МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**
ЮРГИНСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Л.Б. Гиль, А.В. Тищенкова

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

ЧАСТЬ I. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Допущено Учебно-методическим объединением вузов по образованию в области автоматизированного машиностроения (УМО АМ) в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям подготовки «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств», «Автоматизация технологических процессов и производств»

Издательство
Томского политехнического университета
2013

УДК 51(076)
ББК 22.1я73
Г47

Гиль Л.Б.

Г47 Сборник задач по математике. Часть I. Линейная алгебра. Векторная алгебра. Аналитическая геометрия: учебное пособие / Л.Б. Гиль, А.В. Тищенкова; Юргинский технологический институт. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2013. – 135 с.

ISBN 0-00000-000-0

Пособие содержит примеры и задачи по линейной алгебре, векторной алгебре и аналитической геометрии, является первой частью комплекта учебных пособий под общим названием «Сборник задач по математике». В каждой главе представлены необходимые для усвоения основных понятий теоретические сведения, большое количество задач разного уровня сложности на закрепление теоретического материала, многие из которых сопровождаются подробными решениями и иллюстрациями, проверочные тесты, варианты контрольных работ. Основные понятия по темам, формулы, правила и алгоритмы решения задач выполнены в табличной форме. Для организации самостоятельной работы студентов предусмотрен автоматизированный самоконтроль при наличии устройства «Символ-Вуз».

Предназначено для студентов 1 курса машиностроительных специальностей технического вуза.

УДК 51(076)
ББК 22.1я73

Рецензенты

Доктор физико-математических наук, профессор ТГУ
Н.Р. Щербаков

Доктор технических наук,
начальник лаборатории специальных испытаний
ОАО «НИИПП»
А.В. Градобоев

ISBN 0-00000-000-0

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ………………………………………………………... 4
ГЛАВА I. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ…………………. 5
1.1. Матрицы и операции над ними……………………………… 5
1.2. Определители. Свойства и вычисление……………………... 7
1.3. Системы линейных уравнений. Методы решения………… 10
1.4. Опорные задачи……………………………………………… 14
1.5. Задачи для самостоятельной работы………………………… 29
1.6. Проверьте себя………………………………………………... 34
1.7. Контрольная работа…………………………………………... 40
ГЛАВА II. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ……………….. 45
2.1. Векторы. Линейные операции над векторами……………… 45
2.2. Произведения векторов: скалярное, векторное, смешанное. 47
2.3. Опорные задачи……………………………………………… 50
2.4. Задачи для самостоятельной работы………………………… 53
2.5. Проверьте себя………………………………………………... 58
2.6. Контрольная работа…………………………………………... 68
ГЛАВА III. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ…………………... 74
3.1. Системы координат…………………………………………... 74
3.2. Прямая на плоскости…………………………………………. 76
3.3. Кривые второго порядка……………………………………... 78
3.4. Плоскость……………………………………………………… 82
3.5. Прямая в пространстве……………………………………….. 84
3.6. Поверхности второго порядка……………………………….. 86
3.7. Опорные задачи………………………………………………. 90
3.8. Задачи для самостоятельной работы……………………….... 117
3.9. Проверьте себя………………………………………………... 121
3.10. Контрольная работа…………………………………………. 129
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ…………………………………………… 134

ПРЕДИСЛОВИЕ

Сборник задач охватывает традиционный курс математики по темам: «Линейная алгебра», «Векторная алгебра», «Аналитическая геометрия»; написан в соответствии с действующими программами курса математики для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям подготовки «Констукторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств», «Автоматизация технологических процессов и производств». Данное учебное пособие можно использовать как для самообразования, так и для активной работы с преподавателем на практических занятиях.

Каждый раздел пособия начинается с необходимого теоретического минимума, включающего важнейшие определения, теоремы и формулы. Затем даются разнообразные примеры и задачи, полностью охватывающие данные темы. Часть из них (опорные задачи) сопровождаются подробными решениями. В сборник включены задания на развитие пространственного воображения, сюжеты которых отражают работу технических механизмов. В конце каждого раздела предлагаются задания для проверки своих знаний и варианты контрольных работ.

Для организации самостоятельной работы студентов предусмотрена возможность автоматизированного самоконтроля при наличии устройства «Символ-Вуз».

ГЛАВА I. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

1.1. Матрицы и операции над ними

Прямоугольная матрица размера $m \times n$ имеет вид таблицы, состоящей из m строк и n столбцов

$$A_{m\times n} = \left(a_{ij}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Элемент матрицы a_{ij} находится на пересечении i-ой строки и j-го столбца, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$. Число элементов матрицы $m \times n$ определяется как произведение числа строк m на число столбцов n.

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов, называется *квадратной.*

Элементы квадратной матрицы, у которых номер строки совпадает с номером столбца, образуют *главную диагональ* (рис. 1.1). *Побочной* называют диагональ, идущую из правого верхнего угла в левый нижний (рис. 1.2).

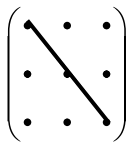


Рис. 1.1

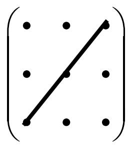


Рис. 1.2

Матрицы *равны* между собой, если равны все соответствующие элементы этих матриц.

У *нулевой* матрицы все элементы равны нулю.

Матрица-столбец состоит из одного столбца, а *матрица-строка* – из одной строки, например

$$\underset{(m\times 1)}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad \underset{(1\times n)}{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}.$$

Матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, а остальные элементы равны нулю, называется *единичной* (обозначается буквой *E).*

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Операции над матрицами

1. *Сложение (вычитание)* матриц одинакового размера осуществляется поэлементно

$$C = A + B,\ \text{если}\ c_{ij} = a_{ij} + b_{ij};\ i = 1, 2, ..., m;\ j = 1, 2, ..., n.$$

Свойства операции сложения:

1. $A + B = B + A$.
2. $A + B + C = (A + B) + C$.
3. $A + \varnothing = A$.
4. $A + (-A) = \varnothing$.

2. *Умножение матрицы на число.* Каждый элемент матрицы умножается на это число

$$B = \lambda A,\ \text{если}\ b_{ij} = \lambda a_{ij};\ i = 1, 2, ..., m;\ j = 1, 2, ..., n.$$

Свойства операции умножения на число:

1. $(\lambda \cdot \beta) A = \lambda (\beta \cdot A)$.
2. $\lambda (A + B) = \lambda A + \lambda B$.
3. $(\lambda + \beta) A = \lambda A + \beta A$
4. $0 \cdot A = \varnothing$.
5. $1 \cdot A = A$.

3. *Умножение матрицы A на матрицу B* определено, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй. Произведением матриц $A_{m \times k} \cdot B_{k \times n}$ называется такая матрица $C_{m \times n}$, каждый элемент c_{ij} которой равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B.

Свойства операции умножения матриц:

1. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.
2. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$.
3. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.
4. $A \cdot E = E \cdot A = A$.
5. $A \cdot \varnothing = \varnothing \cdot A = \varnothing$.
6. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

При умножении матриц нужно обратить внимание на следующее:

а) произведение матриц некоммутативно, т. е. $AB \neq BA$.

Если $AB = BA$, то матрицы A и B называются *перестановочными*;

б) в равенствах $AE = A$ и $EA = A$, где A – матрица размера $m \times n$, E – единичная матрица: в первом равенстве – n-го порядка, во втором равенстве – m-го порядка.

4. *Транспонирование* матрицы $m \times n$ заключается в замене строк столбцами, а столбцов – строками с теми же номерами

$$\underset{(n \times m)}{A^T} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Например: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

5. *Возведение квадратной матрицы в целую положительную степень* m $(m > 1)$: $A^m = \underbrace{A \cdot A ... A}_{m \text{ раз}}$.

6. *Элементарными преобразованиями матриц* являются:

- транспонирование;
- перестановка местами двух параллельных рядов (столбцов или строк) матрицы;
- умножение всех элементов ряда матрицы на число, отличное от нуля;
- прибавление ко всем элементам ряда матрицы соответствующих элементов параллельного ряда, умноженного на одно и то же число;
- отбрасывание нулевой строки (столбца) матрицы.

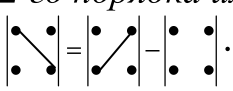
1.2. Определители. Свойства и вычисление

Квадратной матрице A порядка n можно сопоставить число $det\,A$ (или Δ), называемое её *определителем (детерминантом)*, по определённому правилу.

1. $n = 1$, $A = (a_1)$; $\det A = a_1$.

2. $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$; $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Вычисление определителя 2-го порядка иллюстрируется схемой



3. $n = 3$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

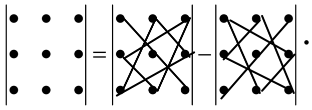
Вычисление определителя 3-го порядка:

1) правило Саррюса (правило «треугольника»)

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

можно проиллюстрировать схемой



2) разложение определителя по элементам i-й строки (столбца)

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in},$$

(здесь A_{ij} − алгебраическое дополнение элемента a_{ij}: $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$, где M_{ij} − минор элемента a_{ij}, т. е. определитель $(n-1)$-го порядка, получаемый из определителя Δ вычёркиванием i-й строки и j-го столбца).

Основные свойства определителей

1. Определитель равен сумме произведений элементов некоторого ряда на соответствующие им алгебраические дополнения.
2. Определитель не изменится при транспонировании, т. е. при замене строк столбцами с теми же номерами и наоборот.
3. При перестановке двух параллельных рядов определитель меняет знак.
4. Определитель, имеющий два одинаковых ряда, равен нулю.
5. Общий множитель элементов какого-либо ряда определителя можно вынести за знак определителя.
6. Определитель не изменится, если к элементам одного ряда прибавить соответствующие элементы параллельного ряда, умноженные на любое число.
7. Если элементы какого-либо ряда определителя представляют собой суммы двух слагаемых, то определитель может быть разложен на сумму двух соответствующих определителей.
8. Сумма произведений элементов какого-либо ряда определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов параллельного ряда равна нулю.
9. Если все элементы какого-либо ряда определителя равны нулю, то и сам определитель равен нулю.

10. Если элементы параллельных рядов определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.

4. *Вычисление определителя n-го порядка*.

Определители высшего порядка вычисляются с использованием их свойств двумя способами.

Метод понижения порядка

Так как в формуле разложения определителя n-го порядка по строке (столбцу)

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

все алгебраические дополнения являются определителями $(n-1)$-го порядка, то задача свелась к вычислению n определителей меньшего, $(n-1)$-го порядка. Если в некоторой строке исходного определителя много нулей, то именно по ней удобно проводить разложение. Более того, используя свойство 6, можно добиться того, что все элементы некоторой строки (столбца), кроме одного, станут равны нулю.

Метод сведения к треугольному виду

Используя свойства определителя, добиваются такой структуры определителя, при которой все его элементы, стоящие выше (ниже) главной диагонали, равны нулю, т. е. определитель имеет треугольную форму и численно равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали.

Квадратная матрица называется *невырожденной*, если её определитель отличен от нуля.

Матрица A^{-1}, *обратная* к квадратной матрице A, − такая матрица, что $A^{-1}A = AA^{-1} = E$, где E – единичная матрица.

Схема нахождения обратной матрицы

1. Вычисляем определитель матрицы A. Если $\det A \neq 0$, делаем вывод, что обратная матрица существует.

2. Составляем союзную матрицу A^*, элементами которой являются алгебраические дополнения элементов исходной матрицы.

3. Полученную матрицу транспонируем, получаем матрицу A^{*T}.

4. Все элементы матрицы A^{*T} делим на величину определителя матрицы A

$$A^{-1} = \frac{A^{*T}}{\det A}.$$

Матричные уравнения

$A \cdot X = B$ Решение: $X = A^{-1} \cdot B$

$X \cdot A = B$ Решение: $X = B \cdot A^{-1}$

1.3. Системы линейных уравнений. Методы решения

Системой m линейных уравнений с n неизвестными называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\ldots & +a_{1n}x_n & =b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\ldots & +a_{2n}x_n & =b_2 \\ \ldots & \ldots & +\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\ldots & +a_{mn}x_n & =b_m \end{cases}.$$

Матрица коэффициентов при неизвестных называется основной матрицей системы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Если к основной матрице A добавить столбец свободных членов, получим расширенную матрицу $\widetilde{A}$

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Решением системы линейных уравнений называется такая совокупность значений неизвестных, при подстановке которой вместо неизвестных каждое уравнение системы обращается в тождество.

Система линейных уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и называется *несовместной*, если она не имеет ни одного решения.

Система называется *определённой*, если она имеет единственное решение, и называется *неопределённой*, если она имеет бесконечное множество решений.

Система линейных уравнений называется *однородной*, если все свободные члены равны нулю.

Однородная система всегда имеет нулевое (*тривиальное*) решение.

Две системы называются *эквивалентными (равносильными),* если они имеют одно и то же общее решение. Эквивалентные системы получаются при элементарных преобразованиях системы при условии, что преобразования выполняются только над строками матрицы.

Минором матрицы A называется определитель k-го порядка, составленный из k строк и k столбцов матрицы A, $k \le \min(m;n)$.

Рангом матрицы называется наибольший порядок отличного от нуля минора этой матрицы (обозначается $r(A)$).

Ранг матрицы можно найти двумя методами: методом окаймляющих миноров и методом элементарных преобразований.

Метод окаймляющих миноров

1. Найти минор M_1 первого порядка, отличный от нуля. Если такого минора нет, то матрица A нулевая и $r(A)=0$.
2. Вычислять миноры второго порядка, содержащие M_1 до тех пор, пока не найдётся минор M_2, отличный от нуля. Если такого минора нет, то $r(A)=1$, если есть, то $r(A)\ge 2$. И т. д.

При нахождении минора таким способом достаточно на каждом шаге найти всего один ненулевой минор k-го порядка, причём искать его только среди миноров, содержащих минор $M_{k-1} \ne 0$.

Метод элементарных преобразований

1. Матрицу A привести к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований.
2. Количество ненулевых строк полученной ступенчатой матрицы есть искомый ранг матрицы A.

Теорема Кронекера-Капелли. *Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы равен рангу расширенной матрицы этой системы.*

Метод Крамера

Теорема. Система n линейных уравнений с n неизвестными имеет единственное решение тогда и только тогда, когда определитель основной матрицы отличен от нуля. Неизвестные системы находятся по формулам Крамера

$$x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta},$$

где Δ – главный определитель системы, т. е. определитель основной матрицы A, Δ_k – определитель неизвестного x_k, который получается при замене столбца с номером k в главном определителе на столбец свободных членов. При этом:

1) если $\Delta \neq 0$ − система определённая (имеет единственное решение);

2) если $\Delta = \Delta_1 = ... = \Delta_k = 0$ − система неопределённая (имеет множество решений);

3) если $\begin{cases} \Delta = 0 \\ \left[\begin{array}{l} \Delta_1 \neq 0 \\ ... \\ \Delta_k \neq 0 \end{array} \right. \end{cases}$ − система несовместна.

Матричный метод

Система линейных уравнений может быть кратко записана в виде матричного уравнения

$$A \cdot X = B.$$

Решение данного уравнения

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Метод Гаусса

Метод Гаусса, состоящий в последовательном исключении неизвестных из уравнений, осуществляется в два этапа.

I этап (прямой ход): путём элементарных преобразований преобразуем расширенную матрицу системы к ступенчатому виду. Все действия проводим *над строками.* На основе полученной матрицы, составляем систему, эквивалентную исходной. В одном из уравнений остаётся одно неизвестное, в другом – два и т. д.

Параллельно при этом решается вопрос о совместности и количестве решений системы.

II этап (обратный ход): из уравнения системы, включающего одно неизвестное, находим его. Подставляем полученное значение в следующее уравнение, находим второе неизвестное и т. д. Таким образом, получим совокупность всех неизвестных, образующих решение системы.

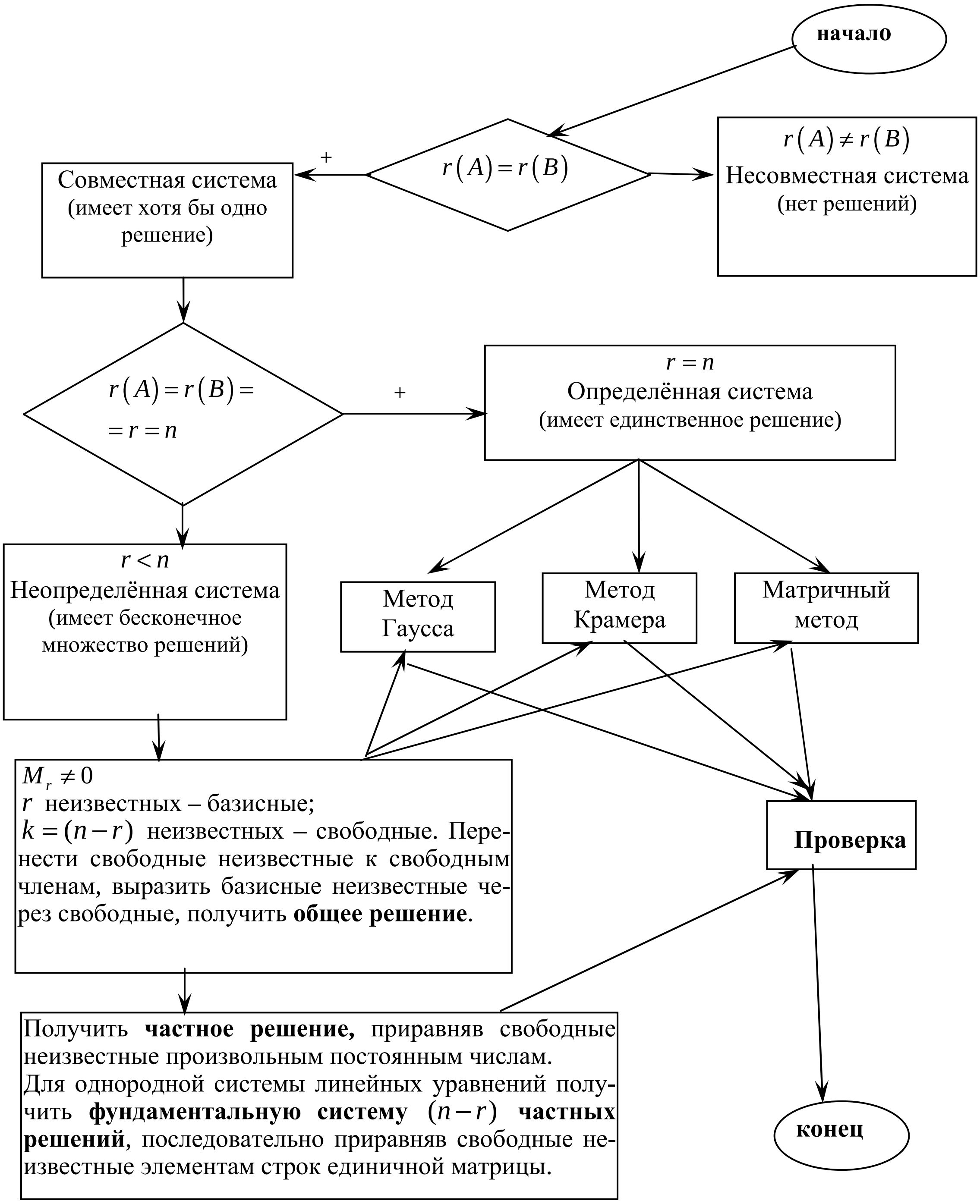
Исследование и решение системы линейных уравнений

$r(A)$ − ранг основной матрицы системы;

$r(B)$ − ранг расширенной матрицы системы;

M_r − базисный минор;

n − число неизвестных.



1.4. Опорные задачи

1.4.1. Вычислить определитель второго порядка $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$.

Решение. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 - 2\cdot 3 = -2.$

1.4.2. Вычислить определитель 3-го порядка $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$.

Решение.

Способ 1. Вычислим определитель разложением по первой строке

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot(5\cdot 2 - 3\cdot 4) - 2\cdot(2\cdot 2 - 3\cdot 3) +$$

$$+1\cdot(2\cdot 4 - 5\cdot 3) = 3\cdot(-2) - 2\cdot(-5) + 1\cdot(-7) = -3.$$

Способ 2. Вычислим определитель с помощью правила «треугольника»

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot 5\cdot 2 + 2\cdot 3\cdot 3 + 2\cdot 4\cdot 1 - 1\cdot 5\cdot 3 - 3\cdot 3\cdot 4 - 2\cdot 2\cdot 2 =$$

$$= 30 + 18 + 8 - 15 - 36 - 8 = -3.$$

1.4.3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$.

Решение.

Способ 1. Вынесем из четвёртого столбца общий множитель 2 и разложим определитель по элементам четвёртого столбца

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 2\Bigg[1\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -2 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} +$$

$$+(-2)\cdot(-1)^{2+4}\begin{vmatrix}3&5&7\\-2&-3&3\\1&3&5\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{3+4}\begin{vmatrix}3&5&7\\-1&-2&-3\\1&3&5\end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{4+4}\begin{vmatrix}3&5&7\\-1&-2&-3\\-2&-3&3\end{vmatrix}\Bigg].$$

Каждый из определителей считаем по правилу «треугольника»

$$\Delta=2\big[-(15-6+18-9+9-20)+(-2)(-45+15-42+21-27+50)+$$
$$+(-1)(-30-15-21+14+27+25)+2(-18+30+21-28-27+15)\big]=$$
$$=2(-7+56-0-14)=70.$$

Способ 2. Вынесем из четвёртого столбца общий множитель 2 и вычислим определитель с помощью свойств, получив нули в последнем столбце

$$\begin{vmatrix}3&5&7&2\\-1&-2&-3&-4\\-2&-3&3&2\\1&3&5&4\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}3&5&7&1\\-1&-2&-3&-2\\-2&-3&3&1\\1&3&5&2\end{vmatrix},\ \begin{matrix}I\cdot 2+II\\ I\cdot(-1)+III\\ I\cdot(-2)+IV\end{matrix}.$$

Выражения в скобках справа от определителя обозначают следующие преобразования: первую строку умножили на 2 и прибавили ко второй строке (результат запишем на месте второй строки); первую строку умножили на (-1) и сложили с третьей строкой (результат запишем на месте третьей строки); первую строку умножили на (-2) и сложили с четвёртой строкой (результат запишем на месте четвёртой строки). Получаем

$$\Delta=2\begin{vmatrix}3&5&7&1\\5&8&11&0\\-5&-8&-4&0\\-5&-7&-9&0\end{vmatrix}.$$

Теперь разложим определитель по элементам четвёртого столбца и ещё раз преобразуем

$$\Delta=2\begin{vmatrix}3&5&7&1\\5&8&11&0\\-5&-8&-4&0\\-5&-7&-9&0\end{vmatrix}=2(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}5&8&11\\-5&-8&-4\\-5&-7&-9\end{vmatrix},\ \begin{matrix}I+II\\ I+III\end{matrix},$$

$$\Delta = -2\begin{vmatrix} 5 & 8 & 11 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2(-35) = 70.$$

1.4.4. Найти линейную комбинацию матриц $2A+3B$, где $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$2A+3B = 2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + 3\cdot\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 9 & 0 \\ 6 & 3 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2-6 & 4+9 & 6+0 \\ 0+6 & 2+3 & -2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 13 & 6 \\ 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.4.5. Пусть $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & -2 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix}$. Найти произведения AB и BA (если это возможно).

Решение.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & -2 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \textit{1-я строка матрицы A "прикладывается"} \\ \textit{к первому столбцу матрицы B,} \\ \textit{соответствующие элементы перемножаются,} \\ \textit{а произведения складываются} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{1\cdot 3 + 2\cdot 6 + 3\cdot 7} & 1\cdot 4 + 2\cdot 0 + 3\cdot 1 & 1\cdot 5 + 2\cdot(-2) + 3\cdot 8 \\ 1\cdot 3 + 0\cdot 6 + (-1)\cdot 7 & 1\cdot 4 + 0\cdot 0 + (-1)\cdot 1 & 1\cdot 5 + 0\cdot(-2) + (-1)\cdot 8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 36 & 7 & 25 \\ -4 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

1.4.6. Даны три матрицы:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix};\ C=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Какое из произведений $A\cdot B$ или $A\cdot C$ существует? Найдите элемент, стоящий во второй строке и третьем столбце этого произведения.

Решение. Произведение двух матриц определено только тогда, когда число элементов в строке первой матрицы равно числу элементов в столбце второй матрицы. Этому условию удовлетворяют только матрицы A и B. Чтобы найти элемент a_{23} матрицы $A\cdot B$, нужно элементы второй строки матрицы A умножить на соответствующие элементы третьего столбца матрицы B и сложить полученные произведения, т. е.

$$a_{23}=3\cdot 5+1\cdot 4+2\cdot(-1)+4\cdot 3=15+4-2+12=29.$$

1.4.7. Найти куб матрицы $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$.

Решение.

$$A^2=A\cdot A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-3 & -1-2\\ 3+6 & -3+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -3\\ 9 & 1\end{bmatrix}.$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{bmatrix}-2 & -3\\ 9 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2-9 & 2-6\\ 9+3 & -9+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-11 & -4\\ 12 & -7\end{bmatrix}.$$

Ответ: $\begin{bmatrix}-11 & -4\\ 12 & -7\end{bmatrix}$.

1.4.8. Выяснить, при каком значении параметра a матрица A имеет три линейно независимые строки

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & -1 & 0\\ 4 & -1 & a\end{pmatrix}.$$

Решение. Матрица A имеет три линейно независимые строки, если её ранг равен 3, т. е. $|A|\neq 0$.

Вычислим определитель матрицы A по правилу треугольников $|A|=-a-6+8=2-a$; $|A|\neq 0$, откуда $a\neq 2$, т. е. при всех значениях a, кроме $a=2$, все строки матрицы линейно независимы.

1.4.9. Найти матрицу, обратную данной

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}.$$

Решение. Определитель основной матрицы $\Delta=1$, то есть, определитель отличен от нуля, следовательно, для основной матрицы A существует обратная A^{-1}. Найдём её по формуле $A^{-1}=\dfrac{A^{*T}}{\det A}$.

Сначала запишем транспонированную матрицу A^T

$$A^T=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&3\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

Запишем присоединённую (или союзную) матрицу A^*, элементами которой являются алгебраические дополнения элементов транспонированной матрицы

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}.$$

Тогда

$$A_{11}=\begin{vmatrix}1&3\\1&1\end{vmatrix}=-2,\qquad A_{12}=-\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}=-1,\qquad A_{13}=\begin{vmatrix}2&1\\1&3\end{vmatrix}=5,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}2&3\\1&1\end{vmatrix}=1,\qquad A_{22}=\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=0,\qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}1&1\\2&3\end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}=1,\qquad A_{32}=-\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix}=1,\qquad A_{33}=\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}=-3,$$

отсюда

$$A^*=\begin{pmatrix}-2&1&1\\-1&0&1\\5&-1&-3\end{pmatrix}.$$

Обратная матрица A^{-1} запишется в виде

$$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}=\begin{pmatrix}\frac{-2}{1}&\frac{1}{1}&\frac{1}{1}\\[2pt]\frac{-1}{1}&\frac{0}{1}&\frac{1}{1}\\[2pt]\frac{5}{1}&\frac{-1}{1}&\frac{-3}{1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1&1\\-1&0&1\\5&-1&-3\end{pmatrix}.$$

1.4.10. Привести к ступенчатому виду матрицу A с помощью элементарных преобразований над строками:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-1&-1\\3&-2&-1&0\\-5&3&2&-1\end{pmatrix}.$$

Решение.

Первый этап. Для получения нулей в первом столбце вычтем из второй строки первую, умноженную на 3, и запишем результат во вторую строку. После этого к третьей строке прибавим первую, умноженную на 5, и запишем результат в третью строку. Получим матрицу A_1.

Второй этап. Для получения нулей во втором столбце умножим вторую строку на 3, третью строку – на 2, получившиеся строки сложим и результат запишем в третью строку. Получим ступенчатую матрицу A_2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 0 \\ -5 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \text{II-3}\cdot\text{I} \\ \text{III+5}\cdot\text{I} \end{matrix} \sim A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 2\cdot\text{III+3}\cdot\text{II} \end{matrix} \sim$$

$$\sim A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

1.4.11. Найти ранг матрицы A

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 5 & 0 & 10 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Способ 1. Метод окаймляющих миноров.

1) $\Delta_1 = |\boldsymbol{a_{21}}| = 1 \neq 0$;

2) $\Delta_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{21}} & a_{21} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$;

3) $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \boldsymbol{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ \mathbf{1} & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 0$;

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ \boldsymbol{a_{21}} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -3 \\ \mathbf{1} & 2 & 7 \\ 5 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ \boldsymbol{a_{21}} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -3 \\ \mathbf{1} & 4 & 7 \\ 5 & 10 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Т. к. все миноры 3-го порядка равны нулю, и есть минор 2-го порядка, отличный от нуля, значит ранг матрицы $r(A) = 2$.

Способ 2. Метод элементарных преобразований.

Преобразуем матрицу к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1 & -1 & -3\\ 1 & 2 & 4 & 7\\ 5 & 0 & 10 & 5\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{II}\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 7\\ 0 & -1 & -1 & -3\\ 5 & 0 & 10 & 5\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \text{III-}5\cdot\mathrm{I}\end{matrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 7\\ 0 & -1 & -1 & -3\\ 0 & -10 & -10 & -30\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \text{III-}10\cdot\mathrm{II}\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 7\\ 0 & -1 & -1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Ненулевых строк в полученной матрице две, значит, $r(A)=2$.

1.4.12. Решить систему линейных алгебраических уравнений тремя способами (по правилу Крамера, матричным методом, методом Гаусса), сделать проверку

$$\begin{cases}x+2y+z=12\\ 2x+y+z=11\\ x+3y+z=15.\end{cases}$$

Решение.

а) найдём решение системы уравнения *по правилу Крамера*.

Для этого запишем основную матрицу A системы, состоящую из коэффициентов при неизвестных этой системы

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель этой матрицы $|A|$, например, по правилу «треугольника»

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\end{vmatrix}=1\cdot1\cdot1+2\cdot1\cdot1+2\cdot3\cdot1-1\cdot1\cdot1-1\cdot1\cdot3-2\cdot2\cdot1=$$

$$=1+2+6-1-3-4=1\neq 0.$$

Так как $|A|\neq 0$, следовательно, заданная система уравнений имеет единственное решение, которое определяется по формулам Крамера

$$x=\frac{|A_1|}{|A|},\quad y=\frac{|A_2|}{|A|},\quad z=\frac{|A_3|}{|A|},$$

где $|A_1|,|A_2|,|A_3|$ – определители матриц, которые получаются из основной матрицы A путём замены j-го столбца столбцом свободных членов системы.

$$|A_1|=\begin{vmatrix}12&2&1\\11&1&1\\15&3&1\end{vmatrix}=2,\quad |A_2|=\begin{vmatrix}1&12&1\\2&11&1\\1&15&1\end{vmatrix}=3,\quad |A_3|=\begin{vmatrix}1&2&12\\2&1&11\\1&3&15\end{vmatrix}=4.$$

Таким образом, решение исходной системы есть

$$x=\frac{|A_1|}{|A|}=\frac{2}{1}=2,\quad y=\frac{|A_2|}{|A|}=\frac{3}{1}=3,\quad z=\frac{|A_3|}{|A|}=\frac{4}{1}=4.$$

Проверим решение, подставив полученные значения x, y, z в уравнения системы (или в одно из уравнений); при верном решении системы эти равенства должны обратиться в тождества:

$$2+2\cdot3+4\equiv12,$$

$$2\cdot2+3+4\equiv11,$$

$$2+3\cdot3+4\equiv15.$$

Ответ: $x=2,\ y=3,\ z=4$;

б) *метод обратной матрицы.* Сначала запишем основную матрицу A (см. пункт *а*), матрицу-столбец X, состоящую из неизвестных системы, и матрицу-столбец B, состоящую из свободных членов заданной системы:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&1\\1&3&1\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}12\\11\\15\end{pmatrix}.$$

Решение системы в этом случае имеет вид

$$X=A^{-1}\cdot B,$$

где A^{-1} есть матрица, обратная основной матрице A заданной системы

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-2&1&1\\-1&0&1\\5&-1&-3\end{pmatrix}\ \text{(задача 1.4.9).}$$

Решение системы находим, умножив обратную матрицу A^{-1} на матрицу-столбец B

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1&1\\-1&0&1\\5&-1&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}12\\11\\15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\cdot12+1\cdot11+1\cdot15\\-1\cdot12+0\cdot11+1\cdot15\\5\cdot12+(-1)\cdot11+(-3)\cdot15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}.$$

Получили решение заданной системы уравнений в матричной форме.

Ответ: $x = 2,\ y = 3,\ z = 4$;

в) *метод Гаусса* (метод последовательного исключения неизвестных).

Суть метода заключается в том, что данную систему линейных уравнений приводят к эквивалентной системе, допускающей очевидное решение.

Сначала запишем расширенную матрицу B, элементами которой являются коэффициенты при неизвестных системы и свободные члены

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 2 & 1 & 1 & 11 \\ 1 & 3 & 1 & 15 \end{pmatrix}.$$

Теперь эту матрицу приведём к треугольному виду с помощью элементарных преобразований *над строками расширенной матрицы* B.

Сначала элементы первой строки умножим на (-2) и полученные значения прибавим ко второй строке и элементы первой же строки умножим на (-1) и прибавим к третьей строке; затем полученные значения третьей строки умножим на 3 и прибавим к полученной второй строке, после чего вторую и третью строки поменяем местами. Таким образом, нужно проделать три шага.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 2 & 1 & 1 & 11 \\ 1 & 3 & 1 & 15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & -3 & -1 & -13 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Из последнего уравнения найдём неизвестную z

$$0 \cdot x + 0 \cdot y - 1 \cdot z = -4 \ \Leftrightarrow\ z = 4.$$

Из второго уравнения найдём y

$$0 \cdot x + 1 \cdot y + 0 \cdot z = 3 \ \Leftrightarrow\ y = 3.$$

Наконец, из первого уравнения находим x

$$1 \cdot x + 2 \cdot y + 1 \cdot z = 12, \Leftrightarrow x + 6 + 4 = 12, \Leftrightarrow x = 12 - 10 = 2 \Leftrightarrow \ x = 2.$$

Ответ: $x = 2,\ y = 3,\ z = 4.$

1.4.13. Найти общее и одно частное решение системы (метод Гаусса).

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=3; \\ 6x_1+8x_2+2x_3+5x_4=7; \\ 9x_1+12x_2+3x_3+10x_4=13. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу

$$B=\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 8 & 2 & 5 & 7 \\ 9 & 12 & 3 & 10 & 13 \end{array}\right).$$

Теперь эту матрицу приведём к треугольному виду. Для этого сначала элементы первой строки умножим на (-2) и полученные значения прибавим ко второй строке и элементы первой же строки умножим на (-3) и прибавим к третьей строке. Затем умножим вторую строку на (-4) и прибавим к третьей

$$B=\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 8 & 2 & 5 & 7 \\ 9 & 12 & 3 & 10 & 13 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 9 & 12 & 3 & 10 & 13 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ранг расширенной матрицы равен рангу основной матрицы, равен 2.

Базисный минор $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$. Значит, базисные неизвестные x_3, x_4, а свободные – x_1, x_2.

Восстановим по матрице систему уравнений

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=3, \\ x_4=1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3=3-3x_1-4x_2-2x_4, \\ x_4=1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3=1-3x_1-4x_2, \\ x_4=1, \end{cases}.$$

Это общее решение.

Найдём одно частное решение. Положим, например, $x_1=0,\ x_2=1$. Получим $x_3=-3,\ x_4=1$.

Следовательно, одно из частных решений имеет вид

$$x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=-3,\ x_4=1.$$

1.4.14. Дана система линейных неоднородных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 1, \\ 5x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 4. \end{cases}$$

Проверить, совместна ли эта система, и в случае совместности решить её: а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы (матричным методом); в) методом Гаусса.

Решение. Проверяем совместность системы с помощью теоремы Кронекера-Капелли.

В расширенной матрице

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

меняем третий и первый столбцы местами, умножаем первую строку на 2 и прибавляем к третьей, из второй строки вычитаем третью

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & -2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & -2 & 5 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & -8 & 9 & 7 \\ 0 & -8 & 9 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & -8 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Теперь ясно, что $r(A) = 2$, $r(B) = 3$.

Согласно теореме Кронекера-Капелли, из того, что $r(A) \neq r(B)$, следует несовместимость исходной системы.

1.4.15. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Определитель системы

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 11 \neq 0,$$

поэтому система имеет единственное нулевое решение: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

1.4.16. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Так как

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

то система имеет бесчисленное множество решений. Поскольку $r(A) = 2$, $n = 3$, возьмём любые два уравнения системы (например, первое и второе) и найдём её решение. Имеем

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

Так как определитель из коэффициентов при неизвестных x_1 и x_2 не равен нулю, то в качестве базисных неизвестных возьмём x_1 и x_2 (хотя можно брать и другие пары неизвестных) и переместим члены с x_3 в правые части уравнений: $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = x_3, \\ x_1 - 3x_2 = -5x_3. \end{cases}$

Решаем последнюю систему по формулам Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \text{ где}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 4 = -13; \; \Delta_1 = -\begin{vmatrix} x_3 & 4 \\ -5x_3 & -3 \end{vmatrix} = -13x_3 + 20x_3 = 17x_3;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & x_3 \\ 1 & -5x_3 \end{vmatrix} = -16x_3.$$

Отсюда находим, что $x_1 = \dfrac{-17x_3}{13}$, $x_2 = \dfrac{16x_3}{13}$. Полагая $x_3 = 13k$, где k – произвольный коэффициент пропорциональности, получаем решение исходной системы: $x_1 = -17k$, $x_2 = 16k$, $x_3 = 13k$.

1.4.17. Доказать, что система

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = -1, \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$$

имеет единственное решение. Неизвестное x_4 найдите по формуле Крамера. Решите эту систему методом Гаусса.

Решение. Вычислим определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & -5 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -5 & -3 \\ 0 & -9 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -14$$

$\Delta \neq 0$, поэтому система имеет единственное решение.

Находим определитель Δ_4 (в определителе Δ четвёртый столбец заменён столбцом свободных членов).

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -5 & -9 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & -5 & -9 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -5 & -9 \\ 0 & -9 & -19 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -28.$$

По формуле Крамера $x_4 = \dfrac{\Delta_4}{\Delta} = \dfrac{-28}{-14} = 2.$

Решим данную систему методом Гаусса.

Записываем расширенную матрицу системы и преобразуем её к треугольному виду, действуя только со строками.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & 4 & 3 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & -9 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & -8 & -6 & -20 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & -8 & -6 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & -14 & -28 \end{array}\right].$$

Таким образом, данная система эквивалентна системе

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ \quad - x_2 - 5x_3 - 3x_4 = -9, \\ \quad\quad - 8x_3 - 6x_4 = -20, \\ \quad\quad\quad - 14x_4 = -28, \end{cases}$$

из которой легко находим $x_4 = 2$; $8x_3 = 20 - 12$, $x_3 = 1$; $x_2 = 9 - 5 - 6 = -2$; $x_1 = 4 + 4 - 3 - 4 = 1$. Получено решение: $(1, -2, 1, 2)$.

1.4.18. Дана система $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 7x_5 = 30, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7, \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 - 7x_5 = -11. \end{cases}$

Доказать, что эта система совместна, найдите её общее решение и частное решение, если $x_3 = x_4 = 1$, $x_5 = 3$.

Решение. Применим к этой системе метод Гаусса. Запишем расширенную матрицу системы и преобразуем её, действуя только со строками, к виду, из которого легко увидеть базисный минор.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 & 7 & 30 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 5 & 3 & 1 & 1 & -7 & -11 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 & 7 & 30 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \\ 0 & -2 & -4 & -4 & -12 & -46 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 & 7 & 30 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Отсюда следует, что ранг основной и расширенной матриц равен 2, следовательно, система совместна. В качестве базисного выберем минор $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, т. е. неизвестные x_1 и x_2 примем в качестве зависимых, а x_3, x_4, x_5 – в качестве свободных. Данная система эквивалентна системе

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 7x_5 = \ \ 30, \\ \quad - \ \ x_2 - 2x_3 - 2x_4 - 6x_5 = -23. \end{cases}$$

Выражаем зависимые переменные через свободные

$$\begin{cases} x_1 = -16 + x_3 + x_4 + 5x_5, \\ x_2 = 23 - 2x_3 - 2x_4 - 6x_5 \end{cases} \text{ – общее решение системы.}$$

Полагая $x_3 = x_4 = 1$, $x_5 = 3$, находим $x_1 = -16 + 1 + 1 + 15 = 1$, $x_2 = 23 - 2 - 2 - 18 = 1$. Получили частное решение $(1,1,1,1,3)$.

1.4.19. Дана система линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 7x_1 + 5x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

Доказать, что эта система имеет нетривиальные решения. Записать общее решение и какую-нибудь фундаментальную систему решения.

Решение. Исследуем систему методом Гаусса. Запишем её матрицу и, действуя только со строками, упрощаем её, не меняя ранга

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 7 & 5 & 7 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 12 & 0 & -12 & -12 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Так как три последние строки пропорциональны, вычеркнем две из них, не меняя ранга матрицы. Ранг матрицы равен двум, следовательно, он меньше числа неизвестных, значит, система имеет нетривиальное решение.

Выберем в качестве базисных неизвестных x_1, x_2, а x_3, x_4, x_5 – свободные. Данная система эквивалентна системе

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_2 - x_4 - x_5 = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 = -x_3 - x_4 - 2x_5, \\ x_2 = x_4 + x_5. \end{cases}$$

Выражая зависимые переменные через свободные, находим общее решение:

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 - x_5, \\ x_2 = x_4 + x_5. \end{cases}$$

Фундаментальная система решений содержит $5-2=3$ решения (разность между числом неизвестных и рангом). Получаем три частных линейно независимых решения, придавая поочередно свободным независимым значения $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$:

$$(-1,0,1,0,0),$$
$$(0,1,0,1,0),$$
$$(-1,1,0,0,1).$$

Эти решения образуют фундаментальную систему решений. Любое другое решение является их линейной комбинацией.

1.5. Задачи для самостоятельной работы

1.5.1. Найти линейную комбинацию. В ответ записать элементы главной диагонали через запятую.

(ГЖК) $4A-5B,\ A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$

1.5.2. Привести матрицу к ступенчатому виду:

а) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 13 \\ 3 & 1 & -7 & 19 \\ -1 & 2 & 0 & -10 \\ 2 & 1 & -5 & 5 \end{pmatrix};$ б) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 11 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -3 & -18 \\ 5 & 0 & -1 & -13 \end{pmatrix};$

в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 12 \end{pmatrix}.$

1.5.3. Найти произведение матриц, если это возможно. а) AB; б) BA. В ответ записать сумму всех элементов полученной матрицы:

1) а) (ЖДЖ); б) (ММС); $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$

2) а) (ДДЦ); б) (ЛГК); $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

3) а) (ЮАМ); б) (ЮКМ); $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4) а) (ЛМФ); б) (ЖФГ); $A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

1.5.4*. (ИГК) Найти матрицу $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n$. В ответ записать элемент a_{11}.

1.5.5. Вычислить определитель второго порядка:

а) (ЖИД) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}$; б) (СЦШ) $\begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix}$;

в) (ШДК) $\begin{vmatrix} -\sqrt{a} & a \\ 1 & \sqrt{a} \end{vmatrix}$.

1.5.6. (ПБЛ) Решить уравнение $\begin{vmatrix} x+3 & x-1 \\ 7-x & x-1 \end{vmatrix}=0$.

1.5.7. Вычислить определитель третьего порядка с помощью «правила треугольников» или разложением по элементам какого-либо ряда:

а) (ЛЭЛ) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$; б) (ЮШМ) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}$;

в) (МЭЭ) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 8 \\ 25 & 49 & 64 \end{vmatrix}$; г) (МДФ) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$.

1.5.8. Решить уравнение:

а) (БГЦ) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2x+3 \\ 3-x & 1 & 1 \\ 2x+1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$; б) (СЖБ) $\begin{vmatrix} -3 & x-1 & 1 \\ x+2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = 6$.

1.5.9. Вычислить определитель четвертого порядка:

а) (ГАЖ) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$; б) (МДШ) $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}$.

1.5.10*. (ЖЭЮ) Вычислить определитель приведением к треугольному виду

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & n-1 \end{vmatrix}.$$

1.5.11*. Числа 255, 391, 578 делятся на 17. Не вычисляя значение определителя $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 3 & 9 & 1 \\ 5 & 7 & 8 \end{vmatrix}$, доказать, что он тоже делится на 17.

1.5.12. Найти ранг матрицы методом элементарных преобразований:

а) (ГШК) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -14 & 22 \\ -2 & 1 & 3 & 3 & -9 \\ -4 & -3 & 11 & -19 & 17 \end{pmatrix}$; б) (ГИС) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$.

1.5.13. Найти матрицу, обратную к данной. В ответ записать в виде десятичной дроби сумму элементов побочной диагонали:

а) (ФКФ) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; б) (МСГ) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$;

в) (КЦШ) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ -4 & -14 & -6 \end{pmatrix}$.

1.5.14. Решить матричное уравнение. В ответ записать сумму всех элементов полученной матрицы:

а) (ДСМ) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$;

б) (ЖИА) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$;

в) (ИЖБ) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$;

г) (ЦЛЦ) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1.5.15. Исследовать систему линейных уравнений, если она совместна, то найти её общее и одно частное решение

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ -2x_1 - 2x_3 = 16. \end{cases}$$

1.5.16. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ -2x_1 - 2x_3 = 3. \end{cases}$$

1.5.17*. Исследовать систему линейных уравнений в зависимости от параметра λ. В случае, когда система совместна, найти общее и одно частное решение $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 8, \\ 4x_1 - 2x_2 = \lambda. \end{cases}$.

1.5.18*. (КФК) Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 x_2^2 x_3^3 = 2, \\ x_1^2 x_2^3 x_3^4 = 4, \\ x_1^2 x_2 x_3 = 2. \end{cases}$

1.5.19. Решить систему уравнений по формулам Крамера и с помощью обратной матрицы:

а) (ГФС) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=6, \\ 4x_1+5x_2+6x_3=9, \\ 7x_1+8x_2=-6. \end{cases}$ б) (ПГЮ) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=6, \\ 4x_1+5x_2+6x_3=15, \\ 7x_1+8x_2+9x_3=24. \end{cases}$

в) (БЭШ) $\begin{cases} 3x+2y+z=-8, \\ 2x+3y+z=-3, \\ 2x+y+3z=-1. \end{cases}$

1.5.20. Найти общее решение и фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+3x_4=0, \\ 6x_1-3x_2-3x_3-x_4=0, \\ -7x_1+x_2+x_3-2x_4=0, \\ -3x_1+9x_2+9x_3+10x_4=0. \end{cases}$$

1.5.21. (ДКК) Дана система $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+2x_4=-4, \\ 2x_1+3x_2-3x_3+4x_4=-14, \\ 8x_1+3x_2+2x_3+2x_4=-1, \\ 8x_1+5x_2+x_3+5x_4=-7. \end{cases}$. Докажите, что она имеет единственное решение. Неизвестное x_2 найдите по формуле Крамера. Решите систему методом Гаусса.

1.5.22. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} x_1+x_2+x_3-2x_4=1, \\ 2x_1+2x_2-5x_3+3x_4=2, \\ 3x_1+4x_2-2x_3-3x_4=2, \\ 2x_1+3x_2-3x_3-x_4=1. \end{cases}$

Докажите, что эта система совместна; найдите общее решение и (ШДГ) частное решение при $x_4=1$.

1.5.23*. Исследовать систему уравнений $\begin{cases} \alpha x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1+\alpha x_2+x_3=0, \\ x_1+x_2+\alpha x_3=0. \end{cases}$

1.6. Проверьте себя

Вариант 1

1. (ДДГ) Какие элементы составляют в матрице $D=\begin{pmatrix} -6 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 2 & -1 \\ 7 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ побочную диагональ. В ответ записать их сумму.
2. (ЮЖЦ) Чему равен размер матрицы $C = A_{12} \cdot B_{23}$? (Ответ $a \times b$).
3. (ЦКФ) Из перечисленных систем определить, какие системы совместны:
1. $\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ 3x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases}$; 2. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 4x_1 + 4x_2 = 2 \end{cases}$; 3. $\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = 5 \end{cases}$; 4. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 = 4 \end{cases}$;
5. $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 4 \end{cases}$. Ответ записать через запятую.
4. (ДМД) Вычислить $3A - 2B$, если $A=\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. В ответ записать полученные элементы через запятую.
5. (ДСЭ) Вычислить определитель матрицы $C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$.

Вариант 2

1. (ЮЖМ) Какие из перечисленных матриц 1) A_{25}, 2) B_{67}, 3) C_{54}, 4) D_{34}, 5) K_{64}, 6) N_{37} можно перемножить?
2. (ЮШМ) Чему равно $N = \lambda K$, если $K=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda = 7$? В ответ записать сумму всех элементов.
3. (ИЮБ) Вычислить определитель матрицы $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

4. (ИДБ) Из перечисленных систем определить, какая система несовместна:

1. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$; 2. $\begin{cases} x_1 - x_2 = -5 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$; 3. $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 = 0 \end{cases}$; 4. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 4x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases}$.

5. (ГШГ) Какие из перечисленных матриц 1) B_{53}, 2) C_{45}, 3) D_{43}, 4) K_{35}, 5) M_{41}, 6) N_{45} могут быть транспонированными к матрице A_{54}?

Вариант 3

1. (ГЭЛ) Найти произведение AB матриц $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. В ответ записать сумму элементов первой строки.

2. (ШБК) Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. (ФПШ) Какие из перечисленных матриц 1) K_{31}, 2) D_{22}, 3) M_{35}, 4) N_{32}, 5) C_{15} можно перемножить?

4. (КСА) Какие элементы составляют в матрице $K = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ побочную диагональ? Ответ записать в виде суммы элементов.

5. (ЮМФ) Вычислить определитель матрицы $S = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 6 & -1 \\ 2 & 2 & -8 & 5 \end{pmatrix}$.

Вариант 4

1. (ЖКБ) Дана матрица $K=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 3 & 4 & 0\\ 2 & 5 & -3\end{pmatrix}$, запишите сумму элементов третьей строки матрицы K^T.

2. (ЖСД) Найти ранг матрицы $A=\begin{pmatrix}4 & 0 & -8 & 0\\ 2 & 0 & -4 & 0\\ 1 & 0 & -2 & 0\\ 3 & 0 & -6 & 0\end{pmatrix}$.

3. (ЮШМ) Какие элементы составляют главную диагональ матрицы $A=\begin{pmatrix}2 & 5 & -8 & 4\\ 3 & -1 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 0 & 4\\ 5 & 7 & 6 & -1\end{pmatrix}$? Ответ записать в виде суммы элементов.

4. (ЖСД) Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 5 & 3\\ 1 & 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 8\\ 2 & 3 & 0\end{pmatrix}$. Вычислить элемент a_{21} матрицы AB.

5. (ЖГА) Дана матрица $C=\begin{pmatrix}5 & 3\\ -1 & -4\end{pmatrix}$. Найти элемент a_{12} матрицы C^{-1}.

Вариант 5

1. (ЭФМ) Вычислить определитель матрицы $S=\begin{pmatrix}-\sqrt{a} & a\\ 1 & \sqrt{a}\end{pmatrix}$.

2. (ЭШК) Чему равен размер матрицы $C=A_{24}\cdot B_{42}$? Ответ записать в виде $a\times b$.

3. (ЛЭЛ) Какие элементы составляют главную диагональ матрицы $D=\begin{pmatrix}-4 & 8 & 2 & 0\\ 5 & 1 & -3 & 2\\ -1 & 2 & 0 & 11\\ 9 & 2 & 2 & 3\end{pmatrix}$? Ответ записать в виде суммы элементов.

4. (ШБГ) Найти матрицу обратную матрице $S=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. В ответ записать элементы первой строки через запятую.

5. (ЖИД) Какие из перечисленных матриц 1) M_{72}, 2) N_{52}, 3) K_{11}, 4) L_{13}, 5) P_{42}, 6) R_{43} можно перемножить между собой?

Вариант 6

1. (ЮМА) Вычислить определитель матрицы $K=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

2. (МС) Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}$. Вычислить элемент a_{22} матрицы CA.

3. (КИ) Какие элементы составляют побочную диагональ матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & -8 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 5 & 7 & 6 & -1 \end{pmatrix}$. Ответ записать в виде суммы элементов.

4. (ЮБ) Какие из перечисленных матриц 1) G_{11}, 2) F_{12}, 3) J_{53}, 4) B_{42}, 5) R_{43} можно перемножить между собой?

5. (ЮА) Вычислить $4B+5C$, если $C=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. В ответ записать сумму полученных элементов.

Вариант 7

1. (ШЦ) Чему равен размер матрицы $C=A_{42}\cdot B_{24}$? Ответ записать в виде $a\times b$.

2. (ЖС) Дана матрица $K=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$, запишите сумму элементов третьей строки матрицы K^T.

3. (КИ) Вычислить определитель матрицы $L = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. (ЮБ) Какие из перечисленных матриц 1) A_{43}, 2) H_{35}, 3) W_{62}, 4) N_{42}, 5) L_{65} можно перемножить между собой?

5. (СС) Из перечисленных систем определить, какая система несовместна:
1. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 4x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases}$; 2. $\begin{cases} x_1 - x_2 = -5 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$; 3. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$; 4. $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 = 0 \end{cases}$.

Вариант 8

1. (КА) Какие элементы составляют побочную диагональ матрицы $D = \begin{pmatrix} -4 & 8 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 11 \\ 9 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$? Ответ записать в виде суммы элементов.

2. (ЦС) Найти сумму матриц $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. В ответ записать сумму всех элементов.

3. (ИИ) Даны матрицы $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 8 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}$. Вычислить элемент a_{23} матрицы BC.

4. (СС) Вычислить определитель матрицы $S = \begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix}$.

5. (ЖМ) Чему равно $V = \lambda E$, если $E = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\lambda = 3$? В ответ записать сумму всех элементов.

Вариант 9

1. (ГФ) Чему равен размер матрицы $C = A_{43} \cdot B_{31}$? Ответ записать в виде $a \times b$.

2. (КИ) Вычислить определитель матрицы $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 8 \end{pmatrix}$.

3. (ДС) Дана матрица $C = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$. Найти элемент a_{21} матрицы C^{-1}.

4. (ДЛ) Какие из перечисленных матриц 1) G_{31}, 2) F_{22}, 3) J_{35}, 4) B_{32}, 5) R_{15} можно перемножить между собой?

5. (ЖЮ) Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 8 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Вычислить элемент a_{21} матрицы BA.

Вариант 10

1. (КА) Найти сумму матриц $A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. В ответ записать сумму всех элементов.

2. (ЦС) Даны матрицы $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 8 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Вычислить элемент a_{13} матрицы BD.

3. (ДЛ) Какие из перечисленных матриц 1) G_{31}, 2) F_{22}, 3) J_{35}, 4) B_{32}, 5) R_{15} можно перемножить между собой?

4. (ЖМ) Вычислить определитель матрицы $D = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

5. (КС) Дана матрица $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, запишите сумму элементов второго столбца матрицы B^T.

1.7. Контрольная работа

1.7.1. Вычислить (в ответ записать элементы первой строки через запятую):

1. (МДЖ) $$4\cdot\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 2\\ 3 & 6 & 7\end{bmatrix}^2+3\cdot\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 0\\ 0 & 5 & 4\end{bmatrix};$$

2. (ШДФ) $$6\cdot\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 1\end{bmatrix}^2-3\cdot\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 3 & 3 & 4\\ 0 & -1 & 5\end{bmatrix};$$

3. (ЮКА) $$4\cdot\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 4 & 3 & -1\\ 0 & 2 & 3\end{bmatrix}-6\cdot\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 1\\ 2 & 3 & 0\end{bmatrix}^2;$$

4. (САБ) $$6\cdot\begin{bmatrix}2 & 5 & 4\\ 3 & 2 & -1\\ 4 & 3 & 0\end{bmatrix}^2-5\cdot\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 3\end{bmatrix};$$

5. (СБЭ) $$3\cdot\begin{bmatrix}3 & 6 & 5\\ 4 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}+6\cdot\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}^2;$$

6. (ДСИ) $$4\cdot\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix}^2-5\cdot\begin{bmatrix}1 & 3 & 4\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix};$$

7. (АБЭ) $$3\cdot\begin{bmatrix}4 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}^2+4\cdot\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 1\end{bmatrix};$$

8. (ДСД) $$4\cdot\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 3\end{bmatrix}^2-3\cdot\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ 4 & 5 & -6\end{bmatrix};$$

9. (БЛБ) $5\cdot\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -2 & 1 & 0\\ 3 & -4 & 2\end{bmatrix}^2+5\cdot\begin{bmatrix}1 & 3 & -1\\ 4 & -2 & 1\\ 0 & 3 & 2\end{bmatrix};$

10. (ПГФ) $\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 3\\ 0 & 3 & -1\end{bmatrix}^2+2\cdot\begin{bmatrix}1 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}^2;$

11. (ИПФ) $3\cdot\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 3\\ 2 & 3 & -1\end{bmatrix}^2-\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix};$

12. (ЛБИ) $5\cdot\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & -3 & 2\end{bmatrix}^2+4\begin{bmatrix}-2 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & -3 & 1\end{bmatrix};$

13. (ИЖБ) $3\cdot\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & -1\\ 3 & 1 & 1\end{bmatrix}^2+5\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 3\end{bmatrix};$

14. (СЭД) $4\cdot\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -3 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}^2-3\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 3 & 3 & 0\end{bmatrix};$

15. (ПИМ) $3\cdot\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}^2+4\cdot\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ 3 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix};$

16. (КЖЖ) $3\cdot\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 3 & -1\\ -2 & 1 & 0\end{bmatrix}^2-3\cdot\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 1\end{bmatrix};$

17. (ЭМА) $5\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 0\end{bmatrix}^2+4\cdot\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix};$

18. (СПБ) $3\cdot\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 0 & 2\\ 3 & -1 & -1\end{bmatrix}^2+5\cdot\begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix};$

19. (КЮИ) $2\cdot\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 0\end{bmatrix}^2+3\cdot\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$;

20. (ГМС) $4\cdot\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 0 & 2\\ 5 & -1 & -1\end{bmatrix}^2+5\cdot\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 2 & -3\end{bmatrix}$.

1.7.2. Решить систему линейных уравнений тремя способами (ответ записать в виде $x;y;z$).

1. (МЭЛ) $\begin{cases}x+y+z=2\\ 2x+3y+z=7\\ 4x+2y+z=3\end{cases}$;

2. (САК) $\begin{cases}x-y-z=2\\ 4x+2y+6z=10\\ 3x-3y+5z=-2\end{cases}$;

3. (ИКК) $\begin{cases}2x-y+z=7\\ x+2y-z=7\\ -4x+y+3z=-11\end{cases}$;

4. (ГПШ) $\begin{cases}x+y+2z=7\\ 3x-2y+z=-4\\ 5x-y+3z=1\end{cases}$;

5. (АДЮ) $\begin{cases}3x-y+4z=4\\ 4x+y-z=17\\ 8x+3z=24\end{cases}$;

6. (БГК) $\begin{cases}x-y+z=2\\ 3x-2y+2z=4\\ 5x-3y+z=6\end{cases}$;

7. (АИБ) $\begin{cases}3x+2y-3z=7\\ x+y+z=-4\\ 2x+y=-1\end{cases}$;

8. (ЮБФ) $\begin{cases}3x+2y+z=4\\ x-4y+2z=-1\\ 5x-2y+z=4\end{cases}$;

9. (ГЦК) $\begin{cases}x+3y-z=3\\ 2x+5y+3z=9\\ 3x+2y+4z=2\end{cases}$;

10. (ЮШШ) $\begin{cases}6x+y-2z=2\\ x+y-z=0\\ x+2y-3z=-4\end{cases}$;

11. (СЮБ) $\begin{cases}x-2y+5z=-35\\ 2x+y-3z=33\\ 5x-y+2z=8\end{cases}$;

12. (ИМК) $\begin{cases}7x-y-z=26\\ x+2y-3z=-7\\ 3x+y-2z=2\end{cases}$;

13. (ЮЦЭ) $\begin{cases}4x+y-z=3\\ x+3y-4z=-7\\ 3x+2y-3z=-4\end{cases}$;

17. (КЖЮ) $\begin{cases}4x+y-z=5\\ 2x+2y-3z=-8\\ 2x+3y-4z=-11\end{cases}$;

14. (АКБ) $\begin{cases} 7x + y - 3z = 8 \\ x + 2y + z = 3 \\ 5x - y - 4z = -3 \end{cases}$;

15. (ИДЦ) $\begin{cases} x + 2y - z = 18 \\ 2x - y + 3z = -9 \\ 4x + y + 2z = 7 \end{cases}$;

16. (ЛЖЖ) $\begin{cases} 2x + 2y - 3z = -4 \\ 3x - 4y + 5z = 18 \\ x - 2y + 2z = 6 \end{cases}$;

18. (ЦФГ) $\begin{cases} 3x - y + z = -4 \\ 6x + 2y - 4z = 28 \\ 3x + y - 3z = 18 \end{cases}$;

19. (АФМ) $\begin{cases} -2x + y + z = -3 \\ x - 3y - z = -10 \\ -3x + 2y = -7 \end{cases}$;

20. (СШИ) $\begin{cases} 4x + 4y - 5z = 2 \\ -1x - 4y + z = -1. \\ 3x + 5y - 6z = -3 \end{cases}$

1.7.3. Решить систему линейных однородных уравнений, записать фундаментальную систему решений:

1. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$;

2. $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 7x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$;

3. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$;

4. $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$;

5. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$;

11. $\begin{cases} 6x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 11x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$;

6. $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 6x_4 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$;

7. $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 - 11x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$;

8. $\begin{cases} 7x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 6x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$;

9. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_1 - 6x_2 - x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$;

10. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$;

16. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$;

12. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$;

13. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 0 \end{cases}$;

14. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$;

15. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$;

17. $\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$;

18. $\begin{cases} 7x_1 + x_2 - 6x_3 - x_4 = 0 \\ 6x_1 - x_2 - 5x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$;

19. $\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$;

20. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 6x_1 - x_2 - 5x_3 - 2x_4 = 0 \\ 7x_1 + x_2 - 6x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$.

ГЛАВА II. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

2.1. Векторы. Линейные операции над векторами

Вектор $\vec{a}\left(\overrightarrow{AB}\right)$ – это направленный отрезок, т. е. отрезок, имеющий определённую длину и определённое направление (рис. 2.1). Точка A – начало вектора, точка B – конец вектора.

Длина (модуль) вектора − $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\vec{a}\right|$.

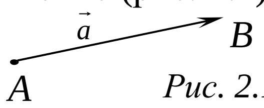


Рис. 2.1

Два вектора *равны*, если они одинаково направлены и имеют равные длины.

Вектор $\overrightarrow{BA}$ называется *противоположным* вектору $\overrightarrow{AB}$.

Вектор, длина которого равна нулю, называется *нулевым*.

Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным* (или ортом).

Два ненулевых вектора называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Три ненулевых вектора называются *компланарными*, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Линейная комбинация векторов − вектор $\vec{a}$, определяемый по формуле $\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \vec{e_i}$, где коэффициенты λ_i - произвольные числа.

Система векторов называется *линейно независимой,* если $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \vec{e_i} = 0 \Leftrightarrow \lambda_i = 0$ при $i = \overline{1;n}$.

Базис − множество линейно независимых векторов, с помощью линейных комбинаций которых могут быть представлены все его остальные векторы.

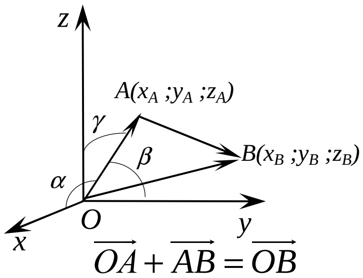
Ортонормированный базис − базис, все векторы которого единичные и взаимно ортогональные.

Координаты вектора в выбранном базисе − коэффициенты линейной комбинации базисных векторов, равной данному вектору.

Проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось l (обозначение $\text{пр}_l\overrightarrow{AB}$) называется число, равное длине вектора $\overrightarrow{A'B'}$, взятое со знаком «плюс», если направление вектора $\overrightarrow{A'B'}$ совпадает с направлением оси l, и со знаком «минус» в противном случае, где A' и B' соответственно проекции точек A и B на ось l.

Таблица 2.1.1

Основные формулы векторной алгебры

№	*Наименование*	*Вычисление в векторной форме*	*Вычисление в координатной форме*
1.	Координаты вектора	 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$	$\overrightarrow{AB}\{x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A\}$
2.	Вектор	$\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$ $\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$ $\vec{c}=x_3\vec{i}+y_3\vec{j}+z_3\vec{k}$	$\vec{a}=\{x_1;y_1;z_1\}$ $\vec{b}=\{x_2;y_2;z_2\}$ $\vec{c}=\{x_3;y_3;z_3\}$
3.	Модуль вектора	$\lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{\vec{a}^2}$	$\lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$
4.	Направляющие косинусы вектора $\vec{a}$	$\cos\alpha=\frac{x_1}{\lvert\vec{a}\rvert}$ $\cos\beta=\frac{y_1}{\lvert\vec{a}\rvert}$ $\cos\gamma=\frac{z_1}{\lvert\vec{a}\rvert}$	$\cos\alpha=\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}$ $\cos\beta=\frac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1}}$ $\cos\gamma=\frac{z_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1}}$
5.	Орт вектора	$\vec{a}^0=\frac{\vec{a}}{\lvert\vec{a}\rvert}$	$\vec{a}^0=\{\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma\}$
6.	Разложение вектора в базисе	на плоскости $\vec{c}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$ в пространстве $\vec{d}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$	$\begin{cases}\alpha x_1+\beta x_2=x_3\\ \alpha y_1+\beta y_2=y_3\end{cases}$ $\begin{cases}\alpha x_1+\beta x_2+\gamma x_3=x_4\\ \alpha y_1+\beta y_2+\gamma y_3=y_4\\ \alpha z_1+\beta z_2+\gamma z_3=z_4\end{cases}$
7.	Условие равенства	$\vec{a}=\vec{b}$	$x_1=x_2;y_1=y_2;z_1=z_2$
8.	Условие коллинеарности	$\vec{b}=\lambda\vec{a}$	$\frac{x_2}{x_1}=\frac{y_2}{y_1}=\frac{z_2}{z_1}$
9.	Сложение (разность) векторов	$\vec{a}\pm\vec{b}$	$\{x_1\pm x_2;y_1\pm y_2;z_1\pm z_2\}$

Окончание табл. № 2.1.1

№	*Наименование*	*Вычисление в векторной форме*	*Вычисление в координатной форме*
10.	Умножение на число	$\alpha\vec{a}$	$\alpha\vec{a}=\{\alpha x_1;\alpha y_1;\alpha z_1\}$
11.	Деление отрезка в данном отношении	точка $M(x_M;y_M;z_M)$ делит отрезок AB в отношении λ, если $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$. $A(x_A;y_A;z_A),B(x_B;y_B;z_B)$	$x_M=\dfrac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda}$, $y_M=\dfrac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda}$, $z_M=\dfrac{z_A+\lambda z_B}{1+\lambda}$

2.2. Произведения векторов: скалярное, векторное, смешанное

Скалярным произведением двух векторов $\vec{a},\vec{b}$ называется скаляр – число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними.

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который подчиняется следующим условиям:

- вектор $\vec{c}$ перпендикулярен плоскости перемножаемых векторов, т. е. $\vec{c}\perp\vec{a},\ \vec{c}\perp\vec{b}$;
- векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют правую тройку (вектор $\vec{c}$ направлен так, что если смотреть с его конца вдоль вектора, то поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ совершается против часовой стрелки);
- модуль вектора $\vec{c}$ численно равен площади параллелограмма, построенного на перемножаемых векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на его сторонах: $S_{паралл}=|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$.

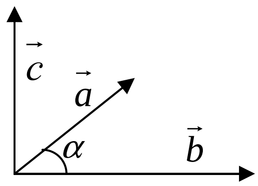
Смешанным произведением трёх векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\vec{a}$ на векторное произведение векторов $\left[\vec{b},\vec{c}\right]$.

Произведения векторов

$$\vec{a}=\{a_x;a_y;a_z\},\ \vec{b}=\{b_x;b_y;b_z\},\ \vec{c}=\{c_x;c_y;c_z\}$$

Скалярное *(число)*

$$\left(\vec{a};\vec{b}\right)=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha$$



$$a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

Векторное *(вектор)*

$$\left[\vec{a};\vec{b}\right]=\vec{c}$$

1) $\vec{c}\perp\vec{a},\ \vec{c}\perp\vec{b}$

2) $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – правая тройка

3) $\left|\left[\vec{a};\vec{b}\right]\right|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\alpha$

$$\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}.$$

Смешанное *(число)*

$$\left(\left[\vec{a};\vec{b}\right];\vec{c}\right)$$

$$\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$$

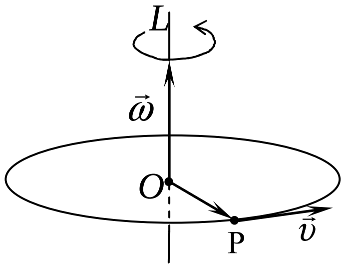
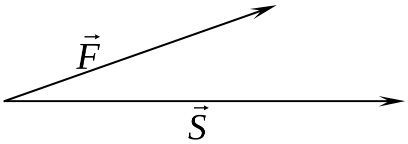
Таблица 2.2.1

Свойства произведений векторов

Скалярное	*Векторное*	*Смешанное*
$\left(\vec{a};\vec{b}\right)=\left(\vec{b};\vec{a}\right)$	$\left[\vec{a};\vec{b}\right]=-\left[\vec{b};\vec{a}\right]$	$\left(\left[\vec{a};\vec{b}\right]\cdot\vec{c}\right)=\left([\vec{c};\vec{a}]\cdot\vec{b}\right)$
$(\vec{a};\vec{b})=0 <=> \vec{a}\perp\vec{b}$	$\left[\vec{a};\vec{b}\right]=0 <=> \vec{a}\parallel\vec{b}$	$\left(\left[\vec{a};\vec{b}\right]\cdot\vec{c}\right)=\left(-\left[\vec{b};\vec{a}\right]\cdot\vec{c}\right)$
$(\vec{a};\vec{b})=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}| <=> \vec{a}\parallel\vec{b}$	$\left[\vec{a};\vec{b}\right]=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}| <=> \vec{a}\perp\vec{b}$	$\left(\left[\vec{a};\vec{b}\right];\vec{c}\right)=0$ $\Updownarrow$ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – компланарные
$\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$, $\lambda\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$ $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^2$		

Таблица 2.2.2

Приложения произведений векторов

Скалярное	*Векторное*	*Смешанное*
$\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{\vec{a}^2}$	$S_{пар.} = \left\lvert\left[\vec{a};\vec{b}\right]\right\rvert$	$\left(\left[\vec{a};\vec{b}\right];\vec{c}\right) > 0$ $\vec{a},\vec{b},\vec{c} - пр.$
$пр_{\vec{b}}\,\vec{a} = \dfrac{(\vec{a};\vec{b})}{\lvert\vec{b}\rvert}$	$S_{\vartriangle} = \dfrac{1}{2}S_{пар.}$	$\left\lvert\left(\left[\vec{a};\vec{b}\right];\vec{c}\right)\right\rvert = V_{пар-да}$
$\left(\vec{a};\vec{b}\right) = 0; \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$	 $\vec{\upsilon} = \vec{\omega}\times\overrightarrow{OP}$ υ − скорость точки P кругового диска, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω вокруг перпендикулярной ему оси вращения L, проходящей через его центр O.	$V_{пир.} = \dfrac{1}{6}V_{пар-да}$
$\cos\alpha = \dfrac{\left(\vec{a};\vec{b}\right)}{\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert}$		
 $A = \vec{F}\cdot\vec{S}$ A − работа силы F, произведённая этой силой при перемещении тела на пути $\lvert S\rvert$.		
	$\vec{F} = q\vec{\upsilon}\times\vec{B}$ F − сила Лоренца, действующая на движущуюся со скоростью υ частицу с электрическим зарядом q, помещённую в магнитное поле с индукцией B.	

2.3. Опорные задачи

2.3.1. В треугольнике ABC проведена медиана AD. Выразить вектор $\overrightarrow{AD}$ через векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ (рис. 2.2).

Решение. Очевидно, что вектор $\overrightarrow{BC}$ есть разность векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}$, т. е. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \vec{c} - \vec{b}$. Тогда $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{b}) = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{b})$. Следовательно,

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \vec{b} + \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{b}) = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{b}).$$

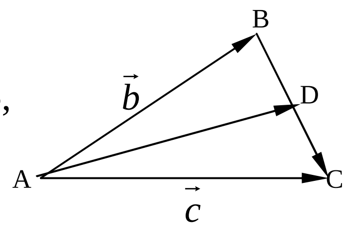


Рис. 2.2

2.3.2. Доказать, что точки $A(4;4;3)$, $B(1;-2;0)$ и $C(-1;-6;-2)$ лежат на одной прямой.

Решение. Убедимся, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны. Это и будет означать принадлежность точек A, B, C одной прямой. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB} = \{-3;-6;-3\}$, $\overrightarrow{AC} = \{-5;-10;-5\}$. Так как координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ пропорциональны $\frac{-3}{-6} = \frac{-6}{-10} = \frac{-3}{-5}$, то эти векторы коллинеарны.

2.3.3. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Найти длину вектора $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$.

Решение. Согласно свойству скалярного произведения, квадрат длины вектора $\vec{c}$ равен его скалярному квадрату. Найдём скалярный квадрат вектора $\vec{c}$

$$|\vec{c}|^2 = 4\vec{a}^2 - 12|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|\cos\varphi + 9|\vec{b}|^2 = 4 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 \cdot 1\cos\frac{\pi}{3} + 9 \cdot 1^2 = 13.$$

Следовательно, $\vec{c} = \sqrt{13}$.

2.3.4. Найти площадь треугольника с вершинами $A(2;2;2)$, $B(1;3;3)$, $C(3;4;2)$.

Решение. Площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, т. е. половине модуля векторного произведения этих векторов. Так как $\overrightarrow{AB}$={-1;1;1},

$\overrightarrow{AC}=\{1;2;0\}$, то $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{vmatrix}=-2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}.$ Отсюда

$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(-2)^2+1^2+(-3)^2}=\sqrt{14}$ и $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\sqrt{14}\approx 1{,}87$(кв.ед).

2.3.5. Найти объём тетраэдра с вершинами в точках $A(-1;1;0)$, $B(2;-2;1)$, $C(3;1;-1)$, $D(1;0;-2)$.

Решение. Рассмотрим векторы $\vec{a}=\overrightarrow{AB}=\{3;-3;1\}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}=\{4;0;-1\}$, $\vec{c}=\overrightarrow{AD}=\{2;-1;-2\}$. Очевидно, что искомый объём тетраэдра равен $\dfrac{1}{6}$ объёма параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$. Таким образом,

$$V_{\text{тетр.}}=\frac{1}{6}\left|(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})\right|=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}3 & -3 & 1\\ 4 & 0 & -1\\ 2 & -1 & -1\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\left|-4\cdot\begin{vmatrix}-3 & 1\\ -1 & -2\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}3 & -3\\ 2 & -1\end{vmatrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{6}\left|-4\cdot 7+3\right|=\frac{25}{6}(\text{куб. ед.}).$$

2.3.6. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi=\dfrac{2\pi}{3}$. Зная, что $|\vec{a}|=10$ и $|\vec{b}|=2$, вычислить $\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\cdot\left(3\vec{a}-\vec{b}\right)$.

Решение. Согласно свойствам скалярного произведения $\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\cdot\left(3\vec{a}-\vec{b}\right)=3\vec{a}^2+5\vec{a}\vec{b}-2\vec{b}^2=3|\vec{a}|^2+5|\vec{a}||\vec{b}|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)-2|\vec{b}|^2=$

$$=3\cdot 100+5\cdot 10\cdot 2\cos\frac{2\pi}{3}-2\cdot 4=300-50-8=242.$$

2.3.7. Даны три вектора $\vec{a}=\{-3;-4\}$, $\vec{b}=\{5;-6\}$, $\vec{c}=\{-11;-2\}$. Получить разложение вектора $\vec{c}$ по базису векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Решение. Легко проверить, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, поэтому они образуют базис на плоскости и можно записать вектор $\vec{c}$ в виде их линейной комбинации $\vec{c}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$.

Разложить вектор по базису – значит найти координаты вектора в этом базисе. Записываем систему уравнений для определения α и β − координат вектора $\vec{c}$.

$$\begin{cases} -11=\alpha\cdot(-3)+\beta\cdot 5 \\ -2=\alpha\cdot(-4)+\beta\cdot(-6) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=2 \\ \beta=-1 \end{cases}$$. Таким образом, $\vec{c}=2\cdot\vec{a}-1\cdot\vec{b}$.

2.3.8. Даны координаты вершин треугольника ABC: $A(1;-2;1)$, $B(0;-3;2)$, $C(2;0;1)$. Найдите площадь треугольника ABC и длину его высоты *AH*.

Решение. Известно, что величина $\left|\left[\vec{a};\vec{b}\right]\right|$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, поэтому площадь треугольника $S_{\vartriangle ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|$.

Так как $\overrightarrow{AB}=\{-1;-1;1\}$, $\overrightarrow{AC}=\{1;2;0\}$,

то $\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{matrix}\right\|=\sqrt{2^2+1^2+1^2}=\sqrt{6}$, $\qquad S_{\vartriangle ABC}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Поскольку $S_{\vartriangle ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AH}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|$, то $\left|\overrightarrow{AH}\right|=\frac{2S}{\left|\overrightarrow{BC}\right|}$.

$\overrightarrow{BC}=\{2;3;-1\}$, $\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{4+9+1}=\sqrt{14}$, $AH=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{14}}=\sqrt{\frac{3}{7}}$.

2.3.9. Треугольная пирамида $ABCD$ задана координатами своих вершин: $A(-5;1;1)$; $B(1;-2;-2)$; $C(1;-1;-3)$; $D(-1;-4;-1)$. Вычислите объём этой пирамиды, длину её высоты CH, косинус угла α между ребрами AB и AD, $\text{пр}_{\overline{\text{AB}}}\overrightarrow{AD}$.

Решение. Известно, что объём параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, равен $V=\left|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right|$; объём пирамиды, рёбрами которой являются векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, равен $V_{\text{пир}}=\frac{1}{6}\left|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right|$. В нашей задаче $V_{\text{пир}}=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD}\right)\right|$. Так как $\overrightarrow{CB}=\{0,-1,1\}$, $\overrightarrow{CA}=\{-6,2,4\}$, $\overrightarrow{CD}=\{-2,-3,2\}$, то

$$\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD}\right)=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -6 & 2 & 4 \\ -2 & -3 & 2 \end{vmatrix}=18 \text{ и } V_{\text{пир}}=\frac{18}{6}=3(\text{куб.ед.}).$$

Объём пирамиды $V=\frac{1}{3}S\,h$, тогда $h=\frac{3V}{S}$. Так как требуется найти высоту CH, то величиной S является площадь грани ADB, которую находим $S=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]\right|$.

$$\overrightarrow{AB}=\{6,-3,-3\},\overrightarrow{AD}=\{4,-5,-2\},\ S=\frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 6 & -3 & -3\\ 4 & -5 & -2\end{vmatrix}\right\|=\frac{1}{2}\cdot 9\sqrt{1+4}=\frac{9}{2}\sqrt{5};$$

$$CH=h=\frac{3\cdot 3\cdot 2}{9\sqrt{5}}=0{,}4\sqrt{5}.$$

Косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ находим по формуле

$$\cos\varphi=\frac{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AD}\right|}=\frac{6\cdot 4+(-3)(-5)+(-3)(-2)}{\sqrt{36+9+9}\sqrt{16+25+4}}=\frac{\sqrt{30}}{6}.$$

Проекцию вектора $\overrightarrow{AD}$ на направление, определяемое вектором $\overrightarrow{AB}$, находим по формуле

$$\text{пр}_{\overrightarrow{\text{AB}}}\overrightarrow{AD}=\frac{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\frac{24+15+6}{\sqrt{36+9+9}}=\frac{5\sqrt{6}}{2}.$$

2.4. Задачи для самостоятельной работы

2.4.1. В параллелограмме $ABCD$ даны векторы $\overrightarrow{AB}=\vec{p}$ и $\overrightarrow{AD}=\vec{q}$. Выразить через $\vec{p}$ и $\vec{q}$ векторы (в ответ записать через запятую коэффициенты в разложении вектора): а) (ШФЛ) $\overrightarrow{BC}$; б) (АФГ) $\overrightarrow{CB}$; в) (ДИШ) $\overrightarrow{CD}$; г) (ПЛБ) $\overrightarrow{AC}$; д) (ЖКС) $\overrightarrow{BD}$; е) (ЦБС) $\overrightarrow{DB}$.

2.4.2. В треугольнике ABC сторона AB разделена точками D и E на три равных отрезка: $AD=DE=EB$. Найти векторы а) (АКШ) $\overrightarrow{CD}$ и б) (ЮБА) $\overrightarrow{CE}$, если $\overrightarrow{CA}=\vec{a},\ \overrightarrow{CB}=\vec{b}.$

2.4.3. В равнобедренном треугольнике ABC: $\overrightarrow{AB}=\vec{b},\ \overrightarrow{AC}=\vec{c}$. Выразить вектор $\vec{h}$, направленный по высоте AH, через векторы $\vec{b},\vec{c}$.

2.4.4. Дан треугольник ABC, в котором $\overrightarrow{AB}=\vec{b},\ \overrightarrow{AC}=\vec{a}$. Точки M,N,P

– середины сторон AC, BC, AB. Требуется выразить векторы $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AN}, \overrightarrow{CP}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2.4.5. Проверить, что точки $A(2;1;0)$, $B(0;4;-3)$, $C(-2;3;-5)$ и $D(2;-3;1)$ являются вершинами трапеции. Найти длины её оснований: а) (ДЛФ) AB; б) (ШГК) CD.

2.4.6. Даны векторы $\vec{a}=\{-3;4;-1\}$, $\vec{b}=\{-1;2;3\}$, $\vec{c}=\{-4;-2;1\}$. Найти векторы $4\vec{a}+3\vec{b}-2\vec{c}$, $-5\vec{a}+4\vec{b}+\vec{c}$.

2.4.7. Проверить, что треугольник с вершинами $A(-1;-5;-2)$, $B(-4;0;-2)$, $C(-7;-4;-3)$ является равнобедренным.

2.4.8. (ГЦД) Даны три последовательные вершины параллелограмма: $A(1;-2;3)$, $B(3;2;1)$, $C(6;4;4)$. Найти его четвёртую вершину D.

2.4.9. Доказать, что четырёхугольник с вершинами $A(3;2;-3)$, $B(2;4;6)$, $C(8;3;4)$, $D(9;1;-5)$ есть параллелограмм. Найти длины его сторон: а) (КЮЮ) AB; б) (ДДЮ) CD.

2.4.10. (СБД) Найти угол A в треугольнике с вершинами $A(1;2;-1)$, $B(5;5;11)$ и $C(13;18;20)$.

2.4.11. (КЛС) Дано: $\vec{a}=\{1;-2;2\}, \vec{b}=\{2;-2;-1\}$. Найти $2\vec{a}^2-4\vec{a}\vec{b}+5\vec{b}^2$.

2.4.12. (ШПЮ) Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\dfrac{2\pi}{3}$. Найти длину вектора $\vec{c}=5\vec{a}+3\vec{b}$, если $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=4.$

2.4.13. Даны векторы $\vec{a}=\{3;-6;2\}$, $\vec{b}=\{-2;-1;2\}$. Найти проекции вектора $\vec{c}=2\vec{a}-5\vec{b}$ на векторы (БЖМ) $\vec{a}$, (ФЦФ) $\vec{b}$.

2.4.14. Упростить выражения:

1) $(2\vec{a}-3\vec{b})\times(\vec{a}+4\vec{b})$; 2) $(3\vec{i}-4\vec{j}+5\vec{k})\times(2\vec{i}+6\vec{j}-\vec{k})$.

2.4.15. Даны два вектора $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + \vec{j} - 6\vec{k}$. Найти:

1) (ФЖИ) скалярное произведение векторов;
2) длины векторов: (ШЦЖ) $\vec{a}$; (ФМЦ) $\vec{b}$;
3) (СЮК) косинус угла между векторами;
4) (СЭС) проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$.

2.4.16. Даны два вектора $\vec{a} = 2\vec{m} + \vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} - 3\vec{n}$, где $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 3$, $\left(\widehat{\vec{m},\vec{n}}\right) = 120^0$.

Найти:

1) (ЮИГ) скалярное произведение векторов;
2) длины векторов: (АМС) $\vec{a}$; (ШЭЭ) $\vec{b}$;
3) (СИК) косинус угла между векторами;
4) (КШС) проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$.

2.4.17. (ИГС) Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \{3;-2;6\}$, и $\vec{b} = \{6;3;-2\}$.

2.4.18. (ЛИЦ) Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{m} + 4\vec{n}$ и $4\vec{m} + \vec{n}$, если $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$ и $(\vec{m},\vec{n}) = 30^0$.

2.4.19. (ЦИЛ) Найти косинус внутреннего угла A в треугольнике ABC, если даны координаты его вершин: $A(2;3;-7)$, $B(-1;3;-1)$, $C(2;-6;5)$.

2.4.20. (ЛЖА) Найти вектор $\vec{b}$, коллинеарный вектору $\vec{a} = \{1;-1;2\}$, если известно их скалярное произведение $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = 3$.

2.4.21. (ФФФ) Сила $\vec{F} = \{2;-4;5\}$ приложена к точке $O(0;2;1)$. Определить момент этой силы относительно точки $A(-1;2;3)$.

2.4.22. (ПСГ) Даны векторы $\vec{a} = \{3;5;-1\}$, $\vec{b} = \{0;-2;1\}$, $\vec{c} = \{-2;2;3\}$. Найти $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c}$.

2.4.23. (МЖЛ) Дан треугольник с вершинами $A(9;-9;13)$, $B(7;-13;17)$, $C(17;-3;17)$. Найти длину высоты, проведённой из вершины C.

2.4.24. (ЖМЦ) Найти векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\vec{a} = 2\vec{m} + 3\vec{n}$, $\vec{b} = \vec{n} - 4\vec{m}$, $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 1, \alpha = \left(\widehat{\vec{m},\vec{n}}\right) = 30^0$, и его модуль.

2.4.25. Показать, что векторы $\vec{a} = \{1;2;2\}$, $\vec{b} = \{2;5;7\}$ и $\vec{c} = \{1;1;-1\}$ компланарны.

2.4.26. (ЦИЭ) Доказать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют базис в пространстве и найти координаты вектора $\vec{x}$ в этом базисе. $\vec{a} = \{2;3;1\}$, $\vec{b} = \{-1;2;-2\}$, $\vec{c} = \{1;2;1\}$, $\vec{x} = \{2;-2;1\}$.

2.4.27. Вычислить $\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)\left(\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}\right)\left(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}\right)$.

2.4.28. (ПАБ) Вычислить объём тетраэдра с вершинами в точках $A(-4;-4;-3)$, $B(-2;-1;1)$, $C(2;-2;-1)$ и $D(-1;3;-2)$.

2.4.29. (ЮМД) Вычислить объём параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = \{3;2;1\}$, $\vec{b} = \{1;0;-1\}$ и $\vec{c} = \{1;-2;1\}$.

2.4.30. Даны векторы $\vec{a} = \{7;-2;-4\}$ и $\vec{b} = \{1;-2;2\}$. Найти:

а) (ГБД) их векторное произведение;
б) (ИАМ) площадь построенного на них параллелограмма;
в) (БЭК) синус угла между этими векторами.

2.4.31. (ДКД) Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$ и $\vec{b} = 2\vec{m} + \vec{n}$, где $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$ и $(\vec{m},\vec{n}) = \dfrac{\pi}{3}$.

2.4.32. (ММГ) Найти объём параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$, если известно: $|\vec{a}| = 3$; $|\vec{b}| = 6$; $|\vec{c}| = 2$; $\alpha = \left(\widehat{\vec{c},\vec{a}}\right) = 135^0$; $\varphi = \left(\widehat{\vec{b},[\vec{c},\vec{a}]}\right) = 45^0$.

2.4.33. Доказать, что четыре точки $A(4;-3;-5)$, $B(2;-3;1)$, $C(-1;1;4)$, $D(5;5;2)$ лежат в одной плоскости.

2.4.34. (ФГФ) При каком значении α векторы $\vec{p}=\vec{c}+\alpha\vec{d}$ и $\vec{r}=2\vec{c}+3\vec{d}$ перпендикулярны, если $|\vec{c}|=|\vec{d}|=4$, $\left(\widehat{\vec{c},\vec{d}}\right)=120^0$?

2.4.35. (ЛГК) В вершинах $A(5;\,5;\,7)$, $B(1;\,1;\,3)$, $C(-3;4;\,5)$ треугольника ABC расположены материальные точки равной массы. Найти координаты центра масс этой системы точек.

2.4.36.* Вектор $\vec{a}$ составляет с осями Ox, Oy углы $\alpha=60^0$ и $\beta=120^0$. Найти его координаты, если $|\vec{a}|=2$.

2.4.37.* (БГК) Радиус – вектор точки $M\left(x;y;z\right)$ составляет с осью Ox угол $\alpha=60^0$, с осью Oz угол $\gamma=45^0$, длина вектора $\left|\overrightarrow{OM}\right|=8$, а координата $y>0$. Найти координаты точки M .

2.4.38.* (МЖГ) Найти вектор $\vec{x}$, перпендикулярный двум векторам $\vec{a}=\{2;1;2\}$ и $\vec{b}=\{3;-4;2\}$, при условии, что $|\vec{x}|=1$ и он образует с осью Ox тупой угол.

2.4.39.* Доказать, что если частица массой m с электрическим зарядом q со скоростью v попадёт в постоянное магнитное поле с магнитной индукцией B и векторы v и B неколлинеарны и неортогональны, то она будет двигаться по цилиндрической спирали. Вычислить радиус основания соответствующего прямого кругового цилиндра и расстояние между соседними витками спирали.

2.5. Проверьте себя

Вариант 1

1. (ЖГМ) В треугольнике ABC сторона AB разделена точкой M в отношении 1: 4, считая от точки A. Какой вид имеет разложение вектора $\overrightarrow{CM}$ по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$? (Укажите вариант ответа).

   1) $\frac{4}{5}\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b}$; 2) $4\vec{a} + \vec{b}$; 3) $\frac{4}{5}\vec{a} - \frac{1}{5}\vec{b}$;

   4) $\frac{1}{5}\vec{a} + \frac{4}{5}\vec{b}$; 5) $-\vec{a} + 4\vec{b}$.

2. (ЮЛГ) Найти сумму координат вектора $\vec{a}$, если единичный вектор $\vec{a}$ образует равные тупые углы с базисными ортами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

3. (ЮАФ) Даны векторы $\vec{a} = -2\vec{i} + \vec{j} - 8\vec{k}$, $\vec{b} = -4\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k}$. Найти проекцию вектора $\vec{a} - 2\vec{b}$ на ось вектора $\vec{c}$.

4. (ДШЛ) Найти скалярное произведение $\left(3\vec{a} - 4\vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right)$, если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ − единичные векторы, и $\left|\vec{a} - \vec{b}\right| = \sqrt{3}$.

5. (МДМ) Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} - \vec{b}$ и $2\vec{a} + \vec{b}$, если $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $\left|\vec{b}\right| = 1$, а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 60^{o}.

6. (МЮЛ) Найти смешанное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$, если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку взаимно перпендикулярных векторов и $|\vec{a}| = 3$, $\left|\vec{b}\right| = 3$, $|\vec{c}| = 2$.

7. (АБД) Найти объём тетраэдра с вершинами $A(2;3;1)$, $B(4;1;-2)$, $C(6;3;7)$, $D(-4;-3;7)$.

8. (ЖЭЭ) Найти значение α, при котором векторы $\vec{a} = \{2\alpha + 1; 3\alpha + 2; \alpha\}$, $\vec{b} = \{2;3;-1\}$, $\vec{c} = \{1;2;4\}$ компланарны.

9. (ЖЛМ) Вычислить работу силы $\vec{F} = \vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ при прямолинейном перемещении материальной точки из положения $A(-1;2;0)$ в положение $B(2;1;3)$.

Вариант 2

1. (ГИС) В треугольнике ABC сторона BC разделена точкой D в отношении 2:3, считая от точки B. Какой вид имеет разложение вектора $\overrightarrow{AD}$ по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$? (Укажите вариант ответа).
   1) $-\frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$; 2) $\frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$; 3) $2\vec{a} + 3\vec{b}$;
   4) $3\vec{a} - 2\vec{b}$; 5) $3\vec{a} + 2\vec{b}$.
2. (ПШЛ) Найти сумму координат вектора $\vec{a}$, если единичный вектор $\vec{a}$ образует с базисным ортом $\vec{i}$ угол 30°, а с базисными ортами $\vec{j}$ и $\vec{k}$ − равные острые углы.
3. (ШБЛ) Даны векторы $\vec{a} = -4\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 6\vec{j} + 8\vec{k}$ и $\vec{c} = 3\vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k}$. Найти проекцию вектора $\vec{b} + \vec{c}$ на ось вектора $\vec{a} - \vec{c}$.
4. (ДСС) Найти скалярное произведение $\left(\vec{a} + 2\vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} - \vec{b}\right)$, если $\left|\vec{a}\right| = 2$, $\left|\vec{b}\right| = \sqrt{3}$, и $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = 3$.
5. (АЛС) Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $2\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} + 2\vec{b}$, если $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| = 1$, а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 150°.
6. (СБЮ) Найти смешанное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$, если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку взаимно перпендикулярных векторов и $\left|\vec{a}\right| = 3$, $\left|\vec{b}\right| = 5$, $\left|\vec{c}\right| = 3$.
7. (ПЦЭ) Найти объём тетраэдра с вершинами $A(4;3;0)$, $B(-1;2;1)$, $C(3;4;1)$, $D(5;6;2)$.
8. (ЮИМ) Найти значение α, при котором векторы $\vec{a} = \{2-\alpha; 4\alpha+1; 1-\alpha\}$, $\vec{b} = \{2;-3;1\}$, $\vec{c} = \{1;2;-1\}$ компланарны.
9. (ЦИЮ) Вычислить работу силы $\vec{F} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ при прямолинейном перемещении материальной точки из положения $A(-2;1;-3)$ в положение $B(3;-2;1)$.

Вариант 3

1. (ШАС) В треугольнике ABC сторона AC разделена точкой M в отношении 3:1, считая от точки A. Какой вид имеет разложение вектора $\overrightarrow{BM}$ по векторам $\vec{a}=\overrightarrow{BC}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{BA}$? (Укажите вариант ответа).
   1) $3\vec{a}+\vec{b}$; 2) $3\vec{a}-\vec{b}$; 3) $\frac{1}{4}\vec{a}-\frac{3}{4}\vec{b}$;
   4) $\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$; 5) $\vec{a}-3\vec{b}$.
2. (ФСМ) Найти сумму координат вектора $\vec{a}$, если единичный вектор $\vec{a}$ образует с базисным ортом $\vec{i}$ угол 45°, а с базисными ортами $\vec{j}$ и $\vec{k}$ − равные тупые углы.
3. (ИБИ) Даны векторы $\vec{a}=0,5\vec{i}-3\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k}$ и $\vec{c}=4\vec{i}+\vec{j}+4\vec{k}$. Найти проекцию вектора $\vec{a}$ на ось вектора $2\vec{b}-\vec{c}$.
4. (ЮДС) Найти скалярное произведение $\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$, если $\left|\vec{a}\right|=3$, $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{2}$ и $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{15}$.
5. (ЮДГ) Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $3\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}+3\vec{b}$, если $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{2}$, $\left|\vec{b}\right|=2$, а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 45°.
6. (СБД) Найти смешанное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$, если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку взаимно перпендикулярных векторов и $\left|\vec{a}\right|=2$, $\left|\vec{b}\right|=8$, $\left|\vec{c}\right|=3$.
7. (ДДЛ) Найти объём тетраэдра с вершинами $A(3;1;1)$, $B(1;4;1)$, $C(1;1;6)$, $D(3;4;9)$.
8. (ЖЛМ) Найти значение α, при котором векторы $\vec{a}=\{\alpha+1;3-2\alpha;\alpha-1\}$ и $\vec{b}=\{1;4;4\}$ перпендикулярны.
9. (ГИЛ) Вычислить работу силы $\vec{F}=-\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$ при прямолинейном перемещении материальной точки из положения $A(-1;0;3)$ в положение $B(1;2;-1)$.

Вариант 4

1. (ЭЖЦ) В треугольнике ABC сторона BC разделена точкой D в отношении 3:4, считая от точки B. Какой вид имеет разложение вектора $\overrightarrow{AD}$ по векторам $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$? (Укажите вариант ответа).

   1) $4\vec{a}+3\vec{b}$; 2) $3\vec{a}+4\vec{b}$; 3) $-\frac{4}{7}\vec{a}+\frac{3}{7}\vec{b}$;

   4) $\frac{3}{7}\vec{a}-\frac{4}{7}\vec{b}$; 5) $\frac{4}{7}\vec{a}+\frac{3}{7}\vec{b}$.

2. (ЦБД) Найти сумму координат вектора $\vec{a}$, если единичный вектор $\vec{a}$ образует с базисным ортом $\vec{i}$ угол 135°, а с базисными ортами $\vec{j}$ и $\vec{k}$ − равные острые углы.

3. (ЖИИ) Даны векторы $\vec{a}=-3\vec{i}+2\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$ и $\vec{c}=4\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}$. Найти проекцию вектора $2\vec{a}-\vec{b}$ на ось вектора $\vec{c}$.

4. (ППМ) Найти скалярное произведение $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\left(3\vec{a}+2\vec{b}\right)$, если $\left|\vec{a}\right|=2$, $\left|\vec{b}\right|=4$ и $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{26}$.

5. (ЦМЭ) Найти площадь треугольника, построенного на векторах $5\vec{a}-\vec{b}$ и $\vec{a}+5\vec{b}$, если $\left|\vec{a}\right|=3$, $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{2}$, а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 135°.

6. (ШЛК) Найти смешанное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$, если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку взаимно перпендикулярных векторов и $\left|\vec{a}\right|=3$, $\left|\vec{b}\right|=4$, $\left|\vec{c}\right|=5$.

7. (ПАБ) Найти объём тетраэдра с вершинами $A(-4;-4;-3)$, $B(-2;-1;1)$, $C(2;-2;-1)$, $D(-1;3;-2)$.

8. (ССА) Найти значение α, при котором векторы $\vec{a}=\{4\alpha-1;\alpha-3;\alpha+3\}$ и $\vec{b}=\{4;2;-2\}$ перпендикулярны.

9. (ЖЛМ) Вычислить работу силы $\vec{F}=2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ при прямолинейном перемещении материальной точки из положения $A(-1;-2;-1)$ в положение $B(2;3;0)$.

Вариант 5

1. (ЦГЮ) В треугольнике ABC сторона AB разделена точкой M в отношении 2:1, считая от точки A. Какой вид имеет разложение вектора $\overrightarrow{CM}$ по векторам $\vec{a}=\overrightarrow{CB}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{CA}$? (Укажите вариант ответа).

   1) $\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$; 2) $2\vec{a}+\vec{b}$; 3) $\vec{a}+2\vec{b}$;

   4) $\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$; 5) $2\vec{a}-\vec{b}$.

2. (СЭФ) Найти сумму координат вектора $\vec{a}$, если единичный вектор $\vec{a}$ образует с базисным ортом $\vec{i}$ угол 30°, а с базисными ортами $\vec{j}$ и $\vec{k}$ – равные тупые углы.

3. (ШПЛ) Найти чему равна проекция вектора $\vec{b}+\vec{c}$ на ось вектора $\vec{a}-\vec{b}$, если даны векторы $\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$ и $\vec{c}=5\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}$.

4. (МСА) Найти скалярное произведение $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(2\vec{a}-3\vec{b}\right)$, если $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{3}$, $\left|\vec{b}\right|=2$, и $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=3$.

5. (ШДГ) Найти площадь треугольника, построенного на векторах $3\vec{a}-\vec{b}$ и $\vec{a}+\vec{b}$, если $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=2$, а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 30°.

6. (ПМС) Найти смешанное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$, если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку взаимно перпендикулярных векторов, и $\left|\vec{a}\right|=4$, $\left|\vec{b}\right|=3$, $\left|\vec{c}\right|=3$.

7. (ЖЖЮ) Найти объём тетраэдра с вершинами $A(-3;-3;-3)$, $B(2;-1;-3)$, $C(1;2;-3)$, $D(-2;-1;1)$.

8. (ЮКМ) Найти значение α, при котором векторы $\vec{a}=\{1-3\alpha;2\alpha-1;-4\alpha-1\}$, $\vec{b}=\{2;-1;1\}$ и $\vec{c}=\{1;-2;4\}$ компланарны.

9. (ФКЭ) Вычислить работу силы $\vec{F}=\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}$ при прямолинейном перемещении материальной точки из положения $A(-2;-3;1)$ в положение $B(2;1;-1)$.

Вариант 6

1. (ГПЛ) В треугольнике ABC сторона CA разделена точкой D в отношении 3:2, считая от точки C. Какой вид имеет разложение вектора $\overrightarrow{BD}$ по векторам $\vec{a}=\overrightarrow{BA}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$? (Укажите вариант ответа).

   1) $3\vec{a}+2\vec{b}$; 2) $2\vec{a}+3\vec{b}$; 3) $\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}$;

   4) $3\vec{a}-2\vec{b}$; 5) $\frac{3}{5}\vec{a}-\frac{2}{5}\vec{b}$.

2. (БЖМ) Единичный вектор $\vec{a}$ образует с базисным ортом $\vec{i}$ угол 120°, с базисными ортами $\vec{j}$ и $\vec{k}$ − равные острые углы. Чему равна сумма координат вектора $\vec{a}$?

3. (ММД) Даны векторы $\vec{a}=6\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}-4\vec{j}+3\vec{k}$ и $\vec{c}=3\vec{i}-\vec{j}-5\vec{k}$. Чему равна проекция вектора $\vec{b}$ на ось вектора $\vec{a}-3\vec{c}$?

4. (ГКС) $\vec{a}$ и $\vec{b}$ − единичные векторы, $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{3}$. Чему равно скалярное произведение $\left(3\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$?

5. (ЭАФ) $\left|\vec{a}\right|=1$, $\left|\vec{b}\right|=2\sqrt{3}$, угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 120°. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $2\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$.

6. (ЦЖЭ) Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку взаимно перпендикулярных векторов, $\left|\vec{a}\right|=5$, $\left|\vec{b}\right|=2$, $\left|\vec{c}\right|=3$. Найти смешанное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$.

7. (ШПЛ) Чему равен объём тетраэдра с вершинами $A(-1;1;2)$, $B(0;3;3)$, $C(4;5;-1)$, $D(2;1;4)$.

8. (ШФЛ) Найти значение α, при котором векторы $\vec{a}=\{\alpha-2;5-2\alpha;2\alpha-4\}$ и $\vec{b}=\{2;4;2\}$ перпендикулярны.

9. (ПАЖ) Вычислить работу силы $\vec{F}=\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$ при прямолинейном перемещении материальной точки из положения $A(2;-1;0)$ в положение $B(2;3;4)$.

Вариант 7

1. (ЦМЦ) В треугольнике ABC сторона CB разделена точкой M в отношении 3: 5, считая от точки C. Какой вид имеет разложение вектора $\overrightarrow{AM}$ по векторам $\vec{a}=\overrightarrow{AC}$ и $\vec{c}=\overrightarrow{AB}$? (Укажите вариант ответа).

   1) $5\vec{a}+3\vec{c}$; 2) $\frac{5}{8}\vec{a}+\frac{3}{8}\vec{c}$; 3) $3\vec{a}+5\vec{c}$;

   4) $5\vec{a}-3\vec{c}$; 5) $\frac{5}{8}\vec{a}-\frac{3}{8}\vec{c}$.

2. (ГСС) Единичный вектор $\vec{a}$ образует с базисным ортом $\vec{i}$ угол 60°, а с базисными ортами $\vec{j}$ и $\vec{k}$ − равные тупые углы. Чему равна сумма координат вектора $\vec{a}$?

3. (МКЮ) Даны векторы $\vec{a}=-4\vec{i}+5\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=7\vec{i}+6\vec{j}-6\vec{k}$ и $\vec{c}=-2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$. Чему равна проекция вектора $\vec{a}-3\vec{c}$ на ось вектора $\vec{b}$?

4. (ФМА) $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=4$ и $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{12}$. Чему равно скалярное произведение $(2\vec{a}+3\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$?

5. (ДЮЮ) $|\vec{a}|=|\vec{b}|=2$, угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 150°. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $3\vec{a}-2\vec{b}$ и $\vec{a}+\vec{b}$?

6. (ШПЮ) Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку взаимно перпендикулярных векторов, $|\vec{a}|=6$, $|\vec{b}|=3$, $|\vec{c}|=4$. Найти смешанное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$?

7. (МЮЖ) Чему равен объём тетраэдра с вершинами $A(4;2;2)$, $B(2;5;2)$, $C(2;2;7)$, $D(4;5;10)$.

8. (ЦМЦ) Найти значение α, при котором векторы $\vec{a}=\{2\alpha-1;5-4\alpha;3\alpha\}$, $\vec{b}=\{2;-3;4\}$, $\vec{c}=\{1;-3;2\}$ компланарны.

9. (ЦЦФ) Вычислить работу силы $\vec{F}=-\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$ при прямолинейном перемещении материальной точки из положения $A(-2;-3;0)$ в положение $B(3;2;-1)$.

Вариант 8

1. (ГЖГ) В треугольнике ABC сторона BA разделена точкой D в отношении 4:3, считая от точки B. Какой вид имеет разложение вектора $\overrightarrow{CD}$ по векторам $\vec{a}=\overrightarrow{CB}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{CA}$? (Укажите вариант ответа).
   1) $\frac{3}{7}\vec{a}+\frac{4}{7}\vec{b}$; 2) $3\vec{a}+4\vec{b}$; 3) $4\vec{a}+3\vec{b}$;
   4) $\frac{4}{7}\vec{a}+\frac{3}{7}\vec{b}$; 5) $\frac{3}{7}\vec{a}-\frac{4}{7}\vec{b}$.
2. (СИА) Единичный вектор $\vec{a}$ образует с базисным ортом $\vec{i}$ угол 150°, а с базисными ортами $\vec{j}$ и $\vec{k}$ − равные острые углы, то, чему равна сумма координат вектора $\vec{a}$?
3. (МФЭ) Даны векторы $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$, $\vec{b}=5\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$ и $\vec{c}=2\vec{i}+5\vec{j}-8\vec{k}$. Чему равна проекция вектора $\vec{b}+\vec{c}$ на ось вектора $\vec{a}-\vec{b}$?
4. (ЖЮФ) $|\vec{a}|=\sqrt{5}$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{11}$. Чему равно скалярное произведение $(2\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+3\vec{b})$?
5. (ЛДГ) $|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=1$, угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 135°. Чему равна площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}+3\vec{b}$ и $3\vec{a}-\vec{b}$?
6. (ЮГШ) Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку взаимно перпендикулярных векторов, $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=4$, $|\vec{c}|=4$. Чему равно смешанное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$?
7. (ЖМЖ) Чему равен объём тетраэдра с вершинами $A(-3;-3;-2)$, $B(2;-1;-2)$, $C(-1;1;-2)$, $D(-2;0;4)$?
8. (ЖКД) Найти значение α, при котором векторы $\vec{a}=\{\alpha-1;4-2\alpha;2\alpha-1\}$ и $\vec{b}=\{-3;2;2\}$ перпендикулярны.
9. (ЦАИ) Вычислить работу силы $\vec{F}=-2\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}$ при прямолинейном перемещении материальной точки из положения $A(-1;3;-2)$ в положение $B(2;-1;3)$.

Вариант 9

1. (ШГК) В треугольнике ABC сторона BC разделена точкой M в отношении 5:3, считая от точки B. Какой вид имеет разложение вектора $\overrightarrow{AM}$ по векторам $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$ и $\vec{c}=\overrightarrow{AB}$? (Укажите вариант ответа).
   1) $3\vec{c}+5\vec{b}$; 2) $5\vec{c}+3\vec{b}$; 3) $5\vec{c}-3\vec{b}$;
   4) $\frac{5}{8}\vec{c}+\frac{3}{8}\vec{b}$; 5) $\frac{3}{8}\vec{c}+\frac{5}{8}\vec{b}$.
2. (СЖБ) Единичный вектор $\vec{a}$ образует с базисным ортом $\vec{i}$ угол 150°, а с базисными ортами $\vec{j}$ и $\vec{k}$ − равные тупые углы. Чему равна сумма координат вектора $\vec{a}$?
3. (ЦМЦ) Даны векторы $\vec{a}=-2\vec{i}+8\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=-3\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$ и $\vec{c}=2\vec{i}-3\vec{j}+3\vec{k}$. Чему равна проекция вектора $\vec{c}$ на ось вектора $2\vec{b}-\vec{a}$?
4. (ГДЛ) $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=\sqrt{2}$, $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{8}$. Чему равно скалярное произведение $(3\vec{a}-5\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$?
5. (СЛИ) $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=\sqrt{3}$, угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 60°. Чему равна площадь треугольника, построенного на векторах $3\vec{a}-\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$?
6. (ЖДЭ) Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку взаимно перпендикулярных векторов, $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=5$, $|\vec{c}|=4$. Чему равно смешанное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$?
7. (ЦГС) Чему равен объём тетраэдра с вершинами $A(-2;1;4)$, $B(-1;5;5)$, $C(2;3;4)$, $D(0;0;5)$?
8. (ЖИА) Найти значение α, при котором векторы $\vec{a}=\{3\alpha+9;2\alpha+5;3\alpha+7\}$, $\vec{b}=\{2;-1;3\}$, $\vec{c}=\{1;-3;5\}$ компланарны.
9. (ПКЛ) Вычислить работу силы $\vec{F}=-3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ при прямолинейном перемещении материальной точки из положения $A(2;-3;0)$ в положение $B(-3;2;1)$.

Вариант 10

1. (ГЦЛ) В треугольнике ABC сторона CA разделена точкой D в отношении 2:5, считая от точки C. Какой вид имеет разложение вектора $\overrightarrow{BD}$ по векторам $\vec{a}=\overrightarrow{BA}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$? (Укажите вариант ответа).
   1) $\frac{2}{7}\vec{a}+\frac{5}{7}\vec{b}$; 2) $\frac{5}{7}\vec{a}+\frac{2}{7}\vec{b}$; 3) $2\vec{a}+5\vec{b}$;
   4) $5\vec{a}+2\vec{b}$; 5) $\frac{2}{7}\vec{a}-\frac{5}{7}\vec{b}$.
2. (МСД) Единичный вектор $\vec{a}$ образует с базисным ортом $\vec{i}$ угол 135°, а с базисными ортами $\vec{j}$ и $\vec{k}$ − равные тупые углы. Чему равна сумма координат вектора $\vec{a}$?
3. (МИБ) Даны векторы $\vec{a}=-2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}-4\vec{j}-6\vec{k}$ и $\vec{c}=3\vec{i}-4\vec{j}-4\vec{k}$. Чему равна проекция вектора $3\vec{c}-\vec{b}$ на ось вектора $\vec{a}$?
4. (ФГД) $|\vec{a}|=\sqrt{6}$, $|\vec{b}|=3$ и $|\vec{a}+\vec{b}|=5$. Чему равно скалярное произведение $(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(3\vec{a}+\vec{b})$?
5. (ЭАА) $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=2$, угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 30°. Чему равна площадь параллелограмма, построенного на векторах $5\vec{a}-\vec{b}$ и $\vec{a}+\vec{b}$?
6. (ФЖЭ) Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку взаимно перпендикулярных векторов, $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=6$, $|\vec{c}|=2$. Чему равно смешанное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$?
7. (СКА) Чему равен объём тетраэдра с вершинами $A(2;-1;1)$, $B(5;5;4)$, $C(3;2;-1)$, $D(4;1;3)$.
8. (ЖКИ) Найти значение α, при котором векторы $\vec{a}=\{\alpha+6;2\alpha+7;3\alpha+10\}$ и $\vec{b}=\{2;-4;1\}$ перпендикулярны.
9. (ДЮЦ) Вычислить работу силы $\vec{F}=3\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}$ при прямолинейном перемещении материальной точки из положения $A(-3;2;1)$ в положение $B(2;-1;3)$.

2.6. Контрольная работа

Вариант 1

1. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$. $\vec{a} = -2\vec{j} + 3\vec{k},\ \vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$.
2. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ при $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $\left(\vec{a} - \vec{b}\right)^2 + \left(\vec{a} + 2\vec{b}\right)^2 = 20$.
3. Выяснить, при каком значении α векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ будут компланарны: $\vec{a} = \{3;-1;4\}$; $\vec{b} = \{2;\alpha;-5\}$; $\vec{c} = \{1;0;2\}$

Вариант 2

1. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k},\ \vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$.
2. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ при $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\left(2\vec{a} - 3\vec{b}\right)^2 - \left(\vec{a} + 4\vec{b}\right)^2 = 69$.
3. Выяснить, при каком значении α векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ будут компланарны: $\vec{a} = \{4;-2;\alpha\}$; $\vec{b} = \{-5;1;3\}$; $\vec{c} = \{2;4;-3\}$.

Вариант 3

1. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\vec{a} = 5\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k},\ \vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j} - 7\vec{k}$.
2. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ при $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 1$, $\left(3\vec{a} + 2\vec{b}\right)^2 + \left(\vec{a} - 5\vec{b}\right)^2 = 189$.
3. Выяснить, при каком значении α векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ будут компланарны: $\vec{a} = \{3;-1;4\}$; $\vec{b} = \{1;-4;0\}$; $\vec{c} = \{\alpha;3;2\}$.

Вариант 4

1. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\vec{a} = 6\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k},\ \vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$.

2. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ при $|\vec{a}|=3,$ $|\vec{b}|=5,$ $\left(\vec{a}-3\vec{b}\right)^2+\left(2\vec{a}+4\vec{b}\right)^2=595.$

3. Выяснить, при каком значении α векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ будут компланарны: $\vec{a}=\{\alpha;2;-5\}$; $\vec{b}=\{3;1;1\}$; $\vec{c}=\{4;-1;0\}$.

Вариант 5

1. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\vec{a}=7\vec{i}-4\vec{j}+2\vec{k},$ $\vec{b}=\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}.$
2. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ при $|\vec{a}|=5,$ $|\vec{b}|=4,$ $\left(4\vec{a}+\vec{b}\right)^2-\left(3\vec{a}-2\vec{b}\right)^2=77.$
3. Выяснить, при каком значении α векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ будут компланарны: $\vec{a}=\{-1;5;-7\}$; $\vec{b}=\{4;2;\alpha\}$; $\vec{c}=\{3;5;1\}$.

Вариант 6

1. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k},$ $\vec{b}=3\vec{j}-\vec{k}.$
2. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ при $|\vec{a}|=4,$ $|\vec{b}|=3,$ $\left(2\vec{a}-5\vec{b}\right)^2-\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)^2=93.$
3. Выяснить, при каком значении α векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ будут компланарны: $\vec{a}=\{2;1;-1\}$; $\vec{b}=\{4;-2;1\}$; $\vec{c}=\{\alpha;-3;-2\}$.

Вариант 7

1. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\vec{a}=4\vec{i}-\vec{j}+6\vec{k},$ $\vec{b}=2\vec{j}-3\vec{k}.$
2. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ при $|\vec{a}|=6,$ $|\vec{b}|=1,$ $\left(\vec{a}-8\vec{b}\right)^2-\left(2\vec{a}+3\vec{b}\right)^2=31.$
3. Выяснить, при каком значении α векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ будут компланарны: $\vec{a}=\{4;-5;3\}$; $\vec{b}=\{2;\alpha;-1\}$; $\vec{c}=\{1;5;6\}$.

Вариант 8

1. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\vec{a} = -3\vec{i} + 6\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$.
2. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ при $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 4$, $\left(3\vec{a} - \vec{b}\right)^2 - \left(\vec{a} + 6\vec{b}\right)^2 = 0$.
3. Выяснить, при каком значении α векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ будут компланарны: $\vec{a} = \{3; -2; 1\}$; $\vec{b} = \{1; -5; 2\}$; $\vec{c} = \{\alpha; 4; -1\}$.

Вариант 9

1. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\vec{a} = 3\vec{i} + 7\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$.
2. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ при $|\vec{a}| = 7$, $|\vec{b}| = 2$, $\left(\vec{a} + 4\vec{b}\right)^2 + \left(3\vec{a} - 7\vec{b}\right)^2 = 274$.
3. Выяснить, при каком значении α векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ будут компланарны: $\vec{a} = \{2; -3; 5\}$; $\vec{b} = \{1; -4; \alpha\}$; $\vec{c} = \{2; 1; -3\}$.

Вариант 10

1. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\vec{a} = \vec{i} + 6\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = 5\vec{i} + 4\vec{j}$.
2. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ при $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 6$, $\left(5\vec{a} - 2\vec{b}\right)^2 - \left(\vec{a} + 3\vec{b}\right)^2 = 270$.
3. Выяснить, при каком значении α векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ будут компланарны: $\vec{a} = \{1; 1; \alpha\}$; $\vec{b} = \{-3; 3; 1\}$; $\vec{c} = \{2; 3; -3\}$.

Вариант 11

1. Параллелограмм построен на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найти его высоту, опущенную на сторону, совпадающую с вектором $\vec{a}$: $\vec{a} = 5\vec{i} + 7\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$.
2. Найти угол между векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$, если $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$ и указанные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны: $\vec{a} = 5\vec{m} - 4\vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} + 2\vec{n}$.

3. Найти объём пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$: $\vec{a} = \{5;2;0\}$; $\vec{b} = \{2;5;0\}$; $\vec{c} = \{1;2;4\}$.

Вариант 12

1. Найти $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$, если $|\vec{a}| = \sqrt{29}$, $\left|\vec{b}\right| = \sqrt{61}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 36$.
2. Выяснить, для каких векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняются условия $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = |\vec{a}| + \left|\vec{b}\right|$.
3. Вычислить высоту параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$, если за основание взят параллелограмм, построенный на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\vec{a} = \{2;3;-1\}$; $\vec{b} = \{-2;4;5\}$; $\vec{c} = \{3;-1;4\}$.

Вариант 13

1. Параллелограмм построен на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найти его высоту, опущенную на сторону, совпадающую с вектором $\vec{a}$: $\vec{a} = -4\vec{i} - 9\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$.
2. Найти угол между векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$, если $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$ и указанные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны: $\vec{a} = 3\vec{m} + 2\vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} - \vec{n}$.
3. Найти объём пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$: $\vec{a} = \{-12;2;-4\}$; $\vec{b} = \{-4;2;3\}$; $\vec{c} = \{-3;4;-3\}$.

Вариант 14

1. Параллелограмм построен на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найти его высоту, опущенную на сторону, совпадающую с вектором $\vec{a}$: $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$, $\vec{b} = 5\vec{j} - 4\vec{k}$.
2. Найти угол между векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$, если $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$ и указанные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны. $\vec{a} = \vec{m} + \vec{n}$, $\vec{b} = 2\vec{m} - \vec{n}$.
3. Найти объём пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$: $\vec{a} = \{0;1;-1\}$; $\vec{b} = \{1;0;-1\}$; $\vec{c} = \{3;2;0\}$.

Вариант 15

1. Параллелограмм построен на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найти его высоту, опущенную на сторону, совпадающую с вектором $\vec{a}$: $\vec{a} = 4\vec{i} - 6\vec{j} - \vec{k},\ \vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$.
2. Найти угол между векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$, если $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$ и указанные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны: $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n},\ \vec{b} = 5\vec{m} - 4\vec{n}$.
3. Найти объём пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$: $\vec{a} = \{-5; 6; -8\};\ \vec{b} = \{-2; -3; 1\};\ \vec{c} = \{-3; 1; 1\}$.

Вариант 16

1. Параллелограмм построен на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найти его высоту, опущенную на сторону, совпадающую с вектором $\vec{a}$: $\vec{a} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k},\ \vec{b} = 2\vec{i} - 6\vec{j} + 3\vec{k}$.
2. Найти угол между векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$, если $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$ и указанные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны: $\vec{a} = \vec{m} - 2\vec{n},\ \vec{b} = 5\vec{m} + 4\vec{n}$.
3. Найти объём пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$: $\vec{a} = \{4; 4; -6\};\ \vec{b} = \{1; 3; 1\};\ \vec{c} = \{0; -2; 0\}$.

Вариант 17

1. Параллелограмм построен на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найти его высоту, опущенную на сторону, совпадающую с вектором $\vec{a}$: $\vec{a} = 5\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k},\ \vec{b} = 5\vec{i} + 2\vec{k}$.
2. Найти угол между векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$, если $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$ и указанные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны: $\vec{a} = 3\vec{m} - 2\vec{n},\ \vec{b} = \vec{m} + 4\vec{n}$.
3. Найти объём пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$: $\vec{a} = \{1; 2; -1\};\ \vec{b} = \{0; 2; 2\};\ \vec{c} = \{-1; 1; -2\}$.

Вариант 18

1. Параллелограмм построен на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найти его высоту, опущенную на сторону, совпадающую с вектором $\vec{a}$: $\vec{a} = 4\vec{i} + \vec{j} + \vec{k},\ \vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.
2. Найти угол между векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$, если $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$ и указанные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны: $\vec{a} = 2\vec{m} - 3\vec{n},\ \vec{b} = \vec{m} - \vec{n}$.

3. Найти объём пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$: $\vec{a}=\{-1;3;3\}$; $\vec{b}=\{0;4;2\}$; $\vec{c}=\{3;3;-4\}$.

Вариант 19

1. Найти $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$, если $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{74}$, $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{20}$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=20$.
2. Выяснить, для каких векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняются условия $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|-\left|\vec{b}\right|$.
3. Вычислить высоту параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$, если за основание взят параллелограмм, построенный на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\vec{a}=\{3;6;-8\}$; $\vec{b}=\{-2;4;-6\}$; $\vec{c}=\{5;2;-1\}$.

Вариант 20

1. Параллелограмм построен на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найти его высоту, опущенную на сторону, совпадающую с вектором $\vec{a}$: $\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$.
2. Найти угол между векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$, если $\left|\vec{m}\right|=\left|\vec{n}\right|=1$ и указанные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны: $\vec{a}=2\vec{m}+\vec{n}$, $\vec{b}=\vec{m}-\vec{n}$.
3. Найти объём пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$: $\vec{a}=\{-3;6;2\}$; $\vec{b}=\{-4;-1;-5\}$; $\vec{c}=\{1;0;5\}$.

ГЛАВА III. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

3.1. Системы координат

Аналитическая геометрия − раздел математики, изучающий соответствия между аналитическими выражениями и их геометрическими образами. Вид аналитического выражения, соответствующего данному геометрическому образу, зависит от выбора системы координат (т. е. от выбора способа, позволяющего численно описать положение точки на плоскости (в пространстве)).

Всегда можно подобрать систему координат (декартову, полярную, цилиндрическую, сферическую, криволинейную и т. д.) таким образом, чтобы уравнение геометрического образа было наиболее простым (каноническим).

Таблица 3.1.1

Системы координат на плоскости

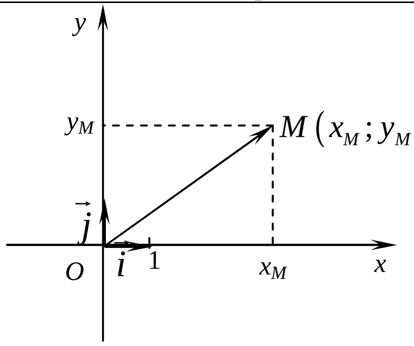
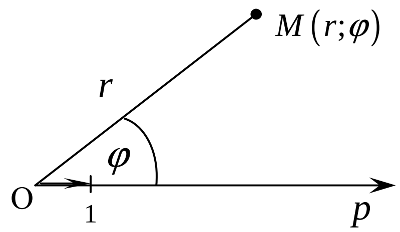
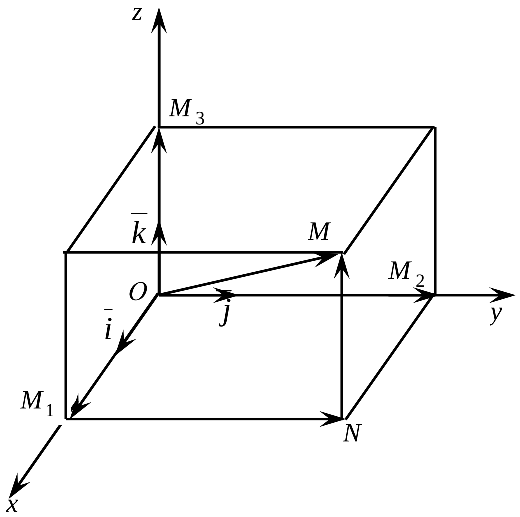
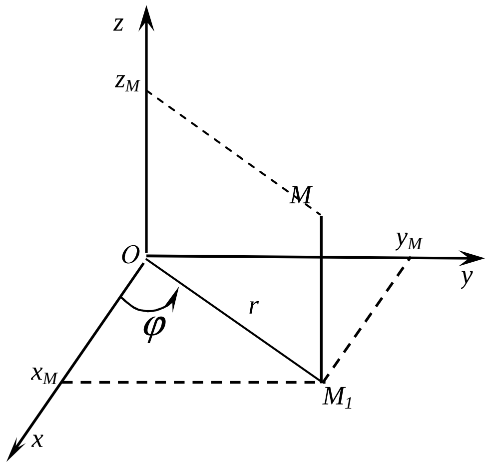
Прямоугольная (декартова) система координат	*Полярная система координат*
 Ox − ось абсцисс Oy −ось ординат $\lvert\vec{i}\rvert = \lvert\vec{j}\rvert = 1$, $\vec{i} \perp \vec{j}$ ***Координаты точки*** M в системе координат $Oxy\,(O\vec{i}\,\vec{j})$ − координаты радиуса-вектора $\overline{OM}$.	 O − полюс Op − полярная ось, r − полярный радиус φ – полярный угол, $-\pi < \varphi \le \pi$
Связь между прямоугольными и полярными координатами точки M	
$\begin{cases} x_M = r\cos\varphi, \\ y_M = r\sin\varphi \end{cases}$	$\begin{cases} r = \sqrt{(x_M)^2 + (y_M)^2}, \\ tg\varphi = \dfrac{y_M}{x_M} \end{cases}.$

Таблица 3.1.2

Системы координат в пространстве

<table>
<tr><td colspan="2">Прямоугольная (декартова) система координат</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Ox − ось абсцисс
Oy −ось ординат
Oz − ось аппликат
$|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1,\ \vec{i}\perp\vec{j}\ ,\ \vec{i}\perp\vec{k}\ ,\ j\perp\vec{k}\ .$
Координаты точки M в системе координат $Oxyz$ $(O\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k})$ − координаты радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ − $\{M_1;M_2;M_3\}$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Полярная (цилиндрическая) система координат</td></tr>
<tr><td>
</td><td>O − полюс
$Op\,(Ox)$ − полярная ось
r − полярный радиус
φ − полярный угол, $-\pi<\varphi\le\pi$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Связь между прямоугольными и полярными координатами точки М</td></tr>
<tr><td>$$\begin{cases} x_M = r\cos\varphi, \\ y_M = r\sin\varphi, \\ z = z, \end{cases}$$</td><td>$$\begin{cases} r=\sqrt{(x_M)^2+(y_M)^2}, \\ tg\varphi=\dfrac{y_M}{x_M}, \\ z = z. \end{cases}$$</td></tr>
</table>

3.2. Прямая на плоскости

Таблица 3.2.1

Уравнения прямой на плоскости

№	*Название*	*Уравнение прямой* l	*Смысл параметров*
1.	Прямая, проходящая через точку перпендикулярно данному вектору	$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$	$M_0(x_0;y_0)\in l$, $\vec{N}\{A;B\}$ – вектор нормали
2.	Общее уравнение прямой	$Ax+By+C=0$	$\vec{N}\{A;B\}$
3.	Уравнение прямой в отрезках	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$	a – отрезок на оси OX, b – отрезок на оси OY
4.	Каноническое уравнение (прямая, проходящая через точку параллельно данному вектору)	$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}$	$M_0(x_0;y_0)\in l$, $\vec{s}=\{m;n\}$ – направляющий вектор
5.	Параметрические уравнения	$\begin{cases} x=mt+x_0, \\ y=nt+y_0 \end{cases}$	$M_0(x_0;y_0)\in l$, $\vec{s}=\{m;n\}$ – направляющий вектор
6.	Прямая, проходящая через точку, с заданным угловым коэффициентом	$y-y_0=k(x-x_0)$, $k=tg\varphi=-\frac{A}{B}=\frac{n}{m}$.	$M_0(x_0;y_0)\in l$, k – угловой коэффициент
7.	Уравнение прямой, проходящей через две точки	$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$	$M_1(x_1;y_1)\in l$ $M_2(x_2;y_2)\in l$

Общее уравнение прямой на $Ax+By+C=0$ имеет частные случаи:

$Ax+By=0$ $(C=0)$ – прямая проходит через начало координат;

$Ax+C=0$ $(B=0)$ – прямая параллельна оси Oy;

$By+C=0$ $(A=0)$ – прямая параллельна оси Ox;

$x=0$ $(B=C=0)$ – прямая совпадает с осью Oy;

$y=0$ $(A=C=0)$ – прямая совпадает с осью Ox.

Взаимное расположение прямых на плоскости

1. Прямые заданы общими уравнениями:

$$l_1 \; : \; A_1x + B_1y + C_1 = 0; \quad l_2 \; : \; A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

где $\vec{N}_1\{A_1;B_1\}$; $\vec{N}_2\{A_2;B_2\}$ – векторы нормалей.

Таблица 3.2.2

Условия взаимного расположения прямых на плоскости

Косинус угла	*Условие параллельности*	*Условие перпендикулярности*
$\cos\varphi = \dfrac{\left(\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2\right)}{\left\|\vec{N}_1\right\| \cdot \left\|\vec{N}_2\right\|} = \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$	$\vec{N}_1 \parallel \vec{N}_2$ $\vec{N}_1 = \lambda \cdot \vec{N}_2$ $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$	$\vec{N}_1 \perp \vec{N}_2$ $\left(\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2\right) = 0$ $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$

2. Прямые заданы каноническими уравнениями:

$$l_1 \; : \; \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1}; \quad l_2 \; : \; \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2},$$

где $\vec{s}_1\{m_1;n_1\}$, $\vec{s}_2\{m_2;n_2\}$ – направляющие векторы.

Таблица 3.2.3

Условия взаимного расположения прямых на плоскости

Косинус угла	*Условие параллельности*	*Условие перпендикулярности*
$\cos\varphi = \dfrac{\left(\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2\right)}{\left\|\vec{s}_1\right\| \cdot \left\|\vec{s}_2\right\|} = \dfrac{m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2}}$	$\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2$ $\vec{s}_1 = \lambda \cdot \vec{s}_2$ $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2}$	$\vec{s}_1 \perp \vec{s}_2$ $\left(\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2\right) = 0$ $m_1m_2 + n_1n_2 = 0$

3. Прямые заданы уравнениями с угловыми коэффициентами:

$$l_1 \; : \; y = k_1x + b_1; \quad l_2 \; : \; y = k_2x + b_2,$$

где $k_1 = tg\varphi_1$, $k_2 = tg\varphi_2$ – угловые коэффициенты.

Таблица 3.2.4

Условия взаимного расположения прямых на плоскости

Тангенс угла	*Условие параллельности*	*Условие перпендикулярности*
$tg\varphi = \dfrac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2}$	$k_1 = k_2$	$1 + k_1 \cdot k_2 = 0$

4. Расстояние d от точки $M_1(x_1; y_1)$ до прямой $l: Ax + By + C = 0$

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

3.3. Кривые второго порядка

Линии, определяемые алгебраическими уравнениями второй степени относительно переменных x и y, т. е. уравнением вида

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad A, B, C \neq 0,$$

называются *кривыми второго порядка*.

Эллипсом называется геометрическое место всех точек $M(x, y)$, для которых сумма расстояний до двух заданных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $2a$.

Эксцентриситет определяется отношением осей эллипса и характеризует его форму: чем больше ε, тем более вытянут эллипс вдоль большой оси. Если $\varepsilon = 0$, эллипс превращается в окружность.

Фокальный параметр $p = \dfrac{b^2}{a}$ – это половина хорды, проведённой через фокус параллельно малой оси.

Окружность – это геометрическое место точек (x, y), равноудалённых от точки O, называемой центром.

Гипербола – это геометрическое место точек (x, y), для которых разность – абсолютная величина разности расстояний до двух заданных точек, фокусов, есть величина постоянная, равная $2a$.

Эксцентриситет определяется отношением осей гиперболы и характеризует её форму: чем больше ε, тем более вытянут вдоль мнимой оси основной прямоугольник гиперболы.

Асимптоты гиперболы – это прямые, к которым ветви гиперболы неограниченно приближаются при удалении в бесконечность.

Парабола – это геометрическое место точек (x, y), равноудалённых от заданной точки, фокуса, и от прямой, называемой директрисой.

Кривые в полярных координатах

График зависимости, заданной в полярных координатах строится следующим образом:

- задаются через определённый шаг значения угла φ и на плоскости строятся лучи под выбранными углами, отсчитываемыми в положительном направлении от полярной оси;
- по данной зависимости $r = r(\varphi)$ вычисляются соответствующие значения радиуса r;
- полученные значения r откладываются в выбранном масштабе по соответствующему лучу, начиная от полюса;
- полученные точки соединяются плавной линией.

Кривые, заданные параметрически

Параметрические уравнения линии (зависимость между координатами точки задана зависимостью от некоторого параметра t):

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$$

Существует два способа построения линий, заданных параметрически.

Первый: задавать значения параметра t с каким-то шагом и для каждого значения t находить координаты x и y точек на плоскости. Соединяя полученные точки, получим график функции.

Второй способ состоит в получении непосредственной зависимости между x и y, и он может быть реализован только в том случае, если удаётся из параметрических уравнений исключить параметр t.

Таблица 3.3.1

Кривые второго порядка $Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0, \qquad A,B,C\neq 0$

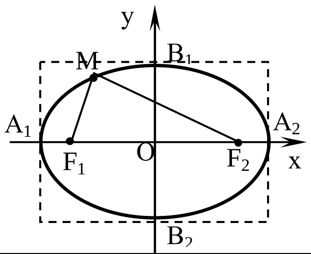
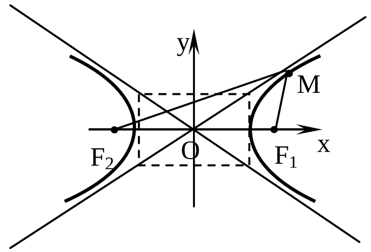
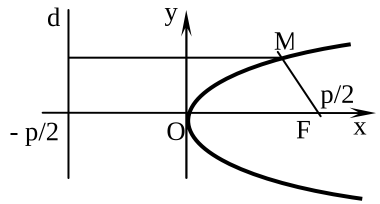
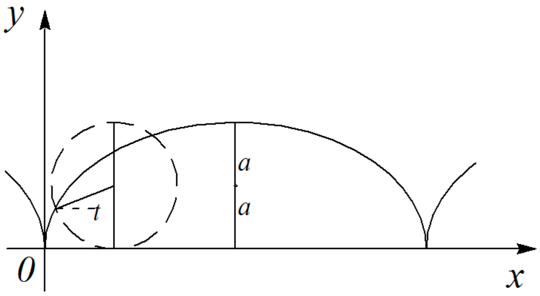
	$AC>0$	$AC<0$	$AC=0$
название кривой	эллипс	гипербола	парабола
			
каноническое уравнение	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$y^2=\pm 2px$
	$A_1A_2=2a$ − большая ось; $B_1B_2=2b$ − малая ось; $\lvert F_1M\rvert+\lvert F_2M\rvert=2a$	$A_1A_2=2a$ − действительная ось; $B_1B_2=2b$ − мнимая ось; $\lvert F_1M\rvert-\lvert F_2M\rvert=\pm 2a$	
фокус	$F_1(-c;0),\ F_2(c;0)$ $F_1F_2=2c$ − фокусное расстояние $c=\sqrt{a^2-b^2}$, если $a>b$	$F_1(c;0), F_2(-c;0)$ $F_1F_2=2c$ − фокусное расстояние $c=\sqrt{a^2+b^2}$	$F_1\left(-\frac{p}{2};0\right), F_2\left(\frac{p}{2};0\right)$
эксцентриситет	$\varepsilon=\frac{c}{a}$, (если $a>b$), $0<\varepsilon<1$	$\varepsilon=\frac{c}{a}$, (если $a>b$), $\varepsilon>1$	
директриса	$x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$	$x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$	$x=\pm\frac{p}{2}$
асимптоты		$y=\pm\frac{b}{a}x$	

Таблица 3.3.2

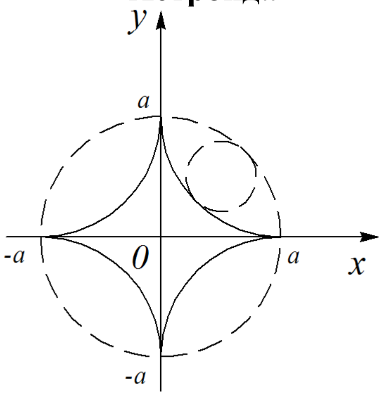
Примеры некоторых кривых

Циклоида



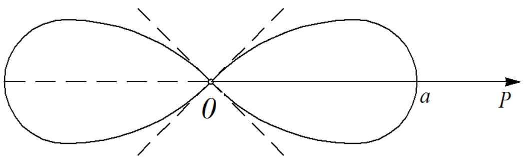
$x = a(t - \sin t),\ y = a(t - \cos t)$

Астроида



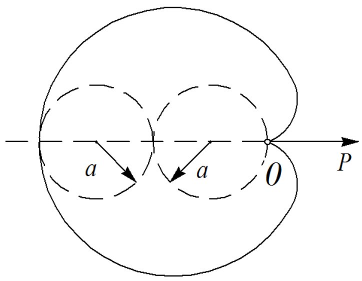
$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

Лемниската Бернулли



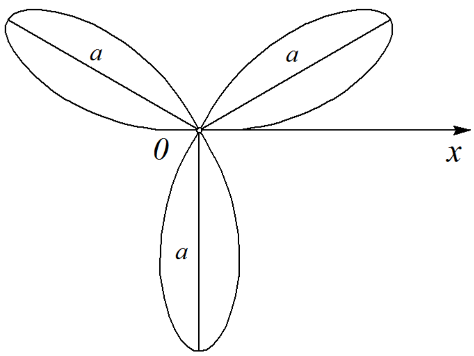
$r^2 = a^2 \cos 2\varphi$

Кардиоида



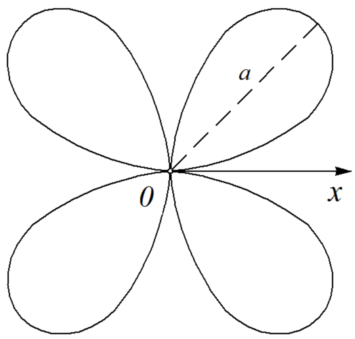
$r = a(1 - \cos 2\varphi)$

Трёхлепестковая роза



$r = a \sin 3\varphi$

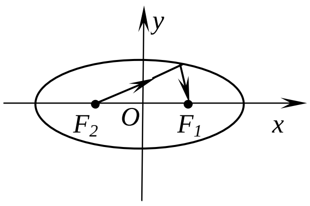
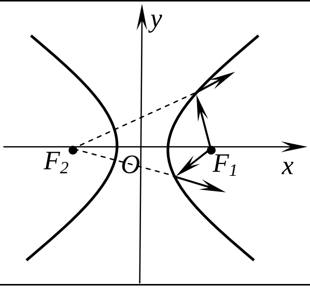
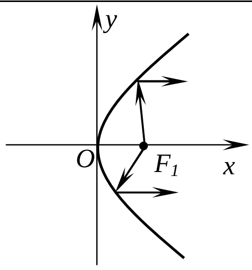
Четырёхлепестковая роза



$r = a \sin 2\varphi$

Таблица 3.3.3

Оптические свойства кривых 2-го порядка

Все лучи, выходящие из фокуса F_2, отразившись от эллипса, сконцентрируются в фокусе F_1 и наоборот.	Все лучи, выходящие из фокуса F_1, после отражения от ближайшей ветви гиперболы распространяются так, будто вышли из фокуса F_2 и наоборот.	Все световые лучи, выходящие из фокуса, после отражения от параболы параллельны оси параболы.
		

3.4. Плоскость

Таблица 3.4.1

Уравнения плоскости

№	*Название*	*Смысл параметров*
1.	Плоскость, проходящая через точку перпендикулярно данному вектору	$\alpha: A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ $M_0(x_0;y_0;z_0)\in\alpha$, $\vec{N}\{A;B;C\}\perp\alpha$ (вектор нормали)
2.	Общее уравнение плоскости	$Ax+By+Cz+D=0$ $\vec{N}\{A;B;C\}$
3.	Уравнение плоскости в отрезках	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ a – отрезок на оси OX b – отрезок на оси OY c – отрезок на оси OZ
4.	Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$	$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$

Общее уравнение плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ имеет частные случаи:

$Ax+By+Cz=0\ (D=0)$ – плоскость проходит через начало координат;

$Ax+By+D=0\ (C=0)$ – плоскость параллельна оси Oz (аналогичный смысл имеют уравнения $Ax+Cz+D=0$, $By+Cz+D=0$);

$Ax+By=0\ (D=C=0)$ – плоскость проходит через ось Oz ($Ax+Cz=0$, $By+Cz=0$ – через ось Oy и ось Ox соответственно);

$Ax+D=0\ (B=C=0)$ – плоскость параллельна плоскости Oyz ($Cz+D=0$, $By+D=0$ – параллельна плоскости Oxy и Oxz соответственно);

$Ax=0$, т. е. $x=0\ (B=C=D=0)$ – плоскость совпадает с плоскостью Oyz ($y=0, z=0$ – уравнения плоскостей Oxz и Oxy соответственно).

Взаимное расположение плоскостей

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\ \vec{N}\{A_1;B_1;C_1\}$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\ \vec{N}\{A_2;B_2;C_2\}$$

Таблица 3.4.2

Взаимное расположение плоскостей

Косинус угла	*Условие параллельности*	*Условие перпендикулярности*
$\cos\varphi=\dfrac{(\vec{N}_1;\vec{N}_2)}{\lvert\vec{N}_1\rvert\cdot\lvert\vec{N}_2\rvert}=$ $=\dfrac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$	$\vec{N}_1 \parallel \vec{N}_2$ $\vec{N}_2=\alpha\cdot\vec{N}_1$ $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$	$\vec{N}_1 \perp \vec{N}_2$ $(\vec{N}_1;\vec{N}_2)=0$ $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

Расстояние d от точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$

$$d=\frac{\lvert Ax_1+By_1+Cz_1+D\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

3.5. Прямая в пространстве

Таблица 3.5.1

Уравнения прямой (l) в пространстве

№	*Название*	*Смысл параметров*
1.	Общие уравнения прямой в пространстве	Задаются как линия пересечения двух плоскостей $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$
2.	Канонические уравнения прямой	$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$, где $M_0(x_0,y_0,z_0)\in l$, $\vec{s}\{m,n,p\}\parallel l$
3.	Параметрические уравнения прямой	$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+pt, \end{cases}$ где t – параметр
4.	Уравнения прямой, проходящей через две заданные точки M_0, M_1	$\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}=\dfrac{y-y_0}{y_1-y_0}=\dfrac{z-z_0}{z_1-z_0}$, где $M_0(x_0,y_0,z_0)\in l$, $M_1(x_1,y_{1,}z_1)\in l$

Взаимное расположение двух прямых в пространстве

$$l_1:\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1};\qquad l_2:\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

Таблица 3.5.2

Взаимное расположение двух прямых в пространстве

№	*Название*	*Смысл параметров*
1.	Прямые заданы своими точками и направляющими векторами	$M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ $\vec{s}_1\{m_1,n_1,p_1\}$, $\vec{s}_2\{m_2,n_2,p_2\}$
2.	Углом φ между этими прямыми называется угол между их направляющими векторами $\vec{s}_1,\vec{s}_2$	$\cos\varphi=\dfrac{\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2}{\lvert\vec{s}_1\rvert\cdot\lvert\vec{s}_2\rvert}=$ $=\dfrac{m_1\cdot m_2+n_1\cdot n_2+p_1\cdot p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$
3.	Условие перпендикулярности прямых l_1,l_2	$\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2=0$ или $m_1\cdot m_2+n_1\cdot n_2+p_1\cdot p_2=0$

Окончание табл. № 3.5.2

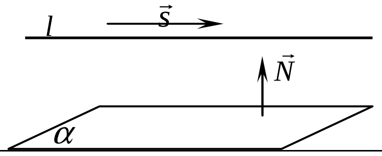
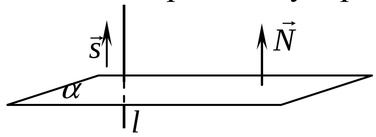
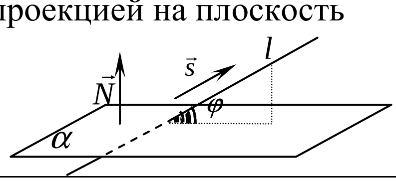
№	*Название*	*Смысл параметров*
4.	Условие параллельности прямых l_1, l_2	$\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{p_1}{p_2}$
5.	Прямые совпадают	$\overrightarrow{M_1M_2} \parallel \vec{s}_1$, т. е. $\dfrac{x_2 - x_1}{m_1} = \dfrac{y_2 - y_1}{n_1} = \dfrac{z_2 - z_1}{p_1}$
6.	Прямые пересекаются	$\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{s}_1, \vec{s}_2$ компланарны, т. е. $\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0$
7.	Прямые скрещиваются	$\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{s}_1, \vec{s}_2$ – некомпланарны, $\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} \neq 0$

Взаимное расположение прямой и плоскости

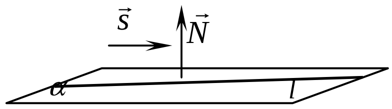
$$L: \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}; \qquad \alpha: Ax + By + Cz + D = 0.$$

Таблица 3.5.3

Взаимное расположение прямой и плоскости

№	*Условия*	*Содержание*
1.	Условие параллельности прямой и плоскости 	$\overrightarrow{N} \cdot \vec{s} = 0$, где $\overrightarrow{N}\{A, B, C\}, \vec{s}\{m, n, p\} \Rightarrow$ $Am + Bn + Cp + D = 0$
2.	Условие перпендикулярности 	$\overrightarrow{N} \parallel \vec{s}$, т. е. $\dfrac{A}{m} = \dfrac{B}{n} = \dfrac{C}{p}$.
3.	Угол φ между прямой и плоскостью есть острый угол между прямой и её проекцией на плоскость 	$\sin\varphi = \dfrac{\vec{s} \cdot \overrightarrow{N}}{\lvert\vec{s}\rvert \cdot \lvert\overrightarrow{N}\rvert} =$ $\dfrac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$

Окончание табл. № 3.5.3

№	*Условия*	*Содержание*
4.	Прямая принадлежит плоскости 	$\begin{cases} \vec{s}\cdot\vec{N}=0, \\ Ax_0+By_0+Cz_0=0 \end{cases}$

3.6. Поверхности второго порядка

Поверхностью второго порядка называется поверхность, определяемая в декартовой системе координат уравнением второй степени относительно текущих координат x, y, z.

Поверхности второго порядка с центром симметрии

Эллипсоид – это поверхность, в любом сечении которой плоскостями, параллельными координатным, получаются эллипсы

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

где a, b, c − полуоси.

Частым случаем эллипсоида является *сфера*

$$x^2+y^2+z^2=r^2.$$

Гиперболоид – это поверхность, в двух сечениях которой плоскостями, параллельными координатным, получается гипербола, а в третьем – либо эллипс, либо окружность.

<u>Однополостный</u> $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$, где

a, b − действительные полуоси, c − мнимая полуось.

<u>Двуполостный</u> $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$, где

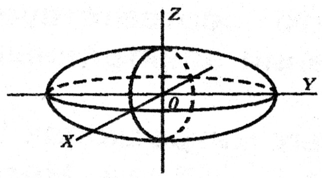
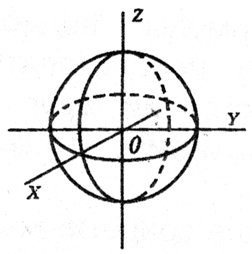
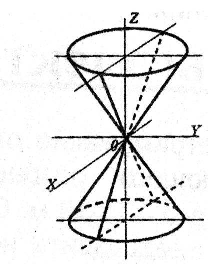
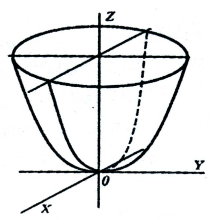
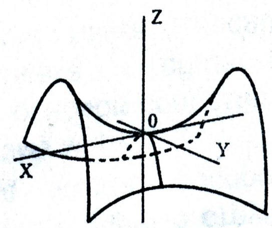
c − действительная полуось, $a,\ b$ − мнимые полуоси.

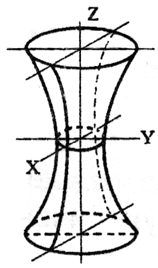
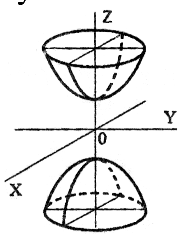
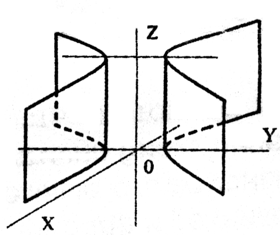
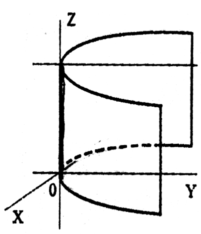
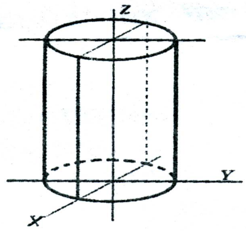
Конус $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$

имеет вершину в начале координат; за его направляющую кривую может быть взят эллипс с полуосями $a,\ b$, плоскость которого перпендикулярна оси z и находится на расстоянии c от начала координат.

Таблица 3.6.1

Поверхности второго порядка

Название	*Вид*	*Уравнение*
Эллипсоид		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
Сфера		$x^2+y^2+z^2=R^2$
Конус		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$
Параболоиды	Эллиптический 	$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$
	Гиперболический 	$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$

<table>
<tr><th>Название</th><th>Вид</th><th>Уравнение</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Гиперболоиды</td><td>Однополостный

</td><td>$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$</td></tr>
<tr><td>Двухполостный

</td><td>$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Цилиндры</td><td>Гиперболический

</td><td>$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$</td></tr>
<tr><td>Параболический

</td><td>$x^2=2py$</td></tr>
<tr><td>Эллиптический

</td><td>$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$</td></tr>
</table>

Поверхности второго порядка, не имеющие центра симметрии

Параболоид

Эллиптический параболоид $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$.

Сечения, параллельные оси z, − параболы; сечения, параллельные плоскости Oxy, − эллипсы.

Гиперболический параболоид $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$.

Сечения, параллельные плоскости Oyz, − одинаковые параболы; сечения, параллельные плоскости Oxz, − также параболы; сечения, параллельные плоскости Oxy, − гиперболы (а также пары пересекающихся прямых).

Цилиндр

Цилиндрической называется поверхность, которую описывает прямая, перемещающаяся параллельно самой себе вдоль некоторой кривой.

Гиперболический цилиндр $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Параболический цилиндр $x^2=2py$.

Эллиптический цилиндр $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

3.7. Опорные задачи

3.7.1. Построить прямые:

1) $5x-3y-15=0$; 2) $y=3x-2$; 3) $2x-y=0$;

4) $x+3=0$; 5) $y-6=0$.

Решение.

1. Так как уравнение содержит свободный член, то оно может быть приведено к виду $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1$ (уравнение прямой в отрезках)

$$5x-3y-15=0,\ |:15$$

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{-5}=1.$$

Таким образом, прямая пересекает ось Ox в точке (3,0) и ось Oy в точке (0,-5). Строим точки и проводим искомую прямую (рис. 3.1).

2. Для построения этой прямой можно, как и в предыдущем случае, записать уравнение прямой в отрезках

$$\frac{x}{2/3}+\frac{y}{-2}=1,$$

и провести прямую через точки $\left(\frac{2}{3},0\right)$ и $(0,-2)$.

Другой способ: не преобразовывая уравнения, найти координаты любых двух точек прямой. Например, полагаем $x_1=0,\ x_2=1$. Тогда $y_1=-2,\ y_2=1$ и через точки (0, −2) и (1,1) проводим прямую (рис. 3.2).

3. Так как в уравнении отсутствует свободный член, то прямая проходит через начало координат. Чтобы построить прямую, найдём ещё одну точку прямой. Например, полагаем $x=1$ и находим $y=2$. Через точки (0,0) и (1,2) проводим прямую (рис. 3.3).

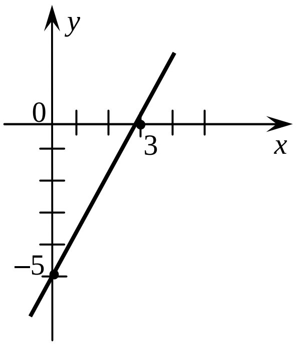


Рис. 3.1

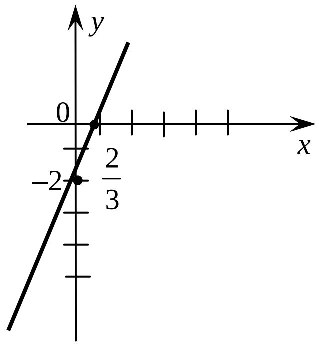


Рис. 3.2

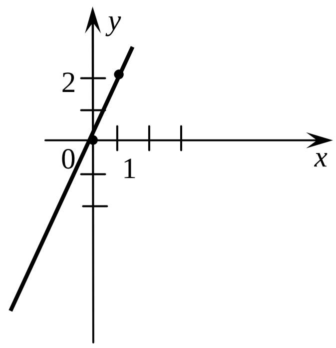


Рис. 3.3

4. Из уравнения следует, что $x=-3$, т. е. для всех точек прямой абсцисса является постоянной. Следовательно, прямая параллельна оси Oy и проходит, например, через точку (-3,0) (рис. 3.4).

5. Из уравнения следует, что $y=6$, т. е. для всех точек прямой ордината является постоянной. Следовательно, прямая параллельна оси Ox и проходит, например, через точку (0,6) (рис. 3.5).

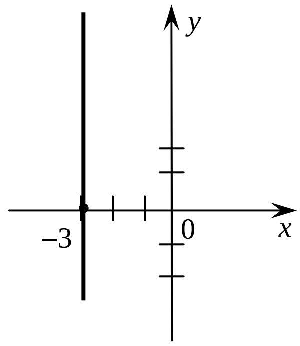


Рис. 3.4

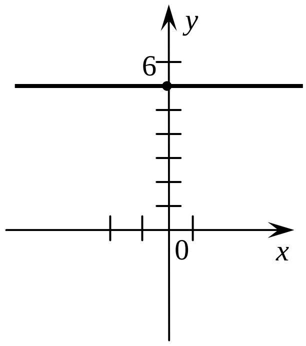


Рис. 3.5

3.7.2. При каких значениях m и n прямая $(m-3n-2)x+(2m+4n-1)y+(-3m+n-2)=0$ отсекает на оси Ox отрезок, равный 3, а на оси Oy отрезок, равный -2?

Решение. Уравнение данной прямой запишем в виде $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$:

$$\frac{m-3n-2}{3m-n+2}x+\frac{2m+4n-1}{3m-n+2}y=1;$$

$$\frac{x}{\frac{3m-n+2}{m-3n-2}}+\frac{y}{\frac{3m-n+2}{2m+4n-1}}=1.$$

По условию $a=3,\ b=-2$. Следовательно, $\frac{3m-n+2}{m-3n-2}=3$ и $\frac{3m-n+2}{2m+4n-1}=-2.$

Отсюда получаем систему $\begin{cases} 8n+8=0, \\ 7m+7n=0. \end{cases}$

Решив эту систему, находим: $n=-1,\ m=1$.

Ответ: $n=-1,\ m=1$.

3.7.3. Найдите проекцию точки $P(-6{,}4)$ на прямую, проходящую через точки $A(3{,}3)$ и $B(-7,-5)$. Найти точку Q, симметричную точке P относительно этой прямой.

Решение. Найдём уравнение прямой *AB* по формуле $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$ (уравнение прямой через две точки). Имеем

$$\frac{x-3}{-7-3}=\frac{y-3}{-5-3},$$
$$\frac{x-3}{-10}=\frac{y-3}{-8},$$
$$-8(x-3)=-10(y-3),$$
$$4x-5y+3=0.$$

Проекция P' точки *P* на прямую *AB* есть основание перпендикуляра, опущенного из точки *P* на прямую *AB*. Уравнение перпендикуляра можно найти по формуле $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}$, где x_0, y_0 – координаты точки *P*; *m, n* – координаты направляющего вектора $\vec{l}$ искомой прямой или координаты нормального вектора $\overrightarrow{N}=\{4;-5\}$ прямой *AB* (рис. 3.6). Получаем

$$\frac{x+6}{4}=\frac{y-4}{-5},$$
$$-5(x+6)=4(y-4),$$
$$5x+4y+14=0 \text{ − уравнение перпендикуляра.}$$

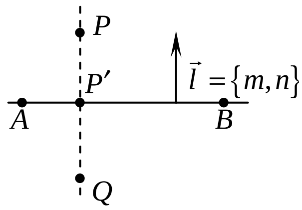


Рис. 3.6

Точка P' является пересечением прямой *AB* и перпендикуляра $P'P$. Поэтому её координаты мы найдём, решив систему уравнений

$$\begin{cases}4x-5y+3=0,\\5x+4y+14=0.\end{cases}$$

Получим $x=-2$, $y=-1$, т. е. $P'(-2;-1)$.

Обозначим координаты точки *Q* (*a*,*b*). Точка P' является серединой отрезка *PQ*, и её координаты определяются по формулам

$$x_{P'}=\frac{x_P+x_Q}{2},\ \ y_{P'}=\frac{y_P+y_Q}{2}.$$

Следовательно, $-2=\dfrac{-6+a}{2}$; $-1=\dfrac{4+b}{2}$

$$a=2,\ b=-6, \text{ т. е. } Q(2, -6).$$

Ответ: Q (2, –6).

3.7.4. Найти уравнение биссектрис угла, образованного прямыми $2x-3y-5=0$ и $6x-4y+7=0$.

Решение. Возьмём на биссектрисе произвольную точку $M(x;y)$ и определим её расстояние до каждой прямой по формуле

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Получим

$$d_1=\frac{|2x-3y-5|}{\sqrt{4+9}}=\frac{|2x-3y-5|}{\sqrt{13}};\ d_2=\frac{|6x-4y+7|}{\sqrt{36+16}}=\frac{|6x-4y+7|}{2\sqrt{13}}.$$

Так как биссектриса есть геометрическое место точек, равноудалённых от сторон угла, то $d_1=d_2$, следовательно

$$\frac{|2x-3y-5|}{\sqrt{13}}=\frac{|6x-4y+7|}{2\sqrt{13}},$$

$$|2x-3y-5|=0{,}5\cdot|6x-4y+7|,$$

$$2x-3y-5=0{,}5\cdot(6x-4y+7) \text{ и } 2x-3y-5=-0{,}5\cdot(6x-4y+7),$$

$2x+2y+17=0$ и $10x-10y-3=0$ – уравнения искомых биссектрис.

Ответ: $2x+2y+17=0$, $10x-10y-3=0$.

3.7.5. Найти геометрическое место точек, расстояние которых от прямой $3x+4y+6=0$ равно 4.

Решение. Пусть $M(x,y)$ – произвольная точка искомого геометрического места точек. Воспользуемся формулой $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

Получим

$$4=\frac{|3x+4y+6|}{\sqrt{3^2+4^2}},$$

$$4=\frac{|3x+4y+6|}{5},$$

$$20=\pm(3x+4y+6).$$

Получаем два уравнения

$$-(3x+4y+6)=20 \text{ или } 3x+4y-14=0,$$

$$-(3x+4y+6)=20 \text{ или } 3x+4y+26=0.$$

Таким образом, геометрическим местом точек, отстоящих от прямой $3x+4y+6=0$ на расстоянии 4, являются две прямые, параллельные данной прямой и расположенные по обе стороны от неё.

Ответ: $3x+4y-14=0$, $3x+4y+26=0$.

3.7.6. Две стороны квадрата лежат на прямых $2x+3y+5=0$ и $4x+6y-3=0$. Вычислить его площадь.

Решение. Так как нормальные векторы $\overline{N}_1=\{2;\ 3\}$ и $\overline{N}_2=\{4;\ 6\}$ параллельны (их координаты пропорциональны $\frac{2}{4}=\frac{3}{6}$), то на этих прямых лежат противоположные стороны квадрата. Возьмём на одной из них, например, на первой, произвольную точку. Пусть, например, это будет точка, у которой $x=-1$, тогда её вторая координата $y=-1$. Найдём расстояние от точки $(-1;-1)$ до второй прямой по формуле

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Получим $d=\dfrac{|4(-1)+6(-1)-3|}{\sqrt{4^2+6^2}}=\dfrac{13}{\sqrt{52}}=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$.

Тогда площадь квадрата равна $S=d^2=\dfrac{13}{4}$.

Ответ: $S=\dfrac{13}{4}$ кв.ед.

3.7.7. Построить плоскости, заданные уравнениями:

1) $5x+3y-5z+15=0$; 2) $x+4y-2z=0$; 3) $3x+4y-12=0$;

4) $3z-4=0$; 5) $4y+3z=0$.

Решение.

1. Чтобы построить плоскость, не проходящую через начало координат, необходимо найти отрезки, отсекаемые плоскостью на осях координат, т. е. уравнение плоскости записать в виде $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ (в отрезках)

$$5x+3y-5z+15=0, \Leftrightarrow 5x+3y-5z=-15 \ |:-15$$

$$\frac{5x}{-15}+\frac{3y}{-15}-\frac{5z}{-15}=1,$$

$$\frac{x}{-3}+\frac{y}{-5}+\frac{z}{3}=1,$$

$$a = -3,\ b = -5,\ c = 3.$$

Отложим отрезки $a = -3$, $b = -5$, $c = 3$ на координатных осях Ox, Oy, Oz соответственно. Полученные точки соединим прямыми. Эти прямые – следы данной плоскости на координатных плоскостях (рис. 3.7).

Отрезки a, b, и c можно найти, не преобразуя уравнение плоскости. Действительно, полагая $y = z = 0$, найдём $x = a = -3$; если $x = z = 0$, то $y = b = -5$; при $x = y = 0$ получим $z = c = 3$.

2. Плоскость проходит через начало координат. Для построения плоскости нужны ещё две точки, которые лучше всего взять в координатных плоскостях. Полагаем, например, $z = 0$ и из уравнения плоскости получаем $x = -4y$. Полагая в этом уравнении $y = 1$, находим $x = -4$. Таким образом, мы нашли точку $M_1(-4;1;0)$, через которую проходит плоскость. Аналогично, полагая $x = 0$, получим $z = 2y$. Следовательно, в качестве второй точки можно взять, например, точку $M_2(0;1;2)$. Теперь через найденные точки $M_1(-4;1;0)$, $M_2(0;1;2)$ и точку $O(0;0;0)$ строим плоскость (рис. 3.8).

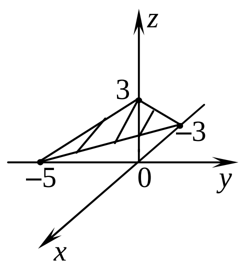


Рис. 3.7

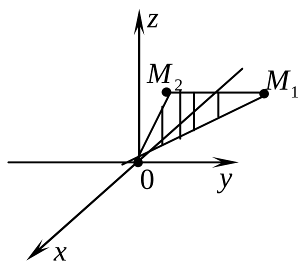


Рис. 3.8

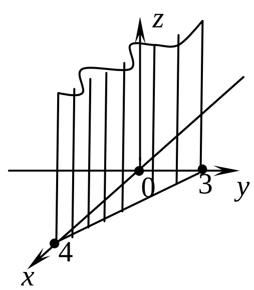


Рис. 3.9

3. Плоскость параллельна оси Oz, так как уравнение не содержит члена с координатой z. Чтобы построить плоскость, найдём отрезки a и b, которые она отсекает на осях Ox и Oy соответственно. Полагая $y = 0$, получим $x = a = 4$; при $x = 0$ получим $y = b = 3$. Отложим отрезки $a = 4$, $b = 3$ на осях Ox и Oy и соединим полученные точки прямой. Строим плоскость, содержащую полученную прямую и параллельную оси Oz. Это и будет искомая плоскость (рис. 3.9).

4) Плоскость одновременно параллельна осям Ox и Oy, т. к. отсутствуют члены с координатами x и y. На оси Oz плоскость отсекает отрезок, равный $z = \dfrac{4}{3}$ (рис. 3 10).

5) Плоскость проходит через ось Ox, так как отсутствует член с

координатой x и свободный член. Для построения плоскости нужна одна точка этой плоскости, например, $M(0;-3;4)$ (рис. 3.11).

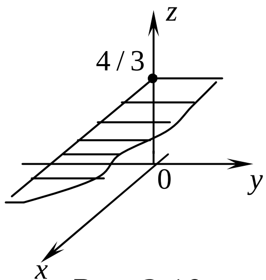


Рис. 3.10

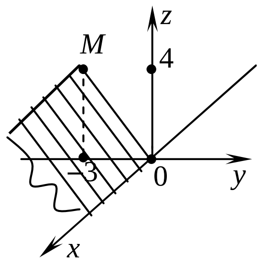


Рис. 3.11

3.7.8. Составить уравнение плоскости, которая проходит:

1) через точку $M(2;0;-1)$ параллельно плоскости yOz;

2) через точку $M(5;2;6)$ и осью Ox;

3) через точки $M_1(3;0;4)$, $M_2(0;6;9)$ параллельно оси Oy;

4) через начало координат параллельно плоскости $3x-y+2z-7=0$;

5) через три точки $M_1(3;-1;2)$, $M_2(4;-1;-1)$, $M_3(2;0;2)$;

6) через точки $M_1(3;-2;1)$, $M_2(0;3;5)$ и отсекает на осях Ox и Oy равные положительные отрезки.

Решение.

1. Уравнение плоскости, параллельной плоскости yOz, имеет вид $Ax+B=0$. Так как плоскость проходит через точку $M(2;0;-1)$, то её координаты удовлетворяют уравнению этой плоскости, т. е. имеет место равенство

$$2A+B=0,\ B=-2A.$$

Подставим найденное выражение для B в исходное уравнение и получим

$$Ax-2A=0,\ x-2=0 \text{ − искомое уравнение.}$$

2. Уравнение плоскости, проходящей через ось Ox, имеет вид $By+Cz=0$. Плоскость проходит через точку $M(5;2;6)$, поэтому

$$-3Cy+Cz=0,\ 3y-z=0 \text{ − искомое уравнение.}$$

3. Уравнение плоскости, параллельной оси Oy, имеет вид $Ax+Cz+D=0$. Подставим в это уравнение координаты точек $M_1(3;0;4)$, $M_2(0;6;9)$ и получим систему уравнений

$$\begin{cases}3A+4C+D=0,\\ 9C+D=0,\end{cases}$$

из которой находим $D=-9C$, $A=\frac{5}{3}C$. Подставим эти выражения в уравнение плоскости

$$\frac{5}{3}Cx+Cz-9C=0,$$

$5x+3z-27=0$ − искомое уравнение.

4. Так как искомая плоскость параллельна плоскости $3x-y+2z-7=0$, то нормальный вектор $\overline{N}=\{3,\ -1,\ 2\}$ данной плоскости является нормальным вектором искомой плоскости. Для нахождения уравнения искомой плоскости воспользуемся формулой

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Подставляя в это уравнение координаты начала координат и координаты нормального вектора, получаем уравнение искомой плоскости

$$3(x-0)-1(y-0)++2(z-0)=0,$$

$$3x-y+2z=0.$$

5. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки, не лежащей на одной прямой, можно найти по формуле

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Подставляя в это уравнение координаты точек $M_1(3;-1;2)$, $M_2(4;-1;-1)$ и $M_3(2;0;2)$, получаем

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 4-3 & -1+1 & -1-2 \\ 2-3 & 0+1 & 2-2 \end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

$3x+3y+z-8=0$ − уравнение искомой плоскости.

6. Воспользуемся уравнением плоскости в отрезках $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. Так как по условию $a=b$, то это уравнение примет вид $\frac{x+y}{a}+\frac{z}{c}=1$. Подставим в него координаты точек $M_1(3;-2;1)$, $M_2(0;3;5)$ и получим систему для определения a и c

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}=1, \\ \dfrac{3}{a}+\dfrac{5}{c}=1; \end{cases} \quad c=-1,\ a=0{,}5.$$

Следовательно, уравнение искомой плоскости

$$\frac{x+y}{0{,}5}+\frac{z}{-1}=1,$$

или $2x+2y-z-1=0$.

Ответ: 1) $x-2=0$; 2) $3y-z=0$; 3) $5x+3z-27=0$;

4) $3x-y+2z=0$; 5) $3x+3y+z-8=0$; 6) $2x+2y-z-1=0$.

3.7.9. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1;2;-3)$, $M_2(2;1;-5)$ перпендикулярно плоскости $x-y-z+2=0$.

Решение. Вектор нормали $\overline{N}=\{1;-1;-1\}$ заданной плоскости и вектор $\overline{M_1M_2}=\{1;1;-2\}$ параллельны искомой плоскости (рис. 3. 12).

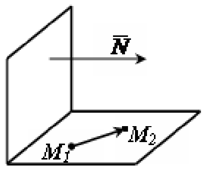


Рис. 3.12

Следовательно, для нахождения её уравнения можно воспользоваться формулой

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=0$$

(уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ параллельно векторам $\overline{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$, $\overline{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$). В качестве точки M_0 можно взять любую из данных точек, например $M_1(1;2;-3)$. Получим

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}=0,$$

$x+y-3=0$ – уравнение искомой плоскости.

Ответ: $x+y-3=0$.

3.7.10. Вычислить объём куба, две грани которого лежат на плоскостях $15x-16y+12z-30=0$ и $15x-16y+12z-80=0$.

Решение. Данные плоскости параллельны, так как координаты их нормальных векторов пропорциональны. Длина ребра куба равна расстоянию между параллельными плоскостями. На одной из плоскостей, например первой, возьмём произвольную точку, например $M_1(2;0;0)$. Определим расстояние от этой точки до другой плоскости по формуле

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$d=\frac{|15\cdot 2-16\cdot 0+12\cdot 0-80|}{\sqrt{15^2+16^2+12^2}}=\frac{|-50|}{25}=2.$$

Объём куба равен $V=d^3=8$.

Ответ: 8.

3.7.11. На оси *Oz* найти точку, равноудалённую от точки $M(2;2;4)$ и от плоскости $2x-2y+z-12=0$.

Решение. Так как искомая точка *N* принадлежит оси *Oz*, то она будет иметь координаты $(0;0;z)$. Расстояние от точки *N* до точки *M* равно

$$d_1=\sqrt{(2-0)^2+(2-0)^2+(4-z)^2}=\sqrt{(z-4)^2+8}.$$

Расстояние от *N* до плоскости $2x-2y+z-12=0$ равно

$$d_2=\frac{|2\cdot 0-2\cdot 0+z-12|}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{|z-12|}{3}.$$

По условию $d_1=d_2$. Тогда

$$\sqrt{(z-4)^2+8}=\frac{|z-12|}{3},$$

$$9\left[(z-4)^2+8\right]=(z-12)^2,$$

$$9\left(z^2-8z+16+8\right)=\left(z^2-24z+144\right),$$

$$8z^2-48z+72=0,$$

$$z^2-6z+9=0,$$

$$(z-3)^2=0,$$

$$z=3.$$

Ответ: *N* (0, 0, 3).

3.7.12. Найти угол между прямыми $\begin{cases}3x-y-5=0,\\2x+z-3=0\end{cases}$ и $\begin{cases}x-y=0,\\z=1.\end{cases}$.

Решение. Угол между прямыми найдём по формуле

$$\cos\varphi = \pm\left|\frac{(\bar{l}_1, \bar{l}_2)}{|\bar{l}_1| \cdot |\bar{l}_2|}\right|,$$

где $\bar{l}_1, \bar{l}_2$ – направляющие вектора этих прямых.

Вычислим направляющие векторы $\bar{l}_1, \bar{l}_2$:

$$\bar{l}_1 = [\bar{N}_1, \bar{N}_2] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -i - 3j + 2k = \{-1; -3; 2\},$$

$$\bar{l}_2 = [\bar{N}_1, \bar{N}_2] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -i - j = \{-1; -1; 0\}.$$

Тогда

$$\cos\varphi = \pm\left|\frac{(-1)\cdot(-1) + (-3)(-1) + 2\cdot 0}{\sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 0^2}}\right| = \pm\frac{4}{\sqrt{14\cdot 2}} = \pm\frac{2}{\sqrt{7}}.$$

$$\varphi = \arccos\left(\pm\frac{2}{\sqrt{7}}\right).$$

Полученные два значения для φ соответствуют острому и тупому углу между прямыми.

3.7.13. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(2;-3;4)$ параллельно прямым $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-7}{13}$ и $\begin{cases} x - 3y + 2z + 4 = 0, \\ 2x + y - 3z - 6 = 0. \end{cases}$

Решение. Сначала выясним взаимное расположение прямых

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-7}{13} \text{ и } \begin{cases} x - 3y + 2z + 4 = 0, \\ 2x + y - 3z - 6 = 0. \end{cases}$$

Для этого найдём их направляющие векторы $\bar{l}_1$ и $\bar{l}_2$. Имеем

$$\bar{l}_1 = \{4, 5, 13\},$$

$$\bar{l}_2 = [\bar{N}_1, \bar{N}_2] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 7i + 7j + 7k \text{ или } \bar{l}_2 = \{1, 1, 1\}.$$

Так как $\bar{l}_1 \nparallel \bar{l}_2$, то прямые непараллельны.

Пусть $M(x; y; z)$ – текущая точка искомой плоскости. Тогда векторы $\overline{M_1M}$, $\bar{l}_1$, $\bar{l}_2$ компланарны, т. е. $\left(\overline{M_1M};\bar{l}_1;\bar{l}_2\right)=0$.

Имеем $\overline{M_1M}=\{x-x_1, y-y_1, z-z_1\}=\{x-2, y+3, z-4\}$,

$$\left(\overline{M_1M};\bar{l}_1;\bar{l}_2\right)=\begin{vmatrix} x-2 & y+3 & z-4 \\ 4 & 5 & 13 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-8(x-2)+9(y+3)-(z-4)=0,$$

$8x-9y+z-47=0$ – уравнение искомой плоскости.

3.7.14. Найти точку *Q*, симметричную точке *P*(1, 5, 2) относительно плоскости $2x-y-z+11=0$.

Решение. Сначала найдём точку P' – проекцию точки *P* на плоскость $2x-y-z+11=0$. Она будет являться серединой отрезка, соединяющего точку *P* с искомой точкой *Q*. Поэтому, зная P', мы сможем найти и точку *Q* (рис. 3.13).

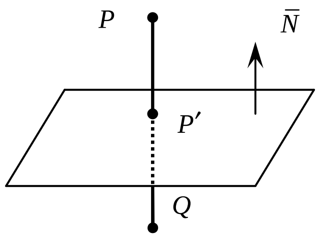


Рис. 3.13

Точку P' можно найти как точку пересечения плоскости $2x-y-z+11=0$ и прямой, проходящей через *P* перпендикулярно этой плоскости. Уравнение этой прямой будем искать в виде

$$\frac{x-1}{m}=\frac{y-5}{n}=\frac{z-2}{p},$$

где *m*, *n*, *p* – координаты направляющего вектора $\bar{l}$ прямой. В качестве вектора $\bar{l}$ можно взять нормальный вектор $\bar{N}=\{2;-1;-1\}$ плоскости $2x-y-z+11=0$. Тогда уравнение будет иметь вид

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-2}{-1}$$

или в параметрическом виде $x=1+2t$, $y=5-t$, $z=2-t$.

Подставим эти значения *x*, *y*, *z* в уравнение плоскости и найдём значение параметра *t* для точки пересечения прямой и плоскости, т. е. для точки P'

$$2(1+2t)-(5-t)-(2-t)+11=0,$$

$$6t+6=0,$$

$$t = -1.$$

Подставляя значение параметра t в параметрические уравнения прямой, найдём координаты точки P'

$$x = 1 + 2(-1) = -1,\ y = 5 - (-1) = 6,\ z = 2 - (-1) = 3;$$

$$P'(-1;6;3) \text{ – проекция точки } P.$$

Обозначим Q (a, b, c). Так как точка P' – середина отрезка PQ, то

$$x_{P'} = \frac{x_P + x_Q}{2},\ y_{P'} = \frac{y_P + y_Q}{2},\ z_{P'} = \frac{z_P + z_Q}{2},$$

$$-1 = \frac{a+1}{2},\ 6 = \frac{b+5}{2},\ 3 = \frac{c+2}{2};$$

$$a = -3,\ b = 7,\ c = 4.$$

Следовательно, искомая точка будет $Q(-3;7;4)$.

3.7.15. Найти угол между прямой $\dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z+1}{2}$ и плоскостью $4x + 2y + 2z - 5 = 0$.

Решение. Угол φ между прямой и плоскостью определяется как угол между прямой и её ортогональной проекцией на эту плоскость (рис. 3.14) по формуле

$$\sin\varphi = \frac{\left|\left(\overline{N}, \bar{l}\right)\right|}{\left|\overline{N}\right| \cdot \left|\bar{l}\right|} = \frac{\left|Am + Bn + Cp\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}},$$

где $\overline{N} = \{A, B, C\}$ – нормальный вектор плоскости, $\bar{l} = \{m, n, p\}$ – направляющий вектор прямой.

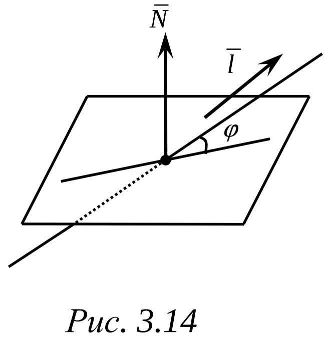


Рис. 3.14

По условию задачи имеем $\overline{N} = \{4,2,2\}$, $\bar{l} = \{1,-2,2\}$. Тогда

$$\left(\overline{N}, \bar{l}\right) = 4 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 4,$$

$$\overline{N} = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3,\ \left|\bar{l}\right| = \sqrt{16 + 4 + 4} = \sqrt{24},$$

$$\sin\varphi = \frac{|4|}{3 \cdot \sqrt{24}} = \frac{\sqrt{6}}{9},\ \varphi = \arcsin\frac{\sqrt{6}}{9}.$$

3.7.16. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M(2;-3;4)$ и перпендикулярной прямым

$$a_1 : \frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{-1} = \frac{z+5}{-2} \text{ и } a_2 : \frac{x-8}{3} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-2}{1}.$$

Решение. Уравнение прямой будем искать в виде

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$$

или

$$\frac{x-2}{m} = \frac{y+3}{n} = \frac{z-4}{p},$$

где m, n, p – координаты направляющего вектора $\bar{l}$ искомой прямой.

I способ решения. Обозначим $\bar{l}_1$ и $\bar{l}_2$ – направляющие векторы прямой a_1 и a_2 соответственно (рис. 3.15).

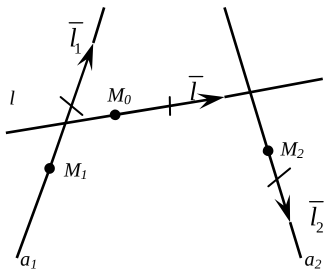


Рис. 3.15

Тогда

$$\bar{l}_1 = \{1, -1, -2\},\ \bar{l}_2 = \{3, -2, 1\}.$$

По условию имеем

$$\bar{l} \perp a_1 \Rightarrow \bar{l} \perp \bar{l}_1 \Rightarrow (\bar{l}, \bar{l}_1) = 0 \Rightarrow m - n - 2p = 0;$$

$$\bar{l} \perp a_2 \Rightarrow \bar{l} \perp \bar{l}_2 \Rightarrow (\bar{l}, \bar{l}_2) = 0 \Rightarrow 3m - 2n + p = 0.$$

Получили систему двух уравнений относительно переменных m, n, p:

$$\begin{cases} m - n - 2p = 0, \\ 3m - 2n + p = 0. \end{cases}$$

Её общее решение $\begin{cases} m = -5p, \\ n = -7p \end{cases}$ и $m = -5,\ n = -7,\ p = 1$, – одно из частных решений. Следовательно, вектор $\bar{l} = \{-5, -7, 1\}$ является направляющим для прямой l, и её уравнения имеют вид

$$\frac{x-2}{-5} = \frac{y+3}{-7} = \frac{z-4}{1}.$$

II способ решения. Так как $\bar{l} \perp \bar{l}_1$, $\bar{l} \perp \bar{l}_2$, то за направляющий вектор искомой прямой можно принять векторное произведение

$$\bar{l} = \left[\bar{l}_1, \bar{l}_2\right] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -5i - 7j + k = \{-5; -7; 1\}.$$

Тогда уравнения искомой прямой имеют вид

$$\frac{x-2}{-5} = \frac{y+3}{-7} = \frac{z-4}{1}.$$

3.7.17. Найти расстояние от точки $P(7;9;7)$ до прямой $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z}{2}$.

Решение. Искомое расстояние будет равно высоте параллелограмма, построенного на векторах $\bar{l}$ (рис.3.16), $\overline{M_0P}$ как на сторонах, и вычисляется по формуле

$$\rho(M_0, l) = \frac{\left|\left[\overline{M_0P}, \bar{l}\right]\right|}{\left|\bar{l}\right|},$$

где $\bar{l}$ – направляющий вектор прямой, M_0 – фиксированная точка прямой.

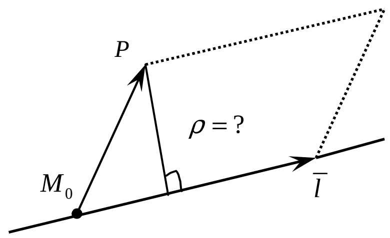


Рис. 3.16

Из условия задачи имеем $\bar{l} = \{4,3,2\}$, $M_0(2,1,0)$. Тогда

$$\overline{M_0P} = \{5,8,7\},$$

$$\left|\left[\overline{M_0P}, \bar{l}\right]\right| = \sqrt{(-5)^2 + 18^2 + (-17)^2} = \sqrt{638}, \quad \left|\bar{l}\right| = \sqrt{16+9+4} = \sqrt{29},$$

$$\rho(M_0, l) = \frac{\sqrt{638}}{\sqrt{29}} = \sqrt{22}$$ – искомое расстояние.

3.7.18. Определить центр и радиус окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$.

Решение. Так как коэффициенты при x^2 и y^2 равны и отсутствует член с произведением координат, то данное уравнение определяет окружность со смещённым центром. Чтобы определить радиус и координаты центра, необходимо привести заданное уравнение к коническому виду

$$\left(x^2+2x\right)+\left(y^2-6y\right)=-6,$$
$$\left(x^2+2x+1\right)-1+\left(y^2-6y+9\right)-9=-6,$$
$$\left(x+1\right)^2+\left(y-3\right)^2=4.$$

Следовательно, (−1, 3) − координаты центра, $R=2$ − радиус окружности.

Координаты центра и радиуса окружности можно найти и не приводя уравнение к коническому виду. Достаточно сравнить его с общим уравнением окружности со смещённым центром:

$$x^2+y^2-2xx_0-2yy_0+\left(x_0^2+y_0^2-a^2\right)=0.$$

Получим

$$-2x_0=2,\ 2y_0=6,\ x_0^2+y_0^2-a^2=6,$$
$$x_0=-1,\ y_0=3,\ R=a=2.$$

3.7.19. Найти центр и радиус окружности, проходящей через точки *A*(1,1), *B*(1, −1), *C*(2,0). Записать её уравнение.

Решение. Каноническое уравнение окружности в общем случае имеет вид

$$\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2=R^2.$$

Так как точки *A*, *B*, и *C* лежат на окружности, то их координаты должны удовлетворять уравнению окружности:

$$\begin{cases}\left(1-x_0\right)^2+\left(1-y_0\right)^2=R^2,\\ \left(1-x_0\right)^2+\left(-1-y_0\right)^2=R^2,\\ \left(2-x_0\right)^2+\left(0-y_0\right)^2=R^2;\end{cases}\quad \begin{cases}x_0^2+y_0^2-2x_0-2y_0=R^2-2,\\ x_0^2+y_0^2-2x_0+2y_0=R^2-2,\\ x_0^2+y_0^2-4x_0=R^2-4.\end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое, получим:

$$4y_0=0,\ y_0=0.$$

Вычитая из второго уравнения третье, получим:

$$2x_0=2,\ x_0=1.$$

Из третьего уравнения находим

$$R^2=1,\ R=1.$$

Таким образом, центр искомой окружности в точке *C* (1, 0), радиус $R=1$, и её уравнение имеет вид $\left(x-1\right)^2+y^2=1$.

3.7.20. Найти полуоси, координаты вершин и фокусов, эксцентриситет и уравнения директрис эллипса $3x^2+4y^2=108$.

Решение. Разделив левую и правую часть уравнения на 108, приведём уравнение к виду $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{27}=1$. Следовательно, $a^2=36$, $b^2=27$, т. е.

большая полуось эллипса $a=6$, малая $b=3\sqrt{3}$, вершины эллипса – $A_1(6{,}0)$, $A_2(-6{,}0)$, $B_1\left(0{,}3\sqrt{3}\right)$, $B_2\left(0{,}-3\sqrt{3}\right)$.

Найдём половину фокусного расстояния c по формуле

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{36-27}=3.$$

Следовательно, фокусы эллипса – $F_1(3{,}0)$, $F_2(-3{,}0)$; эксцентриситет $\varepsilon=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$; уравнения директрис эллипса $x=\pm\dfrac{a}{\varepsilon}=\pm\dfrac{a^2}{c}=\pm12$.

3.7.21. Оси эллипса совпадают с осями координат. Эллипс проходит через точки M (3; –2.4) и N (4; 1.8). Составить уравнение эллипса.

Решение. Так как оси эллипса совпадают с осями координат, то его центр находится в начале координат. Следовательно, каноническое уравнение эллипса имеет вид $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Так как эллипс проходит через точки M и N, то координаты этих точек удовлетворяют уравнению эллипса, то есть

$$\begin{cases}\dfrac{3^2}{a^2}+\dfrac{(-2{,}4)^2}{b^2}=1,\\ \dfrac{4^2}{a^2}+\dfrac{(1{,}8)^2}{b^2}1;\end{cases},\quad \begin{cases}\dfrac{9}{a^2}+\dfrac{5{,}76}{b^2}=1,\\ \dfrac{16}{a^2}+\dfrac{3{,}24}{b^2}=1;\end{cases},\quad a^2=25,\ b^2=9.$$

Следовательно, искомое уравнение эллипса $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

3.7.22. Составить уравнение эллипса, если известно его эксцентриситет $\varepsilon=\dfrac{2}{3}$, фокус F(2, 1) и уравнение директрисы $x-5=0$.

Решение. Для произвольной точки M (x,y) эллипса имеет $\dfrac{\rho(M,F)}{\rho(M,d)}=\varepsilon$, где $\rho(M,F)$ – расстояние от точки M до фокуса F, $\rho(M,d)$ – расстояние от точки M до соответствующей фокусу F директрисы d. Имеем $\rho(M,F)=\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}$, $\rho(M,d)=|x-5|$.

Тогда по условию $\dfrac{\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}}{|x-5|}=\dfrac{2}{3}$,

$$9\left[(x-2)^2+(y-1)^2\right]=4(x-5)^2,$$

$5x^2+9y^2+4x-18y-55=0$ – искомое уравнение эллипса.

3.7.23. Определить точки пересечения эллипсов $x^2+9y^2-45=0$ и $x^2+9y^2-6x-27=0$.

Решение. Найдём точки пересечения эллипсов, решив систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 9y^2 - 45 = 0, \\ x^2 + 9y^2 - 6x - 27 = 0. \end{cases}$$

Подставим $x^2 + 9y^2 = 45$ во второе уравнение и получим

$$45 - 6x - 27 = 0,\ 18 = 6x,\ x = 3.$$

Теперь из первого уравнения системы найдём

$$y^2 = \frac{1}{9}\left(45 - x^2\right),\ y^2 = \frac{1}{9}\left(45 - 9\right) = 4,\ y = \pm 2.$$

Следовательно, искомые точки пересечения (3, 2) и (3, –2).

3.7.24. Привести уравнение кривой $4x^2 + 9y^2 + 16x + 18y - 11 = 0$ к каноническому виду и построить эту кривую. Найти фокусы, эксцентриситет и уравнения директрис.

Решение. Сгруппируем члены уравнения с одноимёнными координатами

$$\left(4x^2 + 16x\right) + \left(9y^2 + 18y\right) - 11 = 0$$

или

$$4\left(x^2 + 4x\right) + 9\left(y^2 + 2y\right) - 11 = 0.$$

Дополним выражения в скобках до полных квадратов

$$4\left[\left(x^2 + 4x + 4\right) - 4\right] + 9\left[\left(y^2 + 2y + 1\right) - 1\right] - 11 = 0,$$

$$4\left(x + 2\right)^2 + 9\left(y + 1\right)^2 = 36,$$

$$\frac{\left(x + 2\right)^2}{9} + \frac{\left(y + 1\right)^2}{4} = 1.$$

Таким образом, заданное уравнение определяет эллипс с полуосями $a = 3$, $b = 2$ и центром $C(2,-1)$.

Найдём эксцентриситет ε данного эллипса. Имеем

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}.$$

Следовательно, эксцентриситет равен

$$\varepsilon = \frac{a}{c} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Чтобы найти фокусы эллипса и его директрис, перейдём к новой системе координат $x'Cy'$, полагая, $x' = x + 2$, $y' = y + 1$ (рис. 3.17).

Эта система координат будет для данного эллипса канонической, так как его уравнение будет в этой системе координат иметь вид

$$\frac{\left(x'\right)^2}{9} + \frac{\left(y'\right)^2}{4} = 1.$$

Следовательно, в системе координат $x'Cy'$ фокусы эллипса будут располагаться в точках $F_{1,2}\left(\pm\sqrt{5};0\right)$, а директрисы будут иметь уравнения $x' = \pm\frac{a}{\varepsilon} = \pm\frac{9}{\sqrt{5}}$. Из равенств $x' = x + 2$, $y' = y + 1$ находим, что

$$x = x' - 2,\ y = y' - 1.$$

Значит в «старой» системе координат xOy фокусы будут располагаться в точках $F_{1,2}\left(\pm\sqrt{5} - 2; 0 - 1\right)$, т. е. в точках

$$F_1\left(\sqrt{5} - 2; -1\right) \text{ и } F_2\left(-\sqrt{5} - 2; -1\right),$$

а директрисы будут иметь уравнения $x = \pm\frac{9}{\sqrt{5}} - 2$.

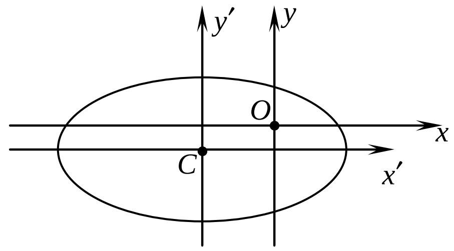


Рис. 3.17

3.7.25. Составить каноническое уравнение гиперболы с центром в начале координат, если:

1) расстояние между вершинами равно 8, а расстояние между фокусами 10;
2) гипербола имеет асимптоты $4y \pm 3x = 0$ и директрисы $5x \pm 16 = 0$;
3) гипербола проходит через точку $A(-5,3)$ и имеет эксцентриситет $\varepsilon = \sqrt{2}$.

Решение.

1. По условию задачи $2a = 8$, $2c = 10$, $a = 4$, $c = 5$. Тогда по формуле $c^2 = a^2 + b^2$ находим, что $b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 16 = 9$. Следовательно, каноническое уравнение данной гиперболы $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

2. Директрисами гиперболы называются прямые, определяемые уравнениями $x = \pm\frac{a}{\varepsilon} = \pm\frac{a^2}{c}$. Асимптоты гиперболы определяются уравнениями $y = \pm\frac{b}{a}x$. Тогда по условию задачи получаем

$$\frac{a^2}{c}=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{16}{5}, \qquad \frac{b}{a}=\frac{3}{4}; \qquad a^2=16, \qquad b^2=9.$$

Следовательно, каноническое уравнение данной гиперболы $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

3. Так как гипербола проходит через точку $A(-5,3)$, то координаты этой точки удовлетворяют уравнению гиперболы, т. е. имеет место равенство

$$\frac{(-5)^2}{a^2}-\frac{3^2}{b^2}=1, \ \frac{25}{a^2}-\frac{9}{b^2}=1.$$

Эксцентриситет гиперболы $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\sqrt{2}$. Таким образом, получили систему для определения параметров a и b:

$$\begin{cases}\frac{25}{a^2}-\frac{9}{b^2}=1,\\ \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\sqrt{2};\end{cases} \qquad \begin{cases}\frac{25}{a^2}-\frac{9}{b^2}=1,\\ \frac{b^2+a^2}{a^2}=2;\end{cases} \qquad a^2=b^2=16.$$

Следовательно, каноническое уравнение данной гиперболы $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{16}=1$.

3.7.26. Установить, что уравнение $16x^2-9y^2-64x-54y-161=0$ определяет гиперболу. Найти координаты её центра, полуоси, эксцентриситет, уравнение асимптот и уравнения директрис.

Решение. Сгруппируем члены с одноимёнными координатами

$$\left(16x^2-64x\right)-\left(9y^2+54y\right)-161=0$$

или

$$16\left(x^2-4x\right)-9\left(y^2+6y\right)-161=0.$$

Дополним выражения в скобках до полных квадратов.

$$16\left[\left(x^2-4x+4\right)-4\right]-9\left[\left(y^2+6y+9\right)-9\right]-161=0,$$

$$16(x-2)^2-9(y+3)^2-161-64+81=0,$$

$$16(x-2)^2-9(y+3)^2=144,$$

$$\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y+3)^2}{16}=1.$$

Таким образом, заданное уравнение определяет гиперболу с полуосями $a=3$, $b=4$ и центром $C\ (-2, -1)$.

Найдём эксцентриситет ε данной гиперболы. Имеем

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{9+16}=5.$$

Следовательно, эксцентриситет равен $\varepsilon=\dfrac{c}{a}=\dfrac{5}{3}$.

Чтобы найти уравнения асимптот и директрис гиперболы, перейдём к новой системе координат $x'Cy'$, полагая, $x'=x-2$, $y'=y+3$ (рис. 3.18). Система координат $x'Cy'$ будет для данной гиперболы канонической, так как её уравнение в системе координат будет иметь вид

$$\frac{(x')^2}{9}-\frac{(y')^2}{16}=1.$$

Следовательно, в системе координат $x'Cy'$ асимптоты гиперболы будут иметь уравнения $y'=\pm\dfrac{b}{a}x'$, т. е. $y'=\pm\dfrac{4}{3}x'$, а её директрисы будут иметь уравнения $x'=\pm\dfrac{a}{\varepsilon}=\pm\dfrac{a^2}{c}$, т. е. $x'=\pm\dfrac{9}{5}$.

Из равенств $x'=x-2$, $y'=y+3$ находим, что $x=x'+2$, $y=y'-3$.

Значит в «старой» системе координат xOy директрисы гиперболы будут иметь уравнения $x=\pm\dfrac{a^2}{c}+2$, т. е.

$$x=\pm\frac{9}{5}+2,$$

$$x=\frac{9}{5}+2=\frac{19}{5},\ x=-\frac{9}{5}+2=\frac{1}{5},$$

а для асимптот в системе координат xOy получаем уравнения

$$y+3=\pm\frac{4}{3}(x-2),$$

$$y+3=\frac{4}{3}(x-2),\ y+3=-\frac{4}{3}(x-2),$$

$$4x-3y-17=0,\ 4x+3y+1=0.$$

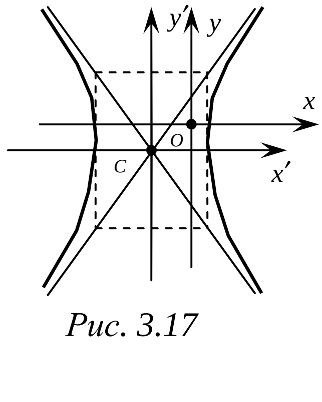


Рис. 3.17

3.7.27. Составить каноническое уравнение параболы, зная:

1) что расстояние фокуса от вершины равно 4;
2) парабола симметрична относительно оси Ox, проходит через начало координат и через точку $M(1,2)$;
3) парабола симметрична относительно оси Oy и проходит через точку $(5,-1)$ и начало координат;
4) Парабола имеет фокус $F(0,-3)$, проходит через начало координат, и её осью служит ось Oy.

Решение.

1. Каноническое уравнение искомых парабол $y^2 = \pm 2px$, $x^2 = \pm 2py$. Вершины этих парабол в начале координат, а фокусы в точках $F\left(\pm\frac{p}{2},0\right)$, $F\left(0,\pm\frac{p}{2}\right)$ соответственно. По условию задачи $\frac{p}{2} = 4$, $p = 8$ и $y^2 = \pm 16x$, $x^2 = \pm 16y$ − уравнения искомых парабол.

2. Так как парабола симметрична относительно оси Ox и проходит через начало координат, то её уравнение имеет вид $y^2 = 2px$ или $y^2 = -2px$. Так как парабола проходит через точку $M(1,2)$ (I четверть), то её уравнение будет иметь вид $y^2 = 2px$.

Фокальный параметр p найдём из условия принадлежности точки $M(1,2)$ параболе. Имеем

$$4 = 2p \cdot 1, \qquad p = 2.$$

Следовательно, $y^2 = 4x$ − уравнение искомой параболы.

3. Так как парабола проходит через начало координат и симметрична оси Oy, то её уравнение имеет вид: $x^2 = 2py$ или $x^2 = -2py$. Так как парабола проходит через точку $(5,-1)$ (VI четверть), то её уравнение будет иметь вид $x^2 = -2py$. Найдём параметр p. Имеем

$$5^2 = -2p \cdot (-1), \text{ т. е. } 2p = 25.$$

Следовательно, $x^2 = -25y$ − уравнение искомой параболы.

4. Так как парабола проходит через начало координат и её осью служит ось Oy, то уравнение параболы имеет вид $x^2 = 2py$ или $x^2 = -2py$. Так как фокус $F(0,-3)$ расположен на оси Oy ниже начала координат, то уравнение параболы $x^2 = -2py$ и $\frac{p}{2} = 3$. Из условия $\frac{p}{2} = 3$ находим, что $p = 6$. Следовательно, $x^2 = -12y$ − уравнение искомой параболы.

3.7.28. Определить точки пересечения эллипса $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{225}=1$ и параболы $y^2=24x$.

Решение. Найдём точки пересечения заданных линий, решив совместно их уравнения:

$$\begin{cases}\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{225}=1,\\ y^2=24x;\end{cases} \qquad \begin{cases}\frac{x^2}{100}+\frac{24x}{225}=1,\\ y^2=24x;\end{cases}$$

$$\begin{cases}3x^2+32x-300=0,\\ y^2=24x;\end{cases} \qquad \begin{cases}x_1=6, x_2=-\frac{50}{3},\\ y^2=24x.\end{cases}$$

Корень $x_2=-\frac{50}{3}$ не удовлетворяет условию задачи (для заданной параболы $x>0$). Для $x_1=6$ находим $y=\pm12$. Следовательно, искомые точки пересечения − (6,12) и (6, −12).

3.7.29. Даны координаты точек $A(-3;4)$ и $B(-5,4;\sqrt{5})$. Найти:

1) уравнение гиперболы, проходящей через точки A и B, если фокусы гиперболы расположены на оси абсцисс;
2) фокусное расстояние, эксцентриситет и уравнения асимптот этой гиперболы;
3) все точки пересечения гиперболы с окружностью с центром в начале координат, если эта окружность проходит через фокусы гиперболы;
4) построить обе кривые.

Решение.

1. Уравнение искомой гиперболы в каноническом виде записывается

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где a – действительная полуось, b – мнимая полуось, подставляя координаты точек A и B в данное уравнение, найдём эти полуоси из системы

$$\begin{cases}\frac{9}{a^2}-\frac{16}{b^2}=1,\\ \frac{25}{a^2}-\frac{80}{b^2}=1.\end{cases}$$

$a=\sqrt{5},\; b=2\sqrt{5},$ тогда $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{20}=1$ – уравнение гиперболы.

2. Фокусное расстояние $c=\sqrt{a^2-b^2}$, эксцентриситет $\varepsilon=\dfrac{c}{a}$, уравнение асимптот $y=\pm\dfrac{b}{a}x$. Подставляя найденные a и b в эти формулы, вычислим $c=5,\; \varepsilon=\sqrt{5},\; y=\pm 2x$.

3. Уравнение окружности с центром в начале координат имеет вид

$$x^2+y^2=R^2,$$

где R – радиус окружности. Найдём его из условия задачи: окружность проходит через фокусы гиперболы; зная, что фокусы лежат на оси Ox и фокусное расстояние $c=5$, вычислим координаты фокусов. Эти точки симметричны относительно начала координат: $F_1(-5;0),\; F_2(5;0)$. Подставляя одну из этих точек в уравнение, вычислим радиус: $5^2+0=R^2$, т. е. $R=5$ и $x^2+y^2=25$ – уравнение окружности.

Точки пересечения гиперболы и окружности найдём, решив систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ \dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{20}=1, \end{cases}$$

$$x=\pm 3,\; y=\pm 4$$

т. е. $A(3;4),\; B(-3;4),\; C(-3;-4),\; D(3;-4)$.

4. Чтобы построить гиперболу, наносим на оси координат полуоси $a=\sqrt{5},\; b=2\sqrt{5}$. Строим сначала прямоугольник со сторонами $2a,\; 2b$, затем проводим его диагонали, которые и являются асимптотами гиперболы, что легко проверить, рассмотрев в прямоугольном треугольнике OPT отношение катетов PT и OT:

$$\frac{a}{b}=tg\alpha=k \Rightarrow y=kx, y=\pm\frac{b}{a}x,$$

где k – угловой коэффициент прямой,
α – угол наклона асимптоты.
Теперь можно строить гиперболу
с вершинами в точках $(-\sqrt{5};0),(\sqrt{5};0)$
с ветвями между асимптотами (рис.3.18).

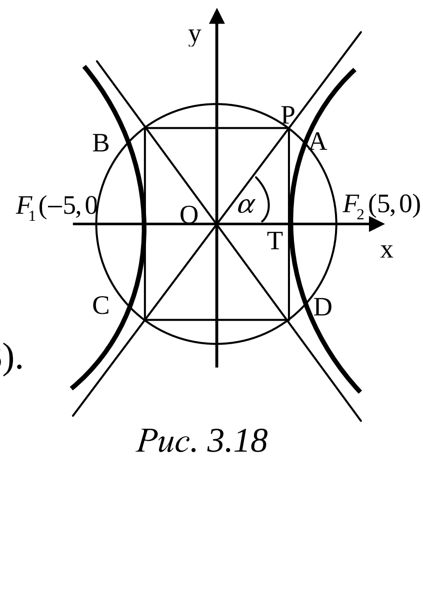


Рис. 3.18

3.7.30. Дана линия своим уравнением в полярной системе координат $\rho = 2\sin^3\varphi$. Требуется

1) построить линию по точкам;
2) записать уравнение линии в прямоугольной декартовой системе координат, у которой начало совпадает с полюсом, а положительная полуось абсцисс – с полярной осью.

Решение.

1. Прежде чем строить кривую, выполним небольшое исследование функции $\rho = 2\sin^3\varphi$:

a) функция принимает наибольшее значение $\rho\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2$ и наименьшее $\rho(0) = \rho(\pi) = \rho(2\pi)$;

b) функция непрерывна (существует) на всём промежутке $[0, 2\pi]$ и график её симметричен относительно луча $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, т. к. $\sin\varphi$ в I и II четвертях положителен и принимает равные значения в соответствующих точках;

c) в III и IV четвертях $\sin\varphi < 0$, а значит, и функция $\rho(\varphi)$ отрицательна в этих четвертях, поэтому при построении соответствующие точки откладываем по лучу в противоположную сторону от полюса.

Для подсчёта координат точек составим таблицу; т. к. в условии нет особых указаний, её можно составлять с постоянным или переменным шагом, лишь бы не пропустить стационарные точки функции:

φ	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{5\pi}{6}$	π	$\dfrac{7\pi}{6}$	$\dfrac{3\pi}{2}$	$\dfrac{11\pi}{6}$	2π
ρ	0	0,25	1,3	2	0,25	0	-0,25	-2	-0,25	0

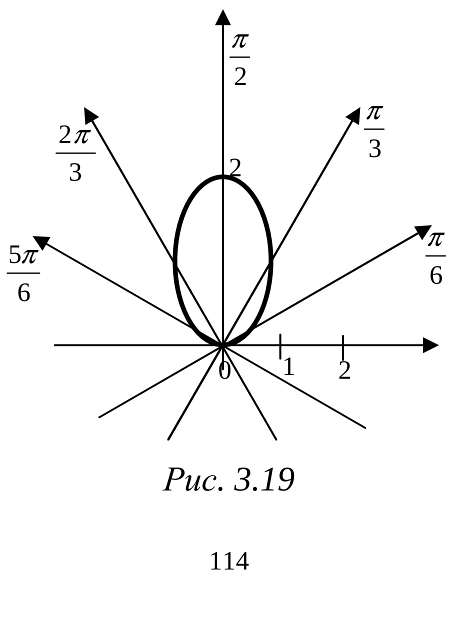


Рис. 3.19

Строим горизонтальную полярную ось ρ, фиксируем начало координат – полюс О, отмечаем с помощью транспортира угол $\frac{\pi}{6}$, проводим луч и на нём откладываем длину радиуса 0,25 (согласно выбранному масштабу), затем – следующий луч и точку $\left(\frac{\pi}{3};\, 1{,}3\right)$ и т. д.

Все полученные точки соединяем плавной линией (рис. 3.19)

2. Чтобы найти уравнение линии в декартовых координатах, выпишем формулы $sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, $x = \rho cos\varphi$, $y = \rho sin\varphi$.

Подставляя их в наше уравнение, получим:

$$\sqrt{x^2+y^2} = 2\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^3, \text{ т. е. } \left(x^2+y^2\right)^2 = 2y^3$$

3.7.31. Построить поверхность $1-2x^2-6y^2=3z$.

Решение. Уравнение определяет эллиптический параболоид (так как коэффициенты при квадрате переменных различные) с осью симметрии Oz (так как отсутствует квадрат переменной z) и вершиной, смещённой по оси Oz. Приведём уравнение к каноническому виду

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2p(z-z_0).$$

$$2x^2+6y^2=1-3z,$$

$$2x^2+6y^2=-3(z-1/3),$$

$$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{1}=-\frac{(z-1/3)}{2}.$$

$O'(0;\,0;\,1/3)$ − вершина параболоида.

Чаша параболоида направлена вниз, т. е. в отрицательном направлении оси симметрии (рис. 3.20).

Исследуем параболоид методом сечений.

Плоскость $Oxy\,(z=0)$ $\left(\begin{cases} z=0 \\ \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{1}=\frac{1}{6} \end{cases}\right)$ пересекает параболоид по кривой $\frac{x^2}{1/2}+\frac{y^2}{1/6}=1$, которая является эллипсом.

Плоскость $Oxz\,(z=0)$ $\left(\begin{cases} y=0, \\ \dfrac{x^2}{3}=-\dfrac{(z-1/3)}{2} \end{cases}\right)$ пересекает параболоид по кривой $x^2=-\dfrac{3}{2}(z-1/3)$, которая является параболой.

Плоскость Oyz $(z=0)$ $\left(\begin{cases} x=0, \\ \dfrac{y^2}{1}=-\dfrac{(z-1/3)}{2} \end{cases}\right)$ пересекает параболоид по кривой $y^2=-\dfrac{(z-1/3)}{2}$, которая является параболой.

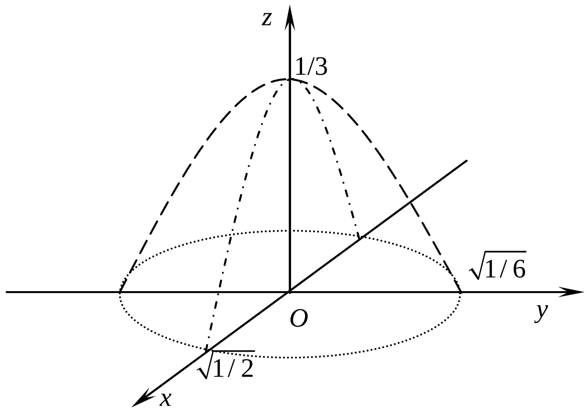


Рис. 3.20

3.8. Задачи для самостоятельной работы

3.8.1. (ФЛЦ) Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-1;2)$ перпендикулярно вектору $\vec{N}=\{3;-4\}$.

3.8.2. (ППЖ) Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(3;-5)$ перпендикулярно оси Oy.

3.8.3. (ЮГБ) Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-1;2)$ параллельно вектору $\vec{s}=\{3;-4\}$.

3.8.4. (ЛДЦ) Составить уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(3;-6)$ и $M_2(-5;1)$.

3.8.5. (ИАШ) Найти косинус угла, образованного парой пересекающихся прямых $l_1: 3x+2y-4=0$, $l_2: 3x+6y=1$.

3.8.6. (ГМГ) Найти расстояние от точки $M(2;-3)$ до прямой $l: 3x-4y-8=0$.

3.8.7. (МГШ) Найти расстояние между параллельными прямыми $l_1: 12x-5y+10=0$ и $l_2: 12x-5y+2=0$.

3.8.8. (ШИИ) Через точку пересечения прямых $3x-2y+5=0, x+2y-9=0$ проведена прямая, параллельная прямой $2x+y+6=0$. Составить её уравнение.

3.8.9. Построить плоскости, заданные уравнениями: а) $2y-5=0$; б) $x+z-1=0$; в) $3x+4y+6z-12=0$.

3.8.10. (ШБД) Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(5;-1;7)$ перпендикулярно вектору $\vec{N}=\{2;4;-3\}$.

3.8.11. (ДШЭ) Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(3;-2;2)$, $M_2(-3;1;2)$, $M_3(-1;2;1)$.

3.8.12. (КСС) Составить уравнение плоскости, параллельной оси Oz и проходящей через точки $M_1(3;-1;2)$ и $M_2(-1;2;5)$.

3.8.13. (ЛЛК) Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1;-2;3)$ и линию пересечения плоскостей $2x-y+2z-6=0$ и $3x+2y-z+3=0$.

3.8.14. (ЮФИ) Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(-1;3;0)$ и $M_2(2;4;-1)$, перпендикулярно плоскости $x-2y+3z-10=0$.

3.8.15. (ПЦФ) Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(3;-1;2)$ параллельно вектору $\vec{s}=\{5;0;4\}$.

3.8.16. (САЖ) Привести общее уравнение прямой к каноническому виду $\begin{cases} 5x-2y+3z-4=0 \\ 3x+2y-5z-4=0 \end{cases}$, записать параметрические уравнения прямой.

3.8.17. Составить параметрические уравнения прямых, проведённых через точку $M_0(2;-1;-3)$, если:

а) (ПДМ), (ЮЭЖ), (ДСА) прямая параллельна прямой $\begin{cases} x=-1+2t, \\ y=2-4t, \\ z=t; \end{cases}$

б) (МДГ), (АСИ), (ПДЦ) прямая параллельна оси Oy;

в) (ЭАД), (АКМ), (ЛГШ) прямая перпендикулярна плоскости $3x+y-z-8=0$.(В ответе укажите последовательно x, y, z).

3.8.18. (ССС) Найти величину острого угла между прямыми
$$\frac{x-4}{-3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-5}{-2} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x-y+2z-8=0, \\ 2x+y-z+3=0. \end{cases}$$

3.8.19. (ЮИФ) Найти расстояние от точки $M(-3;1;2)$ до прямой $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{-4}=\dfrac{z+6}{2}$.

3.8.20. (БЛФ) Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z-2}{1}$ с плоскостью $3x+5y+z-21=0$.

3.8.21. (ЦМИ) Найти проекцию точки $A(4;-3;1)$ на плоскость $x+2y-z-3=0$.

3.8.22. (ЛСД) Найти координаты точки, симметричной точке $M_1(3;4;5)$ относительно плоскости $x-2y+z-6=0$.

3.8.23. (ЭГШ) Составить уравнение плоскости, проходящей через две пересекающиеся прямые $l_1:\dfrac{x-3}{5}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{4}$,
$l_2:\dfrac{x-8}{3}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-6}{-2}$.

3.8.24. Определить (ЛАС) координаты центра S и (ЦФЭ) радиус r окружности, заданной общим уравнением $9x^2+9y^2+36x-18y+20=0$.

3.8.25. (ЮЖГ) Найти расстояние между центрами окружностей $x^2+y^2+6x-14y-6=0$ и $x^2+y^2-24x+2y-51=0$.

3.8.26. Найти (ЖШБ), (ИШИ) оси, вершины, (ДАЛ), (ЮЖК) фокусы и (МФМ) эксцентриситет эллипса $9x^2+25y^2-225=0$.

3.8.27. Показать, что уравнение $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$ представляет собой уравнение эллипса. Найти (ЛШИ) центр; (ШШГ), (ЦЦК) оси, вершины, фокусы и (ЭЮШ) эксцентриситет этого эллипса.

3.8.28. Составить каноническое уравнение эллипса, у которого длина малой оси равна 24, а один из фокусов имеет координаты $(-5;0)$.

3.8.29. Найти координаты вершин, (ГМЮ), (ИАФ) оси, фокусы, эксцентриситет и уравнения асимптот гиперболы $4x^2-5y^2-100=0$.

3.8.30. Показать, что уравнение $5x^2-4y^2+30x+8y+21=0$ представляет собой уравнение гиперболы. Найти центр, оси, вершины, фокусы, эксцентриситет и асимптоты этой гиперболы.

3.8.31. Даны вершины гиперболы $A_1(-9;2)$ и $A_2(1;2)$ и её эксцентриситет $\varepsilon=2{,}6$. Составить уравнение гиперболы, найти её (ГДЛ), (ЛМЛ) фокусы и (ЛПЖ), (БШЭ) асимптоты.

3.8.32. Определить координаты фокуса и составить уравнение (АЛА) директрисы параболы $y^2=4x$.

3.8.33. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат и фокусом в точке $F(0;-8)$.

3.8.34. Показать, что уравнение $2x^2-12x+y+13=0$ представляет собой уравнение параболы. Найти вершину, фокус, ось и директрису этой параболы.

3.8.35. Какую траекторию опишет точка М, если:

А) $M-$ точка окружности круга радиуса R_1, катящегося без скольжения по кругу радиуса R_2 ($R_2=R_1$) снаружи;

Б) $M-$ точка окружности круга радиуса R, катящегося без скольжения по горизонтальной прямой;

В) M − точка, движущаяся по радиусу из центра к краю вращающегося диска;

Г) M − точка обода диска с диаметром D_1, катящегося без скольжения по окружности внутри трубы с внутренним диаметром D_2 ($D_2=3\cdot D_1$).

3.8.36.* (ШЮС), (МПД) Круг радиуса a катится по прямой OX без скольжения. Составить параметрические уравнения кривой, описанной точкой M окружности, приняв за параметр t угол поворота катящегося круга и положив, что при $t=0$ точка M находится в начале координат.

3.8.37.* (ГБМ), (МЮД) Нить, намотанная на окружность $x^2+y^2=a^2$, разматывается, оставаясь натянутой. Составить параметрические уравнения кривой, описанной концом нити, если вначале конец нити находится в точке $(0;1)$. За параметр t принять длину смотанной дуги (в радиусах).

3.8.38.* (ГЮМ) Произвольный луч OM, составляющий с осью Oy угол t (в радианах), пересекает прямую $x=at$ в точке M. Написать уравнение геометрического места точек M.

3.8.39.* Круг радиуса r катится без скольжения по кругу радиуса $R>r$ снаружи его. Составить параметрические уравнения кривой, описанной точкой M катящейся окружности.

3.8.40.* Круг радиуса r катится без скольжения по кругу радиуса $R>r$ внутри него. Составить параметрические уравнения кривой, описанной точкой M катящейся окружности.

3.8.41.* (МИЦ) К вершине правильного тетраэдра с ребром a приложены три силы, изображаемые его вектор-рёбрами. Определить величину равнодействующей.

3.8.42.* Шар $x^2+y^2+z^2=4z$ освещён лучами, параллельными прямой $x=0$, $y=z$. Найти форму тени шара на плоскости xOy.

3.8.43. Построить поверхности и определить их вид.

1). $4x^2+9y^2+36z^2=72$; 2). $6x^2+y^2-3z^2=0$;

3). $6x^2-4y^2+3z^2-12=0$; 4). $4x^2-3y^2-5z^2+60=0$;

5). $5x^2+2y^2=10z$; 6). $2x^2+3y^2-z^2=18$;

7) $x^2=8(y^2+z^2)$; 8) $4x^2-5y^2-2z^2+40=0$;

9) $4x^2+6y^2-24z^2=96$; 10) $z=8-x^2-4y^2$;

11) $7x^2-3y^2-z^2=21$; 12) $x^2-y+9z^2=0$;

3.9. Проверьте себя

Вариант 1

1. (ИЛЖ) Найти угловой коэффициент прямой $5x-4y+2=0$.
2. (СЭШ) Найти сумму координат точки Q, если точка Q находится на отрезке, соединяющем точки $A(-1;5)$ и $B(2;1)$, $AQ=2\cdot QB$.
3. (МБМ) Найти сумму $A+B$, если векторы $\{2;-1;5\}$ и $\{4;3;-1\}$ параллельны плоскости $Ax+By+5z+1=0$.
4. (БДГ) Найти сумму $A+n$, если прямая с направляющим вектором $\{1;-5;-1\}$ параллельна плоскости $A(x-1)-3(y-2)+3(z+4)=0$, проходящей через точку $(1;4;n)$.
5. (ЭАФ) Найти косинус угла между прямыми $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{5}$ и $x=5t+4$, $y=-2t$, $z=-t+1$.
6. (ЖМШ) Найти сумму координат точки пересечения прямой $\dfrac{x-12}{4}=\dfrac{y-9}{3}=\dfrac{z-1}{7}$ с плоскостью $3x+5y-z-20=0$.
7. (ПЭЖ) В какой точке находится центр кривой $x^2+2y^2+2x=0$?
8. (ЦЖЦ) Найти число общих точек (без учёта кратности) поверхности $x^2+2y^2+z^2=1$ и прямой $x=1-t$, $y=t-1$, $z=1$.
9. (ПАЖ) Найти сумму координат направляющего вектора прямой $\begin{cases}2x-3y-4z+8=0\\-x+2y+z-4=0\end{cases}$, если его первая координата равна 5.
10. (СМБ) Найти расстояние между двумя параллельными плоскостями $7x-6y+6z+7=0$ и $7x-6y+6z-15=0$.

Вариант 2

1. (ЖСД) Найти, чему равно $b+c$, если $3x+by+c=0$ – уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;4)$ перпендикулярно отрезку BC, где $B(-2;-1)$, $C(4;1)$.
2. (ГЛК) В каком промежутке находится значение меньшего угла между прямыми $2x-3y-10=0$ и $x+2y+6=0$?
3. (МДА) Найти сумму $B+C+D$, если плоскость $3x+By+Cz+D=0$ параллельна плоскости $3x-8y-z+4=0$ и проходит через точку

$(-4;1;3)$.

4. (МСД) Найти сумму координат всех точек пересечения плоскости $2x+4y-3z-12=0$ с осями координат.
5. (КБК) Найти, чему равен угол между прямой $\frac{x-1}{7}=\frac{y+1}{0}=\frac{z-2}{1}$ и плоскостью $3x+4z-5=0$.
6. (ДАЮ) Найти A, если прямая $\begin{cases} 3x-y+z-1=0 \\ x-3y+z+4=0 \end{cases}$ параллельна плоскости $Ax-y-2z+1=0$.
7. (СКБ) В какой точке находится центр кривой $2x^2-y^2-4x+1=0$?
8. (ПГЮ) Найти число общих точек (без учёта кратности) поверхности $x^2+y^2-4z^2=1$ и прямой $x=1,\ y=2+2t,\ z=1+t$.
9. (МГМ) Прямая $\frac{x-3}{-2}=\frac{y+4}{5}=\frac{z+3}{3}$ задаётся системой уравнений $\begin{cases} 5x+ay=7 \\ 3y-5z=c \end{cases}$. Найти сумму $a+c$.
10. (ПИЭ) Найти расстояние от точки $A(2;3;-1)$ до прямой $\frac{x-5}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+25}{-2}$.

Вариант 3

1. (БКЛ) Найти, чему равно $b+c$, если уравнение прямой с угловым коэффициентом $k=-0,2$, проходящей через точку $M(-3;5)$, записано в виде $x+by+c=0$.
2. (МЛМ) Найти расстояние от точки $M(2;-2)$ до прямой $y=-\frac{1}{3}x+2$.
3. (ДКЦ) Найти, чему равна сумма $a+b+c$, если плоскость $2x-y+6z+D=0$ перпендикулярна вектору $\{a;1;b\}$ и параллельна вектору $\{-1;1;c\}$.
4. (ИБИ) Найти, чему равна сумма $B+C+m+n$, если прямая $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-8}=\frac{z-4}{4}$ перпендикулярна плоскости $-x+By+Cz+6=0$ и проходит через точку $(1;m;n)$.
5. (ЦЭШ) Найти косинус угла между плоскостями $4x-5y+3z-1=0$ и

$x-4y-z+9=0$.

6. (АДС) Найти сумму координат точки пересечения прямой $\frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{4}=\frac{-z+5}{2}$ с плоскостью $3x+y+2z+7=0$?
7. (МИЮ) В какой точке находится центр кривой $2x^2+y^2+16x=0$?
8. (СЭШ) Найти, чему равно число общих точек (без учёта кратности) поверхности $2x^2-y^2+z^2=0$ и прямой $x=t,\ y=2t-1,\ z=t$.
9. (ЖИФ) Прямая, проходящая через точку $M(-6;1;4)$ и перпендикулярная векторам $\vec{p}\{1;2;-3\}$ и $\vec{q}\{3;1;1\}$, задаётся уравнениями $\frac{x+6}{1}=\frac{y+b}{m}=\frac{z+c}{n}$. Найти сумму значений b+c+m+n.
10. (МАД) Найти расстояние между двумя параллельными плоскостями $4x-4y+2z-9=0$ и $4x-4y+2z+15=0$.

Вариант 4

1. (ИЭШ) Найти, чему равно b+c, если прямая $y=-2x+6$ параллельна прямой $2x+by+c=0$, проходящей через точку $(-2;-1)$.
2. (ШБФ) В каком промежутке находится значение меньшего угла между прямыми $y=2x+8$ и $y=\frac{3}{4}x-3$?
3. (ШГК) Найти, чему равна сумма $A+D$, если плоскость $Ax+2y+3z+D=0$ проходит через точки $(2;-6;3)$ и $(3;-2;1)$.
4. (ШГК) Найти расстояние между точками пересечения плоскости $4x-3y+6z-12=0$ с осями Ox и Oy.
5. (ФДШ) Найти, чему равен косинус угла между прямыми $\frac{x+7}{-2}=\frac{y}{4}=\frac{z+1}{2}$ и $x=4t-2$, $y=2t+3$, $z=2t-7$.
6. (МША) Найти m, если прямая $x=mt+1,\ y=3t-1,\ z=4-2t$ параллельна плоскости $2x-3y+z-8=0$.
7. (СКС) В какой точке находится центр кривой $x^2-2y^2+4y-3=0$?
8. (ЛШК) Найти, чему равно число общих точек (без учёта кратности) поверхности $x^2+2y^2=z$ и прямой $x=t$, $y=1+t$, $z=1+t$.
9. (ЛМГ) Прямая с направляющем вектором $\vec{p}\{-2;3;2\}$, проходящая через точку $M(2;-1;3)$, задаётся уравнением $\frac{x-2}{4}=\frac{y+b}{m}=\frac{z+c}{n}$.

Найдите сумму значений $b+c+m+n$.

10. (ЖКД) Найти расстояние между двумя параллельными прямыми $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{2}$ и $\frac{x-7}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-3}{2}$.

Вариант 5

1. (ЮСД) Найти, чему равно $b+c$, если прямая $x+by+c=0$ перпендикулярна прямой $x-y+2=0$ и проходит через точку $A(-1;3)$.
2. (ЛБК) Найти расстояние между прямыми $2x+y+3=0$ и $2x+y-2=0$.
3. (ЖКД) Найти, чему равна сумма $B+C+m$, если плоскость $-2(x-2)+B(y+m)+C(z-3)=0$ проходит через точку $(2;-8;1)$ и перпендикулярна вектору $\{1;-2;3\}$.
4. (ЦЮЦ) Найти сумму координат точки А, если $A(2;m;n)$ – точка, лежащая на прямой $\begin{cases} x=-4t-2 \\ y=t+3 \\ z=2t+1. \end{cases}$
5. (ФДЦ) Найти, чему равен угол между прямой $y=2x-1$, $z=-x+2$ и плоскостью $2x+y+z-4=0$.
6. (ДАД) Прямая $\frac{x-1}{4}=\frac{y-1}{n}=\frac{z}{-1}$ перпендикулярна плоскости $Ax-2y+z-1=0$. Найти A.
7. (ШЦИ) В какой точке находится центр кривой $x^2+y^2+6x+3=0$?
8. (ЦИЖ) Найти, чему равно число общих точек (без учёта кратности) поверхности $x^2-2z^2=1$ и прямой $\begin{cases} x=2+t \\ y=4t \\ z=t. \end{cases}$
9. (ДКД) Прямая $x=3t+a,\ y=-2t+b,\ z=qt-1$ проходит через точку $(2;3;-1)$ перпендикулярно прямой $\frac{x-8}{2}=\frac{y+3}{-3}=z$. Найдите сумму $q+a+b$.
10. (ГКС) Найдите расстояние между двумя параллельными плоскостями $3x+5y-\sqrt{2}z-16=0$ и $3x+5y-\sqrt{2}z+2=0$.

Вариант 6

1. (СЛИ) $y = kx + b$ − уравнение прямой с направляющим вектором $\vec{p}\{3;2\}$, проходящей через точку $M(2;-1)$. Чему равно $k - b$?
2. (ЖСШ) Чему равна сумма координат точки пересечения прямых $x - 3y - 2 = 0$ и $4x + y + 5 = 0$?
3. (ШКС) Точки $(2;8;-1)$, $(-2;8;3)$, $(1;6;5)$ лежат в плоскости с нормальным вектором $\{2;B;C\}$. Чему равна сумма $B + C$?
4. (ЖСБ) Прямая с направляющим вектором $\{-7;-4;2\}$ параллельна плоскости $2(x+3) + B(y-2) - (z-4) = 0$, проходящей через точку $(m;2;12)$. Найти сумму $B + m$?
5. (ЖИД) Чему равен косинус угла между прямыми $\dfrac{x}{-4} = \dfrac{y+2}{5} = \dfrac{z-7}{-3}$ и $x = 4 - z,\ y = 2 + 4z$?
6. (ЦИЖ) Чему равна сумма координат точки пересечения прямой $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+5}{1} = \dfrac{z-3}{-2}$ с плоскостью $x - 2y + 3z - 16 = 0$?
7. (ГЛИ) В какой точке находится центр кривой $2y^2 - 3x^2 + 6x - 5 = 0$?
8. (СЦШ) Чему равно число общих точек (без учёта кратности) поверхности $2x^2 + y^2 + 4z^2 = 1$ и прямой $x = 1 + t,\ y = 1,\ z = 1 + t$?
9. (МАС) Найдите сумму координат точки пересечения прямой $\begin{cases} 3x - y + 2z + 4 = 0 \\ -2x + 3y + z + 9 = 0 \end{cases}$ с плоскостью xOy.
10. (ИЛИ) Найдите расстояние между двумя параллельными прямыми $\dfrac{x+3}{3} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-8}{-2}$ и $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z+2}{-2}$.

Вариант 7

1. (ГШК) $x + by + c = 0$ − уравнение прямой, проходящей через точки $(-4;0)$ и $(0;2)$. Чему равна сумма $b + c$?
2. (СКА) Чему равно расстояние от точки $M(-1;-1)$ до прямой $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-4}{1}$?
3. (ЖКЮ) $\vec{N}\{1;-2;1\}$ нормальный вектор плоскости $3x + By + Cz + D = 0$,

проходящий через точку $(2;-1;-3)$ Чему равна сумма $B+C+D$?

4. (ЦЛЮ) Сумма координат всех точек пересечения плоскости $\frac{8}{m}x-4y+2z-8=0$ с осями координат равна 5. Чему равно m?
5. (ЭАЖ) Чему равен угол между двумя плоскостями $x-2y-z+7=0$ и $6x-3y+3z-18=0$?
6. (МИЖ) При каком C прямая $\begin{cases}3x-2y+z+7=0\\4x-3y+4z-1=0\end{cases}$ параллельна плоскости $2x-y+Cz-2=0$?
7. (ЦГФ) В какой точке находится центр кривой $x^2+y^2+2x+4y=0$?
8. (КЭШ) Чему равно число общих точек (без учёта кратности) поверхности $x^2+2y^2-z^2=-1$ и прямой $x=1,\ y=9t,\ z=t+1$?
9. (МИШ) Пусть $\frac{x-4}{3}=\frac{y+b}{m}=\frac{z+c}{n}$ − уравнение медианы, проведённой к стороне AB в треугольнике с вершинами $A(2;-8;3)$, $B(6;4;-5)$, $C(1;0;5)$. Найдите сумму значений $b+c+m+n$.
10. (ГЮГ) Найти расстояние от точки $A(2;-1;0)$ до прямой $\frac{x-7}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-3}{2}$.

Вариант 8

1. (ЭЖЦ) $\vec{N}\{2;a\}$ – нормальный вектор прямой с угловым коэффициентом $k=-\frac{2}{3}$. Чему равна сумма координат этого вектора?
2. (СПШ) В каком промежутке находится значение меньшего угла между прямыми $\frac{x-2}{2}=\frac{y+4}{1}$ и $\frac{x+3}{4}=\frac{y-6}{-2}$?
3. (ЮСФ) Точка $(-3;2;1)$ принадлежит плоскости $x+3+B(y+m)+C(z-1)=0$ с нормальным вектором $\{2;-6;4\}$. Чему равна сумма $B+C+m$?
4. (ЮИЭ) Прямая $\frac{x+2}{4}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-1}{-2}$ перпендикулярна плоскости $Ax-3y+Cz-1=0$ и проходит через точку $(m;n;1)$. Чему равна сумма $A+C+n+m$?

5. (ЦШЮ) Чему равен угол между прямой $\frac{x+5}{2}=\frac{2-y}{-1}=\frac{2z+3}{2}$ и плоскостью $x+2y-z+18=0$?
6. (КМБ) Чему равна сумма координат точки пересечения прямой $\frac{x+1}{3}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z+5}{6}$ с плоскостью $5x+2y-15z+11=0$?
7. (ЖПЖ) В какой точке находится центр кривой $2x-x^2-4y^2+2=0$?
8. (ПЖЦ) Чему равно число общих точек (без учёта кратности) поверхности $x^2+y^2-2z^2=0$ и прямой $x=t-1,\ y=1-t,\ z=1-t$?
9. (ЖСЦ) Пусть $\frac{x-3}{1}=\frac{y+b}{4}=\frac{z+c}{n}$ – уравнение прямой, проходящей через точку $A(3;3;2)$ перпендикулярно отрезку BC, $B(0;-2;1)$, $C(6;1;10)$. Найти сумму значений $b+c+n$.
10. (СЖБ) Найти расстояние между двумя параллельными плоскостями $4x+8y+z+4=0$ и $4x+8y+z+13=0$?

Вариант 9

1. (ШСС) Если $y=kx+b$ – уравнение прямой, параллельной прямой $3x-4y+2=0$ и проходящей через точку $M(-3;2)$, то чему равна сумма $k+b$?
2. (ЦГЮ) Если точка $Q(m;n)$ находится точно в середине отрезка с концами $A(-10;2m)$ и $B(n;14)$, то чему равна сумма координат точки Q?
3. (ЦКЖ) Если векторы $\{1;2;a\}$ и $\{1;b;1\}$ принадлежат плоскости $8x-2y+2z+1=0$, то чему равна сумма $a+b$?
4. (ЖАШ) Если точка $B(m;n;-3)$ лежит на прямой $\begin{cases}2x-y-2z+3=0\\x+3y-z-2=0\end{cases}$, то чему равна сумма $m+n$?
5. (ЖКА) Чему равен косинус угла между двумя плоскостями $3x+y+2z-18=0$ и $3x-y-2z+1=0$?
6. (ЖЛМ) В каком случае прямая $\frac{x-2}{m}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-5}{-3}$ перпендикулярна плоскости $3x-2y+cz+1=0$?
7. (ГЛИ) В какой точке находится центр кривой $2x^2-3y^2+6y-4=0$?

8. (СЦШ) Чему равно число общих точек (без учёта кратности) поверхности $x^2 - z^2 = 2y$ и прямой $x = -t,\ y = t,\ z = 1 + t$?
9. (ЖИШ) Прямая $x = 2t + a,\ y = -t + 1,\ z = qt + 3$ задаётся системой уравнений $\begin{cases} 2x - y - 5z + 20 = 0 \\ x + 3y + z - 4 = 0 \end{cases}$. Найдите сумму $a + q$.
10. (ГПЛ) Найдите расстояние между двумя параллельными прямыми $\frac{2x-10}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{1}$ и $\frac{x-4}{3} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-1}{2}$.

Вариант 10

1. (ГМГ) Если $y = kx + b$ – уравнение медианы, проведённой к стороне AC в треугольнике с вершинами $A(0;-3)$, $B(1;2)$, $C(4;-1)$, то чему равна сумма $k + b$?
2. (ЭЮК) Чему равна сумма расстояний от точки $(2;1)$ до точек $(7;13)$ и $(10;16)$?
3. (ЭЛЮ) Если (2;1;-4) – вектор, перпендикулярный плоскости, проходящей через точки (-1;2;1), (3;2;*a*), (2;*b*;3), то чему равна сумма $a + b$?
4. (ИБИ) Чему равно расстояние между точками пересечения плоскости $-6x + 3y + 2z - 18 = 0$ с осями О*y* и О*z*?
5. (ФЛФ) Чему равен косинус угла между прями $x = 3t + 1$, $y = t - 5$, $z = 5t + 5$ и $x = 1 - 5z,\ y = 3z - 2$?
6. (ЖСД) При каком значении m прямая $x = 3t + 8,\ y = mt + 2,\ z = -t + 4$ параллельна плоскости $2x - 5y + 4z - 11 = 0$.
7. (КПД) В какой точке находится центр кривой $x^2 + 7y^2 + 4x - 7 = 0$?
8. (ГМГ) Чему равно число общих точек (без учёта кратности) поверхности $x^2 + 2y^2 = 1$ и прямой $x = t,\ y = 2t - 1,\ z = t$?
9. (ЖМД) Прямая, проходящая через точку С(2;-4;3) и параллельная прямой $\begin{cases} 2x - y + 2z - 8 = 0, \\ x + y - 3z + 5 = 0, \end{cases}$, задаётся уравнениями $x = t + 2$, $y = mt + b$, $z = nt + c$. Найдите сумму значений $b + c + m + n$.
10. (ИЮБ) Найдите расстояние от точки А(-3;-2;8) до прямой $x = 3t + 1,\ y = 2t - 1,\ z = -2t - 2$.

3.10. Контрольная работа

3.10.1. Даны вершины треугольника A, B, C (табл. 3.10.1).Требуется, используя методы векторной алгебры:

1) построить треугольник ABC;
2) записать уравнения высоты BD и медианы CE;
3) записать уравнение прямой, проходящей через точку А, параллельно стороне BC.

Таблица 3.10.1

№ варианта	A	B	C	№ варианта	A	B	C
1	7,4	3,-3	-2,9	**11**	1,3	4,1	0,2
2	-3,4	0,-2	3,-1	**12**	5,-5	3,-3	7,8
3	3,2	7,-3	2,1	**13**	2,4	5,3	2,1
4	-4,3	1,0	9,5	**14**	8,3	5,0	-1,2
5	1,-5	-3,-7	0,1	**15**	6,5	3,1	0,-2
6	4,0	7,1	-2,3	**16**	5,0	7,-1	3,2
7	5,1	-3,0	6,1	**17**	-4,6	-1,5	4,0
8	-4,3	-1,-2	1,7	**18**	5,7	3,9	2,4
9	1,6	3,8	2,0	**19**	7,2	4,0	-3,1
10	2,4	3,9	6,8	**20**	2,4	3,-5	1,0

3.10.2. Даны координаты точек A, B, C, D (табл. 3.10.2). Найти:

1) уравнение плоскости p, проходящей через точки A, B, C;
2) канонические уравнения прямой α, проходящей через точку D, перпендикулярно плоскости p;
3) точки пересечения прямой α с плоскостью p и с координатными плоскостями xoy, xoz, yoz;
4) расстояние от точки D до плоскости p.

Таблица 3.10.2

№ варианта	A	B	C	D
1	-3,-2,-4	-4,2,-7	5,0,3	-1,3,0
2	2,-2,1	-3,0,-5	0,-2,-1	-3,4,2
3	5,4,1	-1,-2,-2	3,-2,2	-5,5,4
4	3,6,-2	0,2,-3	1,-2,0	-7,6,6
5	1,-4,1	4,4,0	-1,2,-4	-9,7,8
6	4,6,-1	7,2,4	-2,0,-4	3,1,-4
7	0,6,-5	8,2,5	2,6,-3	5,0,-6

Окончание табл. № 3.10.2

№ варианта	A	B	C	D
8	-2,4,-6	0,-6,1	4,2,1	7,-1,-8
9	-4,-2,-5	1,8,-5	0,4,-4	9,-2,-10
10	3,4,-1	2,-4,2	5,6,0	11,-3,-12
11	1,1,3	1,1,5	2,3,1	5,2,3
12	4,1,6	1,1,3	5,2,3	2,2,1
13	2,2,1	1,2,3	1,1,3	4,1,2
14	5,2,3	4,2,1	4,1,2	1,1,2
15	1,1,1	1,-1,2	2,2,1	6,6,4
16	-1,2,1	1,3,3	0,1,-4	5,2,7
17	2,0,2	1,3,5	2,4,4	5,3,1
18	2,0,3	3,2,2	2,2,5	1,1,-4
19	2,-2,3	6,2,3	3,1,4	6,-4,3
20	4,6,4	1,12,-2	5,7,5	-1,9,5

3.10.3. Решить задачу.

1-5 Даны координаты точек A, B и радиус окружности R, центр которой в начале координат. Требуется: 1) составить каноническое уравнение эллипса, проходящего через точки A, B; 2) найти полуоси, фокусы и эксцентриситет этого эллипса; 3) найти точки пересечения эллипса и окружности; 4) построить эллипс и окружность.

1. $A(4;-2)$, $B(2;\sqrt{7})$, $R=2\sqrt{5}$;

2. $A(-8;4)$, $B(4\sqrt{7};-2)$, $R=4\sqrt{5}$;

3. $A(\sqrt{6};-2)$, $B(-3;\sqrt{2})$, $R=3$;

4. $A(-6;2\sqrt{6})$, $B(3\sqrt{2};6)$, $R=8$;

5. $A(2\sqrt{6};-4)$, $B(6;2\sqrt{2})$, $R=2\sqrt{10}$.

6-10 Даны координаты точек A, B. Требуется: 1) составить канонические уравнения гиперболы, проходящей через точки A, B, если фокусы гиперболы расположены на оси абсцисс; 2) найти полуоси, фокусы, эксцентриситет и уравнения асимптот; 3) найти точки пересечения гиперболы с окружностью с центром в начале координат, если эта окружность проходит через фокусы гиперболы; 4) построить гиперболу, её асимптоты и окружность.

6. $A(-6;2\sqrt{5})$, $B\left(12,10\sqrt{2}\right)$;

7. $A(4;6)$, $B\left(6,4\sqrt{6}\right)$;

8. $A(-4;-3)$, $B(8,9)$;

9. $A(8;12)$, $B\left(-6, 2\sqrt{15}\right)$;

10. $A(8;6)$, $B\left(10, -3\sqrt{10}\right)$.

11. Найти периметр параболы $y^2 = 2px$ и уравнение её директрисы, если эта парабола проходит через точки пересечения прямой $y = x$ с окружностью $x^2 + y^2 - 6x = 0$.

12. Составить уравнение и построить линию, расстояние каждой точки которой от точки $A(2;0)$ и от прямой $2x + 5 = 0$ относятся как $4:5$.

13. Составить уравнение и построить линию, каждая точка которой одинаково удалена от точки $A(0;2)$ и от прямой $y - 4 = 0$.

14. Составить уравнение и построить линию, расстояние от каждой точки которой до точки $A(-1;0)$ остаётся вдвое меньше расстояния до прямой $x = 4$.

15. Составить уравнение и построить линию, каждая точка которой является центром окружности, касающейся оси абсцисс и проходящей через точку $C(0;3)$.

16. Составить уравнение и построить линию, каждая точка которой является основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, проходящую через точку $A(2;0)$.

17. Составить уравнение и построить линию, каждая точка которой отстоит от точки $A(4;0)$ вдвое дальше, чем от прямой $x = 1$.

18. Составить уравнение и построить линию, каждая точка которой равноудалена от точки $A(4;2)$ и от оси ординат.

19. Составить уравнение и построить линию, для каждой точки которой отношение расстояния до начала координат к расстоянию до прямой $3x + 16 = 0$ равно 0,6.

20. Составить уравнение и построить линию, каждая точка которой равноудалена от точки $A(2;2)$ и от оси абсцисс, сделать чертёж.

3.10.4. Дана функция $\rho = \rho(\varphi)$ в полярной системе координат.

Построить график функции по точкам, рассчитав таблицу значений с шагом $\pi/8$, начиная от $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$;

1) найти уравнение линии в прямоугольной декартовой системе координат, у которой начало совпадает с полюсом, а положительная полуось абсцисс – с полярной осью.

1. $\rho = 3\cos 2\varphi$; 2. $\rho = \dfrac{1}{1+\cos\varphi}$;

3. $\rho = 3(1+\cos\varphi)$;

4. $\rho = 2\sin^2 2\varphi$;

5. $\rho = 3\cos^2 2\varphi$;

6. $\rho = \dfrac{1}{2+\cos\varphi}$;;

7. $\rho = \dfrac{3}{2+\sin\varphi}$;

8. $\rho = 8\sin^2 \dfrac{\varphi}{2}$;

9. $\rho = \sin\varphi + \cos\varphi$;

10. $\rho = \dfrac{5}{6+3\cos\varphi}$;

11. $\rho = 1+\cos 2\varphi$;

12. $\rho = \dfrac{4}{1-\cos\varphi}$;

13. $\rho = \dfrac{4}{1-\cos\varphi}$;

14. $\rho = \dfrac{8}{3-\cos\varphi}$;

15. $\rho = \dfrac{4}{2-3\cos\varphi}$;

16. $\rho = 4\left(1+\sin\varphi\right)$;

17. $\rho = 2\sin^3\varphi$;

18. $\rho = \dfrac{10}{2-\cos\varphi}$;

19. $\rho = 3\sin 2\varphi$;

20. $\rho = \dfrac{5}{4-3\cos\varphi}$.

3.10.5. Построить линию, заданную параметрически.

1. $\begin{cases} x = 3\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x = 4\cos 2t, \\ y = 3\sin 2t. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = 4\cos t, \\ y = 5\sin t. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = 3\sin 2t. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x = 3\cos 2t, \\ y = 2\sin 2t. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x = 5\cos t, \\ y = \sin t. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = 3\sin t. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = 3(2-\sin t). \end{cases}$

9. $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2(1-\sin t). \end{cases}$

10. $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 1-\sin t. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x = 4\cos t, \\ y = 4(1-\sin t). \end{cases}$

12. $\begin{cases} x = 5\cos 3t, \\ y = \sin 3t. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x = 4\cos^3 t, \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x = 6\cos^3 t, \\ y = 6\sin^3 t. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 5\sin^3 t. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x = 4\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x = 4\cos^3 t, \\ y = 5\sin^3 t. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x = 5\cos^3 t, \\ y = 5\sin^3 t. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t. \end{cases}$

3.10.6. Построить поверхности и определить их вид.

1. а) $27x^2 + 21z^2 = 63y^2$; б) $4x^2 - 2y + z^2 = 0$;
2. а) $3x^2 - 2z^2 = 42 + 7y^2$; б) $2y^2 + 6z^2 = 3x$;
3. а) $3x^2 - 9y^2 + z^2 + 27 = 0$; б) $2x^2 + 4y^2 - 5z = 0$;
4. а) $-4x^2 + 12y^2 - 3z^2 + 24 = 0$; б) $2x^2 + 3z = 0$;
5. а) $7x^2 + 2y^2 + 6z^2 - 42 = 0$; б) $x - 3z^2 = 9y^2$;
6. а) $2x^2 - 3y^2 - 5z^2 + 30 = 0$; б) $y - 4z^2 = 4x^2$;
7. а) $x^2 - 6y^2 + z^2 - 12 = 0$; б) $12x - 3y^2 = 4x^2$;
8. а) $8x^2 - y^2 - 2z^2 - 32 = 0$; б) $15y = 10x^2 + 6y^2$;
9. а) $3x^2 - 4y^2 - 2z^2 + 12 = 0$; б) $x^2 + y^2 = 4 - z$;
10. а) $2x^2 + 3y^2 - z^2 - 36 = 0$; б) $z = 4 - x^2 - y^2$;
11. а) $9x^2 - 6y^2 - 6z^2 + 1 = 0$; б) $x^2 - 2y + z^2 = 0$;
12. а) $4x^2 + 5y^2 - 10z^2 = 60$; б) $3x^2 + y^2 = 3z$;
13. а) $7y^2 + z^2 = 14x^2$; б) $x^2 + 2y^2 = 8z$;
14. а) $3x^2 + 12y^2 + 4z^2 = 48$; б) $x^2 = 5(y^2 + z^2)$;
15. а) $4x^2 - y^2 - 3z^2 = 12$; б) $6x^2 = y^2 + 2z^2$;
16. а) $4x^2 - 6y^2 + 3z^2 = 0$; б) $x^2 + 4z = 0$;
17. а) $-7x^2 + 14y^2 - z^2 + 21 = 0$; б) $x^2 + 2y^2 = 2z$;
18. а) $3x^2 + 6y^2 + 2z^2 = 18$; б) $y^2 + 2z^2 = 8x$;
19. а) $5x^2 - y^2 - 15z^2 + 15 = 0$; б) $x^2 + 4z^2 = 2y$;
20. а) $x^2 - 7y^2 - 14z^2 - 21 = 0$; б) $y = 8x^2 + 2z^2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барышева В.К., Ивлев Е.Т., Пахомова Е.Г. Руководство к решению задач по аналитической геометрии. – Томск: Изд-во ТПУ, 2005. − 124 с.
2. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2-х частях − М.: Высш. шк, 1986. − Ч. 1. − 304 с.
3. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. − М.: Изд-во «Высшая школа», 1966. − 460 с.
4. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Аналитическая геометрия. – 2-е изд. / под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. − М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. − 388 с.
5. Лунгу К.Н., Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике. 1курс.− М.: Рольф, 2001. − 576 с.
6. Магазинников Л.И., Магазинников А.Л. Высшая математика. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. − Томск: Томский межвузовский центр дистанционного образования, 2003. − 176 с.
7. Подольский В.А., Суходский А.М., Мироненко Е.С. Сборник задач по математике. − 2-е изд., перераб. и доп. − М.: Высш.шк., 1999. − 495 с.
8. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: В 3-х ч. / А.П. Рябушко, В.В.Бархатов, В.В. Держовец, И.Е. Юруть / под ред. А.П. Рябушко. − Минск: Высш. шк, 1990–1991. − Ч. 1. − 1990. − 270 с.
9. Терехина Л.И., Фикс И.И. Высшая математика. Часть 1. Линейная алгебра. Векторная алгебра. Аналитическая геометрия. – Издательство «Дельтаплан». Томск, 2002. − 224 с.

Учебное издание

ГИЛЬ Людмила Болеславна
ТИЩЕНКОВА Анна Владимировна

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

ЧАСТЬ I. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие

Научный редактор
доктор физико-математических наук,
профессор ЮТИ ТПУ К.П. Арефьев

Редактор *Т.В. Казанцева*
Компьютерная вёрстка *Л.Б. Гиль, А.В. Тищенкова*
Дизайн обложки *О.Ю. Аршинова*

Отпечатано в Издательстве ТПУ в полном соответствии с качеством предоставленного оригинал-макета

Подписано к печати 00.00.2013. Формат 60x84/16. Бумага «Снегурочка».
Печать XEROX. Усл. печ. л. 7,85. Уч.-изд. л. 7,10.
Заказ 000-13. Тираж 100 экз.

Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Издательства Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту BS EN ISO 9001:2008

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru