-\frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}-7x+C=\frac{x^6}{6}+4\cdot\frac{x^{-2}}{-2}-\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}-7x+C=\frac{x^6}{6}-\frac{2}{x^2}-\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{5}-7x+C;$$

Интегралы (2 – 11) решим методом замены переменной.

2) $$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1+2x)^3}}\left|\begin{aligned}&t=1+2x;\\&dt=2dx;\\&dx=\frac{1}{2}dt\end{aligned}\right|=\int\frac{\frac{1}{2}dt}{\sqrt[4]{t^3}}=\frac{1}{2}\int t^{-\frac{3}{4}}dt=$$

{для нахождения интеграла применим формулу (**2**)}

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{1}{4}}}{1/4}+C=2(1+2x)^{1/4}+=2\sqrt[4]{1+2x}+C;$$

3) $$\int\frac{x^4}{\sin^2 x^5}dx=\left|\begin{aligned}&t=x^5\\&dt=5x^4dx\\&x^4dx=\frac{1}{5}dt\end{aligned}\right|=\int\frac{\frac{1}{5}dt}{\sin^2 t}=\frac{1}{5}\int\frac{dt}{\sin^2 t}=$$

{для нахождения интеграла применим формулу (**9**)}

$$=-\frac{1}{5}\operatorname{ctg}t+C=-\frac{1}{5}\operatorname{ctg}x^5+C;$$

4) $$\int 3^{2-7x}dx=\left|\begin{aligned}&t=2-7x,\\&dt=-7dx,\\&dx=-\frac{1}{7}dt\end{aligned}\right|=\int 3^t\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)dt=-\frac{1}{7}\int 3^t dt=$$

{для нахождения интеграла применим формулу (**4**)}

$$=-\frac{1}{7}\cdot\frac{3^t}{\ln 3}+C=-\frac{1}{7}\cdot\frac{3^{2-7x}}{\ln 3}+C;$$

5) $$\int\frac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2}dx=\left|\begin{aligned}&t=\operatorname{arctg}x\\&dt=\frac{1}{1+x^2}dx\end{aligned}\right|=\int tdt=$$

{для нахождения интеграла применим формулу (**2**)}

$$=\frac{t^2}{2}+C=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x+C;$$

6) $$\int e^x\cdot\sin e^x dx=\left|\begin{matrix}t=e^x\\ dt=e^x dx\end{matrix}\right|=\int\sin t dt=$$

{для нахождения интеграла применим формулу (**6**)}

$$=-\cos t+C=-\cos e^x+C;$$

7) $$\int\frac{x}{\sqrt{4-x^4}}dx=\left|\begin{matrix}t=x^2\\ dt=2xdx\\ xdx=\dfrac{1}{2}dt\end{matrix}\right|=\int\frac{\frac{1}{2}dt}{\sqrt{4-t^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{2^2-t^2}}=$$

{для нахождения интеграла применим формулу (**13**)}

$$=\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{2}+C;$$

8) $$\int\frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-7}}dx=\int\frac{e^x}{\sqrt{\left(e^x\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}}dx=\left|\begin{matrix}t=e^x,\\ dt=e^x dx,\\ e^x dx=dt\end{matrix}\right|=\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}}=$$

{для нахождения интеграла применим формулу (**15**)}

$$=\ln\left|\sqrt{t^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}+t\right|+C=\ln\left|\sqrt{e^{2x}-7}+e^x\right|+C;$$

9) $$\int\frac{\sin 5x\ dx}{9-\cos^2 5x}=\left|\begin{matrix}t=\cos 5x\\ dt=-5\sin 5x\,dx\\ \sin 5x\,dx=-\dfrac{1}{5}dt\end{matrix}\right|=\int\frac{-\frac{1}{5}dt}{9-t^2}=\frac{1}{5}\int\frac{dt}{t^2-9}=\frac{1}{5}\int\frac{dt}{t^2-3^2}=$$

{для нахождения интеграла применим формулу (**14**)}

$$=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{t-3}{t+3}\right|+C=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{\cos 5x-3}{\cos 5x+3}\right|+C=\frac{1}{30}\ln\left|\frac{\cos 5x-3}{\cos 5x+3}\right|+C;$$

10) $\int x\cdot \mathrm{tg}x^2dx=\int\frac{x\sin x^2}{\cos x^2}dx=\left|\begin{array}{l} t=\cos x^2\\ dt=-2x\sin x^2dx\\ x\sin x^2dx=-\frac{1}{2}dt\end{array}\right|=-\int\frac{\frac{1}{2}dt}{t}=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=$

{для нахождения интеграла применим формулу (**3**)}

$=-\frac{1}{2}\ln|t|+C=-\frac{1}{2}\ln\left|\cos x^2\right|+C;$

11) $\int\frac{3^x}{9^x+4}dx=\int\frac{3^x}{\left(3^x\right)^2+2^2}dx=\left|\begin{array}{l} t=3^x\\ dt=3^x\ln 3dx\\ 3^x dx=\frac{1}{\ln 3}dt\end{array}\right|=\frac{1}{\ln 3}\int\frac{dt}{t^2+2^2}=$

{для нахождения интеграла применим формулу (**12**)}

$=\frac{1}{\ln 3}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{t}{2}+C=\frac{1}{2\ln 3}\mathrm{arctg}\frac{3^x}{2}+C;$

Найдём интегралы (12 – 13) методом интегрирования по частям,
используя формулу $\int U\cdot V'dx=U\cdot V-\int U'\cdot Vdx$:

12) $\int x^2\cos xdx=\left|\begin{array}{ll} U=x^2; & U'=2x\\ V'=\cos x; & V=\sin x\end{array}\right|=x^2\sin x-\int 2x\cdot\sin xdx=$

$=\left|\begin{array}{ll} U=2x; & U'=2\\ V'=\sin x; & V=-\cos x\end{array}\right|==x^2\cdot\sin x-\left(2x\cdot(-\cos x)-\int 2\cdot(-\cos x)dx\right)=$

{для нахождения интеграла применим формулу (**7**)}

$=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C;$

13)

$\int\arccos x\ dx=\left|\begin{array}{ll} U=\arccos x; & U'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\\ V'=1; & V=x\end{array}\right|=x\cdot\arccos x-\int x\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

{второе слагаемое вычислим с помощью замены, применив формулу (**2**)}

$$\int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \left| \begin{aligned} &t = 1-x^2 \\ &dt = -2x\,dx \\ &-xdx = \frac{1}{2}dt \end{aligned} \right| = \int \frac{\frac{1}{2}dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}}}{1/2} + C = \sqrt{1-x^2} + C$$

в итоге получаем $\int \arccos x\,dx = x\cdot\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C;$

14) $\int \frac{x^2+3x+6}{x^3-5x^2+6x}dx$.

Под знаком интеграла правильная рациональная дробь. Разложим её на простейшие дроби:

$$\frac{x^2+3x+6}{x^3-5x^2+6x} = \frac{x^2+3x+6}{x(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3} =$$

$$= \frac{A(x-2)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(x-2)}{x(x-2)(x-3)} =$$

$$= \frac{Ax^2 - 5Ax + 6A + Bx^2 - 3Bx + Cx^2 - 2Cx}{x(x-2)(x-3)};$$

Перейдем к равенству числителей:

$x^2+3x+6 = Ax^2 - 5Ax + 6A + Bx^2 - 3Bx + Cx^2 - 2Cx$.

Отсюда следует, что

$$\left.\begin{aligned} &x^2: \quad 1 = A+B+C \\ &x^1: \quad 3 = -5A-3B-2C \\ &x^0: \quad 6 = 6A \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 1+B+C \\ 8 = -3B-2C \\ A = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1, \\ B = -8, \\ C = 8. \end{cases}$$

Тогда $\frac{x^2+3x+6}{x^3-5x^2+6x} = \frac{1}{x} - \frac{8}{x-2} + \frac{8}{x-3}$.

Интегрируя почленно полученное равенство и применяя свойства неопределённого интеграла, получим:

$$\int\left(\frac{1}{x} - \frac{8}{x-2} + \frac{8}{x-3}\right)dx = \int\frac{dx}{x} - 8\int\frac{dx}{x-2} + 8\int\frac{dx}{x-3} =:$$

{для нахождения интегралов применим формулу (**3**)}

$= \ln|x| - 8\ln|x-2| + 8\ln|x-3| + C;$

15) $\int \frac{x^6}{x^2-x+1}dx$.

Под знаком интеграла неправильная рациональная дробь. Выделим целую часть этой дроби путем деления числителя на знаменатель:

$$\frac{x^6}{x^2-x+1}=x^4+x^3-x-1+\frac{1}{x^2-x+1}$$

Выделим полный квадрат в знаменателе правильной рациональной дроби:

$$x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}.$$

Возвращаясь к исходному интегралы, получим:

$$\int\left(x^4+x^3-x-1+\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right)dx=\int x^4dx+\int x^3dx-\int xdx-\int 1dx+$$

$$+\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=$$

{для нахождения первых трёх интегралов применим формулу (**2**), для четвёртого – формулу (**1**), последний интеграл найдём с помощью формулы (**12**)}

$$=\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+C=$$

$$=\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}-x+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C;$$

16) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x\left(2+\cos x-2\sin x\right)}$.

Найдём интеграл, используя универсальную тригонометрическую подстановку:

$$\left|\begin{array}{l} t=\operatorname{tg}\frac{x}{2},\ \ \sin x=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\dfrac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \\ \dfrac{x}{2}=\operatorname{arctg}t,\ x=2\operatorname{arctg}t\Rightarrow dx=\dfrac{2dt}{1+t^2} \end{array}\right|$$

$$=\int \frac{\dfrac{2dt}{1+t^2}}{\dfrac{2t}{1+t^2}\left(2+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}-2\cdot\dfrac{2t}{1+t^2}\right)}=\int \frac{1+t^2}{t\left(t^2-4t+3\right)}dt\,.$$

Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби:

$$\frac{1+t^2}{t\left(t^2-4t+3\right)}=\frac{1+t^2}{t(t-1)(t-3)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t-1}+\frac{C}{t-3}=$$

$$=\frac{A(t-1)(t-3)+Bt(t-3)+Ct(t-1)}{t(t-1)(t-3)}$$

Перейдем к равенству числителей:

$1+t^2=At^2-4At+3A+Bt^2-3Bt+Ct^2-Ct\,.$

Отсюда следует, что

$$\left.\begin{array}{ll} t^2: & 1=A+B+C \\ t^1: & 0=-4A-3B-C \\ t^0: & 1=3A \end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{cases} A=\frac{1}{3}, \\ B=-1, \\ C=\frac{5}{3}, \end{cases}$$

Тогда $\dfrac{1+t^2}{t\left(t^2-4t+3\right)}=\dfrac{1}{3t}-\dfrac{1}{t-1}+\dfrac{5}{3(t-3)}$.

Интегрируя почленно полученное равенство, получим:

$$\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t}-\int\frac{dt}{t-1}+\frac{5}{3}\int\frac{dt}{t-3}=$$

{для нахождения интегралов применим формулу (**3**)}

$$=\frac{1}{3}\ln|t|-\ln|t-1|+\frac{5}{3}\ln|t-3|+C=\frac{1}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|-\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right|+$$

$$+\frac{5}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3\right|+C;$$

17) $\displaystyle\int\frac{3x\,dx}{\sqrt{3x^2-2}+\sqrt[4]{3x^2-2}}\,.$

Произведём замену: $3x^2-2=t,\ dt=6xdx,\ 3xdx=\dfrac{1}{2}dt.$

Получим: $\displaystyle\int\frac{\frac{1}{2}dt}{\sqrt{t}+\sqrt[4]{t}}=$

Наименьшее общее кратное знаменателей дробей $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$ есть 4, поэтому введём следующую замену:

$$\left|\begin{array}{l} t=z^4 \\ dt=4z^3dz \\ z=\sqrt[4]{t} \end{array}\right| = \frac{1}{2}\int\frac{4z^3dz}{\sqrt{z^4}+\sqrt[4]{z^4}} = 2\int\frac{z^2}{z^2+z}dz = 2\int\frac{z^2}{z(z+1)}dz = 2\int\frac{z}{z+1}dz =$$

$$= 2\int\left(1-\frac{1}{z+1}\right)dz = 2\int dz - 2\int\frac{dz}{z+1} =$$

{для нахождения интегралов применим формулы (**1**) и (**3**)}

$$= 2z - 2\ln|z+1| + C = 2\sqrt[4]{3x^2-2} - 2\ln\sqrt[4]{3x^2-2} + C;$$

18) $\int\cos 3x\cos 5x\, dx$.

Найдём интеграл, используя формулу тригонометрических преобразований

$$cos\,3\text{x}\cdot cos\,5\text{x} = \frac{1}{2}\left(cos(3\text{x}-5\text{x}) + cos(3\text{x}+5\text{x})\right) = \frac{1}{2}\left(cos(-2\text{x}) + cos\,8\text{x}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(cos\,2\text{x} + cos\,8\text{x}\right)$$

Интегрируя почленно полученное равенство и применяя формулу (7), получим:

$$\int\frac{1}{2}(\cos 8x + \cos 2x)dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}(-\sin 8x) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(-\sin 2x) + C =$$

$$= -\frac{1}{16}\sin 8x - \frac{1}{4}\sin 2x + C;$$

19) $\int\sin^4 x\ dx = \int\left(\sin^2 x\right)^2 dx = \left\{\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}\right\} = \int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx =$

$$= \int\frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}dx = \left\{\cos^2 2x = \frac{1+\cos 4x}{2}\right\} =$$

$$= \frac{1}{4}\int\left(1-2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int dx - 2\cdot\frac{1}{4}\int\cos 2x\,dx + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\int\cos 4x dx =$$

$$=\frac{1}{4}\int dx-\frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx+\frac{1}{8}\int dx+\frac{1}{8}\int\cos 4xdx==\frac{3}{8}\int dx-\frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx+$$

$$+\frac{1}{8}\int\cos 4xdx=$$

{для нахождения интегралов применим формулы (**1**) и (**7**)}

$$=\frac{3}{8}x-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x+C=\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C;$$

20) $\int\frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}=:$

$$\left|\begin{array}{l} t=\sqrt{e^{2x}-1}, \\ e^{2x}=t^2+1, \\ x=\frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right), \\ dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{2t}{t^2+1}dt \end{array}\right|=\int\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2t}{t^2+1}dt}{t}=\int\frac{dt}{t^2+1}=$$

{для нахождения интеграла применим формулу (**12**)}

$$=\operatorname{arctg}t+C=\operatorname{arctg}\sqrt{e^{2x}-1}+C.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Смирнова, В.Б., Морозова, Л.Е. Неопределенный интеграл: учебное пособие / В.Б. Смирнова, Л.Е. Морозова. – СПбГАСУ. – СПб., 2010. – 60 с.
2. Интегральное исчисление функции одной переменной. URL:https://textarchive.ru/c-1503386-pall.html
3. Богомолов, Н. В. Математика. Задачи с решениями в 2 ч. Часть 2 : учебное пособие для вузов / Н. В. Богомолов. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва : Издательство Юрайт, 2020. – 320 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-07533-5. – Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. – URL: https://urait.ru/bcode/451748
4. Горлач, Б. А. Ряды. Интегрирование. Дифференциальные уравнения : учебник / Б. А. Горлач. – Санкт-Петербург: Лань, 2017. – 252 с. – ISBN 978-5-8114-2714-7. – Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. URL:; https://e.lanbook.com/book/99101
5. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: учебник: в 3 томах / Г. М. Фихтенгольц. – 12-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, [б. г.]. – Том 2 – 2018. – 800 с. – ISBN 978-5-8114-0674-6. – Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. – URL: https://e.lanbook.com/book/104963

НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Методические указания по математике для студентов
всех направлений и форм обучения

Составитель Гиль Людмила Болеславна

Подписано к печати 30.06.2020 г.
Формат 60х84/16.Бумага «Снегурочка»
Печать CANON. Усл. печ. л. 3,8. Уч. изд. л. 4,3
Тираж 50 экз. Заказ 15-20. Цена свободная.
ИПЛ ЮТИ ТПУ
652000, Юрга, ул. Московская, 17.