МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«**НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**»

О.Н. Ефремова, Е.Д. Глазырина, В.В. Выдрина

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ИННОСТРАННЫХ СЛУШАТЕЛЕЙ ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫХ ОТДЕЛЕНИЙ ТЕХНИЧЕСКИХ ВУЗОВ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

*Рекомендовано в качестве учебного пособия
Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета*

Издательство
Томского политехнического университета
2019

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
Е924
Ефремова О.Н., Глазырина Е.Д., Выдрина В. В.
Е924 Математика для иностранных слушателей подготовительных отделений технических вузов. Учебное пособие / О.Н. Ефремова, Е.Д. Глазырина, В.В. Выдрина, Томский политехнический университет. – Томск : Изд-во Томского политехнического университета, 2019. – 225 с.

Учебное пособие предназначено для слушателей, обучающихся по программе подготовки иностранных граждан к освоению профессиональных образовательных программ на русском языке и планирующих обучение в бакалавриате на русском языке.

В учебном пособии представлены теоретический материал и разнообразные задания по курсу «Математика», адаптированные для восприятия их иностранными гражданами на неродном языке. Тематическое наполнение учебного пособия обеспечивает повторение основных разделов школьного курса математики на русском языке.

Содержание учебного пособия соответствует требованиям к уровню подготовки иностранных граждан к освоению профессиональных образовательных программ на русском языке.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

Рецензенты
Кандидат педагогических наук, доцент кафедры
комплексной информационной безопасности
электронно-вычислительных систем ТУСУР
О.В. Янущик

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры
программирования института прикладной математики
и компьютерных наук ТГУ
Е.Г. Пахомова

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие «Математика для иностранных слушателей подготовительных отделений технических вузов» предназначено для иностранных слушателей, обучающихся на подготовительном отделении и планирующих поступление в бакалавриат. Пособие содержит основные разделы школьного курса математики, предусмотренные рабочей программой для иностранных граждан.

При создании учебного пособия авторы ставили следующие цели:

- повторить основные разделы школьной математики;
- изложить материал для иностранных граждан на русском языке в доступной форме;
- помочь обучающимся овладеть математической терминологией на русском языке;
- пополнить словарный запас иностранных граждан для ответов на вопросы и объяснения решения примеров и задач по математике.

Пособие включает 30 тем из школьного курса математики. Темы разделены на части. Каждая часть включает словарь с новыми словами и выражениями, теоретическую информацию, примеры, задачи с решением, разнообразные задания для самостоятельного выполнения, таблицы и рисунки.

Пособие содержит основные конструкции, которые позволяют обучающимся формулировать определения понятий, читать формулы и примеры, отвечать на вопросы, задаваемые им при изучении курса математики. Предложены лексико-грамматические тесты, которые могут быть использованы в качестве контроля усвоения обучающимися лексического материала по теме.

Учебный материал в пособии изложен просто и наглядно, с математической строгостью и логичностью.

Пособие может быть использовано преподавателями и обучающимися как на занятиях, так и в процессе организации самостоятельной работы.

ВВЕДЕНИЕ

При обучении на подготовительном отделении технического профиля иностранные граждане должны научиться использовать на русском языке лексику и конструкции, характерные для языка математики, и повторить основы школьного курса математики.

Учебное пособие предназначено для иностранных граждан, обучавшихся в школе не на русском языке и желающих продолжить обучение в бакалавриате в России. В пособии представлены основные разделы школьной программы, знание которых необходимо иностранным гражданам для обучения в бакалавриате на русском языке.

Авторы надеются, что, изучив материал учебного пособия, иностранные граждане сформируют навыки использования основных понятий, терминов, символов и математических конструкций на русском языке. В дальнейшем эти умения будут необходимы учащимся при освоении высшей математики на первом курсе бакалавриата.

Числа и действия над ними, элементы теории множеств, линейные и квадратные уравнения и неравенства, системы линейных уравнений, прямоугольная система координат, основные элементарные функции, фигуры на плоскости и в пространстве, дифференцирование и интегрирование функции одной переменной являются основополагающими разделами школьной и высшей математики.

Знания по данным разделам математики на русском языке служат теоретическим фундаментом для освоения математики на первом курсе бакалавриата в российских технических вузах.

Желаем успеха!

Тема 1. Натуральные числа. Арифметические операции

1.1. Натуральные числа

Словарь к теме

ци́фра число́	натура́льное число́ знак

Задание 1. Образуйте форму множественного числа.
1) цифра; 2) знак;
3) число; 4) натуральное число.

Цифры читают:
0 – ноль (нуль); 1 – оди́н[1]; 2 – два; 3 – три; 4 – четы́ре;
5 – пять; 6 – шесть; 7 – семь; 8 – во́семь; 9 – де́вять.

Записи читают:
n – эн;
… (и т. д.) – и так да́лее.

Прочитайте.
Цифры – это знаки: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
Числа 1, 2, 3, …, n, … – это натуральные числа.

10 – де́сять 40 – со́рок 90 – девяно́сто 100 – сто[2] 200 – две́сти 300 – три́ста 400 – четы́реста	50 – пять**деся́т** 60 – шесть**деся́т** 70 – се́мь**десят** 80 – во́семь**десят**
11 – оди́нна**дцать** 12 – двена́**дцать** 13 – трина́**дцать** 20 – два́**дцать** 30 – три́**дцать**	500 – пять**со́т** 600 – шесть**со́т** 700 – семь**со́т** 800 – восемь**со́т** 900 – девять**со́т**
1000 – одна́ ты́сяча[3] 2000 – две ты́сячи 3000 – три ты́сячи 4000 – четы́ре ты́сячи 5000 – пять ты́сяч	1000000 – оди́н миллио́н[4] 2000000 – два миллио́на 3000000 – три миллио́на 4000000 – четы́ре миллио́на 5000000 – пять миллио́нов

[1] Один = едини́ца.
[2] Сто = со́тня.
[3] Одна тысяча = тысяча.
[4] Один миллион = миллион.

Прочитайте числа.

I	II	III
1) 2; 5; 7; 6; 11; 13; 18;	1) 101; 232; 345; 567;	1) 1000; 2003; 9203;
2) 0; 3; 9; 12; 19; 21; 34;	2) 318; 423; 112; 981;	2) 7212; 5319; 3567;
3) 1; 4; 7; 10; 17; 22; 41;	3) 837; 412; 619; 721;	3) 8516; 4712; 2019;
4) 3; 5; 9; 14; 51; 67; 45;	4) 512; 919; 742; 639;	4) 9018; 1987; 2018;
5) 7; 0; 6; 15; 91; 48; 89;	5) 498; 612; 549; 219;	5) 1880; 7528; 3012;
6) 4; 3; 2; 16; 29; 63; 98;	6) 983; 761; 843; 119;	6) 9876; 8765; 7654;
7) 9; 8; 7; 19; 82; 79; 54.	7) 349; 855; 492; 912.	7) 1234; 2468; 3579.
IV	**V**	**VI**
1) 10000; 11001;	1) 100021; 123203;	1) 1000005; 1200012;
2) 20000; 33233;	2) 536012; 770019;	2) 2000312; 5121344;
3) 42512; 54519;	3) 900001; 876543;	3) 9019678; 8112000;
4) 57318; 65701;	4) 312819; 419612;	4) 6312001; 7821019;
5) 76719; 50912;	5) 919510; 821509;	5) 1679002; 3000021;
6) 81922; 74567;	6) 432753; 531543;	6) 4642872; 6565518;
7) 96701; 23418.	7) 943321; 701989.	7) 8900412; 7546819.

Задание 2. Выполните задание по образцу.

Образец. 432 – это натуральное число. Здесь три цифры: 4, 3 и 2.

1) 5476;	2) 1074;	3) 19;	4) 7251;	5) 12;	6) 9369;
7) 2345;	8) 3751;	9) 96;	10) 863;	11) 9;	12) 532;
13) 372;	14) 539;	15) 4;	16) 481;	17) 5;	18) 289.

1.2. Арифметические операции

Словарь к теме

арифме́тика	вычита́ние
опера́ция	умноже́ние
арифмети́ческая опера́ция	деле́ние
де́йствие	выраже́ние
за́пись (ж. р.)	числово́е выраже́ние
ско́бка	содержа́ть *что?*
сложе́ние	кото́рый

Прочитайте знаки.

=	равно́
+	плюс
–	ми́нус
· (или ×)	умно́жить на
:	раздели́ть на

Задание 3. Составьте предложения по образцу. Используйте конструкцию.

Что? (И. п.) содержит что? (В. п.)

Образец. 5 + 3 – 2 – это числово́е выраже́ние. Выраже́ние соде́ржит чи́сла 5, 3 и 2; знаки «+» и «–».

1) 22 : 2 + 5;	2) 12 : 4 – 0;	3) 19 – 8 + 13;	4) 21 – 5 · 4;
5) 24 : 12 · 5;	6) 10 · 8 : 4;	7) 29 + 12 : 3;	8) 19 · 2 + 7;
9) 10 + 3 · 7;	10) 7 · 4 – 1;	11) 30 · 3 : 15;	12) 5 + 7 · 3.

Прочитайте знаки и записи.

(…)	кру́глые ско́бки
[…]	квадра́тные ско́бки
{…}	фигу́рные ско́бки
(2 + 3)	выраже́ние два плюс три **в** ско́бк**ах**

Задание 4. Прочитайте записи по образцу.

Образец. 1) (1 + 3) – выражение один плюс три **в круглых** скобк**ах**;
2) [1 + 3] – выражение один плюс три **в квадратных** скобк**ах**;
3) {1 + 3} –выражение один плюс три **в фигурных** скобк**ах**.

1) (19 + 2 · 6);	2) [21 – 3];	3) {5 – 8};	4) [6 · 3 – 8];
5) (4 + 15 : 5);	6) {7 + 28};	7) [25 – 12];	8) {19 + 20};
9) [9 · 12 – 7];	10) {9 – 3};	11) (8 – 3 · 1);	12) (8 + 4 : 2).

Прочитайте.

Сложение, вычитание, умножение и деление – это операции над числами. Операции сложения, вычитания, умножения и деления – это арифметические операции.

Действия (арифметические действия) – это арифметические операции. Мы знаем четыре действия: сложение, вычитание, умножение и деление. **Числовое выражение** – это запись, которая содержит числа и знаки арифметических операций. Числовое выражение может содержать скобки.

Например, 5 + (9 – 3) – это числовое выражение. Числовое выражение содержит числа 5, 9 и 3, знаки «плюс», «минус» и круглые скобки.

Ответьте на вопросы.

1. Сколько арифметических операций вы знаете?
2. Какие арифметические операции вы знаете?
3. Сколько арифметических действий вы знаете?
4. Что такое числовое выражение?
5. Что может содержать числовое выражение?
6. Что содержит числовое выражение 5 + (9 – 3)?
7. Какие числа содержит числовое выражение 5 + (9 – 3)?

1.3. Компоненты арифметических операций

Словарь к теме

компоне́нт приме́р результа́т значе́ние слага́емое су́мма уменьша́емое	вычита́емое ра́зность (ж. р) мно́житель (м. р.) произведе́ние дели́мое дели́тель (м. р.) ча́стное

Задание 5. Составьте словосочетания.

Образец. Операция, сложение. → Операция сложени**я**.

1. Операция, вычитание.
2. Операция, деление.
3. Операция, умножение.
4. Результат, выражение.

Слушайте, читайте, повторяйте буквы латинского алфавита.

Ср. р					**М. р.**
A, a – а *B, b* – бэ *C, c* – цэ *D, d* – дэ *E, e* – е	*F, f* – эф *G, g* – жэ *H, h* – аш *I, i* – и *J, j* – жи	*K, k* – ка *L, l* – эль *M, m* – эм *N, n* – эн *O, o* – о	*P, p* – пэ *Q, q* – ку *R, r* – эр *S, s* – эс *T, t* – тэ	*U, u* – у *V, v* – вэ *W, w* – дубль-вэ	*X, x* – икс *Y, y* – и́грек *Z, z* – зэт

Прочитайте компоненты арифметических операций.

Пример	**Операция**	**Компоненты**	**Результат**
$a + b = c$	сложение	a – слагаемое, b – слагаемое, c – сумма	$a + b$ – сумма, c – сумма
$a - b = c$	вычитание	a – уменьшаемое, b – вычитаемое, c – разность	$a - b$ – разность, c – разность
$a \cdot b = c$	умножение	a – множитель, b – множитель, c – произведение	$a \cdot b$ – произведение, c – произведение
$a : b = c$	деление	a – делимое, b – делитель, c – частное	$a : b$ – частное, c – частное

Задание 6. Выполните задание по образцу.

Образец. 1. 5 + 7 = 12 – пять плюс семь равно двенадцать. Это операция сложени**я**. 5 и 7 – это слагаем**ые**, 12 – это сумма.

2. 9 – 3 = 6 – девять минус три равно шесть. Это операция вычитани**я**. 9 – это уменьшаемое, 3 – это вычитаемое, 6 – это разность.

3. 2 · 5 = 10 – два умножить на пять равно десять. Это операция умножени**я**. 2 и 5 – это множител**и**, 10 – это произведение.

4. 6 : 3 = 2 – шесть разделить на три равно два. Это операция делени**я**. 6 – это делимое, 3 – это делитель, 2 – это частное.

1) 10 + 12 = 22;	2) 19 – 12 = 7;	3) 11 · 3 = 33;	4) 44 : 11 = 4;
5) 22 + 17 = 39;	6) 22 – 13 = 9;	7) 7 · 10 = 70;	8) 32 : 16 = 2;
9) 12 + 19 = 31;	10) 18 – 12 = 6;	11) 9 · 6 = 54;	12) 18 : 2 = 9;
13) 2 + 18 = 20;	14) 19 – 18 = 1;	15) 6 · 8 = 48;	16) 12 : 4 = 3.

Прочитайте числа и числительные.

<table>
<tr><td>Число</td><td>Родительный падеж</td><td>Дательный падеж</td><td>Предложный падеж</td><td>Творительный падеж</td></tr>
<tr><td>0
1
2 (200)
3 (300)
4 (400)
8 (800)</td><td>нуля
одного
двух(сот)
трёх(сот)
четырёх(сот)
восьми(сот)</td><td>нулю
одному
двум(стам)
трём(стам)
четырём(стам)
восьми(стам)</td><td>нуле
одном
двух(стах)
трёх(стах)
четырёх(стах)
восьми(стах)</td><td>нулём
одним
двумя(стами)
тремя(стами)
четырьмя(стами)
восьмью(стами)</td></tr>
<tr><td>5 – 20
30</td><td colspan="3">-Ь → -И
пять → пяти
шесть → шести
и т. д.</td><td>-Ь → -ЬЮ
пять → пятью
шесть → шестью
и т. д.</td></tr>
<tr><td>40
90
100</td><td colspan="4">сорока
девяноста
ста</td></tr>
<tr><td>50
60
70
80</td><td colspan="3">…ЬДЕСЯТ → …ИДЕСЯТИ
пятьдесят → пятидесяти
и т. д.</td><td>…ЬДЕСЯТ → …ЬЮДЕСЯТЬЮ
пятьдесят → пятьюдесятью
и т. д.</td></tr>
<tr><td>500
600
700
900</td><td>…ЬСОТ → …ИСОТ
пятьсот → пятисот
и т. д.</td><td>…ЬСОТ → …ИСТАМ
пятьсот → пятистам
и т. д.</td><td>…ЬСОТ → …ИСТАХ
пятьсот → пятистах
и т. д.</td><td>…ЬСОТ → …ЬЮСТАМИ
пятьсот → пятьюстами
и т. д.</td></tr>
<tr><td>1000
2000</td><td>тысячи
двух тысяч</td><td>тысяче
двум тысячам</td><td>тысяче
двух тысячах</td><td>тысячей
двумя тысячами</td></tr>
</table>

Прочитайте и запомните.

Знак «=» читают		Примеры
М. р.	ра́в**ен** **(Д. п. чему?)**	икс (игрек, зэт, множитель, делитель) рав**ен**
Ж. р.	равн**а́** **(Д. п. чему?)**	сумма (разность) равн**а**
Ср. р. и буквы	равн**о́** **(Д. п. чему?)**	произведение (а, бэ, цэ, тэ и т. д.) равн**о**; значение выражения 2 + 7 (8 : 2 + 1) равн**о**
Мн. ч.	равн**ы́** **(Д. п. чему?)**	слагаемые (множители, числа) равн**ы**

Задание 7. Прочитайте записи по образцу.

Образец. 1) $p = 3$ – пэ равн**о** тр**ём**;

2) $x = 21$ – икс рав**ен** двадцат**и** одн**ому**;

3) $G = 5$ – жэ равно пят**и**.

1) $a = 1$;	2) $d = 32$;	3) $g = 1001$;	4) $h = 3002$;
5) $V = 9$;	6) $n = 27$;	7) $z = 1922$;	8) $w = 311$;
9) $R = 8$;	10) $e = 63$;	11) $x = 604$;	12) $y = 839$;
13) $b = 2$;	14) $k = 98$;	15) $t = 413$;	16) $y = 204$;
17) $c = 3$;	18) $q = 81$;	19) $j = 756$;	20) $m = 731$;
21) $u = 0$;	22) $F = 38$;	23) $s = 693$;	24) $l = 4412$.

Слушайте, читайте, повторяйте буквы греческого алфавита.

Α, α – а́льфа	Η, η – э́та	Ν, ν – ню	Τ, τ – та́у
Β, β – бэ́тта	Θ, θ – те́та	Ξ, ξ – кси	Υ, υ – и́псилон
Γ, γ – га́мма	Ι, ι – йо́та	Ο, ο – о́микрон	Φ, φ – фи
Δ, δ – де́льта	Κ, κ – ка́ппа	Π, π – пи	Χ, χ – хи
Ε, ε – э́псилон	Λ, λ – ля́мбда	Ρ, ρ – ро	Ψ, ψ – пси
Ζ, ς – дзе́та	Μ, μ – мю	Σ, σ – си́гма	Ω, ω – оме́га

Задание 8. Выполните задание по образцу.

Образец. $\rho : 3 = 5$ – ро разделить на три равн**о** пят**и**. Это операция делени**я**. ρ (ро) – это делимое, 3 (три) – это делитель, 5 (пять) – это частное.

1) $\alpha + \beta = 2$;	2) $\eta - \sigma = 8$;	3) $\kappa \cdot \lambda = 12$;	4) $\mu : 3 = \lambda$;
5) $\rho + 19 = \theta$;	6) $\psi - 2 = \varphi$;	7) $\delta \cdot 21 = \varepsilon$;	8) $\xi : 31 = 4$;
9) $\chi + 12 = \omega$;	10) $\iota - \tau = 1$;	11) $\beta \cdot 2 = \gamma$;	12) $\pi : 2 = \alpha$;
13) $\delta + \upsilon = 41$;	14) $\varphi - \psi = 3$;	15) $\varepsilon \cdot 7 = 92$;	16) $\eta : 4 = \nu$.

Задание 9. А. Прочитайте новые слова.

Б. Образуйте от инфинитива форму прошедшего времени, запишите в таблицу.

Инфинитив СВ	Прошедшее время	Императив (ты – вы)
вы́полнить *что?*		вы́полни(те)
сложи́ть *что? и что?*		сложи́(те)
приба́вить *что? к чему? / к чему? что?*		приба́вь(те)
вы́честь *из чего? что? / что? из чего?*		вы́чти(те)
отня́ть *от чего? что? / что? от чего?*		отними́(те)
умно́жить *что? на что?*		умно́жь(те)
раздели́ть *что? на что?*		раздели́(те)
найти́ *что?*		найди́(те)
назва́ть *что?*		назови́(те)
реши́ть *что?*		реши́(те)

Задание 10. Прочитайте примеры. Объясните решение.

Образец. 1. (5 + 4) · 2 = 18 – пять плюс четыре в скобках умножить на два равно восемнадцат**и**. Сначала я слож**ил(а)** пять и четыре, потом умнож**ил(а)** на два.

2. 10 : 5 + 1 = 3 – десять разделить на пять плюс один равно тр**ём**. Сначала я раздел**ил(а)** десять на пять, потом прибав**ил(а)** один.

1) (5 – 4) · 3 = 3; 2) 5 · 4 : 2 = 10; 3) 12 : 2 + 5 = 11;
4) (1 + 7) : 4 = 2; 5) 10 : 5 · 2 = 4; 6) (9 – 3) · 3 = 18;
7) (7 – 4) · 3 = 9; 8) 3 · 9 – 7 = 20; 9) 15 – 6 + 3 = 12;
10) 8 : 4 + 3 = 5; 11) 3 + 5 – 7 = 1; 12) (7 – 3) · 0 = 0.

Прочитайте.

Задание			Запись
сложите *что?* (В. п.) и *что?* (В. п.)	**прибавьте** к *чему*? (Д. п.) *что*? (В. п.) / *что*? (В. п.) *к чему*? (Д. п.)	**найдите сумму** чисел *что*? (И. п.) и *что*? (И. п.)	$a + b$
вычтите *из чего*? (Р. п.) *что*? (В. п.); **отнимите** *от чего*? (Р. п.) *что*? (В. п.)	**вычтите** *что*? (В. п.) *из чего*? (Р. п.); **отнимите** *что*? (В. п.) *от чего*? (Р. п.)	**найдите разность** чисел *что*? (И. п.) и *что*? (И. п.)	$a - b$
умножьте *что?* (В. п.) *на что*? (В. п.)	**найдите произведение** чисел *что*? (И. п.) и *что*? (И. п.)		$a \cdot b$
разделите *что?* (В. п.) *на что*? (В. п.)	**найдите частное** чисел *что*? (И. п.) и *что*? (И. п.)		$a : b$

Задание 11. Выполните задание по образцу.

Образец. Сложите 15 и 19. → 15 + 19 = 34. Я выполнил(а) операци**ю** сложени**я**. Я нашёл (нашла́) сумм**у**.

I

1. Сложите 12 и 13.
2. Прибавьте 7 к 12.
3. Найдите сумму чисел 5 и 79.
4. Вычтите из 102 число 17.
5. Отнимите 11 от 25.
6. Найдите разность чисел 19 и 11.
7. Умножьте 5 на 7.
8. Найдите произведение 10 и 13.
9. Разделите 75 на 5.
10. Найдите частное чисел 35 и 7.

II

1. Найдите произведение чисел 6 и 12.
2. Найдите частное чисел 70 и 10.
3. Найдите разность чисел 27 и 8.
4. Найдите сумму чисел 29 и 27.
5. Найдите частное чисел 12 и 3.
6. Найдите произведение чисел 11 и 22.
7. Найдите сумму чисел 43 и 58.
8. Найдите разность чисел 85 и 18.

III

1. Умножьте 5 на 13.
2. Разделите 102 на 51.
3. Отнимите от 94 число 16.
4. Прибавьте к 59 число 203.
5. Умножьте 12 и 11.
6. Вычтите 5 из 50.
7. Сложите числа 9 и 8.
8. Разделите 52 на 13.
9. Прибавьте к 19 число 18.
10. Разделите 15 на 3.
11. Отнимите 27 от 81.
12. Вычтите из 12 число 9.
13. Сложите 18 и 12.
14. Разделите 75 на 3.
15. Умножьте 14 на 7.
16. Прибавьте 18 к 19.
17. Вычтите 17 из 123.
18. Разделите 88 на 22.
19. Умножьте 13 на 6.
20. Сложите 35 и 56.

Задания

Задание 1. Запишите числа цифрами.

Образец. Девять → 9.

I	II
1) восемь;	1) двести семь;
2) двенадцать;	2) четыреста пятьдесят семь;
3) шестнадцать;	3) двести двадцать шесть;
4) одиннадцать;	4) пятьсот семьдесят один;
5) девятнадцать;	5) семьсот девятнадцать;
6) восемнадцать;	6) шестьсот восемьдесят два;
7) двадцать;	7) триста пять;
8) семь;	8) пятьсот восемь;
9) тринадцать;	9) сто двенадцать;
10) ноль;	10) двести девятнадцать;
11) двадцать три;	11) восемьсот девять;
12) сорок два;	12) девятьсот десять;
13) пятьдесят шесть;	13) тысяча девяносто три;
14) тридцать один;	14) три тысячи двенадцать;
15) семьдесят восемь;	15) пять тысяч девятнадцать;
16) двадцать шесть;	16) четыре тысячи сто девять;
17) девять;	17) шесть тысяч пятьсот два;
18) шестьдесят четыре;	18) девять тысяч триста пятнадцать;
19) десять;	19) семь тысяч восемнадцать;
20) семьдесят восемь.	20) две тысячи сто двадцать один.

Задание 2. Установите соответствия.

Левая часть	Правая часть
=	минус
4	плюс
·	равно
+	разделить на
14	умножить на
–	цифра
:	число

Задание 3. Выполните задание по образцу.

Образец. 5 + (9 – 3) = 11 – пять плюс выражение девять минус три **в скобках** равно одиннадцат**и**. Здесь **две** операции: сложение и вычитание. Результат рав**ен** одиннадцат**и**.

1) $19+3-5=17$; 2) $18:3\cdot 5=30$; 3) $(18:3+4)\cdot 2=20$;
4) $(18-3)\cdot 5=75$; 5) $19+3\cdot 5=34$; 6) $13+9:3-6\cdot 2=4$;
7) $(20-15):5=1$; 8) $17-20:5=13$; 9) $30+(15-3):2=36$.

Задание 4. Запишите операцию и результат.

Образец. Сложите 12 и 9. → 12 + 9 = 21.

1. Сложите числа 18 и 23.
2. Вычтите из 69 число 27.
3. Умножьте 13 на 8.
4. Прибавьте к 19 число 37.
5. Разделите 64 на 8.
6. Отнимите от 57 число 34.
7. Найдите сумму чисел 56 и 28.
8. Найдите произведение чисел 12 и 8.
9. Найдите частное чисел 63 и 7.
10. Найдите разность чисел 101 и 29.
11. Вычтите из 86 число 38.
12. Прибавьте 23 к 42.
13. Отнимите 45 от 54.
14. Сложите 35 и 56.
15. Разделите 26 на 2.
16. Вычтите 9 из 87.
17. Найдите разность чисел 78 и 29.
18. Найдите сумму чисел 86 и 31.
19. Найдите произведение чисел 11 и 15.
20. Найдите частное чисел 135 и 45.

Задание 5. А. Прочитайте текст.

Найдём значение выражения 85 – 4 · (15 + 6 : 3). В выражении 85 – 4 · (15 + 6 : 3) четыре действия: сложение, вычитание, умножение и деление. Сначала выполним действия в скобках (15 + 6 : 3). Первое действие – это деление. Результат деления равен двум (6 : 3 = 2). Второе действие – сложение (15 + 2 = 17). Третье действие – умножение (4 · 17 = 68). Четвёртое действие – вычитание (85 – 68 = 17).

Значение выражения 85 – 4 · (15 + 6 : 3) равно 17.

Б. Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Какие действия есть в выражении 85 – 4 · (15 + 6 : 3)?
2. Сколько действий в выражении?
3. Какие действия выполняют сначала?
4. Какие действия выполняют потом?
5. Назовите результат операции деления.
6. Назовите результат операции сложения.
7. Назовите третье действие.
8. Назовите результат операции умножения.
9. Какое четвёртое действие?
10. Назовите результат операции вычитания.
11. Чему равно значение выражения 85 – 4 · (15 + 6 : 3)?

Тема 2. Сравнение чисел. Положительные и отрицательные числа

Словарь к теме

мно́жество нера́венство двойно́е нера́венство числово́е нера́венство реше́ние сравне́ние отрица́тельное число́ положи́тельное число́ це́лое число́	выполня́ть – вы́полнить *что?* испо́льзовать *что? для чего?* запи́сывать – записа́ть *что?* обознача́ть – обозна́чить *что? чем?* получа́ть – получи́ть *что?* соединя́ть – соедини́ть *что?* сра́внивать – сравни́ть *что? с чем?* существова́ть сле́довательно

Знаки читают:

$\neq$	не равно́
$<$	ме́ньше
$>$	бо́льше
$\leq$	ме́ньше или равно́
$\geq$	бо́льше или равно́
$\Rightarrow$	сле́довательно

Задание 1. А. Прочитайте конструкции и примеры.

Что? (И. п.) – это что? (И. п.)

Действие – это арифметическая *операция*.

Что? (И. п.) – это что? (И. п.), потому что … .

Пять – это положительное число, потому что пять больше, чем нуль.

Б. Выполните задание по образцу.

Образец. 1) (–13) – это отрицательное число, потому что (–13) меньше, чем нуль;

2) 18 – это положительное число, потому что 18 больше, чем нуль.

1) 90; 2) –1; 3) 12; 4) –85; 5) 10; 6) –93;
7) –9; 8) 31; 9) 19; 10) –2; 11) 21; 12) 240.

Задание 2. Прочитайте конструкции и примеры.

Что? (И. п.) меньше (больше), чем что? (И. п.)

Два *меньше, чем* ***пять****.*
Пять *больше, чем* ***два****.*

Что? (И. п.) меньше (больше) чего? (Р. п.)

Два *меньше пят**и**.*
Пять *больше дв**ух**.*

Что? (И. п.) меньше (больше) или равно чему? (Д. п.)

*а меньше или равн**о** дв**ум**.*
*х больше или рав**е**н тр**ём**.*

Задание 3. Прочитайте неравенства по образцу.
Образец. 1) $4 < 6$ – четыре меньше, **чем** шесть (четыре меньше шест**и**);
2) $a \leq 9$ – a меньше или равно девят**и**.

1) $2 < 40$;	2) $5 > 3$;	3) $6 > 4$;	4) $8 < 9$;	5) $1 < 4$;	6) $12 > 0$;
7) $a \leq 40$;	8) $b \geq 3$;	9) $x \geq 4$;	10) $y \leq 9$;	11) $t \leq 4$;	12) $d \geq 0$;
13) $9 > 3$;	14) $2 < 5$;	15) $0 < 2$;	16) $7 < 8$;	17) $5 > 1$;	18) $3 < 7$;
19) $g \geq 3$;	20) $c \leq 5$;	21) $q \leq 2$;	22) $z \leq 8$;	23) $h \geq 1$;	24) $n \leq 7$.

Задание 4. Прочитайте двойное неравенство по образцу.
Образец. $1 < x \leq 5$ – x больше одн**ого**, **но** меньше или равен пят**и**.

1) $0 < x < 31$;	2) $8 \leq a \leq 32$;	3) $2 \leq a < 18$;	4) $7 < b < 41$;
5) $6 < x \leq 10$;	6) $5 \leq z < 12$;	7) $4 < d < 19$;	8) $3 \leq y \leq 72$;
9) $0 \leq y < 13$;	10) $1 < d \leq 2$;	11) $7 \leq z \leq 8$;	12) $0 < b < 4$.

Прочитайте.

Знаки $=$, $\neq$, $<$, $>$, $\leq$, $\geq$ – это знаки сравнения. Знаки сравнения используют для сравнения чисел между собой. Например, $9 > 7$ или $7 < 9$.

Если два числовых выражения соединены знаками $<$, $>$, $\leq$, $\geq$, то говорят, что задано **числовое неравенство**. Например, $7 < 9$ – это числовое неравенство.

Если $a < c$ и $c < b$, то записывают $a < c < b$. Неравенство $a < c < b$ – это **двойное неравенство**.

Любое число можно сравнить с числом 0. Например, $a > 0$ или $a < 0$.

Существуют положительные и отрицательные числа. **Положительное число** – это число, которое больше, чем нуль. **Отрицательное число** – это число, которое меньше, чем нуль. Число 0 – это не положительное и не отрицательное число. Все натуральные числа – это положительные числа.

Множество натуральных чисел обозначают большой латинской буквой *N*.

Целые числа – это отрицательные, положительные натуральные числа и число 0. Множество целых чисел обозначают большой латинской буквой *Z*.

Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Сколько знаков сравнения вы знаете?
2. Назовите знаки сравнения.
3. Запишите числовое неравенство.
4. С каким числом сравнивают числа?
5. Что такое положительное число?
6. Приведите пример положительного числа.
7. Что такое отрицательное число?
8. Приведите пример отрицательного числа.
9. Число нуль – это положительное или отрицательное число?
10. Натуральные числа – это положительные или отрицательные числа?
11. Какой буквой обозначают множество натуральных чисел?
12. Какой буквой обозначают множество целых чисел?

Прочитайте.

Вопрос	Решение	Ответ
На сколько число a больше, чем b?	$a – b = c$	a больше, чем b **на** c
На сколько число c меньше, чем d?	$d – c = a$	c меньше, чем d **на** a
Во сколько раз число a больше, чем b?	$a : b = c$	a больше, чем b **в** c **раз**
Во сколько раз число c меньше, чем d?	$d : c = a$	c меньше, чем d **в** a **раз**

Ответьте на вопросы.

1. На сколько 40 больше, чем 4? Почему?
2. На сколько 5 меньше, чем 25? Почему?
3. Во сколько раз 40 больше, чем 4? Почему?
4. Во сколько раз 5 меньше, чем 25? Почему?
5. На сколько 16 больше, чем 4? Почему?
6. Во сколько раз 4 меньше, чем 16? Почему?
7. Во сколько раз 25 больше, чем 5? Почему?
8. На сколько 30 больше, чем 10? Почему?
9. На сколько 10 меньше, чем 30? Почему?
10. Во сколько раз 30 больше, чем 10? Почему?
11. Во сколько раз 10 меньше, чем 30? Почему?

Задания

Задание 1. Сравните числа. Какое число больше? Какое число меньше?

Образец. Сравните числа 7 и 17. Число 17 больше, чем 7. Число 7 меньше, чем 17.

1) 2 и 3;	2) 16 и 10;	3) 15 и 13;	4) 12 и 19;
5) 8 и 4;	6) 13 и 17;	7) 18 и 81;	8) 20 и 22;
9) 7 и 9;	10) 45 и 53;	11) 9 и 19;	12) 12 и 18.

Задание 2. Поставьте глаголы в форму первого лица множественного числа будущего времени:

1) сравнить;	2) найти;	3) получить;
4) выполнить;	5) записать;	6) решить.

Задание 3. А. Прочитайте текст.

Сравним числа 9 и 18. Число 9 меньше, чем 18. Число 18 больше, чем 9. Найдём разность чисел 18 и 9. Получим 18 – 9 = 9. Следовательно, число 9 меньше, чем число 18 **на 9**. Найдём частное чисел 18 и 9. Получим 18 : 9 = 2. Следовательно, 18 больше, чем 9 **в 2 раза**.

Б. Ответьте на вопросы.

1. Какое из чисел 18 и 9 больше?
2. Какое из чисел 18 и 9 меньше?
3. На сколько 9 меньше, чем 18?
4. Во сколько раз 18 больше, чем 9?
5. Во сколько раз 9 меньше, чем 18?
6. На сколько 18 больше, чем 9?

Задание 4. На сколько первое число больше (меньше), чем второе? Почему?

Образец. 18 больше, чем 6 на 12, потому что 18 – 6 = 12.

1) 27 и 3;	2) 30 и 5;	3) 12 и 4;	4) 15 и 45;
5) 12 и 48;	6) 18 и 54;	7) 56 и 28;	8) 92 и 46;
9) 19 и 57;	10) 1 и 12;	11) 56 и 7;	12) 63 и 9.

Задание 5. Во сколько раз первое число больше (меньше), чем второе? Почему?

Образец. 6 меньше, чем 18 в 3 раза, потому что 18 : 6 = 3.

1) 27 и 3;	2) 30 и 5;	3) 12 и 4;	4) 15 и 45;
5) 12 и 48;	6) 18 и 54;	7) 56 и 28;	8) 92 и 46;
9) 19 и 57;	10) 1 и 12;	11) 56 и 7;	12) 63 и 9.

Задание 6. Запишите прилагательные в правильной форме: *арифметический; круглый; положительный; числовой.*

1) ______________ выражение;	2) ______________ действия;
3) ______________ неравенство;	4) ______________ операция;
5) ______________ скобки;	6) ______________ число.

Задание 7. Выберите правильный вариант ответа.

1. Любое число можно … с числом 0.

(А) содержит; (Б) сравнить;
(В) найдём; (Г) выполним.

2. … значение выражения $85 - 4 \cdot (15 + 6 : 3)$.

(А) Содержит; (Б) Сравнить;
(В) Найдём; (Г) Выполним.

3. Сначала … действие в скобках $(15 + 6 : 3)$.

(А) содержит; (Б) сравнить;
(В) найдём; (Г) выполним.

4. Числовое выражение $5 + (9 - 3)$ … числа 5, 9 и 3.

(А) содержит; (Б) сравнить;
(В) найдём; (Г) выполним.

5. Числовое выражение $85 - 4 \cdot (15 + 6 : 3)$ содержит … .

(А) квадратные скобки; (Б) круглые скобки; (В) фигурные скобки.

6. Восемнадцать … нуль.

(А) равен; (Б) равно;
(В) больше, чем; (Г) меньше, чем.

7. Результат вычисления … одиннадцати.

(А) равен; (Б) равно;
(В) больше, чем; (Г) меньше, чем.

8. Семь не … девяти.

(А) равен; (Б) равно;
(В) больше, чем; (Г) меньше, чем.

9. Минус тринадцать … нуль.

(А) равен; (Б) равно;
(В) больше, чем; (Г) меньше, чем.

10. Два меньше, чем … .

(А) три; (Б) трёх; (В) трём.

11. x больше или равен … .

(А) три; (Б) трёх; (В) трём.

12. Шесть больше … .

(А) три; (Б) трёх; (В) трём.

13. Три меньше, чем девять … .

(А) на три; (Б) в три раза; (В) на минус шесть.

14. Шесть больше, чем три … .

(А) на три; (Б) в три раза; (В) на минус шесть.

15. Если умножим три … , то получим минус восемнадцать.

(А) на три; (Б) в три раза; (В) на минус шесть.

Тема 3. Делимость чисел

3.1. Делитель и кратное

Словарь к теме

бесконе́чное мно́жество коне́чное мно́жество кра́тное *чему?* нечётное число́	чётное число́ элеме́нт запи́сывать – записа́ть *что? в виде чего? / как что?* т. е. (то есть)

Прочитайте знаки и записи.

$\in$	принадлежи́т
$\notin$	не принадлежи́т
$a \in N$	*a* принадлежи́т *N*
$n \in N$	*n* ма́леньк**ое** принадлежи́т *N* больш**о́му** (*n* принадлежи́т множеству *N*)
$a, b \in N$	*a* **и** *b* принадлеж**а́т** *N*

Задание 1. Прочитайте записи.

1) $a \in A$; 2) $y \in У$; 3) $x \in X$;
4) $2 \in N$; 5) $c, d \in N$; 6) $z \notin Z$;
7) $0 \notin N$; 8) $b, c \in B$; 9) $x, y \notin X$;
10) $7 \in Z$; 11) $i, j \in Z$; 12) $x, y, z \in A$;
13) $m \notin Z$; 14) $k, l \notin Z$; 15) $c, d, h \notin N$.

Задание 2. Прочитайте записи по образцу.

Образец. 1. $A = \{1, 2, 3\}$ – A – это множество чисел 1, 2 и 3. Множество A содержит 3 элемента. Это конечное множество.

2. $B = \{a, b\}$ – B – это множество элементов a **и** b. Множество B содержит 2 элемента. Это конечное множество.

3. $C = \{12n \mid n \in N\}$ – C – это множество чисел $12n$, **таких, что** $n \in N$. Множество C содержит бесконечное число элементов. Это бесконечное множество.

1) $G = \{1, 3, 5, 7, 9\}$; 2) $A = \{2, 4\}$; 3) $F = \{\alpha, \beta, \gamma, \varphi\}$;
4) $T = \{k - 1 \mid k \in N\}$; 5) $S = \{0; 3; 5\}$; 6) $C = \{2z \mid z \in Z\}$;
7) $V = \{2z - 3 \mid z \in Z\}$; 8) $L = \{x, y, z; s\}$; 9) $D = \{2k \mid k \in N\}$;
10) $C = \{a, b, c, d, e, f\}$; 11) $D = \{7, 8, 9\}$; 12) $E = \{4i \mid i \in N\}$;
13) $E = \{l : m \mid l, m \in N\}$; 14) $H = \{h \mid h \in N\}$; 15) $B = \{5m \mid m \in Z\}$.

Задание 3. Выполните задание по образцу.

Образец. 1) 4 – это чётное число, потому что оно **делится на** 2;

2) 5 – это нечётное число, потому что оно **не делится на** 2.

1) 123;	2) 234;	3) 15;	4) 911;	5) 102;	6) 219;
7) 516;	8) 721;	9) 44;	10) 83;	11) 21;	12) 90.

Прочитайте.

Если $a, b \in N$ и частное $a : b \in N$, то $\boldsymbol{a}$ **делится на** $\boldsymbol{b}$. Если $a, b \in N$ и частное $a : b \notin N$, то $\boldsymbol{a}$ **не делится на** $\boldsymbol{b}$.

Пусть a делится на b. Тогда a – это **кратное числу** $\boldsymbol{b}$, b – это **делитель числа** $\boldsymbol{a}$.

Пример 1. Запишите все делители числа 12.

Число 12 делится на числа 1, 2, 3, 4, 6 и 12. Запишем все делители числа 12 как множество:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}.$$

Это множество содержит 6 элементов. Это *конечное множество*.

Пример 2. Запишите все числа, кратные числу 12.

Число 12 делится на 12, число 24 делится на 12, число 36 делится на 12, … . Следовательно, все числа, которые делятся на 12, можно записать как множество:

$$B = \{12n \mid n \in N\}.$$

Это множество содержит элементы 12, 24, 36, … , $12n$, … . Это *бесконечное множество*.

Пусть $a \in N$. Число a – **чётное число**, если оно делится на 2, т. е. $a : 2 \in N$.

Число a – **нечётное число**, если оно не делится на 2, т. е. $a : 2 \notin N$.

Например, 4 – это чётное число, потому что 4 делится на 2.

Число 3 – нечётное число, потому что частное 3 : 2 – ненатуральное число.

Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Если $a, b \in N$ и частное $a : b \in N$, то a делится или не делится на b?
2. Если $a, b \in N$ и частное $a : b \notin N$, то a делится или не делится на b?
3. Если a делится на b, то что такое a?
4. Если a делится на b, то что такое b?
5. Запишите все делители числа 24.
6. Запишите все числа, кратные числу 24.
7. Сколько элементов содержит множество всех делителей числа 24?
8. Запишите чётные делители числа 24.
9. Запишите нечётные делители числа 24.

3.2. Простые и составные числа

Словарь к теме

просто́е число́ составно́е число́ наибо́льший о́бщий дели́тель	наиме́ньшее о́бщее кра́тное разложе́ние *чего? на что?* раскла́дывать – разложи́ть *что? на что?*

Задание 4. Выполните задание по образцу.

Образец. 1) 5 – это простое число, потому что 5 делится **только** на 1 и на себя (на 5);

2) 4 – это составное число, потому что 4 делится на 1, на себя (на 4) и на 2.

1) 2;	2) 8;	3) 15;	4) 17;	5) 21;	6) 219;
7) 19;	8) 44;	9) 51;	10) 5;	11) 7;	12) 30.

Задание 5. Прочитайте записи по образцу.

Образец. 1) НОД(24; 30) – наибольший общий делитель чисел 24 и 30;

2) НОК(24; 30) – наименьшее общее кратное чисел 24 и 30.

1) НОД(6; 15);	2) НОК(16; 12);	3) НОД(10; 15);	4) НОК(48; 30);
5) НОД(4; 12);	6) НОК(34; 28);	7) НОД(35; 56);	8) НОК(30; 45);
9) НОД(6; 36);	10) НОК(5; 30);	11) НОД(7; 63);	12) НОК(9; 81).

Прочитайте.

Простое число – это число, которое делится только на 1 и на себя. Например, число 3 делится на 1 и на себя (на 3). Следовательно, 3 – это простое число.

Составное число – это число, которое делится на 1, на себя и на другие числа. Например, число 6 делится на 1, на себя (на 6) и на числа 2 и 3 (на другие числа). Следовательно, 6 – это составное число.

Число 1 – не простое и не составное число.

Разложить число на простые множители – значит записать его как произведение простых множителей.

Разложение числа на простые множители – это запись числа в виде произведения простых множителей.

Например, число 12 можно записать в виде произведения простых множителей:

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3.$$

Следовательно, запись $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ – это разложение числа 12 на простые множители.

Пусть числа a и b делятся на число c, где c – наибольший делитель чисел a и b. Тогда число c – это **наибольший общий делитель** чисел a и b.

Наибольший **о**бщий **д**елитель чисел a и b обозначают так: НОД(a; b).

Пусть число c делится на числа a и b и число c – наименьшее кратное чисел a и b. Тогда число c – это **наименьшее общее кратное чисел** a и b.

Наименьшее **о**бщее **к**ратное чисел a и b обозначают так: НОК(a; b).

Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Что такое простое число? Приведите пример.
2. Что такое составное число? Приведите пример.
3. Число 1 – это простое или составное число?
4. Что значит разложить число на простые множители?

Задания

Задание 1. Разложите на простые множители числа 18, 54, 60, 70, 84. Запишите множество всех делителей чисел 18, 54, 60, 70, 84.

Образец. $12 \to 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ – это разложение числа 12 на простые множители.

$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ – это множество делителей числа 12. Оно содержит 6 элементов.

Задание 2. Найдите наибольший общий делитель чисел.

Образец. Найдите НОД(24; 30).

Решение. Разложим числа 24 и 30 на простые множители

$24 = \mathbf{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \mathbf{3}$; $30 = \mathbf{2} \cdot \mathbf{3} \cdot 5$.

Тогда НОД(24; 30) = $\mathbf{2} \cdot \mathbf{3} = 6$.

1) 6 и 9;	2) 16 и 12;	3) 10 и 15;	4) 48 и 30;
5) 40 и 48;	6) 34 и 28;	7) 35 и 56;	8) 30 и 45;
9) 15 и 30;	10) 6 и 36;	11) 7 и 63;	12) 9 и 81.

Задание 3. Найдите наименьшее общее кратное чисел.

Образец. Найдите НОК(24; 30).

Решение. Разложим числа 24 и 30 на простые множители

$24 = \mathbf{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \mathbf{3}$; $30 = \mathbf{2} \cdot \mathbf{3} \cdot 5$.

Тогда НОК(24; 30) = $\mathbf{2} \cdot \mathbf{3} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 120$.

1) 6 и 9;	2) 16 и 12;	3) 10 и 15;	4) 48 и 30;
5) 40 и 48;	6) 34 и 28;	7) 35 и 56;	8) 30 и 45;
9) 15 и 30;	10) 6 и 36;	11) 7 и 63;	12) 9 и 81.

Задание 4. А. Прочитайте текст.

Число 60 – это составное число. Разложим число 60 на простые множители: $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$. Число 60 делится на 1, на 2, на 3, на 4, на 5, на 6, на 10, на 12, на 15, на 20, на 30, на 60. Запишем все делители числа 60 как множество:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}.$$

Множество A – это конечное множество. Оно содержит 12 элементов.

Б. Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Число 60 – это простое или составное число? Почему?
2. Сколько простых множителей содержит разложение числа 60 на простые множители?
3. Какие нечётные числа содержит разложение числа 60 на простые множители?
4. Множество всех делителей числа 60 – это конечное множество? Почему?
5. Сколько делителей имеет число 60?
6. Запишите чётные делители числа 60.
7. Запишите нечётные делители числа 60.

Тема 4. Дроби

4.1. Обыкновенные дроби

Словарь к теме

дробь (ж. р.)	числи́тель (м. р.)
обыкнове́нная дробь (дробь)	черта́
за́пись (ж. р)	дро́бная черта́
знамена́тель (м. р.)	

Знак и записи читают:

$\Rightarrow$ – тогда (следовательно);

$a:b$, $\dfrac{a}{b}$ – a разделить на b.

Прочитайте.

Пусть a, $b \in N$. Частное чисел a и b можно записать как $a : b$ или $\dfrac{a}{b}$.

Число $\dfrac{a}{b}$ – это **обыкновенная дробь**. Число a – это **числитель дроби** $\dfrac{a}{b}$. Число b – это **знаменатель дроби** $\dfrac{a}{b}$.

Запись дроби $\dfrac{a}{b}$ содержит число a (числитель дроби), число b (знаменатель дроби) и дробную черту (черту между числами a и b).

Ответьте на вопросы.

1. Что такое обыкновенная дробь?
2. Как можно записать частное чисел a и b?
3. Как можно записать частное чисел 1 и 3?
4. Что такое числитель дроби $\dfrac{a}{b}$?
5. Что такое знаменатель дроби $\dfrac{a}{b}$?
6. Что содержит запись дроби $\dfrac{a}{b}$?
7. Что содержит запись дроби $\dfrac{2}{5}$?

Запомните!

$\dfrac{1\,(\textit{какая}?)}{b=1,\ 2,\ 3,\ 4,...}$ одн**а** (*как**ая**?*) перв**ая**, втор**ая**, треть**я**, четвёрт**ая**, …

$\dfrac{a=2,\ 3,\ 4,...\,(\textit{каких}?)}{b=1,\ 2,\ 3,\ 4,...}$ дв**е**, три, четыре, … (*как**их**?*) перв**ых**, втор**ых**, треть**их**, четвёрт**ых**, …

$\frac{1}{1}$ – одн**а** пе́рв**ая**; $\frac{7}{2}$ – семь втор**ы́х**; $\frac{1}{3}$ – одн**а** тре́ть**я**; $\frac{1}{7}$ – одн**а** сед**ьма́я**;

$\frac{3}{8}$ – три во**сьмы́х**; $\frac{1}{40}$ – одн**а** сорокова́**я**; $\frac{3}{100}$ – три со́т**ых**

Задание 1. Прочитайте дроби.

Образец. 1) $\frac{1}{11}$ – одн**а** одиннадцат**ая**; **2)** $\frac{2}{11}$ – дв**е** одиннадцат**ых**.

1) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{7}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{21}$; $\frac{21}{30}$; $\frac{31}{40}$; $\frac{41}{81}$; $\frac{61}{100}$; $\frac{101}{101}$;

2) $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{13}$; $\frac{1}{23}$; $\frac{21}{33}$; $\frac{41}{43}$; $\frac{51}{53}$; $\frac{31}{63}$; $\frac{61}{73}$; $\frac{71}{83}$; $\frac{81}{103}$; $\frac{91}{303}$; $\frac{101}{503}$;

3) $\frac{13}{2}$; $\frac{15}{2}$; $\frac{17}{2}$; $\frac{19}{2}$; $\frac{21}{2}$; $\frac{27}{2}$; $\frac{31}{2}$; $\frac{43}{2}$; $\frac{51}{2}$; $\frac{67}{2}$; $\frac{71}{2}$; $\frac{83}{2}$; $\frac{91}{2}$;

4) $\frac{3}{5}$; $\frac{2}{7}$; $\frac{6}{5}$; $\frac{5}{8}$; $\frac{11}{3}$; $\frac{12}{7}$; $\frac{13}{23}$; $\frac{14}{31}$; $\frac{15}{26}$; $\frac{18}{19}$; $\frac{21}{22}$; $\frac{22}{40}$; $\frac{31}{37}$; $\frac{42}{58}$.

Задание 2. Выполните задание по образцу.

Образец. $\frac{1}{9}$ – это обыкнове́нная дробь; 1 (один) – это числитель дроб**и**, 9 (девять) – это знаменатель дроб**и**.

1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{2}{9}$; 3) $\frac{3}{7}$; 4) $\frac{5}{8}$; 5) $\frac{71}{19}$;

6) $\frac{21}{40}$; 7) $\frac{7}{18}$; 8) $\frac{19}{12}$; 9) $\frac{31}{53}$; 10) $\frac{22}{21}$;

11) $\frac{2}{51}$; 12) $\frac{3}{28}$; 13) $\frac{12}{83}$; 14) $\frac{11}{67}$; 15) $\frac{12}{13}$.

4.2. Правильные и неправильные дроби. Смешанные дроби

Словарь к теме

величина́	непра́вильная дробь
сво́йство	пра́вильная дробь
часть (ж. р.)	сме́шанная дробь
дро́бная часть	изменя́ться – измени́ться
це́лая часть	име́ть *что?*
фо́рмула	одно́ и то же (одина́ковое)

Задание 3. Выполните задание по образцу.

Образец. 1) $\frac{1}{2}$ – это пра́вильная дробь, потому что числитель дроби меньше, чем её знаменатель;

2) $\frac{13}{2}$ – это непра́вильная дробь, потому что числитель дроби больше, чем её знаменатель;

3) $\frac{2}{2}$ – это непра́вильная дробь, потому что числитель дроби рав**ен** её знаменател**ю**.

1) $\frac{2}{5}$; 2) $\frac{11}{7}$; 3) $\frac{2}{3}$; 4) $\frac{17}{8}$; 5) $\frac{23}{23}$;
6) $\frac{1}{28}$; 7) $\frac{22}{3}$; 8) $\frac{4}{4}$; 9) $\frac{1}{10}$; 10) $\frac{32}{27}$;
11) $\frac{11}{13}$; 12) $\frac{19}{12}$; 13) $\frac{5}{9}$; 14) $\frac{21}{31}$; 15) $\frac{42}{19}$.

Запомните!

> $\frac{1}{2}$ – это **правильная дробь**; $\frac{13}{2}$ – это **неправильная дробь**.

Запомните!

> одн**а** (*как**ая**?*) цел**ая** (часть)
> двадцать одн**а** (*как**ая**?*) цел**ая** (часть)
> дв**е**, три, четыре (*как**их**?*) цел**ых** (части)
> пять, шесть, семь, …, двадцать (*как**их**?*) цел**ых** (частей)

Задание 4. Прочитайте дроби.

Образец. 1) $1\frac{1}{2}$ – однá цéл**ая**, однá втор**áя** (или одна целая **и** одна вторая);

2) $2\frac{3}{5}$ – две цéл**ых**, три пя́т**ых**.

1) $1\frac{2}{5}$; 2) $11\frac{3}{7}$; 3) $2\frac{1}{12}$; 4) $3\frac{3}{8}$; 5) $5\frac{7}{9}$;

6) $9\frac{1}{8}$; 7) $6\frac{2}{13}$; 8) $1\frac{2}{17}$; 9) $7\frac{1}{4}$; 10) $8\frac{1}{2}$;

11) $2\frac{1}{5}$; 12) $3\frac{2}{3}$; 13) $2\frac{2}{7}$; 14) $1\frac{8}{9}$; 15) $7\frac{9}{10}$.

Задание 5. Выполните задание по образцу.

Образец. $1\frac{1}{2}$ – это смéшанная дробь; 1 (один) – это цéлая часть дроб**и**, $\frac{1}{2}$ (одна вторая) – это дрóбная часть дроб**и**.

1) $1\frac{1}{3}$; 2) $8\frac{1}{7}$; 3) $5\frac{1}{4}$; 4) $22\frac{31}{58}$; 5) $4\frac{21}{40}$;

6) $2\frac{3}{8}$; 7) $7\frac{2}{3}$; 8) $9\frac{4}{29}$; 9) $19\frac{5}{17}$; 10) $6\frac{7}{9}$;

11) $3\frac{2}{5}$; 12) $1\frac{5}{6}$; 13) $9\frac{8}{13}$; 14) $7\frac{2}{11}$; 15) $5\frac{12}{19}$.

Прочитайте.

Пусть $\frac{a}{b}$ – обыкновенная дробь. Если $a < b$, то $\frac{a}{b}$ – **правильная дробь**. Если $a \geq b$, то $\frac{a}{b}$ – **неправильная дробь**. Если $a > b$, то неправильную дробь можно записать как **смешанную дробь**. Смешанная дробь имеет две части: **целую часть** и **дробную часть**.

Например, неправильную дробь $\frac{13}{2}$ можно записать как смешанную дробь $6\frac{1}{2}$. Число 6 – это целая часть дроби, $\frac{1}{2}$ – это дробная часть дроби.

Основное свойство дроби. Величина дроби не изменится, если числитель и знаменатель дроби умножить (или разделить) на одно и то же натуральное число.

Запишем основное свойство дроби в виде формулы:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m} = \frac{a : n}{b : n},$$

где $m, n \in N$.

Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Какая дробь $\frac{a}{b}$ правильная? Приведите пример.
2. Какая дробь $\frac{a}{b}$ неправильная? Приведите пример.
3. Какую дробь можно записать как смешанную?
4. Сколько частей имеет смешанная дробь?
5. Какие части имеет смешанная дробь?
6. Запишите основное свойство дроби.
7. Дробь $\frac{13}{2}$ – это правильная дробь? Почему?
8. Запишите дробь $\frac{13}{2}$ в виде смешанной дроби.

Задания

Задание 1. Запишите дроби математическими символами.

Образец. Две третьих. → $\frac{2}{3}$. Одна целая, две третьих. → $1\frac{2}{3}$.

1) тридцать одна тридцать третья;
2) двадцать три тридцать седьмых;
3) сто две пятнадцатых;
4) семьдесят пять сто первых;
5) двести сорок семь шестьсот вторых;
6) двенадцать девятнадцатых;
7) девятнадцать двадцатых;
8) одна целая, две третьих;
9) двести одна целая, три четвёртых;
10) триста три целых, пятнадцать шестьдесят вторых;
11) двенадцать целых, семнадцать двадцать седьмых;
12) двадцать восемь целых, семь восьмых;
13) семьсот одна целая, одна восемьдесят восьмая;
14) триста двадцать девять двенадцатых;
15) двести шестьдесят семь вторых;
16) двести шестьдесят целых, две седьмых;
17) пятьсот две третьих.

Задание 2. Запишите прилагательные в две группы: *дробная, неправильная, обыкновенная, правильная, смешанная, целая*.

1. Дробь какая? ____

2. Часть дроби какая? ____

Задание 3. Выберите правильный вариант ответа.

1. $\frac{13}{2}$ – это *правильная / неправильная* дробь.

2. $\frac{1}{2}$ – это *правильная / неправильная* дробь.

3. $\frac{1}{2}$ – это *обыкновенная / смешанная* дробь.

4. $6\frac{1}{2}$ – это *обыкновенная / смешанная* дробь.

5. Число один – это *числитель / знаменатель* дроби $\frac{1}{2}$.

6. Число два – это *числитель / знаменатель* дроби $\frac{1}{2}$.

7. Одна вторая – это *целая / дробная* часть дроби $6\frac{1}{2}$.

8. Число шесть – это *целая / дробная* часть дроби $6\frac{1}{2}$.

Задание 4. Запишите в предложения глаголы *записать, измениться, принадлежать, разделить, содержать, умножить* в правильной форме.

1. $a \in N$ – a _____________ N.

2. $a, b \in N$ – a и b _____________ N.

3. Запись дроби $\frac{a}{b}$ _____________ числитель дроби, знаменатель дроби и дробную черту.

4. Величина дроби не _____________, если числитель и знаменатель дроби _____________ (или _____________) на одно и то же натуральное число.

5. ___________________ основное свойство дроби в виде формулы: $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m} = \frac{a : n}{b : n}$, где $m, n \in N$.

6. ___________________ семьдесят два на два.

7. Частное чисел a и b можно ___________________ как дробь $\frac{a}{b}$.

4.3. Сокращение дробей. Приведение дробей к наименьшему общему знаменателю

Словарь к теме

слу́чай
сокраще́ние *чего? на что?*
сокраща́ть – сократи́ть *что? на что?*
сократи́мая дробь
несократи́мая дробь
наиме́ньший о́бщий знамена́тель
приведе́ние *чего? к чему?*
приводи́ть – привести́ к наиме́ньшему о́бщему знамена́телю
дополни́тельный мно́житель

Задание 1. Выполните задание по образцу.

Образец. 1) $\frac{8}{40}$ – это сократимая дробь, потому что её числитель и знаменатель **можно** разделить **на одно и то же** число (на 8);

2) $\frac{2}{9}$ – это несократимая дробь, потому что её числитель и знаменатель **нельзя** разделить **на одно и то же** число.

1) $\frac{2}{4}$; 2) $\frac{7}{8}$; 3) $\frac{3}{12}$; 4) $\frac{7}{19}$; 5) $\frac{5}{42}$; 6) $\frac{100}{102}$;

7) $\frac{4}{16}$; 8) $\frac{2}{7}$; 9) $\frac{5}{35}$; 10) $\frac{7}{63}$; 11) $\frac{10}{19}$; 12) $\frac{25}{100}$.

Прочитайте.

Сокращение дроби – это деление её числителя и знаменателя на одно и то же число.

Сократить дробь – значит разделить её числитель и знаменатель на одно и то же число.

Если дробь сократить, то величина дроби не изменится.

Рассмотрим дробь $\frac{8}{40}$. Числитель и знаменатель дроби имеют наибольший общий делитель 8. Следовательно, $\frac{8}{40}$ – сократимая дробь.

Разделим числитель и знаменатель дроби на 8. Получим

$$\frac{8}{40}=\frac{8:8}{40:8}=\frac{1}{5}.$$

Мы сократили дробь $\frac{8}{40}$ на 8. Дробь $\frac{1}{5}$ – это несократимая дробь.

Ответьте на вопросы и выполните задание.

1. Что такое сокращение дроби?
2. Что значит сократить дробь?
3. Дробь $\frac{15}{40}$ – это сократимая дробь? Почему?
4. На какое число можно сократить дробь $\frac{15}{40}$?
5. Запишите дробь $\frac{15}{40}$ в виде несократимой дроби.
6. Дробь $\frac{3}{8}$ – это несократимая дробь? Почему?

Задание 2. Приведите дроби к наименьшему общему знаменателю. Назовите наименьший общий знаменатель дробей.

Образец. $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$. Получим дроби $\frac{3}{6}$ и $\frac{2}{6}$. Число 6 – это наименьший общий знаменатель дробей $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$. Привел**и** дроби к наименьшему общему знаменателю.

1) $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{6}$;	2) $\frac{2}{5}$ и $\frac{1}{10}$;	3) $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{7}$;	4) $\frac{7}{12}$ и $\frac{1}{9}$;
5) $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{4}$;	6) $\frac{1}{10}$ и $\frac{5}{6}$;	7) $\frac{2}{9}$ и $\frac{1}{6}$;	8) $\frac{3}{4}$ и $\frac{9}{10}$;
9) $\frac{1}{6}$ и $\frac{2}{15}$;	10) $\frac{7}{16}$ и $\frac{5}{6}$;	11) $\frac{7}{8}$ и $\frac{3}{20}$;	12) $\frac{3}{11}$ и $\frac{5}{22}$.

Прочитайте.

Чтобы привести дроби $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$ к наименьшему общему знаменателю, надо сначала найти НОК(2; 3). НОК(2; 3) = 6. Потом надо найти *дополнительные множители* к дробям $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$. Чтобы найти дополнительный множитель к дроби, надо НОК(2; 3) разделить на знаменатель дроби. Число 3 – это дополнительный множитель к дроби $\frac{1}{2}$, потому что 6 : 2 = 3. Число 2 – это дополнительный множитель к дроби $\frac{1}{3}$, потому что 6 : 3 = 2. Дробь $\frac{1}{2}$ запишем так: $\frac{1}{2}=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 3}=\frac{3}{6}$. Дробь $\frac{1}{3}$ запишем так: $\frac{1}{3}=\frac{1\cdot 2}{3\cdot 2}=\frac{2}{6}$. Мы привели дроби $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$ к наименьшему общему знаменателю и получили дроби $\frac{3}{6}$ и $\frac{2}{6}$.

Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Что надо сделать сначала, чтобы привести дроби $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$ к наименьшему общему знаменателю?

2. Чему равно НОК(2; 3)?

3. Чему равен наименьший общий знаменатель дробей $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$?

4. Запишите дробь $\frac{1}{2}$ как дробь со знаменателем 6.

5. Запишите дробь $\frac{1}{3}$ как дробь со знаменателем 6.

6. Чему равен дополнительный множитель к дроби $\frac{1}{2}$?

7. Чему равен дополнительный множитель к дроби $\frac{1}{3}$?

8. Почему дополнительный множитель к дроби $\frac{1}{2}$ равен 3?

9. Почему дополнительный множитель к дроби $\frac{1}{3}$ равен 2?

4.4. Сравнение дробей

Задание 3. Прочитайте неравенства по образцу.

Образец. $\frac{1}{2} < \frac{3}{2}$ – одна вторая меньше, **чем** три вторых.

1) $\frac{3}{4} > \frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{9} < \frac{2}{9}$; 3) $\frac{1}{3} < \frac{5}{3}$; 4) $\frac{5}{7} > \frac{2}{7}$;

5) $\frac{1}{8} < \frac{7}{8}$; 6) $\frac{9}{2} > \frac{7}{2}$; 7) $\frac{2}{5} < \frac{7}{5}$; 8) $\frac{11}{12} > \frac{5}{12}$;

9) $\frac{3}{2} > \frac{1}{2}$; 10) $\frac{3}{2} < \frac{5}{2}$; 11) $\frac{5}{6} > \frac{1}{6}$; 12) $\frac{1}{10} < \frac{7}{10}$.

Прочитайте.

Дроби можно сравнивать между собой. Рассмотрим три случая сравнения дробей.

Случай первый. Пусть дроби имеют одинаковые знаменатели $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{b}$.

Если $a < c$, то $\frac{a}{b} < \frac{c}{b}$. Если $a > c$, то $\frac{a}{b} > \frac{c}{b}$.

Случай второй. Пусть дроби имеют одинаковые числители $\frac{a}{b}$ и $\frac{a}{c}$.

Если $b<c$, то $\frac{a}{b}>\frac{a}{c}$. Если $b>c$, то $\frac{a}{b}<\frac{a}{c}$.

Случай третий. Пусть дроби имеют разные числители и разные знаменатели $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$.

Сначала дроби надо привести к наименьшему общему знаменателю, потом надо сравнить их числители (случай первый).

Задание 4. Сравните дроби. Объясните решение по образцу.

Образец. $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{2}$ $\Rightarrow \frac{1}{2}<\frac{3}{2}$. Одна вторая меньше, чем три вторых, потому что дроби имеют одинаковые знаменатели, а числитель первой дроби меньше, чем числитель второй дроби.

1) $\frac{1}{8}$ и $\frac{3}{8}$; 2) $\frac{21}{7}$ и $\frac{19}{7}$; 3) $\frac{6}{11}$ и $\frac{8}{11}$; 4) $\frac{11}{9}$ и $\frac{11}{21}$;

5) $\frac{5}{7}$ и $\frac{15}{21}$; 6) $\frac{5}{81}$ и $\frac{1}{9}$; 7) $\frac{2}{19}$ и $\frac{2}{21}$; 8) $\frac{18}{19}$ и $\frac{18}{23}$;

9) $\frac{3}{12}$ и $\frac{1}{4}$; 10) $\frac{11}{20}$ и $\frac{7}{20}$; 11) $\frac{4}{19}$ и $\frac{2}{19}$; 12) $\frac{5}{17}$ и $\frac{5}{13}$.

4.5. Действия с обыкновенными и смешанными дробями

Прочитайте.

Обыкновенные и смешанные дроби можно складывать, вычитать, умножать и делить.

Правило сложения (вычитания) обыкновенных дробей с одинаковыми знаменателями: чтобы сложить (вычесть) дроби *с одинаковыми знаменателями*, надо сложить (вычесть) числители дробей, а знаменатель оставить *общий*.

Например, $\frac{5}{6}+\frac{1}{6}=\frac{5+1}{6}=\frac{6}{6}=1$.

Правило сложения (вычитания) обыкновенных дробей с разными знаменателями: *сначала* надо привести дроби к наименьшему общему знаменателю, *потом* их сложить (вычесть) как дроби с одинаковыми знаменателями.

Например, $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{3}{6}+\frac{4}{6}=\frac{7}{6}$.

Правило умножения обыкновенных дробей: чтобы умножить две обыкновенные дроби, надо числитель *первой дроби* умножить на числитель *второй дроби* и знаменатель *первой дроби* умножить на знаменатель *второй дроби*.

Например, $\frac{5}{7}\cdot\frac{5}{8}=\frac{5\cdot 5}{7\cdot 8}=\frac{25}{56}$.

Правило деления обыкновенных дробей: чтобы разделить дробь $\frac{a}{b}$ на дробь $\frac{c}{d}$, надо числитель *первой дроби* умножить на знаменатель *второй дроби* и знаменатель *первой дроби* умножить на числитель *второй дроби*.

Например, $\frac{5}{7}:\frac{5}{8}=\frac{5}{7}\cdot\frac{8}{5}=\frac{8}{7}$.

Задание 5. А. Прочитайте конструкцию.

Чтобы + инфинитив **… , надо / нужно** + инфинитив **… .**

Б. Установите соответствия.

1. Чтобы сложить две дроби с разными знаменателями,	**а) надо** числитель первой дроби умножить на числитель второй дроби и знаменатель первой дроби умножить на знаменатель второй дроби.
2. Чтобы умножить две обыкновенные дроби,	**б) надо** числитель первой дроби умножить на знаменатель второй дроби и знаменатель первой дроби умножить на числитель второй дроби.
3. Чтобы разделить дробь на дробь,	**в) надо** сначала привести их к наименьшему общему знаменателю.

Задание 6. Выполните задание по образцу.

Образец. $\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{4}{6}-\frac{3}{6}=\frac{1}{6}$. Это операция вычитан**ия**. Сначала прив**ели** дроби к наименьшему общему знаменателю – шесть, потом от четырёх отн**яли** три. Получ**или** результат – одна шестая.

1) $\frac{3}{5}+\frac{6}{7}$; 2) $\frac{7}{8}-\frac{5}{6}$; 3) $\frac{3}{5}\cdot\frac{25}{6}$; 4) $\frac{4}{9}:\frac{2}{4}$;

5) $\frac{5}{6}+\frac{1}{4}$; 6) $\frac{5}{7}-\frac{6}{8}$; 7) $\frac{5}{8}\cdot\frac{9}{10}$; 8) $\frac{3}{7}:\frac{9}{14}$;

9) $\frac{3}{4}+\frac{5}{6}$; 10) $\frac{3}{10}-\frac{4}{15}$; 11) $\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}$; 12) $\frac{10}{11}:\frac{5}{22}$.

Задание 7. Прочитайте. Запишите в таблицу примеры.

Операции	Правила	Примеры
1. Сложение (вычитание) смешанных дробей.	**Сначала** надо записать смешанные дроби как неправильные обыкновенные дроби, а **потом** выполнить операцию сложения (вычитания).	
2. Умножение смешанных дробей.	**Сначала** надо записать смешанные дроби как неправильные обыкновенные дроби, а **потом** выполнить операцию умножения.	
3. Деление смешанных дробей.	**Сначала** надо записать смешанные дроби как неправильные обыкновенные дроби, а **потом** выполнить операцию деления.	

Задание 8. Найдите значение выражения.

1) $1\frac{2}{3}+\frac{5}{6}$; 2) $5-3\frac{2}{7}$; 3) $8\frac{1}{5}-3\frac{1}{6}$;

4) $6\frac{1}{3}-8$; 5) $6\frac{3}{5}\cdot 10$; 6) $-2\frac{2}{7}+4\frac{3}{5}$;

7) $2\frac{6}{7}:1\frac{3}{7}$; 8) $1\frac{11}{17}\cdot 3\frac{1}{11}$; 9) $1\frac{1}{8}:\left(-\frac{9}{16}\right)$;

10) $3\frac{2}{3}:\frac{1}{6}$; 11) $-3\frac{2}{9}+3$; 12) $(-16):\left(-\frac{4}{9}\right)$;

13) $1\frac{1}{9}\cdot 1\frac{1}{2}$; 14) $\frac{5}{12}\cdot(-6)$; 15) $-10\frac{2}{3}:\left(-5\frac{1}{9}\right)$.

Задания

Задание 1. Сократите дроби.

Образец. $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$. Сократ**или** дробь на 3.

1) $\frac{2}{4}$; 2) $\frac{3}{12}$; 3) $\frac{5}{75}$; 4) $\frac{2}{38}$; 5) $\frac{5}{110}$; 6) $\frac{25}{100}$;

7) $\frac{4}{16}$; 8) $\frac{6}{21}$; 9) $\frac{7}{35}$; 10) $\frac{9}{63}$; 11) $\frac{12}{144}$; 12) $\frac{13}{52}$.

Задание 2. Поставьте глаголы в форму первого лица множественного числа будущего времени:

1) сравнить; 2) привести; 3) найти;
4) разделить; 5) получить; 6) умножить.

Задание 3. Запишите слова в правильной форме.

(Сравнить) _____________ дроби $\frac{7}{20}$ и $\frac{11}{15}$. Дроби имеют разные числители и разные знаменатели.

(Привести) ______________ дроби к наименьшему общему знаменателю. Наименьший общий знаменатель дробей равен 60. (Найти) ______________ дополнительные множители для каждой дроби. Для этого (разделить) ______________ наименьший общий знаменатель на знаменатели дробей

$$60 : 20 = 3;\ 60 : 15 = 4.$$

Число 3 – это дополнительный множитель к первой дроби. Число 4 – это дополнительный множитель ко второй дроби. (Умножить) _____________ каждую дробь на её дополнительный множитель.

(Получить) ____________ дроби с одинаковыми знаменателями

$$\frac{7}{20}=\frac{7\cdot 3}{20\cdot 3}=\frac{21}{60};$$

$$\frac{11}{15}=\frac{11\cdot 4}{15\cdot 4}=\frac{44}{60}.$$

Тогда $\frac{21}{60}<\frac{44}{60}$. Следовательно, $\frac{7}{20}<\frac{11}{15}$.

Задание 4. Найдите значение выражения.

1) $1\frac{1}{6}:2\frac{1}{6}\cdot 26$; 2) $8\frac{1}{3}+6\frac{1}{2}-3\frac{5}{6}$; 3) $4\frac{5}{6}-\frac{5}{8}-2\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}$;

4) $2\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{10}:2\frac{4}{5}$; 5) $12\frac{3}{8}-5\frac{1}{4}+7\frac{1}{2}$; 6) $\left(1\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right):3\frac{3}{4}+\frac{2}{3}$;

7) $3\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}+6\frac{4}{9}:2$; 8) $\frac{2}{3}-\frac{8}{23}\cdot\left(\frac{3}{4}+1\frac{1}{6}\right)$; 9) $5\frac{2}{9}:\left(3-1\frac{1}{9}\cdot 2\frac{2}{5}\right)+\frac{4}{5}$.

Тема 5. Десятичные дроби

Словарь к теме

пери́од десяти́чная дробь бесконе́чная непериоди́ческая десяти́чная дробь бесконе́чная периоди́ческая десяти́чная дробь коне́чная десяти́чная дробь запята́я

Десятичные дроби читают:

1,1 – одн**а** цел**ая**, одн**а** десят**ая**;

5,7 – пять цел**ых**, семь десят**ых**;

12,21 – двенадцать цел**ых**, двадцать одн**а** сот**ая**;

0,001 – нуль цел**ых**, одн**а** тысячн**ая** (нуль цел**ых**, два нул**я**, один);

1,235563 – одн**а** цел**ая**, двести тридцать пять тысяч пятьсот шестьдесят три миллионн**ых** (одн**а** цел**ая**, двадцать три, пятьдесят пять, шестьдесят три);

0,333… – нуль цел**ых**, три, три, три и так далее;

0,(3) – нуль цел**ых**, три **в периоде**;

0,1(3) – нуль цел**ых**, один **и** три **в периоде**.

Задание 1. Прочитайте обыкновенные и десятичные дроби.

1) $\frac{1}{10}$;	2) 0,1;	3) $\frac{2}{10}$;	4) 0,2;
5) $\frac{1}{100}$;	6) 0,01;	7) $\frac{3}{100}$;	8) 0,03;
9) $\frac{1}{1000}$;	10) 0,001;	11) $\frac{7}{1000}$;	12) 0,007;
13) $\frac{1}{10000}$;	14) 0,0001;	15) $\frac{5}{10000}$;	16) 0,0005;
17) $\frac{1}{100000}$;	18) 0,00001;	19) $\frac{9}{100000}$;	20) 0,00009;
21) 1,666…;	22) 1,(6);	23) 0,1333…;	24) 0,1(3).

Задание 2. Выполните задание по образцу.

Образец. 1) 2,1 – это конечная десятичная дробь;

2) 0,2(6) – это бесконечная периодическая десятичная дробь;

3) 0,333… – это бесконечная периодическая десятичная дробь.

1) 5,21;	2) 0,4(6);	3) 0,22;	4) 2,666…;
5) 31,1;	6) 0,5(3);	7) 1,103;	8) 6,8333…;
9) 12,2;	10) 0,(57);	11) 19,1;	12) 0,4848… .

Задание 3. Выполните задание по образцу.

Образец. 1) 0,9 – это десятичная дробь; 0 – это целая часть дроби; 0,9 – это дробная часть дроби;

2) 1,9 – это десятичная дробь; 1 – это целая часть дроби; 0,9 – это дробная часть дроби.

1) 1,1;	2) 19,01;	3) 0,11;	4) 1,312;
5) 5,4;	6) 12,42;	7) 5,08;	8) 3,021;
9) 0,2;	10) 0,21;	11) 3,1;	12) 2,92.

Прочитайте.

Рассмотрим дроби **со** знаменател**ями** 10, 100, 1000, … :

$$\frac{1}{10},\ \frac{7}{100},\ \frac{53}{1000},\ \dots .$$

Эти дроби можно записать в виде **десятичных дробей**. **Десятичная дробь** – это дробь **со** знаменател**ем** 10, 100, 1000, … . Например, $\frac{21}{10}=2{,}1.$ Десятичная дробь имеет две части: **целую часть** и **дробную часть**. Целую и дробную части десятичной дроби разделяет запята́я.

Рассмотрим десятичную дробь 2,1. Число 2 – это целая часть дроби, число 0,1 – это дробная часть дроби.

Десятичные дроби бывают **конечные** и **бесконечные**. Бесконечные десятичные дроби бывают **периодические** и **непериодические**.

Например, дробь 2,1 – это конечная десятичная дробь. Дробь 0,333… – это бесконечная периодическая десятичная дробь. Дробь 0,333… можно записать так: 0,(3).

Ответьте на вопросы.

1. Что такое десятичная дробь?
2. Как можно записать дроби со знаменателями 10, 100, 1000 и т. д.?
3. Сколько частей имеет десятичная дробь?
4. Какие части имеет десятичная дробь?
5. Что разделяет целую и дробную части десятичной дроби?
6. Какие бывают десятичные дроби?
7. Какие бывают бесконечные десятичные дроби?

Задание 4. А. Прочитайте текст.

Чтобы обыкновенную дробь записать в виде десятичной дроби, надо числитель дроби разделить на её знаменатель.

Например, чтобы записать обыкновенную дробь $\frac{5}{8}$ в виде десятичной дроби, надо 5 разделить на 8. Получим $\frac{5}{8}=5:8=0{,}625.$ Дробь 0,625 – это **конечная десятичная дробь**.

Чтобы записать обыкновенную дробь $\frac{7}{6}$ в виде десятичной дроби, надо 7 разделить на 6. Получим $\frac{7}{6} = 7:6 = 1{,}1666...$. Дробь 1,1666… – это **бесконечная периодическая десятичная дробь**. Дробь 1,1666… записывают так: 1,1(6).

Б. Ответьте на вопросы.

1. Что надо сделать, чтобы записать обыкновенную дробь в виде десятичной дроби?
2. Какой десятичной дроби равна дробь $\frac{5}{8}$?
3. Какой обыкновенной дроби равна дробь 0,625?
4. Какой десятичной дроби равна дробь $\frac{7}{6}$?
5. Как можно записать дробь 1,1666…?
6. Дробь 1,1666… – это какая дробь?
7. Какой обыкновенной дроби равна дробь 1,1(6)?

Задания

Задание 1. Прочитайте десятичные дроби.

1) 0,5;	2) 1,72;	3) 2,61;	4) 1,(6);
5) 0,12;	6) 3,19;	7) 5,83;	8) 3,2(6);
9) 0,09;	10) 2,8;	11) 0,1;	12) 2,6(3).

Задание 2. Запишите десятичные дроби.

Образец. Пять целых, две десятых. → 5,2.

1) сорок одна целая, одна десятая;
2) сто три целых, три десятых;
3) двести двадцать целых, двадцать одна сотая;
4) пятнадцать целых, пятнадцать сотых;
5) три целых, триста одна тысячная;
6) нуль целых, пятьсот три тысячных;
7) восемь целых, одна десятитысячная;
8) тридцать целых, пятьсот две десятитысячных;
9) тридцать три целых, двадцать одна стотысячная;
10) девять целых, двадцать две стотысячных;
11) двадцать семь целых, сто одна миллионная;
12) пятьдесят восемь целых, три миллионных;
13) восемнадцать целых, девятнадцать сотых;
14) сорок целых, пять, шесть в периоде;
15) пять целых, два и пятнадцать в периоде.

Задание 3. Решите примеры.

1) $6\frac{1}{3}-2{,}2$; 2) $2\frac{2}{7}+4{,}6$; 3) $21{,}3\cdot 6\frac{1}{3}$;

4) $0{,}375:\frac{9}{16}$; 5) $\frac{4}{7}\cdot(-4{,}9)$; 6) $(-0{,}15)\cdot\frac{2}{3}$;

7) $\frac{37}{63}\cdot(-2{,}1)$; 8) $\left(-\frac{1}{3}\right):1{,}5$; 9) $(-0{,}6):\left(-\frac{4}{9}\right)$.

Задание 4. Прочитайте тексты, выберите правильную форму глагола.

1. *Рассмотреть / рассматривают / рассмотрим* дроби со знаменателями 10, 100, 1000, … . Эти дроби можно *записать / записывают / запишем* в виде десятичных дробей. Например, $\frac{21}{10}=2{,}1$. Десятичная дробь *иметь / имеют / имеет* две части: целую часть и дробную часть. Целую и дробную части десятичной дроби *разделить / разделяет / разделим* запятая.

2. Чтобы *записать / записывают / запишем* обыкновенную дробь $\frac{7}{6}$ в виде десятичной дроби, надо 7 *разделить / делят / разделим* на 6. *Получить / получают / получим* $\frac{7}{6}=7:6=1{,}1666...$. Дробь 1,1666… *записывать / записывают / запишем* так: 1,1(6).

Задание 5. Выберите правильный вариант ответа.

1. Рассмотрим дробь … 10.
(А) на знаменатель; (Б) со знаменателем; (В) в знаменателе.

2. Числитель дроби надо разделить … .
(А) на знаменатель; (Б) со знаменателем; (В) в знаменателе.

3. Запишите обыкновенную дробь … десятичной дроби.
(А) на вид; (Б) с видом; (В) в виде.

4. Дробь 0,(3) читаем: нуль целых, три … .
(А) на период; (Б) с периодом; (В) в периоде.

5. Целую и дробную части десятичной дроби разделяет … .
(А) запятую; (Б) запятой; (В) запятая.

6. Дроби $\frac{7}{100}$, $\frac{53}{1000}$ можно записать в виде … .
(А) десятичные дроби;
(Б) десятичными дробями;
(В) десятичных дробей.

7. Десятичные дроби бывают … .
(А) конечным и бесконечным;
(Б) конечными и бесконечными;
(В) конечные и бесконечные.

Тема 6. Возведение в степень. Извлечение корня

6.1. Чтение степеней и корней

Степени и корни читают:

Обозначение степеней	Чтение степеней	Обозначение корней	Чтение корней
a^0	*a* **в** нулев**о́й** степени	–	–
a^1	*a* **в** пе́рв**ой** степени	–	–
a^{-1}	*a* **в** минус пе́рв**ой** степени	–	–
a^2	*a* **в** квадра́т**е** / *a* **квадрат**	$\sqrt{a}$	корень **квадра́тный из** *a* / корень из *a*
a^{-2}	*a* **в** минус втор**о́й** степени	–	–
a^3	*a* **в** ку́б**е** / *a* **куб**	$\sqrt[3]{a}$	корень **куби́ческий из** *a* / куби́ческий корень из *a*
a^{-3}	*a* **в** минус тре́ть**ей** степени	–	–
a^4	*a* **в** четвёрт**ой** степени	$\sqrt[4]{a}$	корень четвёрт**ой** степени **из** *a*
a^5	*a* **в** пя́т**ой** степени	$\sqrt[5]{a}$	корень пя́т**ой** степени **из** *a*
a^{21}	*a* **в** два́дцат**ь** пе́рв**ой** степени	$\sqrt[21]{a}$	корень два́дцат**ь** пе́рв**ой** степени **из** *a*
a^n	*a* **в** степен**и** ***n***	$\sqrt[n]{a}$	корень степени ***n*** **из** *a*
a^{-n}	*a* **в** степен**и** минус ***n***	–	–

Задание 1. Прочитайте степени и корни.

Образец. 1) 5^2 – пять **в** квадрат**е** (пять квадрат);

2) $\sqrt[7]{10}$ – корень седьмой степени **из** десят**и**.

1) 3^2; 2) 2^3; 3) 64^5; 4) 32^{19}; 5) 4^{-2}; 6) 9^2;
7) 8^{-3}; 8) 19^{-12}; 9) 23^{-8}; 10) 7^{-4}; 11) 21^{-18}; 12) 3^3;
13) $\sqrt[9]{1}$; 14) $\sqrt[4]{81}$; 15) $\sqrt[5]{32}$; 16) $\sqrt[4]{16}$; 17) $\sqrt[3]{27}$; 18) $\sqrt[3]{8}$;
19) $\sqrt[4]{5}$; 20) $\sqrt[7]{12}$; 21) $\sqrt[8]{23}$; 22) $\sqrt[5]{19}$; 23) $\sqrt[6]{64}$; 24) $\sqrt[7]{3}$.

6.2. Возведение в степень

Словарь к теме

показа́тель (м. р.) натура́льный показа́тель сте́пень (ж. р.) значе́ние сте́пени основа́ние сте́пени показа́тель сте́пени	возведе́ние *чего? во что?* возводи́ть – возвести́ *что? во что?* нахожде́ние *чего?* находи́ть – найти́ *что?* справедли́во (правильно, верно) неопределённое выраже́ние

Задание 2. Прочитайте степени.

Образец. 1) c^9 – *c* **в** девятой степен**и**; **2)** a^i – *a* **в** степен**и** *i*.

1) a^2; 2) b^3; 3) c^k; 4) n^{19}; 5) t^{-12}; 6) a^{-3};
7) a^{2n}; 8) b^n; 9) n^3; 10) c^{-3}; 11) t^{-2}; 12) a^p;
13) a^{2k}; 14) b^j; 15) m^8; 16) n^{i+1}; 17) t^{2k-1}; 18) a^m.

Задание 3. Выполните задание по образцу.

Образец. $3^2 = 9$ – три в квадрате равно девят**и**; 3^2 – это сте́пень, 3 – это основа́ние сте́пени, 2 – это показа́тель сте́пени, 9 – это значе́ние сте́пени.

1) $2^2 = 4$; 2) $4^2 = 16$; 3) $5^2 = 25$; 4) $6^2 = 36$;
5) $1^4 = 1$; 6) $3^3 = 27$; 7) $4^3 = 64$; 8) $5^3 = 125$;
9) $2^3 = 8$; 10) $2^4 = 16$; 11) $3^4 = 81$; 12) $2^5 = 32$.

Задание 4. Выполните задание по образцу.

Образец. 1) $a^{-1} = \frac{1}{a}$ – *a* в минус первой степени равно **один** разделить на *a*;

2) $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$ – *a* в минус второй степени равно **один** разделить на *a* квадрат.

1) c^{-2}; 2) d^{-3}; 3) z^{-8}; 4) t^{-10}; 5) h^{-12}; 6) q^{-2};
7) y^{-4}; 8) b^{-1}; 9) a^{-6}; 10) c^{-7}; 11) x^{-5}; 12) y^{-3};
13) x^{-2}; 14) d^{-1}; 15) t^{-4}; 16) z^{-5}; 17) b^{-9}; 18) q^{-3}.

Задание 5. А. Изучите конструкции и примеры.

Что? (В. п.) называют чем? (Т. п.) / как?

Что? (И. п.) называется чем? (Т. п.) / как?

Числа 1, 2, 3, …, *n*, … **называют** *элементами* множества *N*.
Слагаемые и сумма **называются** *компонентами* операции сложения.

Б. Запишите слова в правильной форме.

1. Раздел математики, который изучает числа, их отношения и свойства, называют (арифметика) _____________ .

2. Число, которое меньше, чем нуль, называется отрицательным (число) ___________ .

3. Выражение, которое содержит числа и знаки арифметических операций, называется числовым (выражение) __________________ .

4. Нахождение значения степени называется (возведение) ______________ в степень.

Прочитайте.

Степенью числа *a* с натуральным показателем *n* $(n > 1)$ называется произведение n одинаковых множителей, каждый из которых равен числу a, т. е.

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{n \text{ множителей}}.$$

Степень числа a с натуральным показателем n обозначают так: a^n.

Число a в выражении $a^n = b$ называется **основанием степени**, число n называется **показателем степени**, число b называется **значением степени**.

Например, произведение $2 \cdot 2 \cdot 2$ можно записать как 2^3. Выражение 2^3 – это степень, где 2 – это основание степени, 3 – это показатель степени. Так как $2^3 = 8$, то число 8 – это значение степени.

Возведение в степень – это нахождение значения степени.

Если $(-n)$ – целое отрицательное число, то $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Например, $3^{-2} = \frac{1}{3^2}$.

Если $n = -1$, то $a^{-1} = \frac{1}{a}$. Например, $5^{-1} = \frac{1}{5}$.

Если $a \neq 0$, $b \neq 0$ и a, b, m и n – целые или дробные числа, то справедливы следующие свойства степеней:

Формула		Свойство
1.	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	При умножении степеней *с одинаковыми основаниями* показатели степени складываются.
2.	$a^n : a^m = a^{n-m}$	При делении степеней *с одинаковыми основаниями* показатели степени вычитаются.
3.	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	Степень произведения равна произведению степеней.
4.	$(a : b)^n = a^n : b^n$	Степень частного равна частному степеней.
5.	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	При возведении степени в степень показатели степени умножаются.

Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Что называется степенью числа a с натуральным показателем n?
2. Как обозначают степень?
3. Как называется число a в выражении a^n?
4. Как называется число n в выражении a^n?
5. Что называется возведением в степень?
6. Чему равно произведение степеней с одинаковым основанием?
7. Запишите, чему равно частное степеней с одинаковым основанием.
8. Запишите, чему равна степень в степени.
9. Чему равна степень частного?

Задание 6. Выполните задание по образцу.

Образец. 1) $(-2)^3 = -8$, потому что отрицательное число в нечётной степени – это отрицательное число;

2) $(-2)^4 = 16$, потому что отрицательное число в чётной степени – это положительное число.

1) $(-2)^2 = 4$;	2) $(-4)^2 = 16$;	3) $(-1)^4 = 1$;	4) $(-6)^2 = 36$;
5) $(-3)^3 = -27$;	6) $(-5)^2 = 25$;	7) $(-1)^7 = -1$;	8) $(-4)^3 = -64$;
9) $(-2)^5 = -32$;	10) $(-3)^4 = 81$;	11) $(-2)^6 = 64$;	12) $(-5)^3 = -125$.

Прочитайте.

Основание степени может быть положительным числом, отрицательным числом или числом 0.

Положительное число в любой натуральной степени – всегда положительное число:

$$a^n > 0, \text{ где } a > 0,\ n \in N.$$

Отрицательное число в чётной степени – это положительное число:

$$(-a)^{2k} > 0, \text{ где } k \in N.$$

Отрицательное число в нечётной степени – это отрицательное число:

$$(-a)^{2k-1} < 0, \text{ где } k \in N.$$

Например, $(-2)^3 = -8$, потому что основание степени – отрицательное число, а показатель степени – нечётное число.

Запомните!

Любое число $a \neq 0$ в нулевой степени равно единице: $a^0 = 1$

Любое число в первой степени равно самому числу: $a^1 = a$

Нуль в любой натуральной степени равен нулю: $0^n = 0$

Выражение 0^0 – это **неопределённое выражение**.

Ответьте на вопросы.
1. Каким числом может быть основание степени?
2. Чему равно натуральное число в нулевой степени?
3. Чему равен нуль в натуральной степени?
4. Какое выражение называют неопределённым выражением?

6.3. Извлечение корня

Словарь к теме

ко́рень (м. р.) значе́ние ко́рня показа́тель ко́рня	подкоренно́е выраже́ние извлече́ние *чего? из чего?* извлека́ть – извле́чь *что? из чего?*

Запись читают:
корень n-ой степени – корень э́нной степени.

Задание 7. Выполните задание по образцу.

Образец. 1) $\sqrt{100} = 10$ – корень квадратный **из ста** рав**ен** десят**и**; 2 – это показа́тель ко́рня, 100 – это подкоренно́е выраже́ние, 10 – это значе́ние ко́рня;

2) $\sqrt[3]{8} = 2$ – корень кубический **из** восьм**и** рав**ен** дв**ум**; 3 – это показа́тель ко́рня, 8 – это подкоренно́е выраже́ние, 2 – это значе́ние ко́рня.

1) $\sqrt{0}$; 2) $\sqrt{1}$; 3) $\sqrt{4}$; 4) $\sqrt{16}$; 5) $\sqrt{25}$;
6) $\sqrt{64}$; 7) $\sqrt{81}$; 8) $\sqrt{121}$; 9) $\sqrt{144}$; 10) $\sqrt[3]{125}$;
11) $\sqrt[3]{0}$; 12) $\sqrt[3]{1}$; 13) $\sqrt[3]{27}$; 14) $\sqrt[3]{64}$; 15) $\sqrt{169}$.

Задание 8. Прочитайте корни.

Образец. 1) $\sqrt[5]{b}$ – корень пя́той степен**и из** b;

2) $\sqrt[k]{x}$ – корень степен**и** k из x.

1) $\sqrt{a}$; 2) $\sqrt[3]{b}$; 3) $\sqrt[8]{c}$; 4) $\sqrt[19]{d}$; 5) $\sqrt[12]{t}$; 6) $\sqrt[3m+1]{x}$;
7) $\sqrt[2k]{y}$; 8) $\sqrt[n]{z}$; 9) $\sqrt[4]{x}$; 10) $\sqrt[p]{y}$; 11) $\sqrt[n]{b}$; 12) $\sqrt[2k-1]{b}$;
13) $\sqrt[3]{y}$; 14) $\sqrt[2n]{b}$; 15) $\sqrt[5]{q}$; 16) $\sqrt[2p]{x}$; 17) $\sqrt[2n]{a}$; 18) $\sqrt[2n+1]{a}$.

Прочитайте.

Арифметическим корнем *n*-ой степени из числа *a* называется число b, такое, что $b^n = a$, где $n \in N$, $n > 1$, $a \geq 0$, $b \geq 0$.

Корень n-ой степени обозначают знаком корня: $\sqrt[n]{\ }$. Записывают: $\sqrt[n]{a} = b$. Число a в выражении $\sqrt[n]{a}$ называется **подкоренным выражением**. Число n в выражении $\sqrt[n]{a}$ называется **показателем корня**. Если $\sqrt[n]{a} = b$, то число b называется **значением корня**.

Извлечение корня *n*-ой степени из числа – это нахождение значения корня.

Извлечение корня и возведение в степень – это обратные операции.

Если $a \geq 0$, $b \geq 0$, $n, k \in N$, $n \neq 1$, $k \neq 1$, то справедливы следующие свойства корней:

Формула		**Свойство**
1.	$\sqrt[n\cdot k]{a^k} = \sqrt[n]{a}$	Величина корня не изменится, если показатель корня и показатель степени умножить (или разделить) на одно и то же натуральное число.
2.	$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$	Корень степени n из произведения двух неотрицательных чисел рав**ен** произведени**ю** корней степени n из этих чисел.
3.	$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b \neq 0$	Корень степени n из частного двух неотрицательных чисел рав**ен** частн**ому** корней степени n из этих чисел.
4.	$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$	Степень корня равн**а** корн**ю** из степени.
5.	$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[n\cdot k]{a}$	Корень из корня рав**ен** корн**ю**, показатель которого равен произведению показателей этих корней.

Корень чётной степени из положительного числа – это положительное число, т. е.

$$\sqrt[2n]{a} = b \text{, где } a > 0,\ b > 0,\ n \in N.$$

Корень нечётной степени из отрицательного числа – это отрицательное число, т. е.

$$\sqrt[2k-1]{a} = b \text{, где } a < 0,\ b < 0,\ k \in N.$$

Корень чётной степени из отрицательного числа не существует.

Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Что называется арифметическим корнем n-ой степени из числа a?
2. Каким знаком обозначают корень n-ой степени?
3. Как называется число a в выражении $\sqrt[n]{a}$?
4. Как называется число n в выражении $\sqrt[n]{a}$?
5. Что такое нахождение значения корня?

6. Запишите, чему равен корень из произведения.
7. Запишите, чему равен корень из частного.
8. Запишите, чему равен корень из корня.
9. Запишите, чему равна степень корня.
10. Чему равен корень чётной степени из положительного числа?
11. Чему равен корень чётной степени из отрицательного числа?
12. Чему равен корень нечётной степени из отрицательного числа?
13. Когда существует корень чётной степени?
14. Назовите обратные операции.

Задание 9. Выполните задание по образцу.

Образец. 1) $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ – два **в** степен**и** одна вторая рав**но** корн**ю** квадратн**ому** **из** дв**ух**;

2) $3^{-\frac{1}{5}} = \dfrac{1}{\sqrt[5]{3}}$ – три **в** степен**и** **минус** одна пятая рав**но** один разделить на корень пятой степени **из** тр**ёх**.

1) $2^{\frac{1}{3}}$; 2) $3^{-\frac{1}{3}}$; 3) $5^{\frac{1}{4}}$; 4) $5^{-\frac{1}{4}}$; 5) $6^{\frac{1}{5}}$; 6) $6^{-\frac{1}{5}}$;
7) $7^{\frac{1}{2}}$; 8) $7^{-\frac{1}{2}}$; 9) $9^{-\frac{1}{3}}$; 10) $9^{\frac{1}{6}}$; 11) $4^{\frac{1}{7}}$; 12) $4^{-\frac{1}{7}}$.

Задание 10. Выполните задание по образцу.

Образец. 1) $a^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{a^4}$ – a в степени четыре пятых рав**но** корн**ю** пятой степени из a в четвёртой степени;

2) $a^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$ – a в степени минус две третьих рав**но** один разделить на корень кубический из a в квадрате;

3) $x^{\frac{a}{b}} = \sqrt[b]{x^a}$ – x в степени a разделить на b равн**о** корн**ю** степени b из x в степени a.

1) $a^{\frac{2}{3}}$; 2) $a^{\frac{7}{5}}$; 3) $x^{-\frac{1}{3}}$; 4) $a^{\frac{1}{6}}$; 5) $y^{\frac{p}{s}}$; 6) $z^{-\frac{2}{3}}$;
7) $b^{\frac{3}{2}}$; 8) $x^{\frac{4}{5}}$; 9) $b^{-\frac{4}{3}}$; 10) $a^{\frac{1}{2}}$; 11) $a^{\frac{n}{m}}$; 12) $a^{-\frac{m}{n}}$.

Запомните!

1) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$; **2)** $a^{-\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$.

Задания

Задание 1. Возведите в степень.

Образец. 1) $4^2 = 16$; **2)** $(-1)^5 = -1$.

1) $(-2)^3$; 2) 6^3; 3) $(-2)^4$; 4) $0{,}7^2$;

5) $(-3)^4$; 6) 11^2; 7) $(-4)^3$; 8) $(-12)^2$;

9) $(-3)^5$; 10) $0{,}2^3$; 11) $(-0{,}1)^3$; 12) $(-1{,}5)^2$.

Задание 2. Извлеките корень.

Образец. 1) $\sqrt{16} = 4$; **2)** $\sqrt[5]{-1} = -1$.

1) $\sqrt[4]{81}$; 2) $\sqrt[3]{-125}$; 3) $\sqrt[3]{27}$; 4) $\sqrt{1{,}21}$;

5) $\sqrt{144}$; 6) $\sqrt[3]{0{,}001}$; 7) $\sqrt[3]{-64}$; 8) $\sqrt[5]{-32}$;

9) $\sqrt[4]{625}$; 10) $\sqrt[3]{-0{,}008}$; 11) $\sqrt[6]{64}$; 12) $\sqrt[5]{-243}$.

Задание 3. Запишите корень в виде степени.

Образец. 1) $\sqrt[5]{3} = 3^{\frac{1}{5}}$; **2)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \dfrac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = x^{-\frac{2}{3}}$.

1) $\sqrt[3]{2}$; 2) $\sqrt{3}$; 3) $\sqrt{17}$; 4) $\sqrt[6]{23}$; 5) $\sqrt[4]{y^3}$; 6) $\sqrt[8]{b^5}$;

7) $\dfrac{1}{\sqrt[7]{x^2}}$; 8) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{y^3}}$; 9) $\dfrac{1}{\sqrt[7]{10}}$; 10) $\dfrac{1}{\sqrt[6]{x}}$; 11) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{z^8}}$; 12) $\dfrac{1}{\sqrt[9]{a^5}}$.

Задание 4. Измените конструкции.

Образец. Нахождение (*чего?*) значен**ия** выражения. → Находить – найти (*что?*) значен**ие** выражения.

1) возведение числа в степень → ……………………………………………………

2) извлечение корня → ……………………………………………………………

3) сокращение дроби → …………………………………………………………..

4) выполнение действия → ……………………………………………………..

5) изменение конструкции → …………………………………………………..

6) умножение чисел → ……………………………………………………………

Задание 5. Выберите правильный вариант ответа.

1. Возведите пять … шестую степень.

(А) в; (Б) из; (В) с.

2. Извлеките корень квадратный … ста сорока четырёх.

(А) в; (Б) из; (В) с.

3. Возведите два … .

(А) в куб; (Б) из куба; (В) с кубом.

4. В выражении $2^3 = 8$ число 3 является … .
(А) результатом;
(Б) основанием степени;
(В) показателем степени.

5. В выражении $2^3 = 8$ число 2 является … .
(А) результатом;
(Б) основанием степени;
(В) показателем степени.

6. В выражении $2^3 = 8$ число 8 является … .
(А) результатом;
(Б) основанием степени;
(В) показателем степени.

7. Число n … $\sqrt[n]{a}$ – это показатель корня.
(А) в выражении;
(Б) из выражения;
(В) с выражением.

8. В выражении $\sqrt[3]{125} = 5$ число 5 – это … .
(А) значение корня;
(Б) подкоренное выражение;
(В) показатель корня.

9. В выражении $\sqrt[3]{125} = 5$ число 3 – это … .
(А) значение корня;
(Б) подкоренное выражение;
(В) показатель корня.

10. В выражении $\sqrt[3]{125} = 5$ число 125 – это … .
(А) значение корня;
(Б) подкоренное выражение;
(В) показатель корня.

Задание 6. Запишите слова в правильной форме.

1. Выражение a^n называется (степень) ________________ числа a с натуральным показателем n.

2. Число n в выражении a^n называется (показатель) ____________ степени.

3. Число a в выражении a^n называется (основание) __________________ степени.

4. Число a в выражении $\sqrt[n]{a}$ называется подкоренным (выражение) ______________ .

5. Нахождение значения корня называется (извлечение) _______________ корня n-ой степени из числа.

6. Нахождение значения степени называется (возведение) ______________ в степень.

Тема 7. Пропорции. Проценты

7.1. Пропорции

Словарь к теме

отноше́ние относи́ться *к чему?* к числу пропо́рция проце́нт	сво́йство составлять *сколько?* процентов *от чего?* чле́ны пропо́рции т. е. (то есть)

Задание 1. Прочитайте записи по образцу.

Образец. $x : 6 = 2 : 3$ – x относится **к** шест**и** **как** два относится **к** тр**ём** (отношение чисел x и шесть равн**о** отношени**ю** чисел два и три). Это пропорция.

1) $18 : 6 = x : 10$; 2) $x : 4 = 5 : 16$; 3) $14 : 8 = 28 : x$;
4) $8 : x = 12 : 48$; 5) $x : 5 = 12 : 18$; 6) $9 : 5 = 18 : 10$;
7) $x : 4 = 48 : 12$; 8) $5 : x = 15 : 12$; 9) $10 : 5 = 30 : 15$;
10) $3 : 6 = 5 : 10$; 11) $4 : 2 = 10 : 5$; 12) $6 : 2 = 45 : 15$.

Прочитайте.

Отношение чисел a и b – это частное чисел a и b, т. е. это запись $a : b$.

Пример. Найдите отношение чисел 10 и 5.

Решение. Отношение чисел 10 и 5 – это частное этих чисел. Найдём частное чисел 10 и 5:

$$10 : 5 = 2.$$

Следовательно, отношение чисел 10 и 5 равно двум.

Пропорция – это равенство двух отношений $a : b = c : d$ или $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Пропорцию $a : b = c : d$ **читают**: отношение чисел a и b равно отношени**ю** чисел c и d, **или** a относится **к** b **как** c относится **к** d.

Числа a, b, c и d – это **члены пропорции**.

Свойство пропорции

Если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $a \cdot d = b \cdot c$.

Ответьте на вопросы и выполните задание.

1. Что такое отношение чисел a и b?
2. Чему равно отношение чисел 10 и 5?
3. Что такое пропорция?
4. Что такое числа a, b, c и d в пропорции $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$?
5. Запишите свойство пропорции.

7.2. Проценты

Знаки и записи читают:

% – проце́нт;

1 % – один проце́нт (21 %, 31 %, 101 %, 121 %);

2 % – два проце́нт**а** (3 %, 4 %, 22 %, 23 %, 24 %);

5 % – пять проце́нт**ов** (6 %, 7 %, … , 20 %, 25 %);

1,1 % – одна целая, одна десятая проце́нт**а**;

2,3 % – две целых, три десятых проце́нт**а**;

1,07 % – одна целая, семь сотых проце́нт**а**;

p % – пэ проце́нт**ов**.

Прочитайте.

Один процент от числа – это одна со́тая часть числа.

Чтобы найти 1 % от числа a, надо число a разделить на 100, т. е.

$$1\% = \frac{a}{100}.$$

Например, чтобы найти 1 % от числа 200, надо число 200 разделить на 100:

$$1\% = \frac{200}{100} = 2.$$

Следовательно, 1 % от числа 200 равен двум.

Чтобы найти p % от числа a, надо число a разделить на 100, а потом умножить на p:

$$p\,\% = \frac{a}{100} \cdot p.$$

Например, чтобы найти 5 % от числа 150, надо число 150 разделить на 100, а потом умножить на 5:

$$5\,\% = \frac{150}{100} \cdot 5 = 7{,}5.$$

Следовательно, число 7,5 составляет 5 % от числа 150.

Если число a составляет p % от числа m, то число p можно найти по формуле

$$p = \frac{a \cdot 100}{m}.$$

Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Что такое один процент от числа?
2. Как найти 1 % от числа a?
3. Как найти p % от числа a?
4. Прочитайте проценты: 1 %; 2 %; 7 %; 10 %; 21 %; 22 %; 25 %; 50 %; 100 %; 200 %; 201 %; 202 %; 300 %; 0,1 %; 2,5 %.

Задания

Задание 1. Найдите:

1) 1 % от числа 250;
2) 5 % от числа 250;
3) 80 % от числа 60;
4) 150 % от числа 25;
5) 3 % от числа 500;
6) 6 % от числа 1200;
7) 40 % от числа 15;
8) 10 % от числа 155;
9) 12 % от числа 85;
10) 7 % от числа 210;
11) 28 % от числа 9;
12) 12 % от числа 125;
13) 4 % от числа 20;
14) 10 % от числа 280.

Задание 2. Найдите число *a*, если:

1) 5 % от числа *a* равны 50;
2) 11 % от числа *a* равны 66;
3) 3 % от числа *a* равны 1,8;
4) 15 % от числа *a* равны 75;
5) 20 % от числа *a* равны 30;
6) 50 % от числа *a* равны 5,6;
7) 10 % от числа *a* равны 17;
8) 7 % от числа *a* равны 14,7;
9) 18 % от числа *a* равны 36;
10) 2 % от числа *a* равны 320;
11) 3 % от числа *a* равны 42;
12) 85 % от числа *a* равны 17;
13) 3 % от числа *a* равны 3,9;
14) 0,4 % от числа *a* равны 12.

Задание 3. А. Прочитайте задание и решение.

Сколько процентов составляет число 12 от числа 50?

Решение. Составим пропорцию

$$50 – 100\ \%;$$
$$12 – x\ \%.$$

По свойству пропорции получим

$$50 \cdot x = 12 \cdot 100.$$

Найдём x

$$x = \frac{12 \cdot 100}{50} = 24.$$

Следовательно, число 12 составляет 24 % от числа 50.

Б. Сколько процентов составляет число *a* от числа *b*?

1) $a = 8$, $b = 200$;
2) $a = 30$, $b = 240$;
3) $a = 36$, $b = 60$;
4) $a = 17$, $b = 850$;
5) $a = 2$, $b = 800$;
6) $a = 80$, $b = 128$;
7) $a = 5$, $b = 250$;
8) $a = 48$, $b = 500$;
9) $a = 32$, $b = 64$;
10) $a = 84$, $b = 210$;
11) $a = 9$, $b = 72$;
12) $a = 80$, $b = 320$;
13) $a = 3$, $b = 12$;
14) $a = 26$, $b = 520$.

Тема 8. Множества. Модуль числа

8.1. Понятие множества

Словарь к теме

мно́жество пусто́е мно́жество числово́е мно́жество подмно́жество объе́кт перечисле́ние поня́тие при́знак совоку́пность (ж. р.) спо́соб	элеме́нт облада́ть *чем?* объединя́ться – объедини́ться *по чему?* совпада́ть – совпа́сть *с чем?* составля́ть *что?* (быть частью *чего?*) состоя́ть *из чего?* явля́ться *чем?* характеристи́ческое сво́йство како́й-либо

Символы и записи читают:

$\varnothing$ – пустое множество;

$P(x)$ – пэ **от** x.

Задание 1. Прочитайте записи по образцу.

Образец. 1) $A \subset C$ – A содержит**ся** в C (множество A – **подмножество** множеств**а** C);

2) $A \not\subset C$ – A **не** содержит**ся** в C (множество A **не является** подмножеств**ом** множеств**а** C);

3) $2 \in N$ – 2 принадлежит N.

1) $C \subset B$;	2) $D \subset A$;	3) $B \not\subset D$;	4) $N \subset Z$;
5) $G \not\subset T$;	6) $N \subset Q$;	7) $H \not\subset E$;	8) $Z \subset R$;
9) $K \not\subset S$;	10) $Q \subset R$;	11) $X \not\subset У$;	12) $I \subset R$;
13) $D \not\subset E$;	14) $Z \subset Q$;	15) $У \not\subset Z$;	16) $У \subset X$;
17) $5 \in N$;	18) $-1 \notin N$;	19) $8 \in Z$;	20) $12 \in Q$.

Прочитайте.

Множество – одно из основных понятий в математике. **Множество** – это совокупность объектов, которые объединяются по какому-либо признаку.

Например, множество студентов в группе, множество дней в году, множество натуральных чисел.

Элементы множества – это объекты, которые составляют множество.

Пустое множество – это множество, которое не содержит ни одного элемента. Пустое множество обозначают символом $\varnothing$.

Множества обозначают большими латинскими буквами: A, B, C, … . Элементы множества обозначают малыми латинскими буквами: a, b, c, … .

Множества бывают конечные и бесконечные. **Конечное множество** – это множество, которое содержит *конечное* число элементов. **Бесконечное множество** – это множество, которое содержит *бесконечное* число элементов.

Существуют два способа задания множеств.

Первый способ. Перечисление всех элементов множества. Все элементы множества записывают в фигурных скобках.

Например, множество цифр можно записать так:

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Множество цифр – это конечное множество. Оно содержит 10 элементов. Элемент множества A – это цифра. Например, 0 – элемент множества A. Следовательно, $0 \in A$.

Второй способ. Задание всех характеристических свойств множества. Если множество C состоит из элементов x, которые обладают свойством $P(x)$, то множество C можно записать так:

$$C = \{x \mid P(x)\}.$$

Например, множество всех натуральных чисел, которые больше, чем 10 и меньше, чем 120, можно записать как множество:

$$F = \{x \mid 10 < x < 120,\ x \in N\}.$$

Число 12 – это элемент множества F. Следовательно, $12 \in F$.

Множество B называется **подмножеством** множества A, если каждый элемент множества B принадлежит множеству A.

Например, множество F – подмножество множества N.

Записывают: $F \subset N$.

Если $B \subset A$ и $A \subset B$, то множества A и B совпадают: $A = B$.

Множество, которое состоит из чисел, называется **числовым множеством**.

Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Что такое множество?
2. Что такое пустое множество?
3. Каким знаком обозначают пустое множество?
4. Какие бывают множества?
5. Сколько элементов содержит конечное множество?
6. Приведите пример конечного множества.
7. Сколько элементов содержит бесконечное множество?
8. Приведите пример бесконечного множества.
9. Множество $B = \{1; 2; 3\}$ – это конечное множество?
10. Сколько элементов содержит множество $B = \{1; 2; 3\}$?
11. Множество N – это конечное или бесконечное множество?
12. Назовите элемент множества N.
13. Что такое подмножество множества?
14. Что такое числовое множество?
15. Назовите элемент множества $F = \{x \mid 10 < x < 120,\ x \in N\}$.
16. Назовите элемент, который не принадлежит множеству F.

8.2. Операции над множествами

Словарь к теме

объединéние мнóжеств пересечéние мнóжеств	рáзность мнóжеств графи́ческая иллюстрáция

Знаки читают:

$\bigcup$ – объединéние;

$\bigcap$ – пересечéние;

$\backslash$ – рáзность.

Задание 2. Прочитайте записи по образцу.

Образец. 1) $A \bigcup B$ – **объединение множеств** *A* и *B*;

2) $A \bigcap B$ – **пересечение множеств** *A* и *B*;

3) $A \setminus B$ – **разность множеств** *A* и *B*;

4) $A \bigcup B = C$ – **объединение множеств** *A* и *B* равно множеств**у** *C*.

1) $Z \bigcup I$; 2) $N \bigcap Z$; 3) $B \setminus A$; 4) $R \setminus I = Q$;

5) $Q \bigcup I$; 6) $Z \bigcap Q$; 7) $Z \setminus N$; 8) $Q \bigcup I = R$;

9) $C \bigcup D$; 10) $Z \bigcap I$; 11) $R \setminus I$; 12) $C \bigcap D = F$.

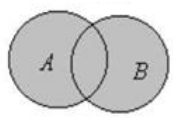
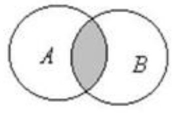
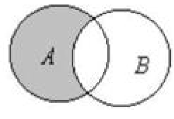
Задание 3. Прочитайте записи.

1) $N = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$; 2) $Q = \left\{ \frac{m}{n} \middle| m \in Z, n \in N \right\}$;

3) $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$; 4) $B \setminus A = \{x \mid x \notin A \text{ и } x \in B\}$;

5) $A \bigcup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$; 6) $A \bigcap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$.

Задание 4. Изучите операции над множествами.

Название операции	**Знак опе-рации**	**Определение операции**	**Графическая иллюстрация**
Объединение множеств *A* и *B*	$\bigcup$	$A \bigcup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$	
Пересечение множеств *A* и *B*	$\bigcap$	$A \bigcap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$	
Разность множеств *A* и *B*	$\setminus$	$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$	

8.3. Числовые множества

Словарь к теме

действи́тельное (веще́ственное) число́ рациона́льное число́	иррациона́льное число́ приме́рно

Символы и записи читают:

$\approx$ – приме́рно равно;

$N \subset Z \subset Q \subset R$ – N содержит**ся** в Z, Z содержит**ся** в Q, Q содержит**ся** в R.

Задание 5. Прочитайте записи по образцу.

Образец. $\pi \approx 3{,}14$ – пи **примерно равно** трём цел**ым**, четырнадцат**и** сот**ым**.

1) $\kappa \approx 3{,}73$;	2) $a \approx 2{,}1$;	3) $b \approx 0{,}02$;	4) $c \approx 5{,}15$;
5) $g \approx 9{,}87$;	6) $d \approx 1{,}3$;	7) $h \approx 0{,}12$;	8) $v \approx 7{,}08$;
9) $e \approx 2{,}72$;	10) $s \approx 9{,}5$;	11) $t \approx 0{,}21$;	12) $m \approx 9{,}1$;
13) $x \approx 6{,}3$;	14) $r \approx 8{,}7$;	15) $y \approx 0{,}43$;	16) $z \approx 2{,}63$.

Прочитайте названия, обозначения и элементы числовых множеств.

Название множества	**Обозначение**	**Запись множества**	**Элемент множества**
Множество натуральных чисел	N	$N = \{1, 2, 3, \dots n, \dots\}$	Натуральное число
Множество целых чисел	Z	$Z = \{\dots, -n, \dots, 0, 1, \dots, n, \dots\}$	Целое число
Множество рациональных чисел	Q	$Q = \left\{ \frac{m}{n} \,\middle|\, m \in Z, n \in N \right\}$	Рациональное число
Множество иррациональных чисел	I	–	Иррациональное число
Множество действительных чисел	R	$R = Q \cup I$	Действительное число

Натуральные числа – это числа 1, 2, 3, …, n, … . **Целые числа** – это положительные натуральные числа, отрицательные натуральные числа и число 0. **Рациональные числа** – это все обыкновенные дроби. Обыкновенные дроби можно записать как конечные десятичные дроби и как бесконечные периодические десятичные дроби. Следовательно, конечные десятичные дроби и бесконечные периодические десятичные дроби – это рациональные числа. **Иррациональные числа** – это бесконечные непериодические десятичные дроби. Например, числа $\pi \approx 3{,}14$ и $e \approx 2{,}72$ – это иррациональные числа. **Действительные числа** – это все рациональные и иррациональные числа.

Если число 5 – элемент множества R, то пишут $5 \in R$. Если число π не является элементом множества Q, то пишут $\pi \notin Q$.

Множества N, Z, Q и I – это подмножества множества R.

Записывают

$$N \subset Z \subset Q \subset R,\ \ I \subset R.$$

Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Назовите числовые множества.
2. Запишите все подмножества множества Z.
3. Запишите все подмножества множества Q.
4. Запишите все подмножества множества R.
5. Число e – это рациональное или иррациональное число?
6. Как называются элементы множества Z?
7. Как называются элементы множества Q?
8. Число 0 – это рациональное или иррациональное число?
9. Обыкновенная дробь является элементом множества Z?
10. Какие десятичные дроби – рациональные числа?
11. Какие десятичные дроби – иррациональные числа?
12. Запишите символами: 10 – действительное число.
13. Запишите символами: A – подмножество множества B.

Задание 6. Выполните задание по образцу.

Образец. 5 – это натуральное число, 5 – это целое число, 5 – это рациональное число, 5 – это не иррациональное число, 5 – это действительное число.

1) –1; 2) π; 3) 0; 4) 0,(3); 5) 12,1; 6) –101;

7) $\frac{1}{3}$; 8) e; 9) $\frac{1}{2}$; 10) 1,(6); 11) $3\frac{3}{4}$; 12) –1,2.

Задание 7. Запишите символами записи по образцу, используйте знаки $\in$, $\notin$, < и >.

Образец. 5 – это натуральное число; 5 – это целое число; 5 – это действительное число; 5 – это положительное число; 5 – это не иррациональное число. **Запишем:** $5 \in N$, $5 \in Z$, $5 \in R$, $5 > 0$, $5 \notin I$.

1) –3 – это целое число; –3 – это рациональное число; –3 – это отрицательное число; –3 – это не иррациональное число;

2) e – это иррациональное число; e – это действительное число; e – это не натуральное число; e – это положительное число; e – это не рациональное число;

3) 3,5 – это рациональное число; 3,5 – это действительное число; 3,5 – это положительное число; 3,5 – это не целое число;

4) $(-\pi)$ – это не натуральное число; $(-\pi)$ – это не целое число; $(-\pi)$ – это не рациональное число; $(-\pi)$ – это иррациональное число; $(-\pi)$ – это действительное число; $(-\pi)$ – это отрицательное число.

8.4. Модуль числа

Словарь к теме

абсолю́тная величина́ мо́дуль (м. р.) неотрица́тельное число́ противополо́жный *чему?*	определя́ть – определи́ть *что? по чему?* отлича́ть – отличи́ть *что? от чего?* отлича́ться *друг от друга чем?* раскрыва́ть – раскры́ть *что?*

Записи читают:

$|\,a\,|$ – модуль a (абсолютная величина a);

$|\,a\,| = \begin{cases} a, & \text{если } a \ge 0; \\ -a, & \text{если } a < 0 \end{cases}$ – модуль a рав**ен** a, если $a \ge 0$, рав**ен** минус a, если $a < 0$.

Задание 8. Прочитайте записи по образцу.

Образец. $|\,3\,|$ – **модуль** тр**ёх** (абсолютная величина тр**ёх**).

1) $|-1|$; 2) $|\,21\,|$; 3) $|-5|$; 4) $|\,71\,|$; 5) $|-8|$; 6) $|\,12\,|$;
7) $|-4|$; 8) $|\,10\,|$; 9) $|-9|$; 10) $|\,6\,|$; 11) $|\,0\,|$; 12) $|\,19\,|$.

Задание 9. Выполните задание по образцу.

Образец. (–3) и 3 – это **противоположные числа**, потому что они отличаются друг от друга знаком. $|-3| = |\,3\,| = 3$ – модуль минус тр**ёх** рав**ен** модул**ю** тр**ёх**, рав**ен** тр**ём**.

1) 10 и (–10); 2) (–1) и 1; 3) 38 и (–38); 4) 90 и (–90);
5) 19 и (–19); 6) (– *e*) и *e*; 7) 21 и (–21); 8) 40 и (– 40);
9) (–12) и 12; 10) 2 и (–2); 11) (–11) и 11; 12) 3π и (–3π).

Задание 10. Прочитайте модуль выражения по образцу.

Образец. $|\,x+3\,|$ – модуль выражения (x + 3).

1) $|\,x-1{,}2\,|$; 2) $|\,2x+1\,|$; 3) $|\,5-x\,|$; 4) $|\,3x+1\,|$;
5) $|\,x-2{,}5\,|$; 6) $|\,3-2x\,|$; 7) $|\,2-x\,|$; 8) $|\,5x-2\,|$;
9) $|\,x+3{,}1\,|$; 10) $|\,1-5x\,|$; 11) $|\,x+1\,|$; 12) $|\,1-4x\,|$.

Прочитайте.

Число, которое больше или равно нулю, называется **неотрицательным числом**.

Модуль (абсолютная величина) числа a – это неотрицательное число, которое обозначают знаком модуля $|\,a\,|$ и определяют по формуле:

$$|\,a\,| = \begin{cases} a, & \text{если } a \ge 0; \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Модуль числа a больше или равен нулю: $|a| \geq 0$.

Действительные числа a и $(-a)$ называют **противоположными числами**. Противоположные числа отличаются друг от друга знаком. Сумма противоположных чисел равна нулю. Модули противоположных чисел равны. Например, (–3) и 3 – это противоположные числа. Сумма чисел (–3) и 3 равна нулю, и модули противоположных чисел (– 3) и 3 равны

$$(-3) + 3 = 0; \; |-3| = |3| = 3.$$

Ответьте на вопросы.

1. Что называется неотрицательным числом?
2. Модуль числа a – какое это число?
3. Что называется абсолютной величиной числа a?
4. Как обозначают модуль числа a?
5. Как называют числа a и $(-a)$?
6. Чему равна сумма противоположных чисел?
7. Чем отличаются друг от друга противоположные числа?
8. Модули каких чисел равны?
9. Какому числу равны модули чисел 3 и (–3)?

Задания

Задание 1. Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Назовите все числовые множества.
2. Множество N – это конечное или бесконечное множество?
3. Приведите пример конечного множества.
4. Число (–7) – это целое или натуральное число?
5. Число (–7) – это рациональное или иррациональное число?
6. Число (–7) – это действительное число?
7. Число (–7) – это положительное или отрицательное число?
8. Чему равна абсолютная величина числа (–7)?
9. Число π – это иррациональное или рациональное число?
10. Чему равен модуль числа $(-\pi)$?
11. Приведите пример пустого множества.
12. Каким символом обозначают пустое множество?
13. Приведите пример бесконечного множества.

Задание 2. Запишите как множество. Сколько элементов содержит это множество? Это конечное или бесконечное множество? Что является элементами этого множества?

1. Множество натуральных чисел.
2. Множество дней недели.
3. Множество цифр.
4. Множество студентов в группе.
5. Множество букв русского алфавита.

Задание 3. Найдите $A \bigcup B$, $A \bigcap B$ и $A \setminus B$, если:

1) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \varnothing$;

2) $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{1, 3, 5\}$;

3) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{4, 5, 6\}$;

4) $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{b, d, f, g\}$.

Задание 4. Запишите, каким из множеств N, Z, Q, I, R принадлежит число a, если …

1) $a = -2$;	2) $a = 19,(3)$;	3) $a = -2,1$;	4) $a = 0$;
5) $a = -e$;	6) $a = -0,(6)$;	7) $a = -3,7$;	8) $a = \frac{1}{8}$;
9) $a = -4$;	10) $a = 1,2(3)$;	11) $a = 12,3$;	12) $a = 5$.

Задание 5. Найдите модуль числа a.

Образец. $a = -3$; $|-3| = 3$ – модуль минус тр**ёх** рав**ен** тр**ём**.

1) $a = -8$;	2) $a = 12$;	3) $a = -90$;	4) $a = -71$;
5) $a = -\pi$;	6) $a = 19$;	7) $a = -20$;	8) $a = -10$;
9) $a = -2$;	10) $a = 0$;	11) $a = -4$;	12) $a = -e$.

Задание 6. Раскройте знак модуля.

Образец. $|x-1| = \begin{cases} x-1, \text{ если } x \geq 1, \\ -x+1, \text{ если } x < 1. \end{cases}$ – модуль выражения $(x-1)$ **равен** $(x-1)$, если $x \geq 1$; **равен** $(-x+1)$, если $x < 1$.

1) $|x-2,3|$;	2) $|3x+1|$;	3) $|5-x|$;	4) $|3x+6|$;
5) $|x-1,5|$;	6) $|7-2x|$;	7) $|1-x|$;	8) $|3x-2|$;
9) $|x+0,1|$;	10) $|x+1|$;	11) $|x-7|$;	12) $|2-5x|$.

Задание 7. Соедините два предложения в одно.

Образец. Множество – это совокупность объектов. **Они** объединяются по какому-либо признаку. → Множество – это совокупность объектов, **которые** объединяются по какому-либо признаку.

1. Элементы множества – это объекты. **Они** составляют множество.
2. Пустое множество – это множество. **Оно** не содержит ни одного элемента.
3. Конечное множество – это множество. **Оно** содержит конечное число элементов.
4. Модуль числа – это величина. **Она** больше или равна нулю.
5. Неотрицательное число – это число. **Оно** больше или равно нулю.
6. Множество цифр – это конечное множество. **Оно** содержит 10 элементов.
7. Числовые множества – это множества. **Они** состоят из чисел.

Задание 8. Выберите правильный вариант ответа.

1. Множество – одно из основных … в математике.

(А) понятий; (Б) совокупностей; (В) элементов.

2. Множество – это … каких-либо объектов.

(А) понятие; (Б) совокупность; (В) элемент.

3. Множество состоит из … .

(А) понятий; (Б) совокупностей; (В) элементов.

4. Множества … конечные и бесконечные.

(А) бывают; (Б) отличаются; (В) содержат.

5. Бесконечное множество – это множество, которое … бесконечное число элементов.

(А) бывает; (Б) отличается; (В) содержит.

6. Противоположные числа … друг от друга знаком.

(А) бывают; (Б) отличаются; (В) содержат.

Задание 9. Запишите прилагательные в правильной форме: *абсолютный, неотрицательный, противоположный, пустой, числовой*.

1. ____________________ множество – это множество, которое состоит из чисел.
2. ____________________ множество – это множество, которое не содержит ни одного элемента.
3. ____________________ число – это число, которое больше или равно нулю.
4. ____________________ величина числа a – это неотрицательное число, которое обозначают знаком модуля $|a|$.
5. Действительные числа a и $(-a)$ – это ____________________ числа.
6. Действительные числа a и $(-a)$ имеют ____________________ знаки.

Задание 10. Установите соответствия.

Начало предложения	Конец предложения
1. Сумма противоположных чисел	**а)** противоположное число числу десять.
2. Число (–10) – это	**б)** знаком $|a|$.
3. Модуль числа a – это	**в)** равны.
4. Числа a и $(-a)$ – это	**г)** равен пяти.
5. Модуль числа минус пять	**д)** отличаются знаком.
6. Противоположные числа 5 и (–5)	**е)** равна нулю.
7. Модули противоположных чисел	**ж)** противоположные числа.
8. Модуль числа a обозначают	**з)** равна десяти.
9. Абсолютная величина числа (–10)	**и)** неотрицательное число.

Тема 9. Числовые промежутки

9.1. Числовая ось

Словарь к теме

длина́	рису́нок (рис.)
отре́зок	стре́лка
едини́чный отре́зок	изобража́ть – изобрази́ть *что?*
направле́ние	выбира́ть – вы́брать *что?*
противополо́жное направле́ние	откла́дывать – отложи́ть *что? на чём?*
ось (ж. р.)	отмеча́ть – отме́тить *что? на чём?*
числова́я ось	принима́ть – приня́ть *что? за что?*
отсчёт	соотвествова́ть *чему?*
нача́ло отсчёта	стро́ить – постро́ить *что?*
прямáя ли́ния (прямáя)	счита́ть (полага́ть)

Задание 1. Поставьте глаголы в форму первого лица множественного числа прошедшего и будущего времени.

Образец. Решить → решили, решим.

Выбрать → ……………………………………………………………….…...

Изобразить → ……………………………………………………………

Обозначить → …………………………………………………………...

Отметить → ……………………………………………………………..

Построить → ……………………………………………………………

Прочитайте.

Построим прямую линию. Выберем на ней направление оси́ и обозначим его знаком «стрелка» → (рис. 1). На рисунке 1 мы изобразили ***ось***. Положительное направление оси́ обозначают стрелкой. Противоположное направление оси́ считают отрицательным.

Отметим на оси́ любую точку и обозначим её буквой *O*. Точке *O* соответствует число 0. Точку *O* называют **началом отсчёта**. Отметим на оси́ справа от точки *O* любую точку и обозначим её буквой *E*. Точке *E* соответствует число 1.

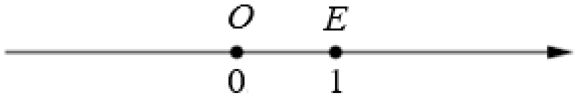


Рис. 1. Ось

Длина отрезка *OE* равна одному. Отрезок *OE* называется **единичным отрезком**. Мы построили числовую ось. На числовой оси́ можно отложить положительное или отрицательное число. Положительное число находится на числовой оси́ справа от точки *O*. Отрицательное число находится на числовой оси́ слева от точки *O*.

Ответьте на вопросы.
1. Каким знаком обозначают положительное направление оси?
2. Какой буквой обозначают начало отсчёта?
3. Какое число соответствует точке *O*?
4. Какое число соответствует точке *E*?
5. Как называется отрезок *OE*?
6. Чему равна длина отрезка *OE*?
7. Где на числовой оси находится положительное число?

9.2. Отрезки, интервалы и полуинтервалы

Словарь к теме

бесконéчность (ж. р.) интервáл полуинтервáл отрéзок промежýток	числовóй промежýток включáть – включи́ть *что? во что?* включи́тельно задавáть – задáть *что? чем?* удовлетворя́ть *чему?*

Символ читают:
∞ – бесконечность.

Задание 2. А. Изучите конструкцию.

от чего? (Р. п.) до чего? (Р. п.)

Б. Прочитайте записи по образцу.
Образец. 1) «от 5 до 10» – **от** пят**и** **до** десят**и**;
2) «от (–2) до ∞» – **от** минус дв**ух** **до** бесконечност**и**.

1) от (–1) до ∞;	2) от 0 до 12;	3) от 12 до 100;
4) от (–3) до –1;	5) от 1 до 19;	6) от 19 до 200;
7) от (– ∞) до ∞;	8) от 2 до 31;	9) от 18 до 123;
10) от (– 4) до ∞;	11) от 3 до 9;	12) от 13 до 25;
13) от (– ∞) до 4;	14) от 0 до 8;	15) от (–3) до 2;
16) от (– ∞) до 2;	17) от 3 до 7;	18) от (–8) до 31.

Задание 3. Прочитайте записи по образцу.
Образец. 1) [1; 2] – **отрезок от** одн**ого** **до** дв**ух**;
2) (1; 2) – **интервал от** одн**ого** **до** дв**ух**.

1) [–3; 7];	2) (–2; 10);	3) [9; 19];	4) (– 4; ∞);
5) [–5; 1];	6) (–7; 22);	7) [2; 12];	8) (– ∞; 12);
9) [– 4; 0];	10) (15; ∞);	11) [0; 4];	12) (– ∞; 20).

Задание 4. Прочитайте записи по образцу.

Образец. 1) [1; 2) – **полуинтервал от** одн**ого включительно до** двух;

2) (– ∞; 2] – полуинтервал **от** минус бесконечности **до** дв**ух** включительно.

1) (0; 3];	2) [–1; 8);	3) (– ∞; 31];	4) [12; ∞);
5) (5; 7];	6) [–3; 7);	7) (– ∞; 40];	8) [19; ∞);
9) (1; 4];	10) [5; 12);	11) (– ∞; 9];	12) [8; ∞).

Задание 5. Прочитайте множества по образцу.

Образец. $\{x \in R \mid a \le x \le b\}$ – **множество всех действительных чисел** x, **таких, что** $a \le x \le b$.

1) $\{x \in R \mid a < x < b\}$;	2) $\{x \in R \mid a < x \le b\}$;
3) $\{x \in R \mid a \le x < b\}$;	4) $\{x \in R \mid -\infty < x \le b\}$;
5) $\{x \in R \mid -\infty < x < b\}$;	6) $\{x \in R \mid a < x < \infty\}$;
7) $\{x \in R \mid a \le x < \infty\}$;	8) $\{x \in R \mid -\infty < x < \infty\}$;
9) $\{x \in R \mid 1 \le x \le 100\}$;	10) $\{x \in R \mid -1 < x < 0\}$;
11) $\{x \in R \mid 2 < x \le 19\}$;	12) $\{x \in R \mid -2 \le x < 10\}$;
13) $\{x \in R \mid 4 < x < \infty\}$;	14) $\{x \in R \mid -\infty < x \le 12\}$;
15) $\{x \in R \mid 8 \le x < \infty\}$;	16) $\{x \in R \mid -\infty < x < 21\}$.

Прочитайте.

Множество всех чисел, которые удовлетворяют какому-либо неравенству, называется **числовым промежутком**.

Числовой промежуток можно задать тремя способами:

1) неравенством; 2) обозначением;

3) изображением на числовой оси.

Например, отрезок от a до b можно задать:

1) неравенством $a \le x \le b$, где $x \in R$; 2) обозначением $[a; b]$;

3) изображением (рис. 2).

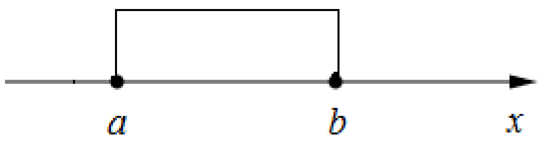


Рис. 2. Отрезок $[a; b]$

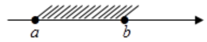
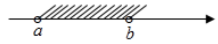
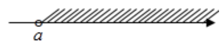
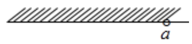
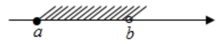
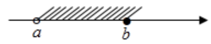
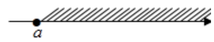
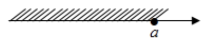
Чи́сла a и b называются **концами отрезка** $[a; b]$, где a – **левый конец** отрезка, b – **правый конец** отрезка.

Отрезки, интервалы и полуинтервалы называют **числовыми промежутками**.

Бесконечными промежутками называют промежутки $(a; \infty)$, $(-\infty; a)$, $[a; \infty)$, $(-\infty; a]$ и $(-\infty; \infty)$.

Например, интервал (10; ∞) – это бесконечный промежуток. Отрезок [1; 9] – это конечный промежуток.

Прочитайте названия и обозначения числовых промежутков.

Название числового промежутка	Обозначение числового промежутка	Неравенство, которое задаёт числовой промежуток	Чтение числового промежутка	Изображение числового промежутка
Отрезок	$[a; b]$	$\{x \in R \mid a \le x \le b\}$	отрезок от a до b	
Интервал	$(a; b)$	$\{x \in R \mid a < x < b\}$	интервал от a до b	
	$(-\infty; \infty)$	$\{x \in R \mid -\infty < x < \infty\}$	интервал от минус бесконечности до бесконечности	
	$(a; \infty)$	$\{x \in R \mid a < x < \infty\}$	интервал от a до бесконечности	
	$(-\infty; a)$	$\{x \in R \mid -\infty < x < a\}$	интервал от минус бесконечности до a	
Полу-интервал	$[a; b)$	$\{x \in R \mid a \le x < b\}$	полуинтервал от a включительно до b	
	$(a; b]$	$\{x \in R \mid a < x \le b\}$	полуинтервал от a до b включительно	
	$[a; \infty)$	$\{x \in R \mid a \le x < \infty\}$	полуинтервал от a включительно до бесконечности	
	$(-\infty; a]$	$\{x \in R \mid -\infty < x \le a\}$	полуинтервал от минус бесконечности до a включительно	

Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Что называется числовым промежутком?
2. Запишите, каким знаком обозначают бесконечность.
3. Как можно задать числовой промежуток?
4. Запишите бесконечные промежутки.
5. Запишите интервал $(1; \infty)$ в виде неравенства.
6. Запишите неравенство, которое задаёт полуинтервал $[-1; 5)$.
7. Запишите неравенство, которое задаёт полуинтервал $(-\infty; 7]$.
8. Запишите отрезок $[-2; 4]$ в виде неравенства.
9. Назовите левый конец отрезка $[-2; 4]$.
10. Назовите правый конец отрезка $[-2; 4]$.
11. Приведите пример бесконечного промежутка.
12. Изобразите на числовой оси полуинтервал $(2; 4]$.
13. Изобразите на числовой оси интервал $(-\infty; 5)$.
14. Изобразите на числовой оси отрезок $[-1; 7]$.
15. Изобразите на числовой оси полуинтервал $[0; \infty)$.

Задание 6. Выполните задание по образцу.

Образец. 1) [0; 3] – это конечный промежуток;

2) [3; ∞) – это бесконечный промежуток.

1) [12; 19]; 2) (–1; 18); 3) (12; ∞); 4) [20; ∞);
5) [19; 20]; 6) (20; 90); 7) (– ∞; 2]; 8) (– ∞; ∞);
9) [–3; 18]; 10) (11; 19); 11) [21; ∞); 12) (13; ∞).

Задание 7. Выполните задание по образцу.

Образец. $[1;100]=\{x\in R \mid 1\le x\le 100\}$ – отрезок от одного до ста – это множество всех действительных чисел *x*, таких, что $1 \le x \le 100$.

1) [11; 23]; 2) (– ∞; 12); 3) (19; ∞); 4) [25; ∞);
5) [15; 40]; 6) (31; 123); 7) (– ∞; 0]; 8) (– ∞; ∞);
9) [–2; 19]; 10) (12; 19); 11) [32; ∞); 12) (52; ∞).

Задания

Задание 1. Какая точка соответствует числу *a* на числовой оси?

Образец. 1. *a* = 3. Числу 3 на числовой оси соответствует **точка справа** от начала отсчёта, потому что 3 – положительное число.

2. *a* = –3. Числу (–3) на числовой оси соответствует **точка слева** от начала отсчёта, потому что (–3) – отрицательное число.

1) *a* = 22; 2) *a* = 131; 3) *a* = –21; 4) *a* = –51;
5) *a* = 1,4; 6) *a* = –2,5; 7) *a* = 2,82; 8) *a* = 212;
9) *a* = –83; 10) *a* = –31; 11) *a* = 110; 12) *a* = 0,1.

Задание 2. Найдите объединение множеств *A* и *B*.

Образец. *A* = [1; 10], *B* = [3; 12].

Сделаем рисунок. Изобразим множества *A* и *B* на числовой оси (рис. 3).

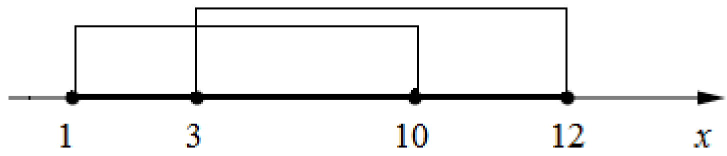


Рис. 3. Объединение множеств A = [1; 10] *и B* = [3; 12]

Запишем объединение множеств

$$[1;10]\cup[3;12]=[1;12].$$

1) *A* = [2; 9], *B* = (4; 11); 2) *A* = [0; 5], *B* = [3; 12);
3) *A* = [0; 8], *B* = [1; 19]; 4) *A* = [–1; 5], *B* = [0; 7];
5) *A* = [–1; 5], *B* = (0; 7); 6) *A* = (3; 6), *B* = (0; 12);
7) *A* = [3; 6], *B* = [4; 18); 8) *A* = [2; 19], *B* = (0; 6);
9) *A* = [1; 3], *B* = (2; 15); 10) *A* = (0; 3), *B* = [2; 21];
11) *A* = (0; 3), *B* = [1; 4); 12) *A* = (0; 3), *B* = (–2; 2).

Задание 3. Найдите пересечение множеств A и B.

Образец. $A = [1; 10]$, $B = [3; 12]$.

Сделаем рисунок. Изобразим множества A и B на числовой оси (рис. 4).

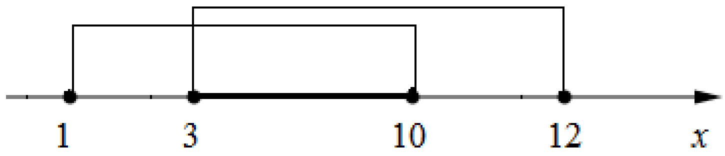


Рис. 4. Пересечение множеств $A = [1; 10]$ *и* $B = [3; 12]$

Запишем пересечение множеств

$$[1;10] \cap [3;12] = [3;10].$$

1) $A = [2; 9]$, $B = (4; 11)$; 2) $A = [0; 5]$, $B = [3; 12)$;
3) $A = [0; 8]$, $B = [1; 19]$; 4) $A = [-1; 5]$, $B = [0; 7]$;
5) $A = [-1; 5]$, $B = (0; 7)$; 6) $A = (3; 6)$, $B = (0; 12)$;
7) $A = [3; 6]$, $B = [4; 18)$; 8) $A = [2; 19]$, $B = (0; 6)$;
9) $A = [1; 3]$, $B = (2; 15)$; 10) $A = (0; 3)$, $B = [2; 21]$;
11) $A = (0; 3)$, $B = [1; 4)$; 12) $A = (0; 3)$, $B = (-2; 2)$.

Задание 4. Выберите правильный вариант ответа.

1. Положительное направление оси обозначают … .
(А) стрелкой; (Б) стрелку; (В) стрелке.

2. Противоположное направление оси считают … .
(А) отрицательное; (Б) отрицательному; (В) отрицательным.

3. Отметим на оси … .
(А) любая точка; (Б) любой точки; (В) любую точку.

4. Обозначим … буквой O.
(А) точке; (Б) точку; (В) точкой.

5. … O соответствует число 0.
(А) Точке; (Б) Точку; (В) Точкой.

6. Отрезок OE называется … .
(А) единичным отрезком;
(Б) единичного отрезка;
(В) единичному отрезку.

7. Отрезок от a до b можно задать … $[a; b]$.
(А) обозначения; (Б) обозначением; (В) обозначению.

8. Отрезок $[a; b]$ можно задать … .
(А) неравенство; (Б) неравенством; (В) неравенству.

9. Отрезок $[a; b]$ можно задать … .
(А) изображение; (Б) изображением; (В) изображению.

10. Отметим на оси справа … точки O любую точку.
(А) в; (Б) до; (В) на; (Г) от.

11. Изобразите … числовой оси полуинтервал $[0; \infty)$.
(А) в; (Б) до; (В) на; (Г) от.

12. Запишите отрезок $[-2; 4]$ … виде неравенства.
(А) в; (Б) до; (В) на; (Г) от.

Тема 10. Преобразование выражений

10.1. Алгебраические выражения

Словарь к теме

алгебраи́ческое выраже́ние величина́ да́нное значе́ние мно́жество значе́ний о́бласть (ж. р.) переме́нная величина́ (переме́нная)	допусти́мые значе́ния переме́нных о́бласть допусти́мых значе́ний смысл вычисля́ть – вы́числить *что?* принима́ть – приня́ть *что?* кро́ме *чего?*

Задание 1. Прочитайте дробь по образцу.

Образец. 1) $\dfrac{5x^2y^3}{x+3}$ – 5*x* в квадрате, *y* в кубе разделить на (*x* + 3);

2) $\dfrac{3}{x^4+3}$ – три разделить на *x* в четвёртой степени плюс три.

1) $\dfrac{2x^3}{x^2+1}$;   2) $\dfrac{5}{xy^2-3}$;   3) $\dfrac{x^4+1}{x^5y^3}$;   4) $\dfrac{3a}{a^2b-5}$;

5) $\dfrac{1}{ab^4+3}$;   6) $\dfrac{2xy}{x^3-2}$;   7) $\dfrac{x^2-1}{x^2+4}$;   8) $\dfrac{9}{b^6-7}$;

9) $\dfrac{1-x^3}{6-x^3}$;   10) $\dfrac{a^2c^2-1}{a^5-2}$;   11) $\dfrac{3-2y^2}{7-y^3}$;   12) $\dfrac{5x}{x-5}$.

Задание 2. Выполните задание по образцу.

Образец. 1. Когда выражение $\dfrac{2x}{16-2\cdot 8}$ имеет смысл?

Решение. Выполним действия в знаменателе дроби. Получим

$$\frac{2x}{16-2\cdot 8}=\frac{2x}{16-16}=\frac{2x}{0}.$$

Выражение **не имеет смысла**, потому что на ноль делить нельзя.

2. Когда выражение $\dfrac{x}{x-2}$ имеет смысл?

Решение. Выражение $\dfrac{x}{x-2}$ имеет смысл, если знаменатель дроби не равен нулю, т. е. $x - 2 \neq 0$. Следовательно, выражение **имеет смысл**, если $x \neq 2$.

1) $\frac{2x}{x+1}$; 2) $\frac{7x+1}{3-9:3}$; 3) $\frac{5}{x-3}$; 4) $\frac{3x}{12-3\cdot 4}$;

5) $\frac{x+1}{x+4}$; 6) $\frac{10}{5x-5x}$; 7) $\frac{3x}{x-5}$; 8) $\frac{1-x}{4+2\cdot(-2)}$;

9) $\frac{5x}{x-9}$; 10) $\frac{11}{3x-3x}$; 11) $\frac{x-1}{x+8}$; 12) $\frac{12x}{9+3\cdot(-3)}$.

Задание 3. Выполните задание по образцу.

Образец. Область допустимых значений выражения $\frac{x}{x-1}$ – это все действительные числа, **кроме** числа один, т. к. дробь имеет смысл, если $x \neq 1$.

1) $\frac{1-x}{4-x}$; 2) $\frac{x-2}{9-x}$; 3) $\frac{1+x}{x-4}$; 4) $\frac{3-x}{5-x}$;

5) $\frac{3}{x+3}$; 6) $\frac{1}{x-12}$; 7) $\frac{x-3}{8+x}$; 8) $\frac{10}{x-10}$;

9) $\frac{x}{x+19}$; 10) $\frac{2x-1}{x-12}$; 11) $\frac{5-x}{7-x}$; 12) $\frac{6x}{x-6}$.

Прочитайте.

Переменная величина (переменная) – это величина, которая может принимать множество значений. Переменные величины обозначают малыми латинскими буквами. Например, a, b, c, … .

Алгебраическое выражение – это выражение, которое содержит числа, переменные, знаки действий и скобки.

Например, $\frac{5a^2b^2}{a-b}$ – это алгебраическое выражение. Оно содержит число 5, переменные a и b, знаки «–», «·» и дробную черту.

Выражение с переменными **имеет смысл** при данных значениях переменных, если при данных значениях переменных *можно* вычислить его значение.

Выражение с переменными **не имеет смысла** при данных значениях переменных, если при данных значениях переменных *нельзя* вычислить его значение.

Допустимые значения переменных – это значения переменных, при которых выражение имеет смысл. Например, выражение $\frac{2}{x-1}$ имеет смысл, если $x-1 \neq 0$, т. е. $x \neq 1$. Следовательно, допустимые значения переменных данного выражения – это все действительные числа, кроме числа один.

Область допустимых значений (ОДЗ) выражения – это множество всех допустимых значений переменных данного выражения.

Ответьте на вопросы.

1. Что такое переменная величина?
2. Что такое алгебраическое выражение?
3. Когда выражение с переменными не имеет смысла?
4. Когда выражение с переменными имеет смысл?
5. Что такое область допустимых значений выражения?

10.2. Формулы сокращённого умножения

Задание 4. Прочитайте формулы сокращённого умножения.

Название формулы	Формула	Чтение формулы
Разность квадратов	$a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b)$	$a^2 - b^2$ равно $a - b$ **умножить на** $a + b$.
Квадрат суммы	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$a + b$ **в квадрате** равно $a^2 + 2ab + b^2$.
Квадрат разности	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$a - b$ **в квадрате** равно $a^2 - 2ab + b^2$.
Разность кубо́в	$a^3 - b^3 = (a-b)\cdot(a^2 + ab + b^2)$	$a^3 - b^3$ равно $a - b$ **умножить на** $a^2 + ab + b^2$.
Сумма кубо́в	$a^3 + b^3 = (a+b)\cdot(a^2 - ab + b^2)$	$a^3 + b^3$ равно $a + b$ **умножить на** $a^2 - ab + b^2$.
Куб суммы	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$a + b$ **в кубе** равно $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
Куб разности	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	$a - b$ **в кубе** равно $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Выражение $a^2 + ab + b^2$ называется **неполным квадратом суммы**.

Выражение $a^2 - ab + b^2$ называется **неполным квадратом разности**.

Задание 5. Прочитайте примеры.

1) $(3+a)^2 = 9 + 6a + a^2$;
2) $(2-x)^3 = 8 - 12x + 6x^2 - x^3$;
3) $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$;
4) $1^3 - y^3 = (1-y)\cdot(1+y+y^2)$;
5) $(2+b)^2 = 4 + 4b + b^2$;
6) $(x+3)^3 = x^3 + 9x^2 + 27x + 27$;
7) $4 - b^2 = (2-b)\cdot(2+b)$;
8) $2^3 + a^3 = (2+a)\cdot(4 - 2a + a^2)$;
9) $a^2 - 9 = (a-3)\cdot(a+3)$;
10) $a^3 - 3^3 = (a-3)\cdot(a^2 + 3a + 9)$;
11) $(4-x)^2 = 16 - 8x + x^2$;
12) $x^3 + 4^3 = (x+4)\cdot(x^2 - 4x + 16)$.

10.3. Преобразование алгебраических выражений

Словарь к теме

вноси́ть – внести́ *что? куда?* возводи́ть – возвести́ *что? во что?* выноси́ть – вы́нести *что? за что?* сокраща́ть – сократи́ть *что? на что?* раскла́дывать – разложи́ть *что? на что?* преобразо́вывать – преобразова́ть *что?*	приводи́ть – привести́ *что? к чему?* раскрыва́ть – раскры́ть *что?* о́бщий мно́житель подо́бные слага́емые

Задание 6. Напишите глаголы, от которых образованы данные существительные.

Образец. Внесе́ние. → Вносить – внести.

1. Возведение. → ………………………………………………………………
2. Вынесение. → ……………………………………………………………..
3. Преобразование. → ………………………………………………………..
4. Приведение. → ………………………………………………………………
5. Разложение. → ……………………………………………………………..
6. Раскрытие. → ………………………………………………………………
7. Сокращение. → ……………………………………………………………

Задание 7. Заполните таблицу.

И. п. ед. ч.	**Р. п. ед. ч.**	**Р. п. мн. ч.**
Выражение		
Дробь		
Множитель		
Слагаемое		
Скобка		
Формула		

Задание 8. Измените конструкцию по образцу.

Образец. Внесите (*что?*) множитель. → Внесе́ние (*чего?*) множител**я**.

1. Вынесите общий множитель за скобки. → ………………………………
2. Преобразуйте выражение. → ……………………………………………..
3. Приведите подобные слагаемые. → …………………………………...
4. Разложите выражение на множители. → …………………………...
5. Раскройте скобки. → ……………………………………………………
6. Сократите дробь. → ……………………………………………………

Задание 9. Составьте словосочетания.

Образец. Внесение, множитель, скобки. → Внесение множител**я в** скобк**и**.

1. Возведение, степень. → ……………………………………………...
2. Вынесение, общий множитель, скобки. → ……………………………
3. Приведение, дроби, общий знаменатель. → ………………………..
4. Приведение, подобные слагаемые. → ………………………………
5. Применение, формула. → ……………………………………………

6. Разложение, множители. → ………………………………………………………
7. Раскрытие, скобки. → ……………………………………………………..
8. Сокращение, дробь. → ……………………………………………………

Задание 10. Прочитайте задания и примеры.

Задание	Пример
Внесите в выражении $5\cdot a\cdot(x+y)$ множитель 5 в скобки.	$5\cdot a\cdot(x+y)=a\cdot(5x+5y)$
Возведите 5 в куб.	$5^3=125$
Вынесите общий множитель за скобки в выражении $10x+5y$.	$10x+5y=5\cdot(2x+y)$
Приведите дроби $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$ к общему знаменателю.	$\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}\rightarrow\frac{3}{6}$ и $\frac{2}{6}$
Приведите подобные слагаемые в выражении $2x+5y-10+7x-5$.	$2x+5y-10+7x-5=9x+5y-15$
Примените формулу «квадрат разности».	$(1-a)^2=1-2a+a^2$
Разложите выражение $9-x^2$ на множители.	$9-x^2=(3-x)\cdot(3+x)$
Раскройте скобки в выражении $5\cdot(x+y)$.	$5\cdot(x+y)=5x+5y$
Сократите дробь $\frac{a^5b^3}{a^2b^2}$.	$\frac{a^5b^3}{a^2b^2}=a^3b$

Задание 11. Назовите преобразование или операцию.

Образец. 1) $10x+5y=5\cdot(2x+y)$ – преобразование: вынесение общего множителя за скобки;

2) $4^2=16$ – операция: возведение в степень.

1) $5^4=625$;

2) $3a\cdot(a^2+b)=3\cdot(a^3+ba)$;

3) $10^3=1000$;

4) $3xy-6x^2y=3xy\cdot(1-2x)$;

5) $\frac{6x^2y^4}{8xy}=\frac{3xy^3}{4}$;

6) $5x^2y+2-yx^2=4x^2y+2$;

7) $(1+x)^2=1+2x+x^2$;

8) $1-y^3=(1-y)\cdot(1+y+y^2)$;

9) $(1-x)\cdot(1+x)=1-x^2$;

10) $3x-5y+2x-3y=5x-8y$;

11) $(a-7b)\cdot 5c=5ac-35bc$;

12) $4x^2-y^2=(2x-y)\cdot(2x+y)$.

Задания

Задание 1. Разложите выражение на множители. Какую формулу применили?

Образец. $1 - x^2 = (1 - x) \cdot (1 + x)$.

Примен**или** формул**у** **«разность квадратов»**.

1) $a^2 - 4$; 2) $9 - 4a^2$; 3) $a^2 + 4a + 4$;

4) $x^3 - 8$; 5) $8x^3 - 27$; 6) $x^2 - 2x + 1$;

7) $y^3 + 8$; 8) $8 + 27y^3$; 9) $y^3 - 6y^2 + 12y - 8$;

10) $y^2 - 25$; 11) $y^3 - 125$; 12) $b^3 + 6b^2 + 12b + 8$.

Задание 2. Сократите дробь. Объясните свои действия.

Образец. $\dfrac{a-2}{a^2-4} = \dfrac{a-2}{(a-2)\cdot(a+2)} = \dfrac{1}{a+2}$. **В знаменателе** дроби примен**или** формулу **«разность квадратов»**, потом сократи**ли** дробь на (a – 2).

1) $\dfrac{y+1}{y^3+1}$; 2) $\dfrac{3-2a}{9-4a^2}$; 3) $\dfrac{x-1}{x^2-2x+1}$;

4) $\dfrac{x^3+8}{x+2}$; 5) $\dfrac{125-y^3}{y-5}$; 6) $\dfrac{a^2+4a+4}{a+2}$;

7) $\dfrac{a^3-8}{a-2}$; 8) $\dfrac{8+27y^3}{3y+2}$; 9) $\dfrac{b-1}{b^3-3b^2+3b-1}$;

10) $\dfrac{x-4}{x^2-16}$; 11) $\dfrac{8x^3-27}{4x^2+6x+9}$; 12) $\dfrac{y^3-6y^2+12y-8}{y-2}$.

Задание 3. Установите соответствия.

1. Внести	**а)** дроби к общему знаменателю
2. Возвести	**б)** дробь
3. Привести	**в)** за скобки
4. Разложить	**г)** скобки
5. Раскрыть	**д)** в степень
6. Сократить	**е)** на множители
7. Вынести	**ж)** в скобки

Задание 4. Выберите правильный вариант ответа.

1. Выражение $\frac{2}{x-1}$ … смысл при любых значениях x, кроме $x = 1$.

(А) вычисляет; (Б) имеет; (В) содержит.

2. При данных значениях переменных можно … значение выражения.

(А) вычислить; (Б) иметь; (В) содержать.

3. … допустимых значений выражения – это множество всех допустимых значений переменных данного выражения.

(А) Величина; (Б) Область; (В) Переменная.

4. … обозначают малыми латинскими буквами: a, b, c и т. д.

(А) Величины; (Б) Области; (В) Переменные.

5. … величина – это величина, которая может принимать множество значений.

(А) Алгебраическая; (Б) Допустимая; (В) Переменная.

6. … значения переменных – это значения переменных, при которых выражение имеет смысл.

(А) Алгебраические; (Б) Допустимые; (В) Переменные.

7. … выражение – это выражение, которое содержит числа, переменные, знаки действий и скобки.

(А) Алгебраическое; (Б) Допустимое; (В) Переменное.

8. … 5 в куб.

(А) Вынесите; (Б) Разложите; (В) Возведите.

9. … множитель за скобки.

(А) Вынесите; (Б) Раскройте; (В) Приведите.

10. … подобные слагаемые в выражении $3x^2 + 5y - 7x^2 + 6y - 10$.

(А) Приведите; (Б) Раскройте; (В) Возведите.

11. … дроби к наименьшему общему знаменателю.

(А) Приведите; (Б) Раскройте; (В) Возведите.

12. … выражение $9 - x^2$ на множители.

(А) Извлеките; (Б) Разложите; (В) Раскройте.

13. … скобки в выражении $5 \cdot (x + y)$.

(А) Сократите; (Б) Вынесите; (В) Раскройте.

14. … множитель в скобки.

(А) Сократите; (Б) Внесите; (В) Извлеките.

15. … дробь.

(А) Сократите; (Б) Внесите; (В) Извлеките.

Тема 11. Преобразование иррациональных выражений

Словарь к теме

иррациона́льность (ж. р)
иррациона́льное выраже́ние
сопряжённое выраже́ние
ко́рень (радика́л)
вноси́ть – внести́ *что? под что?*
выноси́ть – вы́нести *что? из-под чего?*
освобожда́ть – освободи́ть *что? от чего?*
упроща́ть – упрости́ть *что?*
т. к. (так как)

Задание 1. Прочитайте корни.

Образец. 1) $\sqrt{2}$ – корень квадратный **из** дв**ух**;

2) $\sqrt[4]{y}$ – корень четвёртой степени **из** *y*;

3) $\sqrt[3]{x+1}$ – корень кубический **из** (*x* + 1).

1) $\sqrt{3}$; 2) $\sqrt[3]{22}$; 3) $\sqrt{y-3}$; 4) $\sqrt[5]{x+2y}$;
5) $\sqrt{4}$; 6) $\sqrt[3]{32}$; 7) $\sqrt[3]{2-3x}$; 8) $\sqrt[6]{3x+2}$;
9) $\sqrt{5}$; 10) $\sqrt[3]{21}$; 11) $\sqrt[4]{x+5}$; 12) $\sqrt[7]{x-16}$.

Задание 2. Прочитайте дроби.

Образец. 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ – корень квадратный из двух на два;

2) $\frac{1}{\sqrt[5]{2}}$ – один разделить на корень пятой степени из двух;

3) $\frac{1}{3-\sqrt{x}}$ – один разделить на три минус корень квадратный из *x*.

1) $\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}$; 3) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$; 4) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}-4}$;
5) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 6) $\frac{1}{\sqrt{2x+1}-3}$; 7) $\frac{\sqrt[3]{3}}{3}$; 8) $\frac{1}{\sqrt[3]{x+2}-2}$;
9) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 10) $\frac{1}{\sqrt{3-x}+x}$; 11) $\frac{\sqrt{7}}{5}$; 12) $\frac{1}{\sqrt[3]{5-x}+1}$.

Задание 3. Выполните задание по образцу.

Образец. $\sqrt{x-2}+1$ – это **иррациональное выражение**, потому что оно содержит корень (радикал).

1) $\sqrt[4]{x}-3$; 2) $2+\sqrt[3]{x}$; 3) $\sqrt{1-x}+5$;
4) $\sqrt[5]{a}-6$; 5) $\sqrt[7]{a}+2$; 6) $\sqrt{x-3}-3$;
7) $\sqrt[6]{x}-9$; 8) $\sqrt[3]{y+1}-1$; 9) $\sqrt[3]{b+8}-2$;
10) $\sqrt{a}-9$; 11) $\sqrt{x+1}-1$; 12) $\sqrt[4]{z+1}-1$.

Задание 4. А. Прочитайте формулы.

1) $(\sqrt{a}-\sqrt{b})\cdot(\sqrt{a}+\sqrt{b})=a-b$ – разность квадратов;
2) $(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})\cdot(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})=a+b$ – сумма кубов;
3) $(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})\cdot(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})=a-b$ – разность кубов.

Б. Выполните задание по образцу.

Образец. 1. Умножим $\sqrt{3}+\sqrt{x}$ на $\sqrt{3}-\sqrt{x}$ и применим формулу «разность квадратов»

$$(\sqrt{3}+\sqrt{x})\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{x})=3-x.$$

Выражения $\sqrt{3}+\sqrt{x}$ **и** $\sqrt{3}-\sqrt{x}$ – это **сопряжённые выражения**.

2. Умножим $\sqrt[3]{y}-1$ на $\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{y}+1$ и применим формулу «разность кубов»

$$(\sqrt[3]{y}-1)\cdot(\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{y}+1)=y-1.$$

1) $\sqrt{x}-4$; 2) $\sqrt[3]{a}-5$; 3) $\sqrt{y}+\sqrt{5}$;
4) $\sqrt[3]{x}-3$; 5) $\sqrt[3]{c}+2$; 6) $\sqrt{y+2}-1$;
7) $\sqrt[3]{b}-2$; 8) $\sqrt[3]{y}+3$; 9) $\sqrt{x-2}+2$;
10) $\sqrt{x}-1$; 11) $\sqrt[3]{a}+1$; 12) $\sqrt{x+1}-3$.

Задание 5. А. Напишите глаголы, от которых образованы данные существительные.

1. Извлечение. → …………………………………………………………….
2. Освобождение. → ………………………………………………………

Б. Составьте словосочетания.

1. Внесение, множитель, под, знак, корень. → ………………………………..
2. Вынесение, множитель, из-под, знак, корень. → …………………………..
3. Извлечение, корень. → …………………………………………………
4. Освобождение, знаменатель, дробь, от, иррациональность. → …………...
……………………………………………………………………………….

Прочитайте.

Выражение, которое содержит корень (радикал), называется **иррациональным выражением**.

Освободить знаменатель дроби от иррациональности – значит преобразовать дробь так, чтобы знаменатель дроби не содержал радикалов.

Чтобы освободить знаменатель дроби от иррациональности, надо использовать формулы сокращённого умножения:

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})\cdot(\sqrt{a}+\sqrt{b})=a-b;$$

$$(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})\cdot(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})=a-b;$$

$$(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})\cdot(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})=a+b.$$

Выражения $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ и $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ называют **сопряжёнными выражениями**.

Пример 1. Освободите знаменатель дроби $\frac{1}{\sqrt{2}}$ от иррациональности.

Решение. Умножим числитель и знаменатель дроби на $\sqrt{2}$. Получим

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Пример 2. Освободите знаменатель дроби $\frac{1}{\sqrt{x}-1}$ от иррациональности.

Решение. Умножим числитель и знаменатель дроби на выражение $\sqrt{x}+1$, потом в знаменателе дроби применим формулу «разность квадратов»

$$\frac{1}{\sqrt{x}-1}=\frac{1\cdot(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)\cdot(\sqrt{x}+1)}=\frac{\sqrt{x}+1}{x-1}.$$

Пример 3. Освободите знаменатель дроби $\frac{1}{\sqrt[3]{x}-2}$ от иррациональности.

Решение. Умножим числитель и знаменатель дроби на неполный квадрат суммы $(\sqrt[3]{x})^2+2\sqrt[3]{x}+4$, потом в знаменателе дроби применим формулу «разность кубов»

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}-2}=\frac{1\cdot(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{(\sqrt[3]{x}-2)\cdot(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}=\frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{x-8}.$$

Ответьте на вопросы.

1. Какое выражение называется иррациональным?
2. Что значит освободить знаменатель дроби от иррациональности?
3. Какие формулы надо использовать, чтобы освободить знаменатель дроби от иррациональности?
4. Как называют выражения $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ и $\sqrt{a}-\sqrt{b}$?
5. На какое число умножили числитель и знаменатель дроби $\frac{1}{\sqrt{2}}$?

Задание 6. Прочитайте задания и примеры.

Задание	Пример
Внесите множитель *a* **под знак** корня.	$a\cdot\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{a^3}\cdot\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{a^3b}$
Вынесите множитель **из-под знака** корня.	$\sqrt[3]{125b^7}=\sqrt[3]{(5b^2)^3b}=5b^2\cdot\sqrt[3]{b}$
Извлеките корень квадратный из 625.	$\sqrt{625}=25$
Освободите знаменатель дроби от иррациональности.	$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$
Сократите дробь $\frac{\sqrt{15}}{15-\sqrt{15}}$.	$\frac{\sqrt{15}}{15-\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{15}\cdot(\sqrt{15}-1)}=\frac{1}{\sqrt{15}-1}$

Задание 7. Назовите преобразование или операцию.

Образец. 1) $a\cdot\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{a^3b}$ – преобразование: внесение множителя под знак корня;

2) $\sqrt[3]{125}=5$ – операция: извлечение корня.

1) $x\sqrt{x+1}=\sqrt{x^3+x^2}$; 2) $3b\cdot\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{27b^4}$; 3) $\sqrt[4]{625}=5$;

4) $\sqrt{x^4y^5}=x^2y^2\cdot\sqrt{y}$; 5) $2a\cdot\sqrt[4]{b}=\sqrt[4]{16a^4b}$; 6) $\sqrt[4]{256}=4$;

7) $\sqrt{25a^2b^3}=5ab\cdot\sqrt{b}$; 8) $\sqrt{4a^4b}=2a^2\cdot\sqrt{b}$; 9) $\sqrt{121}=11$;

10) $\frac{4}{4+2\sqrt{x}}=\frac{2}{2+\sqrt{x}}$; 11) $\frac{1}{\sqrt{a}+2}=\frac{\sqrt{a}-2}{a-4}$; 12) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Задания

Задание 1. Вынесите множитель из-под знака корня.

Образец. $\sqrt[6]{ax^6}=\sqrt[6]{a}\cdot\sqrt[6]{x^6}=x\cdot\sqrt[6]{a}$.

1) $\sqrt[5]{y^9}$; 2) $\sqrt{a^5b}$; 3) $\sqrt[3]{x^8z^4}$; 4) $\sqrt[7]{z^{12}}$;

5) $\sqrt[4]{x^5}$; 6) $\sqrt[3]{a^4b^7}$; 7) $\sqrt[4]{y^7x^4}$; 8) $\sqrt[5]{xz^9}$;

9) $\sqrt{a^9}$; 10) $\sqrt[3]{x^3y^5}$; 11) $\sqrt[5]{x^8y^6}$; 12) $\sqrt[8]{a^2b^8}$.

Задание 2. Внесите множитель под знак корня.

Образец. 1) $x\cdot\sqrt[6]{a}=\sqrt[6]{x^6}\cdot\sqrt[6]{a}=\sqrt[6]{ax^6}$;

2) $2\cdot\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{8a}$.

1) $x\cdot\sqrt[5]{y^2}$; 2) $a\cdot\sqrt[3]{b^2}$; 3) $5\cdot\sqrt{c}$; 4) $b^3\cdot\sqrt{a}$;

5) $y\cdot\sqrt{x}$; 6) $2a\cdot\sqrt[4]{a^3}$; 7) $x^2\cdot\sqrt[3]{x^2}$; 8) $4\cdot\sqrt[3]{b^2}$;

9) $2\cdot\sqrt[3]{y^2}$; 10) $3\cdot\sqrt[3]{c^2}$; 11) $y^2\cdot\sqrt[5]{y^2}$; 12) $c\cdot\sqrt[5]{y^4}$.

Задание 3. Освободите знаменатель дроби от иррациональности.

Образец. Умнож**им** числитель и знаменатель дроби на $\sqrt{2}$

$$\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

1) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 2) $\frac{a}{\sqrt{11}}$; 3) $\frac{1}{\sqrt{7}}$; 4) $\frac{2}{3\sqrt{3}}$;

5) $\frac{12}{\sqrt{6}}$; 6) $\frac{18}{\sqrt{6}}$; 7) $\frac{30}{\sqrt{15}}$; 8) $\frac{24}{5\sqrt{3}}$;

9) $\frac{5}{\sqrt{10}}$; 10) $\frac{4}{\sqrt{2}}$; 11) $\frac{1}{\sqrt{5}}$; 12) $\frac{13}{\sqrt{26}}$.

Задание 4. Освободите знаменатель дроби от иррациональности.

Образец. Умнож**им** числитель и знаменатель дроби на выражение $(\sqrt{2}-1)$, потом в знаменателе дроби примен**им** формулу «разность квадратов»

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\frac{1\cdot(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)\cdot(\sqrt{2}-1)}=\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}=\sqrt{2}-1.$$

1) $\frac{1}{2-\sqrt{6}}$; 2) $\frac{13}{\sqrt{2}-1}$; 3) $\frac{2}{\sqrt{3}-1}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{5}-2}$;

5) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; 6) $\frac{2}{\sqrt{6}-1}$; 7) $\frac{2}{\sqrt{x}-1}$; 8) $\frac{3}{5\sqrt{3}-1}$;

9) $\frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$; 10) $\frac{19}{2\sqrt{5}-1}$; 11) $\frac{5}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$; 12) $\frac{4}{\sqrt{2}-\sqrt{y}}$.

Задание 5. Выполните задание по образцу.

Образец. Сократите дробь $\frac{a^2-7}{a+\sqrt{7}}$. Объясните решение.

Решение. $\frac{a^2-7}{a+\sqrt{7}}=\frac{(a-\sqrt{7})\cdot(a+\sqrt{7})}{a+\sqrt{7}}=a-\sqrt{7}$. Сначала разлож**или** числитель дроби на множители по формуле «разность квадратов», потом сократ**или** дробь на выражение $(a+\sqrt{7})$.

1) $\frac{3-b^2}{\sqrt{3}-b}$; 2) $\frac{x-25}{\sqrt{x}-5}$; 3) $\frac{y-1}{\sqrt{y}-1}$; 4) $\frac{\sqrt{x}+1}{x-1}$;

5) $\frac{16-y}{\sqrt{y}-4}$; 6) $\frac{\sqrt{a}+5}{a-25}$; 7) $\frac{c-9}{\sqrt{c}-3}$; 8) $\frac{\sqrt{a}+2}{a-4}$;

9) $\frac{x-10}{\sqrt{x}-\sqrt{10}}$; 10) $\frac{\sqrt{c}+\sqrt{5}}{5-c}$; 11) $\frac{a-3}{\sqrt{a}+\sqrt{3}}$; 12) $\frac{a-\sqrt{2}}{a^2-2}$.

Задание 6. Выберите правильный вариант ответа.

1. Иррациональное выражение – это выражение, которое … корень.

(А) использует; (Б) применяет;
(В) преобразует; (Г) содержит.

2. Выражения $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ и $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ … сопряжёнными выражениями.

(А) возводят; (Б) освобождают;
(В) называют; (Г) применяют.

3. Иррациональное выражение можно … с помощью свойств арифметических корней и формул сокращённого умножения.

(А) возвести; (Б) освободить;
(В) преобразовать; (Г) применить.

4. … знаменатель дроби от иррациональности.

(А) Возведём; (Б) Освободим;
(В) Назовём; (Г) Применим.

5. Выражение, которое содержит знак корня, называется … выражением.

(А) арифметическим; (Б) сокращённым;
(В) иррациональным; (Г) сопряжённым.

6. Выражения $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ и $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ называют … выражениями.

(А) арифметическими; (Б) сокращёнными;
(В) иррациональными; (Г) сопряжёнными.

7. Используем формулы … умножения.

(А) арифметического; (Б) сокращённого;
(В) иррационального; (Г) сопряжённого.

8. Применим свойства … корней.

(А) арифметических; (Б) сокращённых;
(В) иррациональных; (Г) сопряжённых.

9. Воспользуемся … корней $\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$.

(А) радикалом; (Б) случаем;
(В) свойством; (Г) формулой.

10. Освободить знаменатель дроби от иррациональности – значит преобразовать дробь так, чтобы знаменатель дроби не содержал … .

(А) радикалов; (Б) случаев;
(В) свойств; (Г) формул.

11. Освободим знаменатель дроби … иррациональности.

(А) в; (Б) не;
(В) на; (Г) от.

12. … знаменателе дроби применим формулу «разность квадратов».

(А) В; (Б) Не;
(В) На; (Г) От.

13. Произведение выражений $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ и $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ … содержит корней.

(А) в; (Б) не;
(В) на; (Г) от.

Тема 12. Многочлены

12.1. Основные понятия

Словарь к теме

алгебраи́ческая дробь одночле́н двучле́н трёхчле́н квадра́тный трёхчле́н многочле́н степень многочле́на	член многочле́на коэффицие́нт *при чём?* алгебраи́ческая су́мма деле́ние сто́лбиком почле́нное деле́ние выделя́ть – вы́делить *что?* наибо́льший

Задание 1. Выполните задание по образцу.

Образец. 1) $5x^3$ – это **одночлен**; 3 – это степень одночлена, 5 – это коэффициент одночлена;

2) $7x^2$ – это **одночлен**; 2 – это степень одночлена, 7 – это коэффициент одночлена.

1) $7x^3$; 2) $6x^4$; 3) x^2; 4) $10x^5$; 5) $4x^6$; 6) $12x^3$;
7) $2x^7$; 8) $3x^8$; 9) x^3; 10) $2x^{19}$; 11) $7x^9$; 12) $4x^{10}$.

Задание 2. Выполните задание по образцу.

Образец. 1) $7x^2-3x$ – это **двучлен**; 2 – это степень двучлена, 7 – это коэффициент **при** x^2, (–3) – это коэффициент при x **в первой** степен**и**;

2) $7x^3+2$ – это **двучлен**; 3 – это степень двучлена, 7 – это коэффициент **при** x^3, 2 – это коэффициент **при** x **в нулевой** степен**и**.

1) $2x^3+3x^4$; 2) $x^{19}-x^5$; 3) $6x^4-2x$; 4) $10x^5+9$;
5) $4x^6-5x^7$; 6) x^2+2x; 7) $2x^7-x^{10}$; 8) $7x^8-12$;
9) $2x^2-3x^3$; 10) x^3+7x; 11) $7x^9-x^{11}$; 12) $4x^{10}+1$.

Задание 3. Выполните задание по образцу.

Образец. 1) $7x^3-3x^2+1$ – это **трёхчлен**; 3 – это степень трёхчлена;

2) $7x^3-3x^2+x-5$ – это **многочлен**; 3 – это степень многочлена.

1) $2x+3x^4+1$; 2) $3x^3-2x^5-x+1$; 3) $x^9+2x^2+3x^3-12$;
4) $6x^3+9x-7$; 5) $4x^2-x^3-5x-9$; 6) $4x^2+7x+5x^7-13$;
7) $2x^8-3x+19$; 8) $7x^2-19x+x^4-1$; 9) $x^5-2x-x^2-x^3+1$;
10) $x^5+6x-20$; 11) $3-x+7x^2-8x^3$; 12) $x^2+12x^{12}-x^3+5x$.

Задание 4. Выполните задание по образцу.

Образец. $7x^2-3x+1$ – это **квадратный трёхчлен**; 2 – это степень квадратного трёхчлена, 7 – это коэффициент **при** x^2, 1 – это свободный член квадратного трёхчлена.

1) $x^2+5x-20$; 2) $6x^2-x-1$; 3) $x^2+2x+19$;
4) $12-2x-x^2$; 5) $4x^2-x-5$; 6) $6x^2+7x+5$;
7) $2x^2+3x+1$; 8) $3-5x+7x^2$; 9) $10x^2+9x+1$;
10) x^2-3x-6; 11) $7x^2-2x+3$; 12) $5x^2+x-12$.

Прочитайте.

Одночленом называется произведение числа и одной или нескольких переменных в степени n, где $n = 0$ или $n \in N$.

Например, $7x^2$ – это одночлен второй степени, число 7 – **коэффициент одночлена**. Выражение $4x^2y^3$ – это одночлен пятой степени, число 4 – это коэффициент одночлена. Число 7 – это одночлен **нулевой степени**, потому что $7=7x^0$.

Многочленом называется алгебраическая сумма одночленов. Одночлены, из которых состоит многочлен, называют **членами многочлена**.

Степенью многочлена называют **наибольшую степень** одночлена, который входит в многочлен.

Например, выражение $7x^3-3x^2+x+5$ состоит из одночленов $7x^3$, $(-3x^2)$, x и 5. Выражение $7x^3-3x^2+x+5$ – это многочлен третьей степени.

Многочлен, который состоит из двух членов, называется **двучленом**. Многочлен, который состоит из трёх членов, называется **трёхчленом**.

Многочлены можно складывать, вычитать, умножать, делить и возводить в целую степень.

Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Что называется одночленом?
2. Приведите пример одночлена.
3. Что называется многочленом?
4. Приведите пример многочлена.
5. Что такое двучлен?
6. Приведите пример двучлена.
7. Что такое трёхчлен?
8. Приведите пример трёхчлена.
9. Что называют степенью многочлена?
10. Назовите степень многочлена $7x^3-3x^2+x+5$.
11. Сколько членов содержит многочлен $7x^3-3x^2+x+5$?
12. Назовите одночлены многочлена $7x^3-3x^2+x+5$.
13. Какие действия можно выполнять с многочленами?

12.2. Действия с многочленами

Задание 5. Найдите сумму и разность многочленов.

Образец. 1. Найдите сумму двух многочленов: $7x^3 + x$ и $2x - x^3 + 5$.

Решение. Раскроем скобки и приведём подобные слагаемые. Получим

$$(7x^3 + x) + (2x - x^3 + 5) = 7x^3 + x + 2x - x^3 + 5 = 6x^3 + 3x + 5.$$

2. Найдите разность двух многочленов: $7x^3 + x$ и $2x - x^3 + 5$.

Решение. Раскроем скобки и приведём подобные слагаемые. Получим

$$(7x^3 + x) - (2x - x^3 + 5) = 7x^3 + x - 2x + x^3 - 5 = 8x^3 - x - 5.$$

1) $4x - x^4$ и $x - x^4 - 13$;
2) $3x^2 + 2x$ и $8 - 4x + x^2$;
3) $3x + x^3$ и $8x - 5x^3 - 8$;
4) $3x^2 - 2$ и $2x^2 + 12 + x$;
5) $2x^3 - x$ и $2x - x^3 - 10$;
6) $5x^2 + 3x$ и $6x - 3x^2 + 1$;
7) $5x^4 - x^2$ и $2x^2 - x^4 + 7$;
8) $4x^5 + x + 5$ и $x - x^5 + 2$;
9) $x^3 + 4x^4$ и $4x^3 - x^4 - 9$;
10) $2 - x^6 + 4x$ и $3x^6 + 11x$;
11) $2 - 7x^3$ и $9x + 4x^3 - 7$;
12) $x - x^2 + 1$ и $7x^2 - 12x + 1$.

Задание 6. Найдите произведение одночлена и многочлена.

Образец. Найдите произведение одночлена $7x^3$ и многочлена $2x - x^3 - 10$.

Решение. Умножим одночлен на каждый член многочлена. Получим

$$7x^3 \cdot (2x - x^3 - 10) = 14x^4 - 7x^6 - 70x^3.$$

1) $5x^2 \cdot (3x + x^4 - 12)$;
2) $-x^5 \cdot (2 + x^2 - 10x)$;
3) $3x^3 \cdot (-x + 5x^3 - 1)$;
4) $9x \cdot (x^2 + 2x - 3x^6)$;
5) $2x \cdot (19x^2 - x^5 + 19)$;
6) $8x^2 \cdot (2x^3 - 3 + 10x)$;
7) $6x^4 \cdot (4x + 3x^2 + 20)$;
8) $-x^3 \cdot (10x - x^4 + 15)$;
9) $7x^4 \cdot (5 - 6x + 13x^3)$;
10) $-2x^2 \cdot (x - x^6 - x^3)$;
11) $x \cdot (-2x^3 + 5x^7 - 9)$;
12) $4x^7 \cdot (-2x + x^2 - 7)$.

Задание 7. Разделите многочлен на одночлен.

Образец. Разделите многочлен $2x^3 + 5x^2 - 1$ на одночлен x^3.

Решение. Выполним **почле́нное деление** многочлена на одночлен и сократим дроби

$$\frac{2x^3 + 5x^2 - 1}{x^3} = \frac{2x^3}{x^3} + \frac{5x^2}{x^3} - \frac{1}{x^3} = 2 + \frac{5}{x} - \frac{1}{x^3}.$$

1) $\frac{x^4 - 6x^2 + 1}{2x^3}$;
2) $\frac{2x^2 - x + 3}{3x^2}$;
3) $\frac{4x^5y + y^3x}{x^2y}$;
4) $\frac{a^2b - 2b^2a + 1}{3ab}$;
5) $\frac{3x^5 - 6x^2 - 1}{x^3}$;
6) $\frac{6x^2 + 2x - 3}{3x}$;
7) $\frac{5x^2y^2 + xy^3}{5xy}$;
8) $\frac{7a^3 + 2ab + b^3}{ab}$;
9) $\frac{3x^4 - x^5 + x}{3x^2}$;
10) $\frac{9x^2 - x + 7}{6x}$;
11) $\frac{xy^3 - 4x^2y^2}{2yx}$;
12) $\frac{a^3 - 3a^2b^2 - b}{a^2b}$.

12.3. Алгебраическая дробь

Задание 8. Выполните задание по образцу.

Образец. $\frac{5x^2}{x^3+1}$ – это **алгебраическая дробь**, потому что числитель и знаменатель дроби – это многочлены.

1) $\frac{3x}{x^2+1}$; 2) $\frac{x^4}{x^5-1}$; 3) $\frac{5-x^2}{3-x^3}$; 4) $\frac{2+x^2}{x^4+5}$;

5) $\frac{4x}{x-3}$; 6) $\frac{7x^5}{x^4-2}$; 7) $\frac{1-x}{4-x^3}$; 8) $\frac{7x^6}{x^2+6}$;

9) $\frac{2x^3}{x^3-1}$; 10) $\frac{x-1}{x^7+3}$; 11) $\frac{x^7}{x^8+5}$; 12) $\frac{2-x}{6-x^8}$.

Задание 9. Выполните задание по образцу.

Образец. 1) $\frac{x}{x^2+1}$ – это правильная алгебраическая дробь, потому что степень многочлена в числителе меньше, чем степень многочлена в знаменателе;

2) $\frac{x^2}{x^2+1}$ – это неправильная алгебраическая дробь, потому что в числителе и в знаменателе дроби многочлены имеют **одинаковую** степень;

3) $\frac{x^3}{x^2+1}$ – это неправильная алгебраическая дробь, потому что степень многочлена в числителе больше, чем степень многочлена в знаменателе.

1) $\frac{x+5}{x^3+x-1}$; 2) $\frac{1-x^4}{x^2-3}$; 3) $\frac{x^2-3x+1}{x+1}$; 4) $\frac{x^3+2x-1}{x^3+1}$;

5) $\frac{x^3+3x}{x^4+x^2-2}$; 6) $\frac{5}{x^2+x}$; 7) $\frac{x^2+5x+1}{2x-1}$; 8) $\frac{x^4}{x^4+x^2-2}$;

9) $\frac{3-2x^5}{x^4+2x^3-3}$; 10) $\frac{2x^2}{x^5-5}$; 11) $\frac{1-x^3-2x}{2-x^3}$; 12) $\frac{x^2+2x-3}{1-3x+x^2}$.

Задание 10. Выполните задание по образцу.

Образец. 1. $\frac{x^2}{x^2+1}=\frac{(x^2+1)-1}{x^2+1}=\frac{x^2+1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}=1-\frac{1}{x^2+1}$;

1 – это целая часть дроби, $\frac{-1}{x^2+1}$ – это дробная часть дроби.

2. $\frac{x^2}{x+1}=\frac{(x^2-1)+1}{x+1}=\frac{x^2-1}{x+1}+\frac{1}{x+1}=\frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x+1}+\frac{1}{x+1}=x-1+\frac{1}{x+1}$.

$(x-1)$ – это целая часть дроби, $\frac{1}{x+1}$ – это дробная часть дроби.

1) $\frac{5x}{x+1}$; 2) $\frac{x^2}{x+3}$; 3) $\frac{x^3}{x^3+1}$; 4) $\frac{x^3}{x+1}$;

5) $\frac{2x^2}{x^2-2}$; 6) $\frac{x^2}{x+2}$; 7) $\frac{x^4}{x^4+2}$; 8) $\frac{x^4}{x^2+1}$;

9) $\frac{x^2}{x^2-3}$; 10) $\frac{x^3}{x^3-8}$; 11) $\frac{3x}{x+4}$; 12) $\frac{x^2}{x+4}$.

Прочитайте.

Запись читают:

$P(x)$ – пэ **от** икс.

Алгебраической дробью называется выражение вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – это одночлены или многочлены, $Q(x) \neq 0$.

Например, выражение $\frac{5x^2}{x^3+1}$ – это алгебраическая дробь.

Алгебраическая дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ называется **правильной**, если степень многочлена $P(x)$ меньше, чем степень многочлена $Q(x)$. Алгебраическая дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ называется **неправильной**, если степень многочлена $P(x)$ больше или равна степени многочлена $Q(x)$.

Например, $\frac{x}{x^2+1}$ – это правильная алгебраическая дробь, $\frac{x^3}{x^2+1}$ – это неправильная алгебраическая дробь.

Неправильную дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ можно записать в виде $\frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$. Многочлен $T(x)$ – это целая часть дроби, правильная алгебраическая дробь $\frac{R(x)}{Q(x)}$ – это дробная часть дроби.

Например, дробь $\frac{x^2}{x+1}$ можно записать в виде суммы многочлена и правильной алгебраической дроби

$$\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}.$$

Чтобы записать неправильную алгебраическую дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ в виде суммы $T(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$, надо многочлен $P(x)$ разделить на многочлен $Q(x)$.

Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Какая дробь называется алгебраической?
2. Какая алгебраическая дробь называется правильной?
3. Приведите пример правильной алгебраической дроби.
4. Какая алгебраическая дробь называется неправильной?
5. Приведите пример неправильной алгебраической дроби.
6. В каком виде можно записать неправильную алгебраическую дробь?
7. Что надо сделать, чтобы записать алгебраическую дробь в виде суммы многочлена и правильной алгебраической дроби?

Задания

Задание 1. Возведите алгебраическую дробь в степень.

Образец. 1) $\left(\dfrac{2xy^2}{x-y}\right)^2=\dfrac{2^2x^2y^4}{(x-y)^2}=\dfrac{4x^2y^4}{x^2-2xy+y^2}$;

2) $\left(\dfrac{2xy^2}{x-y}\right)^{-2}=\left(\dfrac{x-y}{2xy^2}\right)^2=\dfrac{x^2-2xy+y^2}{4x^2y^4}$.

1) $\left(\dfrac{3a^2}{b}\right)^3$; 2) $\left(\dfrac{2a^2b}{a+b}\right)^2$; 3) $\left(\dfrac{4x^2}{x-y}\right)^3$; 4) $\left(\dfrac{2xy^2}{x+y}\right)^3$;

5) $\left(\dfrac{3a}{2b^3}\right)^{-3}$; 6) $\left(\dfrac{2xy^3}{x+y}\right)^{-2}$; 7) $\left(\dfrac{2a^2b}{a+b}\right)^{-2}$; 8) $\left(\dfrac{2+y^2}{3y}\right)^2$;

9) $\left(\dfrac{x^2y}{x-y}\right)^3$; 10) $\left(\dfrac{2-x}{x+y}\right)^{-2}$; 11) $\left(\dfrac{3x^2y}{x+y}\right)^{-2}$; 12) $\left(\dfrac{7x^2y}{x+y}\right)^{-2}$.

Задание 2. Выполните задание по образцу.

Образец. Выделите целую часть дроби $\dfrac{x^2-3}{x+2}$.

Решение. Выполним деление столбиком.

$$\begin{array}{r|l} -\,x^2-3 & x+2 \\ \underline{x^2+2x} & \overline{x-2} \text{ (частное – целая часть)} \\ -\,-2x-3 & \\ \underline{-2x-4} & \\ 1 & \text{(остаток – числитель дробной части)} \end{array}$$

Получим $\dfrac{x^2-3}{x+2}=x-2+\dfrac{1}{x+2}$. Многочлен $(x-2)$ – это целая часть дроби.

1) $\dfrac{x^3+1}{x^2-x}$; 2) $\dfrac{3x^3+1}{x^2-1}$; 3) $\dfrac{3x^2+5}{x^2+1}$; 4) $\dfrac{x^4-5x+1}{x-2}$;

5) $\dfrac{3x^3-2}{x^3-3x}$; 6) $\dfrac{x^4-x^3}{x^2-2}$; 7) $\dfrac{x^3-3x^2}{x^3-4}$; 8) $\dfrac{x^2-4x+4}{x+1}$;

9) $\dfrac{x^2-3x}{x-3}$; 10) $\dfrac{x^2-3}{x-2}$; 11) $\dfrac{2x^3-3x}{x^2+1}$; 12) $\dfrac{x^3+2x-1}{x+2}$.

Задание 3. Разделите многочлен на многочлен с помощью формул сокращённого умножения.

Образец. Разделите многочлен $(9x^2-4)$ на многочлен $(3x+2)$.

Решение. Применим формулу «разность квадратов»

$$9x^2-4=(3x)^2-2^2=(3x-2)\cdot(3x+2).$$

Выполним операцию деления. Получим

$$(9x^2-4):(3x+2)=(3x-2)\cdot(3x+2):(3x+2)=3x-2.$$

1) $(x^2-16):(x-4)$; 2) $(x^3-8):(x-2)$; 3) $(x^2+2x+1):(x+1)$;

4) $(x^2-25):(x+5)$; 5) $(x^3-27):(x-3)$; 6) $(8x^3+27):(2x+3)$;

7) $(8x^3-1):(2x-1)$; 8) $(x^3+64):(x+4)$; 9) $(x^3-8):(x^2+2x+4)$;

10) $(x^2-9):(x+3)$; 11) $(4x^2-1):(2x+1)$; 12) $(x^3+27):(x^2-3x+9)$.

Задание 4. Выберите правильный вариант ответа.

1. Выражение вида $5x^3$– это … .

(А) одночлен; (Б) двучлен; (В) трёхчлен; (Г) многочлен.

2. Число 3 – это … двучлена $7x^3+2$.

(А) член; (Б) многочлен; (В) степень; (Г) коэффициент.

3. Число 7 – это … одночлена $7x^2$.

(А) член; (Б) многочлен; (В) степень; (Г) коэффициент.

4. В многочлене $7x^4-3x$ число 7 – это коэффициент при x в … степени.

(А) нулевой; (Б) одинаковой; (В) первой; (Г) четвёртой.

5. В многочлене $7x^3+2$ число 2 – это коэффициент при x в … степени.

(А) нулевой; (Б) одинаковой; (В) первой; (Г) четвёртой.

6. Это неправильная алгебраическая дробь, потому что в числителе и в знаменателе дроби многочлены имеют … степень.

(А) нулевую; (Б) одинаковую; (В) первую; (Г) четвёртую.

7. Выражение вида $7x^2-3x+1$ – это … трёхчлен.

(А) алгебраический; (Б) квадратный;

(В) неправильный; (Г) правильный.

8. Многочленом называется … сумма одночленов.

(А) алгебраическая; (Б) квадратная;

(В) неправильная; (Г) правильная.

9. Одночленом называется … числа и одной или нескольких переменных в степени n, где $n = 0$ или $n \in N$.

(А) произведение; (Б) разность;

(В) сумма; (Г) частное.

Тема 13. Функция

13.1. Координатная плоскость. Координаты точки

Словарь к теме

взаи́мно перпендикуля́рные прямы́е паралле́льные прямы́е координа́та координа́тный у́гол нача́ло координа́т (нача́ло отсчёта) прямоуго́льная (дека́ртова) систе́ма координа́т поста́влен в соотве́тствие *чему?* принима́ть – приня́ть *за что? что?* произво́льный паралле́льный	абсци́сса ось абсци́сс (ось *OX*) ордина́та ось ордина́т (ось *OУ*) о́си координа́т масшта́б пло́скость (ж. р.) соотве́тствие *чего? чему?* то́чка че́тверть (ж. р.)

Задание 1. Прочитайте записи по образцу.

Образец. 1) $A(1; 2)$ – точка A **с** координат**ами** один и два;

2) $A_0(1; 2)$ – точка A **нулевое с** координат**ами** один и два.

1) $A(2; 4)$;	2) $B(1; 5)$;	3) $M(0; –5)$;	4) $D(19; –7)$;
5) $P(0; 1)$;	6) $N(19; 0)$;	7) $C_0(1; –2)$;	8) $A_0(–12; 4)$;
9) $M(1; 3)$;	10) $B_0(2; 3)$;	11) $C(0; –1)$;	12) $M_0(–3; 6)$.

Задание 2. Выполните задание по образцу.

Образец. $A(1; 2)$; 1 – это **абсцисса** точк**и** A, 2 – это **ордината** точк**и** A.

1) $A(2; 4)$;	2) $Q(–1; 3)$;	3) $B(0; –5)$;	4) $B(–3; 20)$;
5) $C(0; 1)$;	6) $D(19; 12)$;	7) $M(1; –2)$;	8) $P(–12; 4)$;
9) $A(0; 3)$;	10) $C(1; –5)$;	11) $A(0; –1)$;	12) $N(–5; 5)$.

Задание 3. Выполните задание по образцу.

Образец. 1. Точка $A(1; 2)$ **находится в** перв**ой** че́тверт**и**, потому что $1 > 0$ и $2 > 0$.

2. Точка $A(–1; 2)$ **находится во** втор**ой** че́тверт**и**, потому что $(–1) < 0$, $2 > 0$.

3. Точка $A(–1; –2)$ **находится в** трет**ьей** че́тверт**и**, потому что $(–1) < 0$, $(–2) < 0$.

4. Точка $A(1; –2)$ **находится в** четвёрт**ой** че́тверт**и**, потому что $1 > 0$, $(–2) < 0$.

5. Точка $A(0; 2)$ **лежит на** оси́ ордина́т.

6. Точка $A(1; 0)$ **лежит на** оси́ абсци́сс.

1) $A(2; 4)$;	2) $A(1; 12)$;	3) $A(2; –3)$;	4) $A(–19; –5)$;
5) $A(0; 1)$;	6) $A(19; 0)$;	7) $A(0; –5)$;	8) $A(–12; 10)$;
9) $A(4; 5)$;	10) $A(3; 0)$;	11) $A(–3; 1)$;	12) $A(–3; –6)$.

Прочитайте.

Построим на плоскости две взаимно перпендикулярные прямые *OX* и *OУ*. Выберем на каждой прямой направление и обозначим его стрелкой → (рис. 5). Обозначим точку пересечения прямых *OX* и *OУ* буквой *O*. Примем за положительное направление прямой *OX* направление вправо, за положительное направление прямой *OУ* – направление вверх.

Прямые *OX* и *OУ* – это **óси координат**. Ось *OX* – это **ось абсцисс**. Ось *OУ* – это **ось ординат**. Точка *O* – это **начало координат**, или **начало отсчёта**. Плоскость *XOУ* называют **координатной плоскостью**. Начало координат и óси координат называют **прямоугольной (декартовой) системой координат**.

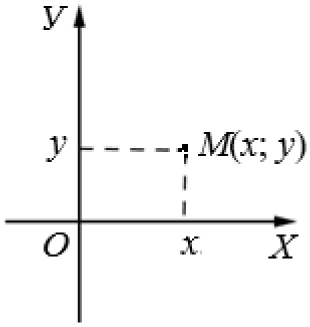


Рис. 5. Прямоугольная система координат

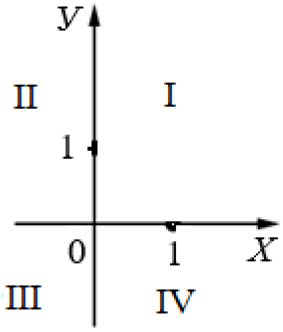


Рис. 6. Четверти

На плоскости *XOУ* можно построить точку с помощью масштаба, который выбран на ося́х *OX* и *OУ*. **Масштаб** – это единица длины.

О́си координат делят координатную плоскость на четыре части. Эти части называют **координа́тными угла́ми**, или **четвертя́ми**.

Координа́тные углы́ (че́тверти) обозначают римскими цифрами: I, II, III, IV (рис. 6).

Пусть точка *M* – произвольная точка плоскости *XOУ*. Проведём через точку *M* прямые, параллельные ося́м координат (рис. 5). Числа x и y – это **координаты точки *M***. Первую координату точки *M* называют **абсциссой** и обозначают буквой x. Вторую координату точки *M* называют **ординатой** и обозначают буквой y.

Записывают: $M(x, y)$ или $M(x; y)$.

Каждой точке плоскости поставлена в соответствие пара координат точки.

Ответьте на вопросы.

1. Как называется ось *OX*?
2. Как называется ось *OУ*?
3. Как называется точка *O*?
4. Как называют плоскость *XOУ*?
5. Что приняли за положительное направление оси *OX*?
6. Что приняли за положительное направление оси *OУ*?
7. Что называют прямоугольной системой координат?
8. Что называют координатами точки $M(x;$ у)?
9. Чему равна ордината точки $N(–1; –3)$?

13.2. Числовая функция

Словарь к теме

аргуме́нт	фу́нкция
гра́фик	числова́я фу́нкция
о́бласть (ж. р.)	задава́ть – зада́ть *что?*
о́бласть значе́ний фу́нкции	подставля́ть – подста́вить *во что? что?*
о́бласть определе́ния фу́нкции	уравне́ние
переме́нная	удовлетворя́ть *чему?*
зави́симая переме́нная	ве́рное числово́е ра́венство
незави́симая переме́нная	неве́рное числово́е ра́венство

Задание 4. Прочитайте записи по образцу.

Образец. 1) $y = f(x)$ – *y* рав**ен** *f* **от** *x*;

2) $t = f(x_0)$ – *t* рав**но** *f* **от** *x* **нулево́е**.

1) $x = x(t)$; 2) $y = y(t)$; 3) $y = g(x)$; 4) $y = y(x_0)$;
5) $y = h(x)$; 6) $x = x(y)$; 7) $h = h(x)$; 8) $y = \psi(t_0)$;
9) $x = \varphi(t_0)$; 10) $t = t(x_0)$; 11) $y = t(x)$; 12) $x = t(y_0)$.

Задание 5. Выполните задание по образцу.

Образец. $y = f(x)$, *x* – это аргумент функции, или независимая переменная, *y* – это функция, или зависимая переменная.

1) $x = x(t)$; 2) $y = h(t)$; 3) $y = g(x)$; 4) $s = s(t)$;
5) $y = h(x)$; 6) $y = y(t)$; 7) $h = h(x)$; 8) $t = g(y)$;
9) $x = \varphi(t)$; 10) $y = \psi(t)$; 11) $u = u(x)$; 12) $v = v(x)$.

Задание 6. Выполните задание по образцу.

Образец. 1. $y = 2x$, $A(1; 2)$. Даны функция $y = 2x$ и точка $A(1; 2)$. Подставим в уравнение функции $y = 2x$ **вместо** *x* число 1, **вместо** *y* – число 2. Получим **верное числовое равенство**:

$$2 = 2 \cdot 1.$$

2. $y = 2x$, $A(–1; 2)$. Даны функция $y = 2x$ и точка $A(–1; 2)$. Подставим в уравнение функции $y = 2x$ **вместо** *x* число (–1), **вместо** *y* – число 2. Получим **неверное числовое равенство**:

$$2 \neq 2 \cdot (-1).$$

1) $y = 2x + 1$, $A(0; 1)$; 2) $y = 3x + 1$, $A(1; 5)$; 3) $y = – x + 2$, $A(0; 2)$;
4) $y = 3 – 2x$, $A(1; 1)$; 5) $y = 4x + 3$, $A(2; 1)$; 6) $y = – x + 3$, $A(3; 0)$;
7) $y = 5x – 3$, $A(2; 6)$; 8) $y = 3x – 5$, $A(3; 4)$; 9) $y = – x – 1$, $A(–1; 0)$;
10) $y = x + 9$, $A(0; 9)$; 11) $y = –3x$, $A(2; 10)$; 12) $y = x + 12$, $A(–3; 9)$.

Задание 7. Выполните задание по образцу.

Образец. 1. График функции $y = 2x$ **проходит** через точку $A(1; 2)$, потому что координаты точки *A* **удовлетворяют** уравнению функции:

$$2 = 2 \cdot 1.$$

2. График функции $y = 2x$ **не проходит** через точку $A(-1; 2)$, потому что координаты точки A **не удовлетворяют** уравнению функции: $2 \neq 2 \cdot (-1)$.

1) $y = 2x + 1$, $A(0; 1)$;	2) $y = 3x + 1$, $A(1; 5)$;	3) $y = -x + 2$, $A(0; 2)$;
4) $y = 3 - 2x$, $A(1; 1)$;	5) $y = 4x + 3$, $A(2; 1)$;	6) $y = -x + 3$, $A(3; 0)$;
7) $y = 5x - 3$, $A(2; 6)$;	8) $y = 3x - 5$, $A(3; 4)$;	9) $y = -x - 1$, $A(-1; 0)$;
10) $y = x + 9$, $A(0; 9)$;	11) $y = -3x$, $A(2; 10)$;	12) $y = x + 12$, $A(-3; 9)$.

Прочитайте.

Говорят, что **на множестве *X* за́дана функция *f* со значениями из множества *У***, если каждому элементу x из множества X по правилу f поставлен в соответствие один и только один элемент y из множества $У$.

Множество X называют **областью определения функции**. Множество $У$ называют **областью значений функции**.

Функцию обозначают так: $y = f(x)$, где $x \in X, y \in У$.

Величину x называют **независимой переменной**, или **аргументом** функции $y = f(x)$. Величину y называют **зависимой переменной**, или **функцией**.

Функция $y = f(x)$ называется **числовой функцией**, если её область определения и область значений – числовые множества.

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество точек $(x; y)$ координатной плоскости $XOУ$ (рис. 7), где x – аргумент функции, y – значение функции в точке x.

На рисунке 7 изображён график произвольной функции.

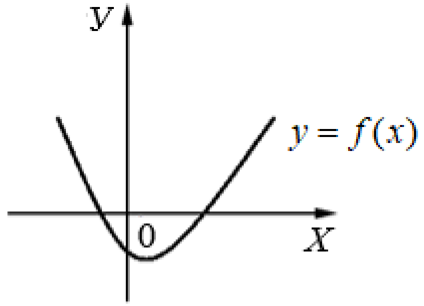


Рис. 7. График произвольной функции

График функции $y = f(x)$ проходит через точку $M_0(x_0; y_0)$, если координаты точки удовлетворяют уравнению функции. Например, график функции $y = 2x$ проходит через точку $A(1; 2)$. Если подставить вместо x число 1, вместо y – число 2, то получим верное числовое равенство:

$$2 = 2 \cdot 1.$$

Следовательно, координаты точки A удовлетворяют уравнению функции.

Например, координаты точки $B(-1; 2)$ не удовлетворяют уравнению функции $y = 2x$:

$$2 \neq 2 \cdot (-1).$$

Следовательно, график функции $y = 2x$ не проходит через точку $B(-1; 2)$.

Ответьте на вопросы.

1. Когда говорят, что на множестве X задана функция со значениями из множества $У$?
2. Как называют множество X для функции $y = f(x)$?
3. Как называют множество $У$ для функции $y = f(x)$?
4. Что называется областью определения функции $y = f(x)$?
5. Что называется областью значений функции $y = f(x)$?
6. Как называют величину x для функции $y = f(x)$?
7. Как называют величину y для функции $y = f(x)$?
8. Что называют независимой переменной, или аргументом функции?
9. Что называют зависимой переменной, или функцией?
10. Какая функция называется числовой функцией?
11. Что называется графиком функции $y = f(x)$?
12. Когда график функции $y = f(x)$ проходит через точку $M_0(x_0; y_0)$?
13. Через какую точку проходит график функции $y = 2x$?
14. Почему график функции $y = 2x$ проходит через точку $A(1; 2)$?

Задания

Задание 1. Запишите пропущенные слова: *абсцисса, координата, координатная плоскость, начало координат, начало отсчёта, ордината, ось координат, ось абсцисс, ось ординат, плоскость, прямоугольная система координат, точка, четверть, первая четверть*.

Рассмотрим _______________ XOY. Оси OX и OY называются ____________ ________________. Ось OX – это _____ ____________. Ось OY – это _____ ______________. Точка O – это ____________ _______________, или _____________ ______________. Плоскость XOY называют __________________ ______________. Начало координат и оси координат называют ________________ __________ ______________. Оси OX и OY делят координатную плоскость на четыре _______________.

Рассмотрим ______ $M(x; y)$. Числа x и y называют ______________ точки M. Число x называют _________ точки M. Число y называют ___________ точки M. Если $x > 0$ и $y > 0$, то точка $M(x; y)$ находится __ ____________ _______________. Если $x = 0$, то точка $M(0; y)$ лежит ______ ____________ _______________.

Задание 2. Выполните задание по образцу.

Образец. $y = 2x$, $x_0 = 1 \Rightarrow y(1) = 2 \cdot 1 = 2$; 2 – это **значение функции в точке** $x_0 = 1$.

1) $y = 2x + 1$, $x_0 = 2$;	2) $y = 3x + 1$, $x_0 = 0$;	3) $y = -x + 2$, $x_0 = -3$;
4) $y = 3 - 2x$, $x_0 = 0$;	5) $y = 4x + 3$, $x_0 = 1$;	6) $y = -x + 3$, $x_0 = -2$;
7) $y = 5x - 3$, $x_0 = 2$;	8) $y = 3x - 5$, $x_0 = 3$;	9) $y = -x - 1$, $x_0 = -7$;
10) $y = x + 9$, $x_0 = 1$;	11) $y = -3x$, $x_0 = 11$;	12) $y = x + 12$, $x_0 = -9$.

Задание 3. Запишите в предложения предлоги *в*(*о*), *на, от, с*.

1. $A(1;\,2)$ – точка A … координатами один и два.

2. Запись $y = f(x)$ читают: игрек равен эф … икс.

3. Каждой точке плоскости поставлена … соответствие пара координат точки.

4. … рисунке изображён график произвольной функции.

5. Оси координат делят координатную плоскость … четыре части.

6. Построим … плоскости две взаимно перпендикулярные прямые OX и OY.

7. Точка $A(–2;\,1)$ находится … второй четверти.

Задание 4. Выберите **два** правильных варианта ответа.

1. Точка O на плоскости XOY – это …, или … .

(А) единица длины; (Б) начало отсчёта;
(В) начало координат; (Г) система координат.

2. Начало координат и оси координат называют … системой координат, или … системой координат.

(А) декартовой; (Б) произвольной;
(В) координатной; (Г) прямоугольной.

3. Оси координат делят координатную плоскость на четыре части, которые называют …, или … .

(А) графиками; (Б) координатными углами;
(В) координатами точки; (Г) четвертями.

4. Величину x называют …, или … функции $y = f(x)$.

(А) аргументом; (Б) независимой переменной;
(В) зависимой переменной; (Г) функцией.

5. Если $y = f(x)$, то величину y называют …, или … .

(А) аргументом; (Б) независимой переменной;
(В) зависимой переменной; (Г) функцией.

6. Координаты точки на плоскости обозначают буквами x и y и называют … и … точки.

(А) абсциссой; (Б) областью значений функции;
(В) аргументом функции; (Г) ординатой;
(Д) значением функции в точке x; (Е) областью определения функции.

7. Графиком функции $y = f(x)$ называется множество точек $(x;\,y)$ координатной плоскости XOY, где x – …, y – … в точке x.

(А) абсцисса; (Б) область значений функции;
(В) аргумент функции; (Г) ордината;
(Д) значение функции; (Е) область определения функции.

8. Множество X называют …, множество Y называют … .

(А) абсциссой; (Б) областью значений функции;
(В) аргументом функции; (Г) ординатой;
(Д) значением функции в точке x; (Е) областью определения функции.

Тема 14. Основные элементарные функции

14.1. Элементарные функции

Словарь к теме

квадрати́чная фу́нкция лине́йная фу́нкция логарифми́ческая фу́нкция показа́тельная фу́нкция тригонометри́ческая фу́нкция обра́тная тригонометри́ческая фу́нкция пряма́я ли́ния (пряма́я) углово́й коэффицие́нт прямо́й напра́влен *куда?* (*вверх / вниз*) проходи́ть – пройти́ *через что?* ветвь (ж. р.) (математическое)	пара́бола ве́тви пара́болы гра́фик логари́фм десяти́чный логари́фм натура́льный логари́фм

Задание 1. Выполните задание по образцу.

Образец. $y = 2x + 1$ – это **линейная функция**. График линейной функции $y = 2x + 1$ – **прямая линия**, 2 – это **угловой коэффициент прямой**.

1) $y = 3x – 1$; 2) $y = 5x – 2$; 3) $y = –3x + 10$;
4) $y = 2x + 3$; 5) $y = 4x + 7$; 6) $y = –5x – 12$;
7) $y = 1 – 2x$; 8) $y = 8x – 1$; 9) $y = –7x + 19$;
10) $y = 2 – x$; 11) $y = x + 9$; 12) $y = –x – 20$.

Задание 2. Выполните задание по образцу.

Образец. 1. $y = 2x^2 + x + 1$ – это **квадратичная функция**.

График квадратичной функции – это **парабола**. Ветви параболы **направлены вверх**, потому что $a = 2 > 0$.

2. $y = -2x^2 + x + 1$ – это **квадратичная функция**.

График квадратичной функции – это **парабола**. Ветви параболы **направлены вниз**, потому что $a = –2 < 0$.

1) $y = 5x^2 - x + 1$; 2) $y = -x^2 - 5x + 3$; 3) $y = x^2 + 5x + 6$;
4) $y = 7x^2 + 3x + 1$; 5) $y = -3x^2 + 4x + 1$; 6) $y = x^2 + 3x + 2$;
7) $y = 3x^2 + 2x - 1$; 8) $y = -8x^2 - 6x + 3$; 9) $y = -x^2 + x + 9$;
10) $y = 6x^2 - x + 10$; 11) $y = -9x^2 + x + 4$; 12) $y = x^2 + 4x - 1$.

Задание 3. Выполните задание по образцу.

Образец. $y = 2^x$ – это **показательная функция**, x – это **аргумент функции**. График функции $y = 2^x$ проходит через точку A(0; 1).

1) $y = 3^x$; 2) $y = 8^x$; 3) $y = 4^x$; 4) $y = 5^x$;

5) $y = 0{,}2^x$; 6) $y = 0{,}1^x$; 7) $y = 0{,}7^x$; 8) $y = 0{,}6^x$;

9) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; 10) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$; 11) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$; 12) $y = \left(\frac{1}{7}\right)^x$.

Задание 4. Прочитайте записи по образцу.

Образец. 1) $y = \log_2 x$ – y равен **логари́фм** x **по** основани**ю два**;

2) $y = \ln(x+3)$ – y равен **нату́ральный логари́фм** (x + 3);

3) $y = \lg x$ – y равен **десяти́чный логари́фм** x.

1) $y = \log_3 5x$; 2) $y = \log_5 x$; 3) $y = \ln 7x$; 4) $y = \lg(4x+1)$;

5) $y = \log_7 6x$; 6) $y = \log_6 x$; 7) $y = \ln 9x$; 8) $y = \lg(2x-1)$;

9) $y = \ln(x+1)$; 10) $y = \log_4 x$; 11) $y = \ln 2x$; 12) $y = \lg(x+2)$.

Задание 5. Выполните задание по образцу.

Образец. 1) $y = \log_2 2x$ – это **логарифмическая функция**; 2 – это основание логарифм**а**, 2x – это **аргумент** логарифм**а;**

2) $y = \ln(x+3)$ – это **логарифмическая функция**; e – это основание логарифм**а**, (x + 3) – это **аргумент** логарифм**а;**

3) $y = \lg x$ – это **логарифмическая функция**; 10 – это основание логарифм**а**, x – это **аргумент** логарифм**а**.

1) $y = \ln 3x$; 2) $y = \log_9 x$; 3) $y = \log_7 x$; 4) $y = \lg 4x$;

5) $y = \log_3 x$; 6) $y = \log_8 x$; 7) $y = \ln(5-x)$; 8) $y = \lg 5x$;

9) $y = \log_5 2x$; 10) $y = \lg 3x$; 11) $y = \ln(x-1)$; 12) $y = \lg 8x$.

Задание 6. Прочитайте записи по образцу.

Образец. 1) $y = \sin 2x$ – y равен **си́нус** 2x;

2) $y = \cos(3x+1)$ – y равен **ко́синус** (3x + 1);

3) $y = \mathrm{tg}\, x$ – y равен **та́нгенс** x;

4) $y = \mathrm{ctg} 2x$ – y равен **кота́нгенс** 2x.

1) $y = \sin 3x$; 2) $y = \cos(2x+1)$; 3) $y = \mathrm{tg} 2x$; 4) $y = \mathrm{ctg} 5x$;

5) $y = \sin 4x$; 6) $y = \cos(6x+5)$; 7) $y = \mathrm{tg} 3x$; 8) $y = \mathrm{ctg} 6x$;

9) $y = \sin 7x$; 10) $y = \cos(x-2)$; 11) $y = \mathrm{tg} 5x$; 12) $y = \mathrm{ctg} 3x$.

Задание 7. Прочитайте записи по образцу.

Образец. 1) $y = \sin 9x$ – это **тригонометри́ческая функция**;

2) $y = \cos(2x - 1)$ – это **тригонометри́ческая функция**;

3) $y = \mathrm{tg}\,5x$ – это **тригонометри́ческая функция**;

4) $y = \mathrm{ctg}\,3x$ – это **тригонометри́ческая функция**.

1) $y = \sin 5x$; 2) $y = \cos(3x - 1)$; 3) $y = \mathrm{tg}\,3x$; 4) $y = \mathrm{ctg}\,7x$;

5) $y = \sin 3x$; 6) $y = \cos(4x - 5)$; 7) $y = \mathrm{tg}\,2x$; 8) $y = \mathrm{ctg}\,2x$;

9) $y = \sin 6x$; 10) $y = \cos(x + 3)$; 11) $y = \mathrm{tg}\,x$; 12) $y = \mathrm{ctg}\,x$.

Задание 8. Прочитайте записи по образцу.

Образец. 1) $y = \arcsin x$ – y равен **аркси́нус** x;

2) $y = \arccos 3x$ – y равен **аркко́синус** $3x$;

3) $y = \mathrm{arctg}\,x$ – y равен **аркта́нгенс** x;

4) $y = \mathrm{arcctg}\,5x$ – y равен **арккота́нгенс** $5x$.

1) $y = \arcsin 2x$; 2) $y = \arccos 2x$; 3) $y = \mathrm{arctg}\,2x$; 4) $y = \mathrm{arcctg}\,4x$;

5) $y = \arcsin 5x$; 6) $y = \arccos 6x$; 7) $y = \mathrm{arctg}\,7x$; 8) $y = \mathrm{arcctg}\,7x$;

9) $y = \arcsin 7x$; 10) $y = \arccos x$; 11) $y = \mathrm{arctg}\,3x$; 12) $y = \mathrm{arcctg}\,5x$.

Задание 9. Прочитайте записи по образцу.

Образец. 1) $y = \arcsin x$ – **это обратная тригонометри́ческая функция**;

2) $y = \arccos 3x$ – это **обратная тригонометри́ческая функция**;

3) $y = \mathrm{arctg}\,4x$ – это **обратная тригонометри́ческая функция**;

4) $y = \mathrm{arcctg}\,5x$ – это **обратная тригонометри́ческая функция**.

1) $y = \arcsin 3x$; 2) $y = \arccos 4x$; 3) $y = \mathrm{arctg}\,2x$; 4) $y = \mathrm{arcctg}\,8x$;

5) $y = \arcsin 6x$; 6) $y = \arccos 7x$; 7) $y = \mathrm{arctg}\,5x$; 8) $y = \mathrm{arcctg}\,3x$;

9) $y = \arcsin 9x$; 10) $y = \arccos x$; 11) $y = \mathrm{arctg}\,x$; 12) $y = \mathrm{arcctg}\,7x$.

14.2. Основные элементарные функции и их графики

Словарь к теме

степенна́я фу́нкция гипе́рбола ве́тви гипе́рболы куби́ческая пара́бола верши́на пара́болы	синусо́ида косинусо́ида явля́ться *чем?* паралле́лен, паралле́льно, -а, -ы

Прочитайте.

Линейной функцией называется функция вида $y = kx + b$, где $k \neq 0$.

Графиком линейной функции является **прямая линия** (рис. 8). Уравнение $y = kx + b$ – это уравнение прямой с угловым коэффициентом. Число k называют **угловым коэффициентом прямой**. Если α – угол между положительным направлением оси OX и прямой $y = kx + b$, то $k = \operatorname{tg}\alpha$. Если $b = 0$, то прямая проходит через начало координат (рис. 9).

Если $k > 0$, то α – острый угол. Если $k < 0$, то α – тупой угол. Если $k = 0$, то прямая параллельна оси *OX*.

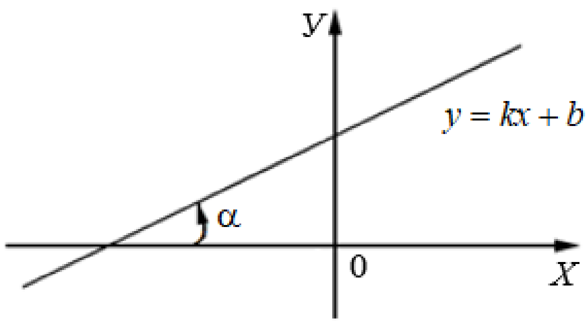


Рис. 8. График функции y = kx + b

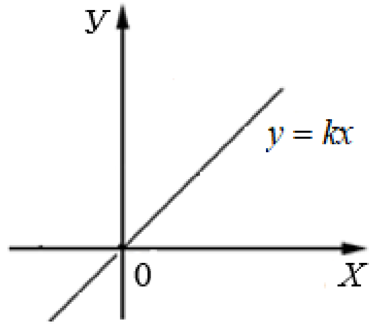


Рис. 9. График функции y = kx

Квадратичной функцией называется функция вида $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$. Графиком квадратичной функции является **парабола**. Парабола имеет **две ветви** и **одну вершину**. Если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх (рис. 10). Если $a < 0$, то ветви параболы направлены вниз (рис. 11).

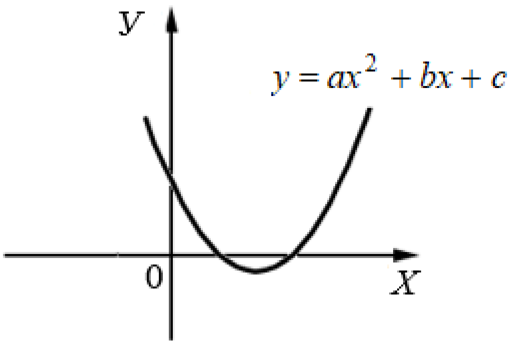


Рис. 10. Парабола (a > 0)

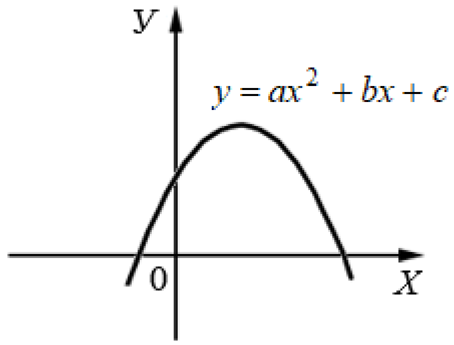


Рис. 11. Парабола (a < 0)

Степенной функцией называется функция вида $y = x^a$, где $a \in R$.

Например, $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^{-1}$ – это степенные функции.

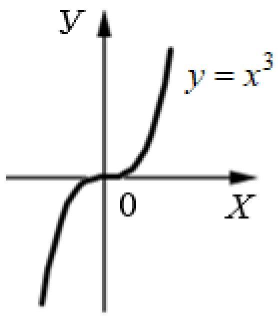
На рисунке 12 изображён график степенной функции $y = x^3$. График функции $y = x^3$ называют **кубической параболой**.

На рисунке 13 изображён график степенной функции $y = \dfrac{k}{x}$, где $k > 0$.

График функции $y = \dfrac{k}{x}$ называют **гиперболой**. Гипербола имеет **две ветви**.

Если $k > 0$, то ветви гиперболы $y = \dfrac{k}{x}$ расположены в первой и третьей четвертях (рис. 13).

Если $k < 0$, то ветви гиперболы $y = \dfrac{k}{x}$ расположены **во** второй и четвёртой четвертях.



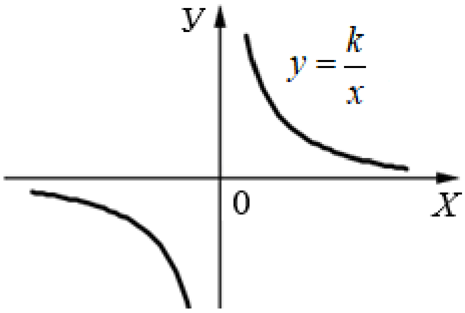


Рис. 12. Кубическая парабола *Рис. 13. Гипербола* (k > 0)

Ответьте на вопросы.

1. Какая функция называется линейной?
2. Что является графиком линейной функции?
3. Какая функция называется квадратичной?
4. Что является графиком квадратичной функции?
5. Сколько ветвей имеет парабола?
6. Сколько вершин имеет парабола?
7. Когда ветви параболы направлены вверх?
8. Когда ветви параболы направлены вниз?
9. Какая функция называется степенной?
10. График какой функции называют гиперболой?
11. Сколько ветвей имеет гипербола?
12. Где расположен график функции $y = \frac{1}{x}$? Почему?
13. Как называют график функции $y = x^3$?

Задание 10. Прочитайте записи по образцу.

Образец. 1) $x \in [0; 1]$ – x принадлежит отрезк**у от** нуля **до** одного;

2) $y \in (0; \infty)$ – y принадлежит интервал**у от** нуля **до** бесконечности;

3) $y \in [0; \infty)$ – y принадлежит полуинтервал**у от** нуля **включительно до** бесконечности;

4) $x \in R \setminus \{2\}$ – x принадлежит множеств**у** R минус два.

1) $x \in (-\infty; 0)$;	2) $y \in [10; \infty)$;	3) $x \in [-1; 1]$;	4) $x \in R \setminus \{3\}$;
5) $y \in (-\infty; \infty)$;	6) $y \in (-\infty; 1]$;	7) $x \in [0; 19]$;	8) $y \in R \setminus \{0\}$;
9) $x \in (-\infty; \infty)$;	10) $x \in [0; 12)$;	11) $x \in (0; 2]$;	12) $y \in R \setminus \{1\}$;
13) $y \in [0; \pi]$;	14) $y \in [-\pi; \pi]$;	15) $y \in [1; \pi]$;	16) $x \in R \setminus \{-2\}$.

Задание 11. Выполните задание по образцу.

Образец. 1. Область определения функции $y = 2x + 1$ – это множество всех действительных чисел. Записывают: $x \in (-\infty; \infty)$, или $x \in R$. **Множество значений функции** $y = 2x + 1$ – это множество всех действительных чисел. Записывают: $y \in (-\infty; \infty)$, или $y \in R$.

2. Область определения функции $y = \dfrac{1}{x-2}$ – это множество всех действительных чисел, **кроме** $x = 2$. Записывают: $x \neq 2$, или $x \in R \setminus \{2\}$. **Множество значений функции** $y = \dfrac{1}{x-2}$ – это множество всех действительных чисел, **кроме** $y = 0$. Записывают: $y \neq 0$, или $y \in R \setminus \{0\}$.

1) $y = 1 - 2x$; 2) $y = x^2$; 3) $y = x^3$; 4) $y = |x|$;

5) $y = 2x + 3$; 6) $y = -x^2$; 7) $y = -x^3$; 8) $y = x^4$;

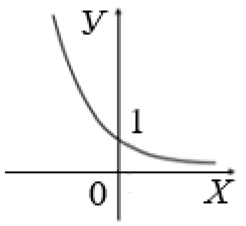
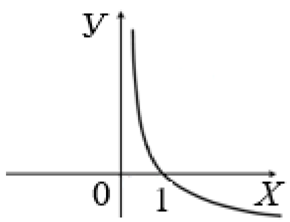
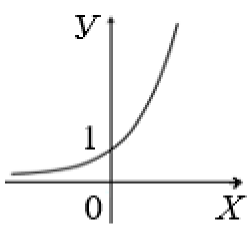
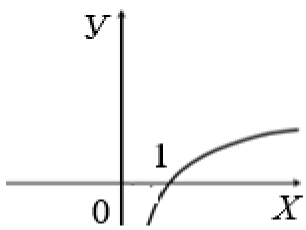
9) $y = \dfrac{1}{2x-1}$; 10) $y = -\dfrac{2}{x}$; 11) $y = \dfrac{2}{x-3}$; 12) $y = \dfrac{1}{x}$.

Прочитайте.

Показательной функцией называется функция вида $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$.

Логарифмической функцией называется функция вида $y = \log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$.

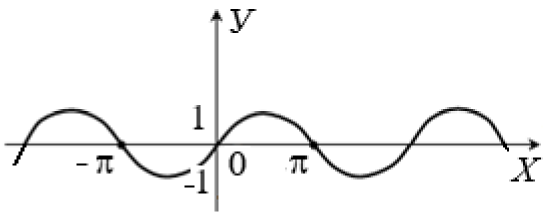
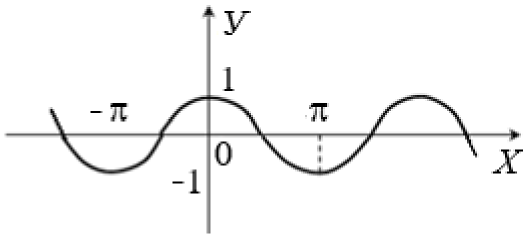
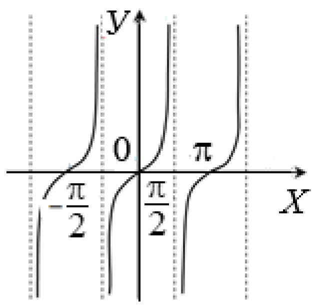
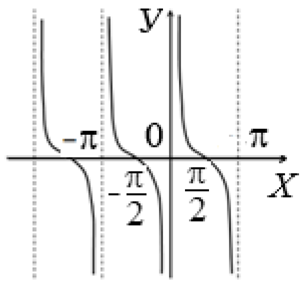
Ниже изображены графики показательных и логарифмических функций.

Показательная функция		**Логарифмическая функция**	
Формула	**График функции**	**Формула**	**График функции**
1. $y = a^x$, $0 < a < 1$, $x \in R$, $y \in (0; \infty)$.		**1.** $y = \log_a x$, $0 < a < 1$, $x \in (0; \infty)$, $y \in R$.	
2. $y = a^x$, $a > 1$, $x \in R$, $y \in (0; \infty)$.		**2.** $y = \log_a x$, $a > 1$, $x \in (0; \infty)$, $y \in R$.	

Тригонометрическими функциями называют функции вида $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$.

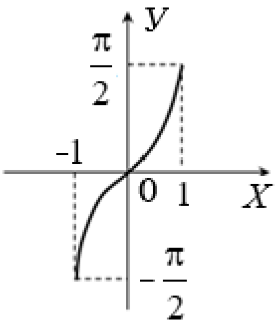
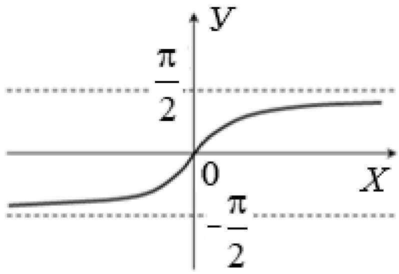
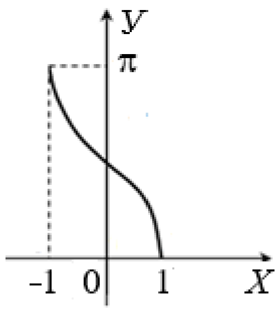
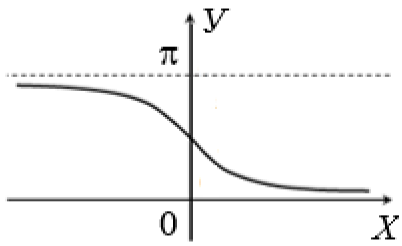
Множество значений функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ – это отрезок [–1; 1]. Множество значений функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ – это множество всех действительных чисел.

Ниже изображены графики тригонометрических функций.

Тригонометрические функции	
Формула	**График функции**
1. $y = \sin x$, $T = 2\pi$, где T – период функции, $x \in R, y \in [-1; 1]$. График функции – **синусóида**.	
2. $y = \cos x$, $T = 2\pi$, где T – период функции, $x \in R, y \in [-1; 1]$. График функции – **косинусóида**.	
3. $y = \operatorname{tg} x$, $T = \pi$, где T – период функции, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z,\ y \in R$.	
4. $y = \operatorname{ctg} x$, $T = \pi$, где T – период функции, $x \neq k\pi,\ k \in Z,\ y \in R$.	

Обратными тригонометрическими функциями называют функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$. Область определения функций $y = \arcsin x$ и $y = \arccos x$ – это отрезок $[-1; 1]$. Область определения функций $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$ – это множество всех действительных чисел.

Ниже изображены графики обратных тригонометрических функций.

Обратные тригонометрические функции			
Формула	**График функции**	**Формула**	**График функции**
1. y = arcsin x, $x \in [-1; 1]$, $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.		**3.** y = arctg x, $x \in R$, $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.	
2. y = arccos x, $x \in [-1; 1]$, $y \in [0; \pi]$.		**4.** y = arcctg x, $x \in R$, $y \in (0; \pi)$.	

Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Назовите тригонометрические функции.
2. Как называют графики функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$?
3. Чему равен период функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$?
4. Чему равен период функций $y = \mathrm{tg}\, x$ и $y = \mathrm{ctg}\, x$?
5. Назовите обратные тригонометрические функции.
6. Запишите область определения функций y = arcsin x и y = arccos x.
7. Запишите область определения функций y = arctg x и y = arcctg x.
8. Запишите множество значений функций y = arcsin x и y = arccos x.
9. Запишите множество значений функций y = arctg x и y = arcctg x.

Задания

Задание 1. Постройте график функции. Как называется функция? Как называется график функции?

1) $y = 3x$;	2) $y = \sin x$;	3) $y = -2x$;
4) $y = x^4$;	5) $y = 4 - x^2$;	6) $y = \cos x$;
7) $y = 2^x$;	8) $y = \log_2 x$;	9) $y = 2 - x$;
10) $y = \frac{3}{x}$;	11) $y = \frac{x}{2}$;	12) $y = -\frac{1}{x}$.

Задание 2. Установите соответствия.

Начало предложения	Конец предложения
1. График квадратичной функции – это	**а)** гипербола.
2. График линейной функции – это	**б)** парабола.
3. График функции $y = \frac{k}{x}$ – это	**в)** прямая линия.
4. Если $k > 0$, то ветви гиперболы $y = \frac{k}{x}$ расположены	**г)** вверх.
5. Если $k < 0$, то ветви гиперболы $y = \frac{k}{x}$ расположены	**д)** вниз.
6. При $a < 0$ ветви параболы $y = ax^2 + bx + c$ направлены	**е)** через начало координат.
7. При $a > 0$ ветви параболы $y = ax^2 + bx + c$ направлены	**ж)** во второй и четвёртой четвертях.
8. Если в уравнении $y = kx + b$ число $b = 0$, то прямая проходит	**з)** в первой и третьей четвертях.

Задание 3. Запишите глаголы в форме первого лица множественного числа будущего времени.

Образец. (Решить) задачу. → **Решим** задачу.

1. (Выбрать) ____________________ на оси OX масштаб.
2. (Выполнить) ____________________ операцию.
3. (Выучить) ____________________ названия графиков функций.
4. (Изучить) ____________________ свойства функций.
5. (Записать) ____________________ область значений функции.
6. (Найти) ____________________ значение выражения.
7. (Назвать) ____________________ абсциссу точки $M(x, y)$.
8. (Обозначить) ____________________ начало координат буквой O.
9. (Ответить) ____________________ на вопросы.
10. (Отметить) ____________________ точку на плоскости.
11. (Подставить) ____________________ вместо x число 1.
12. (Поставить) ____________________ в соответствие элемент множества.
13. (Прочитать) ____________________ текст.
14. (Построить) ____________________ график функции.
15. (Рассмотреть) ____________________ координатную плоскость XOY.
16. (Указать) ____________________ область определения функции.
17. (Установить) ____________________ соответствие.

Задание 4. Образуйте прилагательные от данных существительных по модели. Составьте примеры с данными прилагательными.

Существительное	**Суффикс**	**Прилагательное**	**Пример**
математ**ика**	-ическ-	математи́ческий	математическая формула
арифметик**а**			
гипербол**а**			
граф**ик**			
куб			
логарифм			
парабол**а**			
период			
тригонометр**ия**			
метр	-ов-	метро́вый	метровые волны
числ**о**			
квадрат	-н-	квадра́тный	корень квадратный
координат**а**			
параллель			
перпендикуляр			
показатель			
прямоуголь**ник**			
степен**ь**			
треуголь**ник**			
фигур**а**			
десят**ь**	-ичн-	десяти́чный	десятичная дробь
квадрат			

Задание 5. Запишите пропущенные слова: *возьмём, находится, отметим, проведём, проходит*, *рассмотрим*, *является*.

________________ функцию $y = 3x$. Графиком функции ___________ прямая. Если _______________ $x = 0$, то получим $y = 0$. Если _________________ $x = 1$, то получим $y = 3$. ___________________ на координатной плоскости точки $A(0; 0)$ и $B(1; 3)$. ________________ через точки A и B прямую.

График функции _____________________ через начало координат. Прямая ________________ в I и III четвертях.

Тема 15. Некоторые формулы элементарной математики

15.1. Определение логарифма. Свойства логарифмов

Словарь к теме

конста́нта логарифми́рование	логарифми́ческое то́ждество обра́тный

Записи читают:

$\log_a b$ – логарифм b по основан**ию** a;

$a^{\log_a b}$ – a в степени логарифм b **по** основани**ю** a;

$\log_{10} b = \lg b$ – логарифм b **по** основани**ю** десять рав**ен** десятичн**ому** логарифм**у** b;

$\log_e b = \ln b$ – логарифм b **по** основани**ю** e рав**ен** натуральн**ому** логарифм**у** b.

Задание 1. А. Изучите конструкцию.

Логарифм чего? (Р. п.) по основанию сколько?(И. п.) равен чему? (Д. п.)

Б. Прочитайте записи по образцу.

Образец. 1) $\log_2 16 = 4$ – логарифм шестнадцат**и** **по** основани**ю** **два** рав**ен** четыр**ём**;

2) $\lg 10 = 1$ – десятичный логарифм десят**и** рав**ен** одн**ому**;

3) $\ln e^2 = 2$ – натуральный логарифм e^2 рав**ен** дв**ум**.

1) $\ln e^3 = 3$;	2) $\lg 1 = 0$;	3) $\log_2 64 = 6$;	4) $\log_3 81 = 4$;
5) $\log_5 1 = 0$;	6) $\ln 1 = 0$;	7) $\log_5 125 = 3$;	8) $\lg 1000 = 3$;
9) $\log_2 8 = 3$;	10) $\ln e = 1$;	11) $\log_2 32 = 5$;	12) $\lg 100 = 2$.

Задание 2. Выполните задание по образцу.

Образец. $\log_2 16 = 4$; 2 – это основание логарифма, 16 – это аргумент логарифма, 4 – это значение логарифма.

1) $\ln e^3 = 3$;	2) $\lg 1 = 0$;	3) $\log_2 64 = 6$;	4) $\log_3 81 = 4$;
5) $\ln e^2 = 2$;	6) $\ln 1 = 0$;	7) $\log_5 125 = 3$;	8) $\lg 1000 = 3$;
9) $\lg 100 = 2$;	10) $\ln e = 1$;	11) $\log_2 32 = 5$;	12) $\log_5 1 = 0$.

Прочитайте.

Логарифмом положительного числа *b* по основанию *a*, где $a > 0$, $a \neq 1$, называется показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b.

Логарифм числа b по основанию a обозначают так: $\log_a b$.

Число a – это **основание логарифма**, число b – это **аргумент логарифма**.

Если $\log_a b = c$, то число c – это **значение логарифма**.

Логарифм числа b по основанию e, где $e \approx 2{,}72$, обозначают $\ln b$ и называют **натуральным логарифмом**.

Логарифм числа b по основанию 10 обозначают $\lg b$ и называют **десятичным логарифмом**.

Операцию нахождения логарифма числа b по основанию a называют **логарифмированием**. Логарифмирование – это операция, обратная операции возведения в степень.

Например, чтобы вычислить $\log_2 16$, надо найти такое число c, что $2^c = 16$. Тогда $\log_2 16 = 4$, потому что $2^4 = 16$.

Прочитайте некоторые свойства логарифмов и формулы.

Свойства логарифмов	Формулы
1. Логарифм единицы по любому основанию равен нулю.	$\log_a 1 = 0$
2. Логарифм a по основанию a равен одному.	$\log_a a = 1$
3. Логарифм произведения – это сумма логарифмов.	$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$
4. Логарифм частного – это разность логарифмов.	$\log_a (b : c) = \log_a b - \log_a c$
5. Логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм её основания.	$\log_a b^c = c \cdot \log_a b$, где c – константа
6. Если возвести число a в степень $\log_a b$, то получим число b.	$a^{\log_a b} = b$ – это основное логарифмическое тождество

Ответьте на вопросы.

1. Что такое логарифм числа b по основанию a?
2. Как обозначают логарифм числа b по основанию a?
3. Как называется число b в выражении $\log_a b$?
4. Как называется число a в выражении $\log_a b$?
5. Как называют логарифм по основанию $e \approx 2{,}72$?
6. Как называют логарифм по основанию 10?
7. Как называют операция нахождения логарифма?
8. Чему равен логарифм произведения?
9. Чему равна разность логарифмов?

15.2. Формулы тригонометрии

Словарь к теме

геометри́ческая фигу́ра треуго́льник прямоуго́льный треуго́льник верши́на треуго́льника сторона́ треуго́льника тригономе́трия тригонометри́ческие фо́рмулы основно́е тригонометри́ческое то́ждество	ка́тет прилежа́щий ка́тет прилега́ть *к чему?* противолежа́щий ка́тет гипотену́за у́гол о́стрый у́гол прямо́й у́гол определе́ние

Записи читают:

$\sin^2 \alpha$ – си́нус квадра́т а́льфа (синус в квадрате альфа);

ΔABC – треугольник *ABC*;

$\angle ABC$ – угол *ABC*;

$\angle ABC = 90^0$ – угол ABC рав**ен** девяност**а** градус**ам**;

$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ – альфа больше нуля, но меньше пи **на** два;

$\pm$ – плюс минус.

Прочитайте.

На рисунке 14 изображена́ геометрическая фигура – треугольник *ABC*.

Точки *A*, *B* и *C* – это вершины ΔABC. $\angle CAB = \alpha$ (угол при вершине *A* равен альфа) – это острый угол, т. к. $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. $\angle ACB = 90^0$ – прямой угол. Треугольник *ABC* называют **прямоугольным треугольником**.

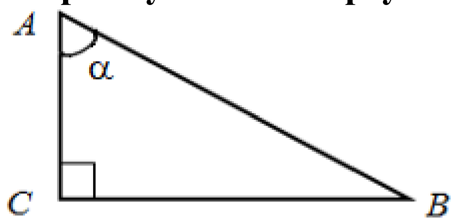


Рис. 14. Треугольник ABC

Отрезки *AB*, *AC* и *BC* – это стороны ΔABC. Сторона *AB* называется **гипотенузой** ΔABC. Стороны *AC* и *BC* называются **катетами** ΔABC. Если α – угол при вершине *A* в ΔABC, то катет *AC* называют **прилежащим катетом**. Если α – угол при вершине *A* в ΔABC, то катет *BC* называют **противолежащим катетом**.

Определение	Формула
1. Синусом угла α называется отношение противолежащего катета к гипотенузе.	$\sin\alpha = \frac{BC}{AB}$
2. Косинусом угла α называется отношение прилежащего катета к гипотенузе.	$\cos\alpha = \frac{AC}{AB}$
3. Тангенсом угла α называется отношение противолежащего катета к прилежащему.	$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{BC}{AC}$
4. Котангенсом угла α называется отношение прилежащего катета к противолежащему.	$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{AC}{BC}$

Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Как называется треугольник *ABC*, если один угол равен 90^0?
2. Какой угол треугольника *ABC* равен 90^0 (рис. 14)?
3. Как называется угол, который равен 90^0?
4. Назовите катеты в прямоугольном треугольнике *ABC* (рис. 14).
5. Назовите гипотенузу в прямоугольном треугольнике *ABC* (рис. 14).
6. Назовите прилежащий и противолежащий катеты к углу *ABC* в прямоугольном треугольнике *ABC* (рис. 14).
7. Что называется синусом угла α?
8. Что называется косинусом угла α?
9. Что называется тангенсом угла α?
10. Что называется котангенсом угла α?
11. Как называется отношение противолежащего катета к гипотенузе?
12. Как называется отношение противолежащего катета к прилежащему?
13. Как называется отношение прилежащего катета к гипотенузе?
14. Как называется отношение прилежащего катета к противолежащему?
15. Найдите синус угла *BAC* в прямоугольном ΔABC со сторонами $BC = 3$ и $AB = 5$ (рис. 14).
16. Найдите косинус угла *BAC* в прямоугольном ΔABC со сторонами $AC = 4$ и $AB = 8$ (рис. 14).
17. Найдите тангенс угла *BAC* в прямоугольном ΔABC со сторонами $AC = 4$ и $AB = 5$ (рис. 14).
18. Найдите сумму углов *BAC* и *ABC* в ΔABC (рис. 14).

Задание 3. А. Прочитайте основные тригонометрические тождества.

Формулы	**Допустимые значения аргумента**
1. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$	$\alpha\in R$
2. $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$	$\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi k$, где $k\in Z$
3. $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	$\alpha\neq\pi k$, где $k\in Z$
4. $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$	$\alpha\neq\dfrac{\pi k}{2}$, где $k\in Z$

Б. Прочитайте тригонометрические формулы.

Название формулы	**Формула**
Формулы двойного аргумента (угла).	$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$
Формулы сложения и вычитания аргументов.	$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta\pm\cos\alpha\cdot\sin\beta$ $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta\mp\sin\alpha\cdot\sin\beta$
Формулы преобразования произведения функций.	$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\dfrac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$ $\cos\alpha\cdot\cos\beta=\dfrac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}$ $\sin\alpha\cdot\cos\beta=\dfrac{\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)}{2}$
Формулы преобразования суммы и разности функций.	$\sin\alpha\pm\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha\mp\beta}{2}$ $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
Формулы понижения степени.	$\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$ $\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$

В. Выполните задание по образцу.

Образец. $\sin^2 2x=\dfrac{1-\cos 4x}{2}$. Примен**или** формул**у** понижения степени.

1) $\cos^2 3x$; 2) $\sin^2 5x$; 3) $\cos 4x+\cos 2x$; 4) $\sin 2x\cdot\cos 4x$;

5) $\cos 4x$; 6) $\cos^2 4x$; 7) $\sin 6x-\sin 4x$; 8) $\cos 2x\cdot\cos 4x$;

9) $\sin 8x$; 10) $\sin^2 3x$; 11) $\cos 2x-\cos x$; 12) $\sin 2x\cdot\sin 4x$.

Задание 4. А. Прочитайте в таблице значения синусов, косинусов, тангенсов и котангенсов основных углов.

α	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	180^0	270^0	360^0
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	–	0	–

Б. Найдите значение выражения.

Образец. 1) $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$ – синус тридцат**и** градус**ов** рав**ен** одн**ой** втор**ой**;

2) $\operatorname{tg} 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ – тангенс тридцати градус**ов** рав**ен** корн**ю** **из** тр**ёх** **на** три;

3) $\operatorname{ctg} 0^0$ – котангенс нул**я** градус**ов** **не существует**.

1) $\sin 180^0$; 2) $\cos 30^0$; 3) $\operatorname{tg} 90^0$; 4) $\operatorname{ctg} 45^0$;

5) $\sin 60^0$; 6) $\cos 45^0$; 7) $\operatorname{tg} 180^0$; 8) $\operatorname{ctg} 60^0$;

9) $\sin 90^0$; 10) $\operatorname{tg} 45^0$; 11) $\cos 180^0$; 12) $\operatorname{ctg} 270^0$.

Задание 5. А. Прочитайте текст.

В математике величину угла измеряют в градусах или в радианах. Один радиан примерно равен 57^0, $\pi = 180^0$. Выразим 1^0 через π. Получим $1^0 = \frac{\pi}{180}$.

Выразим 30^0 через радианы. Так как $1^0 = \frac{\pi}{180}$, то $30^0 = 1^0 \cdot 30 = 30 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{6}$.

Б. Выполните задание по образцу.

Образец. $30^0 = \frac{\pi}{6}$ – тридцать градусов равно пи **на** шесть.

1) 60^0; 2) 120^0; 3) -60^0; 4) 180^0;

5) 45^0; 6) 135^0; 7) -45^0; 8) 270^0;

9) 90^0; 10) 150^0; 11) -90^0; 12) 360^0.

Задания

Задание 1. Запишите слова в правильной форме.

1. (Логарифм) ____________ положительного числа b по основанию a, где $a > 0$, $a \neq 1$, называется показатель степени, в который надо возвести число a, чтобы получить число b.

2. Число a в выражении $\log_a b$ называют (основание) ________________ логарифма, число b называют (аргумент) _______________ логарифма.

3. Если $\log_a b = c$, то число c называют (значение) ______________ логарифма.

4. Логарифм единицы по любому основанию равен (нуль)______________ .

5. Равенство $a^{\log_a b} = b$ называется основным логарифмическим (тождество) ________________ .

6. (Логарифмирование) __________________________ называют операцию нахождения логарифма числа b по основанию a.

7. Точки O, A и B называют (вершины) ______________ треугольника OAB.

8. Отрезки OA, AB и OB называют (стороны) _________ треугольника OAB.

9. Если в ΔOAB угол при вершине O равен 90^0, то сторона AB называется (гипотенуза) _____________ .

10. Отношение противолежащего катета к гипотенузе называется (синус) ______________ угла α.

11. (Тангенс) __________ угла α называется отношение противолежащего катета к прилежащему.

12. Сумма углов треугольника равна ста восьмидесяти (градусы) _______ .

13. Если $\alpha = 90^0$, то угол α называют прямым (угол) _______ .

14. Треугольник, в котором один угол прямой, называется прямоугольным (треугольник) _________________ .

15. Если $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, то угол α называют острым (угол) _________ .

16. Формула $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ называется основным тригонометрическим (тождество) ________________ .

Задание 2. Выполните задание по образцу.

Образец. $\log_3 9$. → $\log_3 9 = 2$ – логарифм девят**и** **по** основани**ю** три рав**ен** дв**ум**. Число 3 – это основание логарифма. Число 9 – аргумент логарифма. Число 2 – это значение логарифма.

1) $\log_2 16$;	2) $\ln e^2$;	3) $\log_7 49$;	4) $\lg 1000$;
5) $\log_3 27$;	6) $\lg 0{,}1$;	7) $\log_8 64$;	8) $\log_{0,25} 1$;
9) $\log_3 \dfrac{1}{27}$;	10) $\ln \dfrac{1}{e}$;	11) $\log_{0,2} \dfrac{1}{25}$;	12) $\log_4 \dfrac{1}{64}$.

Задание 3. Запишите глаголы в скобках в форме первого лица множественного числа будущего времени.

Образец. (Записать) уравнение → **Запишем** уравнение.

1. (Внести) ________________ множитель под знак корня.
2. (Вынести) ________________ общий множитель за скобки.
3. (Выполнить) ________________ задания.
4. (Выучить) ________________ формулы.
5. (Вычислить) ________________ синус угла 45^0.
6. (Изучить) ________________ конструкцию.
7. (Использовать) ________________ свойства степени.
8. (Запомнить) ________________ тригонометрические формулы.
9. (Найти) ________________ значение логарифма.
10. (Назвать) ________________ основание логарифма.
11. (Повторить) ________________ определения.
12. (Построить) ________________ треугольник.
13. (Преобразовать) ________________ выражение.
14. (Применить) ________________ свойства логарифмов.
15. (Прочитать) ________________ текст.
16. (Разложить) ________________ выражение на множители.
17. (Раскрыть) ________________ скобки.
18. (Решить) ________________ задачу.
19. (Установить) ________________ соответствие.

Задание 4. Запишите в предложения слова *логарифм, логарифмический, логарифмирование* в правильной форме.

1. Запись $\log_a b$ читают: __________________ b по основанию a.
2. __________________ единицы по любому основанию равен нулю.
3. ___________________ – это операция, обратная операции возведения в степень.
4. Назовите основное __________________ тождество.
5. Прочитайте свойства __________________.
6. Операцию нахождения __________________ числа b по основанию a называют __________________.
7. ________________ произведения равен сумме _____________________ .
8. Разность ________________ равна _________________ частного.
9. ____________________ b по основанию 10 называется десятичным __________________ .

Задание 5. Выберите правильный вариант ответа.

1. Число a в выражении $\log_a b = c$ – это … логарифма.

(А) аргумент; (Б) значение; (В) основание.

2. Число b в выражении $\log_a b = c$ – это … логарифма.

(А) аргумент; (Б) значение; (В) основание.

3. Число c в выражении $\log_a b = c$ – это … логарифма.

(А) аргумент; (Б) значение; (В) основание.

4. Логарифм числа b по основанию 10 называют … .

(А) логарифмированием; (Б) десятичным логарифмом; (В) натуральным логарифмом.

5. Логарифм числа b по основанию e, где $e \approx 2{,}72$, называют … .

(А) логарифмированием; (Б) десятичным логарифмом; (В) натуральным логарифмом.

6. Операцию нахождения логарифма числа b по основанию a называют … .

(А) логарифмированием; (Б) десятичным логарифмом; (В) натуральным логарифмом.

7. Логарифм a по основанию a равен … .

(А) нулю; (Б) одному.

8. Логарифм единицы по любому основанию равен … .

(А) нулю; (Б) одному.

9. Логарифм произведения – это … логарифмов.

(А) разность; (Б) сумма.

10. Логарифм частного – это … логарифмов.

(А) разность; (Б) сумма.

11. Логарифм числа b по основанию a … так: $\log_a b$.

(А) вычисляют; (Б) обозначают; (В) называют.

12. Чтобы … $\log_2 16$, надо найти такое число c, что $2^c = 16$.

(А) вычислить; (Б) обозначить; (В) назвать.

13. Если α – угол при вершине A в прямоугольном ΔABC, то катет AC называют … катетом.

(А) прямым; (Б) противолежащим; (В) прилежащим.

14. Если α – угол при вершине A в прямоугольном ΔABC, то катет BC называют … катетом.

(А) прямым; (Б) противолежащим; (В) прилежащим.

15. $\angle ACB = 90^0$ называют … углом.

(А) прямым; (Б) противолежащим; (В) прилежащим.

16. Отношение прилежащего катета к гипотенузе – это … угла α.

(А) синус; (Б) косинус; (В) тангенс; (Г) котангенс.

17. Отношение прилежащего катета к противолежащему – это … угла α.

(А) синус; (Б) косинус; (В) тангенс; (Г) котангенс.

18. Отношение противолежащего катета к гипотенузе – это … угла α.

(А) синус; (Б) косинус; (В) тангенс; (Г) котангенс.

19. Отношение противолежащего катета к прилежащему – это … угла α.

(А) синус; (Б) косинус; (В) тангенс; (Г) котангенс.

20. Сторона AB в прямоугольном ΔABC, где $\angle ACB = 90^0$, называется … .

(А) углом; (Б) катетом; (В) гипотенузой.

21. Сторона AC в прямоугольном ΔABC, где $\angle ACB = 90^0$, называется … .

(А) углом; (Б) катетом; (В) гипотенузой.

Тема 16. Линейные и квадратные уравнения

16.1. Линейные уравнения

Словарь к теме

коэффицие́нт *при чём? / чего?*	неизве́стное
уравне́ние	переме́нная
лине́йное уравне́ние	значе́ние переме́нной
просте́йшее уравне́ние	равноси́льно *чему?*
уравне́ние *с чем?* с неизве́стным	име́ть *что?* / не име́ть *чего?*
ко́рень уравне́ния	обраща́ть – обрати́ть *что? во что?*
реше́ние уравне́ния	переноси́ть – перенести́ *что? откуда? куда?*
член уравне́ния	подставля́ть – подста́вить *что? куда?*
свобо́дный член уравне́ния	убежда́ться – убеди́ться *в чём?*
удовлетворя́ть уравне́нию	противополо́жный зна́к
схе́ма реше́ния	о́ба, о́бе
не́сколько *чего?*	

Символ читают:

$\Leftrightarrow$ – тогда и только тогда, когда (эквивалентно, равносильно).

Задание 1. Выполните задание по образцу.

Образец. $3x + 8 = 0$ – это **линейное уравнение**, потому что оно содержит переменную x **в первой степени**.

1) $2x + 3 = 1$; 2) $-x + 7 = x$; 3) $6 + x = 10$; 4) $5x + 6 = 11$;
5) $5x - 8 = 0$; 6) $4x - 5 = 3x$; 7) $1 - 2x = 3$; 8) $9x - 6 = 2x$;
9) $3x + 1 = 2$; 10) $x + 9 = 2x$; 11) $5 - x = x$; 12) $x + 2 = 5x$.

Задание 2. Выполните задание по образцу.

Образец. $3x + 8 = 0$ – это линейное уравнение; 3 – это **коэффициент при** x, 8 – это **свободный член уравнения**.

1) $2x + 3 = 0$; 2) $-x + 7 = 0$; 3) $6 + 5x = 0$; 4) $3x + 2 = 0$;
5) $5x - 8 = 0$; 6) $4x - 12 = 0$; 7) $1 - 2x = 0$; 8) $7x - 6 = 0$;
9) $3x + 1 = 0$; 10) $x + 19 = 0$; 11) $5 - x = 0$; 12) $x + 6 = 0$.

Задание 3. Прочитайте записи по образцу.

Образец. Запись $x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = -8$ **читают:** $x + 8 = 0$ **тогда и только тогда, когда** $x = -8$.

1) $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$; 2) $x - 6 = 1 \Leftrightarrow x = 7$; 3) $2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$;
4) $x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5$; 5) $x - 7 = 2 \Leftrightarrow x = 9$; 6) $3x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -2$;
7) $x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = -7$; 8) $x - 3 = 2 \Leftrightarrow x = 5$; 9) $x + 17 = 1 \Leftrightarrow x = -16$;
10) $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$; 11) $x - 3 = 5 \Leftrightarrow x = 8$; 12) $2x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = -5$.

Задание 4. А. Прочитайте конструкции и примеры.

Подставить что? (В. п.) вместо чего? (Р. п.)
Подставить вместо чего? (Р. п.) что? (В. п.)

Подставить *число* 2,5 вместо *неизвестного х*.
Подставить вместо *неизвестного х число* 2,5.

Б. Выполните задание по образцу.
Образец. 1. Подставим в уравнение $2x - 5 = 0$ **вместо** x число 2,5:

$$2 \cdot 2{,}5 - 5 = 0.$$

Получили **верное числовое равенство**.
Следовательно, значение $x = 2{,}5$ – это **корень уравнения** $2x - 5 = 0$.
2. Подставим в уравнение $2x - 5 = 0$ **вместо** x число 2:

$$2 \cdot 2 - 5 = -1 \neq 0.$$

Получили **неверное числовое равенство**.
Следовательно, значение $x = 2$ **не является корнем уравнения** $2x - 5 = 0$.

1) $2x + 7 = 0$, $x = 3{,}5$;	2) $6 + 5x = 0$, $x = 5$;	3) $2x + 4 = 0$, $x = -2$;
4) $5x - 8 = 0$, $x = 1{,}4$;	5) $4x + 8 = 0$, $x = 3$;	6) $3x + 9 = 0$, $x = -3$;
7) $7x - 6 = 0$, $x = 0{,}5$;	8) $3x - 1 = 0$, $x = 2$;	9) $2x - 3 = 0$, $x = 1{,}5$;
10) $5 - x = 0$, $x = 5{,}5$;	11) $x - 2 = 3$, $x = 4$;	12) $1 - 2x = 0$, $x = 0{,}5$.

Прочитайте.

Уравнение – это равенство двух выражений, которое содержит одну или несколько неизвестных переменных.

Значения переменных, при которых уравнение обращается в верное числовое равенство, называют **корня́ми уравнения**, или **решениями уравнения**. Уравнение может иметь только один ко́рень, несколько корне́й, бесконечное множество корне́й или не иметь корне́й.

Решить уравнение – значит найти все его ко́рни или убедиться, что уравнение не имеет корне́й.

Линейным уравнением с одним неизвестным называется уравнение, которое содержит одну переменную в первой степени.

Например, уравнение $5x + 2 = 12$ – это линейное уравнение. Оно содержит переменную x в первой степени.

Простейшим линейным уравнением называется уравнение вида $ax + b = 0$, где x – неизвестное, a и b – числа, $a \neq 0$. Число a называется **коэффициентом при неизвестном**, число b – **свободным членом**.

Например, $2x - 5 = 0$ – это линейное уравнение с неизвестным x. Если в уравнение подставить число 2,5 вместо x, то получим верное числовое равенство:

$$2 \cdot 2{,}5 - 5 = 0.$$

Следовательно, значение $x = 2{,}5$ – это корень уравнения $2x - 5 = 0$.
На рисунке 15 изображена схема решения линейного уравнения.

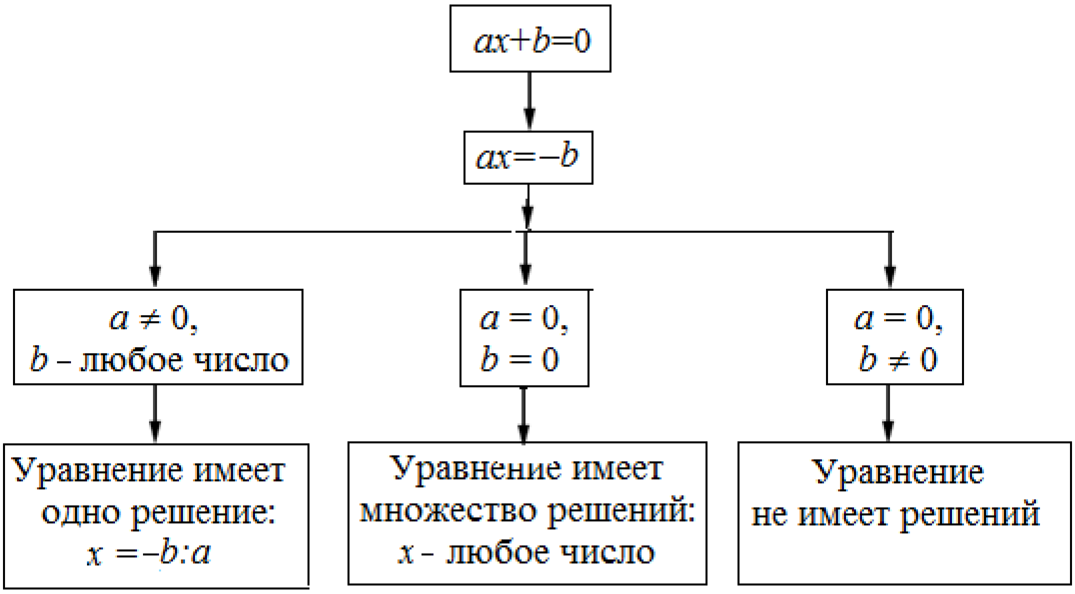


Рис. 15. Схема решения простейшего линейного уравнения

Ответьте на вопросы и выполните задания.
1. Что называется уравнением?
2. Что называется корнем уравнения?
3. Что значит решить уравнение?
4. Как называется уравнение вида $ax + b = 0$, где a и b – числа, $a \neq 0$?
5. Как называется число a в уравнении $ax + b = 0$?
6. Как называется число b в уравнении $ax + b = 0$?
7. Сколько корней может иметь линейное уравнение?
8. Когда линейное уравнение имеет одно решение?
9. Когда линейное уравнение не имеет решений?
10. Когда линейное уравнение имеет множество решений?
11. Запишите линейное уравнение, корень которого равен одному.
12. Запишите линейное уравнение, которое не имеет решений.

Задание 5. Решите линейное уравнение.
Образец. Решите уравнение $5x + 2 = 12$.
Решение. Перенесём в правую часть уравнения число 2 с противоположным знаком

$$5x = 12 - 2.$$

Приведём подобные слагаемые в правой части уравнения

$$5x = 10.$$

Разделим обе части равенства на 5. Значение $x = 2$ – это корень уравнения.
Ответ: $x = 2$.

1) $2x + 3 = 1$;	2) $-x + 7 = x$;	3) $6 + x = 2x$;	4) $5x + 2 = 17$;
5) $5x - 8 = 0$;	6) $4x - 5 = 2x$;	7) $3 - 2x = x$;	8) $9x - 6 = 12$;
9) $3x + 1 = 2$;	10) $x + 8 = 9x$;	11) $6 - x = x$;	12) $x + 2 = 15$.

Задание 6. А. Прочитайте пример и решение.

Пример. Решите уравнение $5\cdot(x+3)=3\cdot(x-1)+2$.

Решение. Сначала раскроем скобки в обеих частях равенства

$$5x + 15 = 3x - 3 + 2.$$

Перенесём слагаемые с переменными в одну часть уравнения, числа – в другую часть уравнения и приведём подобные слагаемые

$$5x - 3x = -15 - 3 + 2 \Leftrightarrow 2x = -16.$$

Разделим обе части уравнения на 2 и получим

$$2x : 2 = -16 : 2 \Leftrightarrow x = -8.$$

Значение $x = -8$ – это корень уравнения.

Ответ: $x = -8$.

Б. Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Почему уравнение $5\cdot(x+3)=3\cdot(x-1)+2$ линейное?
2. Назовите преобразования уравнения.
3. Назовите первое преобразование уравнения.
4. Сколько корней имеет уравнение $5\cdot(x+3)=3\cdot(x-1)+2$?
5. Почему $x = -8$ является корнем уравнения?

16.2. Квадратные уравнения

Словарь к теме

квадра́тное уравне́ние по́лное квадра́тное уравне́ние непо́лное квадра́тное уравне́ние действи́тельный ко́рень	дискримина́нт квадра́тного уравне́ния прира́внивать – приравня́ть *что? к чему?* отли́чен *от чего?* / не ра́вен *чему?* хотя́ бы оди́н

Задание 7. Выполните задание по образцу.

Образец. $x^2+3x+2=0$ – это **квадратное уравнение**; $a = 1$, $b = 3$ и $c = 2$ – это **коэффициенты** квадратного уравнения; $c = 2$ – это **свободный член** квадратного уравнения.

1) $x^2+2x+1=0$; 2) $-7x^2+x-9=0$; 3) $5x^2-3x+6=0$;

4) $x^2-4x+2=0$; 5) $-2x^2-3x+1=0$; 6) $3x^2-2x+5=0$;

7) $x^2+5x-2=0$; 8) $-3x^2+x+12=0$; 9) $-4x^2+x+1=0$;

10) $x^2+7x-1=0$; 11) $2x^2+19x-4=0$; 12) $-3x^2-x+1=0$.

Задание 8. Выполните задание по образцу.

Образец. 1) $x^2+3x+2=0$ – это **полное квадратное уравнение**, потому что $a \neq 0$, $b \neq 0$ и $c \neq 0$;

2) $x^2+3x=0$ – это **неполное квадратное уравнение**, потому что $c = 0$;

3) $x^2+3=0$ – это **неполное квадратное уравнение**, потому что $b = 0$;

4) $5x^2=0$ – это **неполное квадратное уравнение**, потому что $b = c = 0$.

1) $x^2+2x-1=0$;	2) $x^2+2x=0$;	3) $2x^2=0$;	4) $x^2+1=0$;
5) $x^2+3x+2=0$;	6) $x^2-5x=0$;	7) $-x^2=0$;	8) $x^2-2=0$;
9) $x^2-5x+3=0$;	10) $x^2-x=0$;	11) $9x^2=0$;	12) $x^2-8=0$.

Задание 9. Прочитайте записи.

1) $D=b^2-4ac=16$;	2) $D=b^2-4ac=121$;	3) $D=b^2-4ac=-4$;
4) $D=b^2-4ac=25$;	5) $D=b^2-4ac=169$;	6) $D=b^2-4ac=-9$;
7) $D=b^2-4ac=81$;	8) $D=b^2-4ac=144$;	9) $D=b^2-4ac=-5$;
10) $D=b^2-4ac=0$;	11) $D=b^2-4ac=64$;	12) $D=b^2-4ac=-1$.

Задание 10. Прочитайте записи по образцу.

Образец. 1) $\sqrt{D}=2$ – корень **из** D рав**ен** двум (корень **из** дискриминант**а** рав**ен** двум);

2) $\sqrt{D}=\sqrt{7}$ – корень **из** D рав**ен** корн**ю** **из** семи (корень **из** дискриминант**а** рав**ен** корн**ю** **из** семи).

1) $\sqrt{D}=3$;	2) $\sqrt{D}=11$;	3) $\sqrt{D}=13$;	4) $\sqrt{D}=\sqrt{2}$;
5) $\sqrt{D}=5$;	6) $\sqrt{D}=12$;	7) $\sqrt{D}=25$;	8) $\sqrt{D}=\sqrt{3}$;
9) $\sqrt{D}=9$;	10) $\sqrt{D}=8$;	11) $\sqrt{D}=1$;	12) $\sqrt{D}=\sqrt{6}$.

Задание 11. Прочитайте записи по образцу.

Образец. $x_{1,2}=\dfrac{2\pm\sqrt{16}}{2}$ – x один, два рав**ен** два плюс минус корень **из** шестнадцат**и** разделить на два.

1) $x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{4}}{2}$;	2) $x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{25}}{4}$;	3) $x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{2}}{2}$;
4) $x_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{9}}{6}$;	5) $x_{1,2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{64}}{12}$;	6) $x_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{3}}{4}$;
7) $x_{1,2}=\dfrac{6\pm\sqrt{3}}{2}$;	8) $x_{1,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{81}}{2}$;	9) $x_{1,2}=\dfrac{4\pm\sqrt{5}}{2}$;
10) $x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1}}{4}$;	11) $x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{16}}{6}$;	12) $x_{1,2}=\dfrac{7\pm\sqrt{7}}{6}$.

Задание 12. Решите неполное квадратное уравнение.

Образец. 1. $x^2+16=0 \Leftrightarrow x^2=-16$. Следовательно, уравнение не имеет действительных корней.

2. $x^2-16=0 \Leftrightarrow x^2=16 \Leftrightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{16}=\pm 4.$

Следовательно, уравнение имеет два действительных корня:

$$x_1=-4,\ x_2=4.$$

3. $x^2+2x=0 \Leftrightarrow x\cdot(x+2)=0$. Произведение множителей равно нулю, если хотя бы один из множителей равен нулю:

$$x = 0 \text{ или } x + 2 = 0.$$

Следовательно, уравнение имеет два действительных корня:

$$x_1=0,\ x_2=-2.$$

1) $x^2+81=0;$	2) $x^2+4x=0;$	3) $2x^2=0;$	4) $x^2+9=0;$
5) $x^2-81=0;$	6) $x^2-5x=0;$	7) $-x^2=0;$	8) $x^2-2=0;$
9) $x^2+25=0;$	10) $x^2-x=0;$	11) $9x^2=0;$	12) $x^2-8=0.$

Прочитайте.

Квадратным уравнением называется уравнение вида

$$ax^2+bx+c=0,$$

где a, b и c – некоторые числа, $a \neq 0$, x – неизвестное. Числа a, b и c называются **коэффициентами квадратного уравнения**. Коэффициент c называется **свободным членом уравнения**.

Квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ называют **полным**, если все коэффициенты уравнения отличны от нуля (не равны нулю).

Квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ называют **неполным**, если хотя бы один из коэффициентов b или c равен нулю.

Например, квадратное уравнение $2x^2+x-1=0$ – это полное квадратное уравнение, потому что $a = 2$, $b = 1$ и $c = -1$.

Квадратное уравнение $2x^2+x=0$ – это неполное квадратное уравнение, т. к. $c = 0$.

Чтобы решить **полное квадратное уравнение**, надо сначала найти **дискриминант квадратного уравнения**. Дискриминант квадратного уравнения находят по формуле

$$D=b^2-4ac.$$

Рассмотрим три случая решения квадратного уравнения.

Случай	**Корни квадратного уравнения**
1. Пусть $D > 0$.	Уравнение имеет 2 действительных различных корня, которые находят по формуле $$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$
2. Пусть $D = 0$.	Уравнение имеет 2 одинаковых действительных корня, которые находят по формуле $$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}.$$
3. Пусть $D < 0$.	Уравнение не имеет действительных корней.

Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Какое уравнение называется квадратным уравнением?
2. По какой формуле находят дискриминант квадратного уравнения?
3. Когда квадратное уравнение имеет два различных корня?
4. По какой формуле находят корни квадратного уравнения?
5. Когда квадратное уравнение имеет два одинаковых корня?
6. Когда квадратное уравнение не имеет действительных корней?
7. Какое квадратное уравнение называется полным? Приведите пример.
8. Какое квадратное уравнение называется неполным? Приведите пример.

Задание 13. Решите квадратные уравнения.

Образец. Решите уравнение $x^2 + 3x + 2 = 0$.

Решение. Найдём дискриминант квадратного уравнения

$$D = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1.$$

Уравнение имеет два действительных различных корня, т. к. $D > 0$.
Найдём корни уравнения

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm 1}{2} \Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = -1.$$

Ответ: $x_1 = -2$ и $x_2 = -1$ – корни квадратного уравнения.

1) $x^2 + 2x + 1 = 0$;	2) $x^2 - x - 2 = 0$;	3) $x^2 - 4x + 4 = 0$;
4) $x^2 - x - 12 = 0$;	5) $x^2 + 5x + 6 = 0$;	6) $2x^2 + 3x + 1 = 0$;
7) $2x^2 + x + 1 = 0$;	8) $x^2 + 4x + 5 = 0$;	9) $2x^2 + 3x - 2 = 0$;
10) $x^2 - 5x + 6 = 0$;	11) $x^2 + 2x + 7 = 0$;	12) $5x^2 - 14x - 3 = 0$.

16.3. Разложение квадратного трёхчлена на множители

Задание 14. Выполните задание по образцу.

Образец. $x^2 - x - 2 = (x+1)\cdot(x-2)$ – это разложение квадратного трёхчлена на множители; $x_1 = -1$ и $x_2 = 2$ – это корни квадратного трёхчлена.

1) $x^2 + x - 2 = (x-1)\cdot(x+2)$;	2) $2x^2 + x - 1 = (2x-1)\cdot(x+1)$;
3) $x^2 + x - 6 = (x+3)\cdot(x-2)$;	4) $2x^2 + 3x + 1 = (2x+1)\cdot(x+1)$;
5) $x^2 + 5x + 6 = (x+3)\cdot(x+2)$;	6) $2x^2 - 3x - 2 = (2x+1)\cdot(x-2)$;
7) $x^2 - x - 12 = (x+3)\cdot(x-4)$;	8) $4x^2 - 12x + 9 = (2x-3)\cdot(2x-3)$.

Прочитайте.

Квадратным трёхчленом называется выражение вида $ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$.

Значения переменной x, которые обращают квадратный трёхчлен в нуль, называют **корнями квадратного трёхчлена** (или **нулями квадратного трёхчлена**).

Если квадратный трёхчлен имеет корни x_1 и x_2, то его можно разложить на множители по формуле

$$ax^2 + bx + c = a\cdot(x - x_1)\cdot(x - x_2).$$

Пример. Разложите квадратный трёхчлен $x^2 + 2x - 15$ на множители.

Найдём нули квадратного трёхчлена. Для этого приравняем квадратный трёхчлен к нулю и решим квадратное уравнение

$$x^2 + 2x - 15 = 0.$$

Найдём дискриминант квадратного уравнения:

$$D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4\cdot 1\cdot(-15) = 4 + 60 = 64.$$

Так как $D > 0$, то квадратное уравнение имеет два различных действительных корня.

Найдём корни квадратного уравнения:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2\cdot 1} = \frac{-2 \pm 8}{2}.$$

Получим:

$$x_1 = \frac{-2-8}{2} = -5;\ x_2 = \frac{-2+8}{2} = 3.$$

Разложим квадратный трёхчлен $x^2 + 2x - 15$ на множители по формуле

$$ax^2 + bx + c = a\cdot(x - x_1)\cdot(x - x_2).$$

Получим:

$$x^2 + 2x - 15 = 1\cdot\big(x - (-5)\big)\cdot(x-3) \text{ или } x^2 + 2x - 15 = (x+5)\cdot(x-3).$$

Следовательно, выражение $(x+5)\cdot(x-3)$ – это разложение квадратного трёхчлена $x^2 + 2x - 15$ на множители.

Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Что называется квадратным трёхчленом?
2. Что называют корнями квадратного трёхчлена?
3. Что надо сделать, чтобы найти нули квадратного трёхчлена?
4. Чему равен дискриминант квадратного уравнения $x^2+2x-15=0$?
5. Сколько корней имеет квадратный трёхчлен $x^2+2x-15$? Почему?
6. По какой формуле находят корни квадратного уравнения?
7. Запишите разложение квадратного трёхчлена $x^2+2x-15$ на множители.

Задание 15. Разложите квадратные трёхчлены на множители.

1) x^2-6x+5; 2) x^2+x-6; 3) x^2+x-30; 4) $2x^2-5x-3$;
5) $6x^2+x-2$; 6) x^2-2x+1; 7) x^2-6x+9; 8) $3x^2+2x-8$;
9) $x^2+3x-10$; 10) x^2+5x+6; 11) x^2-x-12; 12) $2x^2-7x-15$.

Задания

Задание 1. Решите линейные уравнения.

1) $\frac{3x}{4}+1=x$; 2) $\frac{x-1}{3}=\frac{2x+1}{2}$; 3) $\frac{x+2}{3}+x=1-\frac{3x}{4}$;
4) $3x-6=5x$; 5) $3\cdot(2x-3)=4x$; 6) $3\cdot(5x-6)=2\cdot(4x-5)$;
7) $4x=7x+9$; 8) $2\cdot(x-7)=6\cdot(x+1)-3$; 9) $4\cdot(3x-1)=1-5\cdot(x+4)$.

Задание 2. Запишите в предложения глаголы в правильной форме.

А) *найти, содержать, убедиться*;

1. Решить уравнение – значит ________ все его корни или ______________, что уравнение не имеет корней.
2. Уравнение – это равенство двух выражений, которое _______________ одну или несколько неизвестных переменных.

Б) *привести, раскрыть*;

3. _______________ уравнение к виду $ax + b = 0$.
4. Сначала _______________ скобки в обеих частях равенства.
5. ______________ подобные слагаемые.

В) *вынести, находить, получить, разделить*;

6. _______________ обе части уравнения на 2.
7. _______________ общий множитель за скобки.
8. Дискриминант квадратного уравнения _______________ по формуле $D=b^2-4ac$.
9. Если в уравнение $2x-5=0$ подставим число 2,5 вместо x, то _______________ верное числовое равенство.

Г) *иметь, обращать, приравнять, разложить*;

10. Если квадратный трёхчлен _______________ корни x_1 и x_2, то его можно _______________________ на множители.

11. Значения переменной x, которые ______________ квадратный трёхчлен в нуль, называют корнями квадратного трёхчлена.

12. Найдём нули квадратного трёхчлена, для этого ______________ квадратный трёхчлен к нулю.

13. _____________ квадратный трёхчлен на множители.

Задание 3. Запишите слова в скобках в правильной форме.

1. Все коэффициенты полного квадратного уравнения отличны от (нуль) ___________.

2. Если квадратный трёхчлен имеет корни x_1 и x_2, то его можно разложить на (множители) ___________.

3. Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ называют неполным, если хотя бы один из (коэффициенты) _____________________ равен нулю.

4. (Корни) ____________ уравнения называются значения переменных, при которых уравнение обращается в верное числовое равенство.

5. Пусть в (уравнение) _________ $ax^2 + bx + c = 0$ коэффициент $b = 0$, $c \neq 0$.

6. Уравнение $5x + 2 = 12$ содержит переменную x в первой (степень) ____________.

Задание 4. Выберите правильный вариант ответа.

1. Выражение вида $ax^2 + bx + c,$ где $a \neq 0$, называется … трёхчленом.

(А) квадратным; (Б) простейшим; (В) свободным.

2. Линейное уравнение вида $ax + b = 0$, где x – неизвестное, a и b – числа, $a \neq 0$, – это … линейное уравнение.

(А) квадратное; (Б) простейшее; (В) свободное.

3. Число b в уравнении $ax + b = 0$ – это … член.

(А) квадратный; (Б) простейший; (В) свободный.

4. Число a в уравнении $ax + b = 0$ – это … при неизвестном.

(А) дискриминант; (Б) корень; (В) коэффициент.

5. Выражение $D = b^2 - 4ac$ – это … квадратного уравнения.

(А) дискриминант; (Б) корень; (В) коэффициент.

6. Значения переменных, при которых уравнение обращается в верное числовое равенство, – это … уравнения.

(А) дискриминанты; (Б) корни; (В) коэффициенты.

7. Если все коэффициенты квадратного уравнения отличны от нуля, то это … квадратное уравнение.

(А) бесконечное; (Б) неизвестное; (В) полное.

8. Уравнение – это равенство двух выражений, которое содержит одну или несколько … переменных.

(А) бесконечных; (Б) неизвестных; (В) полных.

9. Уравнение может иметь только один корень, несколько корней, … множество корней или не иметь корней.

(А) бесконечное; (Б) неизвестное; (В) полное.

Тема 17. Уравнения, сводящиеся к квадратным

17.1. Биквадратные уравнения

Словарь к теме

биквадра́тное уравне́ние первонача́льное уравне́ние но́вая переме́нная исхо́дная переме́нная	заме́на переме́нной относи́тельно *чего?* сводя́щийся (кото́рый сво́дится)

Задание 1. Выполните задание по образцу.

Образец. $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$ – это **биквадратное уравнение**. Сделаем замену переменной $x^2 = t$ и получим квадратное уравнение

$$t^2 + 3t + 2 = 0.$$

1) $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$; 2) $x^4 + 5x^2 + 6 = 0$; 3) $2x^4 + 3x^2 + 1 = 0$;

4) $x^4 - x^2 - 12 = 0$; 5) $x^4 + 4x^2 + 5 = 0$; 6) $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$;

7) $2x^4 + x^2 + 1 = 0$; 8) $x^4 - 4x^2 + 4 = 0$; 9) $2x^4 + 3x^2 - 2 = 0$;

10) $x^4 - x^2 - 2 = 0$; 11) $x^4 + 2x^2 + 7 = 0$; 12) $5x^4 - 14x^2 - 3 = 0$.

Прочитайте.

Биквадратным уравнением называется уравнение вида

$$ax^4 + bx^2 + c = 0,$$

где $a \neq 0$.

Решение биквадратного уравнения сводится к решению квадратного уравнения с помощью замены $x^2 = t$, где $t \geq 0$.

Пример. Решите биквадратное уравнение $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$.

Решение. Сделаем замену переменной $x^2 = t$, где $t \geq 0$.

Подставим в первоначальное уравнение вместо x^2 новую переменную t. Получим квадратное уравнение относительно t

$$t^2 - 3t - 4 = 0.$$

Найдём дискриминант и корни квадратного уравнения

$$D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 25;$$

$$t_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{3+5}{2} = 4; \; t_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{3-5}{2} = -1.$$

Значение $t_2 = -1$ не удовлетворяет условию $t \geq 0$.

Вернёмся к исходной переменной и найдём значения x

$$x^2 = t_1 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{4} = \pm 2.$$

Ответ: $x_1 = 2$, $x_2 = -2$.

Ответьте на вопросы и выполните задание.

1. Какое уравнение называется биквадратным?

2. Какую замену сделали в биквадратном уравнении $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$?

3. Какое уравнение получили после замены переменной в уравнении $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$?

4. Сколько корней имеет уравнение $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$?

5. Назовите корни уравнения $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$.

Задание 2. Решите биквадратные уравнения.

1) $2x^4 + x^2 - 1 = 0$; 2) $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$; 3) $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$;

4) $x^4 - x^2 - 12 = 0$; 5) $x^4 + 4x^2 + 5 = 0$; 6) $x^4 - 6x^2 + 5 = 0$;

7) $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$; 8) $x^4 - 5x^2 - 6 = 0$; 9) $x^4 - 4x^2 + 4 = 0$;

10) $x^4 - x^2 - 2 = 0$; 11) $2x^4 - 3x^2 - 2 = 0$; 12) $5x^4 - 14x^2 - 3 = 0$.

17.2. Уравнения, которые сводятся к квадратным

Уравнения вида $a \cdot \left(P(x)\right)^2 + b \cdot P(x) + c = 0$, где $a \neq 0$, $P(x)$ – это алгебраическое выражение, можно свести к квадратным уравнениям с помощью замены $P(x) = t$.

Пример. Решите уравнение $(x^2 - 5x + 7)^2 - (x^2 - 5x + 7) = 0$.

Сделаем замену переменной $x^2 - 5x + 7 = t$ и получим квадратное уравнение относительно переменной t

$$t^2 - t = 0.$$

Решим неполное квадратное уравнение $t^2 - t = 0$. Вынесем общий множитель t за скобки

$$t \cdot (t - 1) = 0.$$

Произведение равно нулю, если хотя бы один из множителей равен нулю:

$$t \cdot (t - 1) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ или } t - 1 = 0.$$

Следовательно, $t_1 = 0$, $t_2 = 1$ – корни квадратного уравнения $t^2 - t = 0$.

Вернёмся к исходной переменной и решим два квадратных уравнения.

1. При $t_1 = 0$ получим квадратное уравнение $x^2 - 5x + 7 = 0$.

Найдём дискриминант квадратного уравнения

$$D = b^2 - 4ac = -3.$$

Так как $D < 0$, то уравнение не имеет действительных корней.

2. При $t_2 = 1$ получим квадратное уравнение $x^2 - 5x + 7 = 1$, или $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Найдём дискриминант квадратного уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$:

$$D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1.$$

Так как $D > 0$, то уравнение имеет два различных действительных корня. Найдём корни уравнения

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{5+1}{2} = 3; \;\; x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{5-1}{2} = 2.$$

Ответ: $x_1 = 3$, $x_2 = 2$.

Ответьте на вопросы.

1. Какой вид имеет уравнение, сводящееся к квадратному?
2. Какую замену надо сделать в уравнении $a\cdot\left(P(x)\right)^2 + b\cdot P(x) + c = 0$, чтобы свести его к квадратному?
3. Какую замену сделали в уравнении $(x^2-5x+7)^2-(x^2-5x+7)=0$?
4. К какому уравнению свели уравнение $(x^2-5x+7)^2-(x^2-5x+7)=0$?
5. Почему квадратное уравнение $x^2-5x+7=0$ не имеет корней?
6. Сколько корней имеет уравнение $x^2-5x+6=0$? Почему?

Задание 3. Решите уравнения.

1) $(x^2+2x)^2-7(x^2+2x)-8=0$;
2) $(x^2+x)\cdot(x^2+x-2)=24$;
3) $(x^2+2x)^2-2(x^2+2x)-3=0$;
4) $(x^2-3x)\cdot(x^2-3x-2)=15$;
5) $(x^2+2x)^2+4(x^2+2x)+3=0$;
6) $(x^2-x-2)\cdot(x^2-x+2)=32$.

Задания

Задание 1. Выберите правильный вариант ответа.

1. Биквадратное уравнение можно … к квадратному уравнению.
(А) подставить; (Б) вернёмся; (В) свести.

2. … к исходной переменной и решим два квадратных уравнения.
(А) Подставляется; (Б) Вернёмся; (В) Сводится.

3. … в первоначальное уравнение вместо x^2 новую переменную t.
(А) Подставим; (Б) Вернёмся; (В) Сведём.

4. Значение $t_2 = -1$ не удовлетворяет … $t \geq 0$.
(А) условие; (Б) условия; (В) условию.

5. Вернёмся … исходной переменной и найдём значения x.
(А) в; (Б) к; (В) с.

6. Сделаем замену переменной $x^2-5x+7=t$ и получим квадратное уравнение … переменной t.
(А) вида; (Б) можно; (В) относительно.

7. Биквадратным уравнением называется уравнение … $ax^4+bx^2+c=0$, где $a \neq 0$.
(А) вида; (Б) можно; (В) относительно.

Тема 18. Иррациональные уравнения

Словарь к теме

иррациона́льное уравне́ние
систе́ма нера́венств
неотрица́тельное значе́ние
избавля́ться – изба́виться *от чего?*

Задание 1. Выполните задание по образцу.

Образец. 1) $\sqrt{x^3+1}=x$ – корень **квадратный из** (x^3+1) равен x – это иррациональное уравнение, потому что оно содержит переменную x под знаком корня;

2) $\sqrt[3]{x^2-1}=2x$ – корень **кубический из** (x^2-1) равен $2x$ – это иррациональное уравнение, потому что оно содержит переменную x под знаком корня;

3) $\sqrt[4]{x+2}=3x$ – корень **четвёртой степени из** $(x+2)$ равен $3x$ – это иррациональное уравнение, потому что оно содержит переменную x под знаком корня.

1) $\sqrt{2x+1}=2$; 2) $\sqrt{x^2-1}=3x$; 3) $\sqrt[4]{1-x}=3$; 4) $\sqrt{x^4+2}=3$;

5) $\sqrt[3]{3x-2}=5$; 6) $\sqrt[3]{x^2-3}=6x$; 7) $\sqrt[3]{2-x}=2$; 8) $\sqrt[3]{x^3-1}=-1$;

9) $\sqrt[4]{x-4}=10$; 10) $\sqrt[5]{x+3}=2x$; 11) $\sqrt{1-3x}=x$; 12) $\sqrt[6]{x^5+1}=2$.

Задание 2. Выполните задание по образцу.

Образец. 1. Возведём **обе части** уравнения $\sqrt{x^3+1}=x$ **в квадрат**:

$$\left(\sqrt{x^3+1}\right)^2=x^2.$$

2. Возведём **обе части** уравнения $\sqrt[3]{x^2-1}=2x$ **в куб**:

$$\left(\sqrt[3]{x^2-1}\right)^3=(2x)^3.$$

3. Возведём **обе части** уравнения $\sqrt[4]{x+2}=3x$ **в четвёртую степень**:

$$\left(\sqrt[4]{x+2}\right)^4=(3x)^4.$$

1) $\sqrt[4]{1-x}=3$; 2) $\sqrt[3]{3x-2}=5$; 3) $\sqrt{1-3x}=x$;

4) $\sqrt[3]{2-x}=2$; 5) $\sqrt[3]{x^3-1}=-1$; 6) $\sqrt[5]{x+3}=2x$;

7) $\sqrt{2x+1}=2$; 8) $\sqrt{x^2-1}=3x$; 9) $\sqrt[6]{x^5+1}=2x$;

10) $\sqrt{x^4+2}=3$; 11) $\sqrt[4]{x-4}=10$; 12) $\sqrt[3]{x^2-3}=6$.

Задание 3. Выполните задание по образцу.

Образец. $\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[6]{x+2}-2=0$. Сделаем **замену переменной**

$$\sqrt[6]{x+2}=t, \text{ где } t\geq 0.$$

Получим квадратное уравнение

$$t^2+t-2=0.$$

1) $x+4\sqrt{x}-5=0$; 2) $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[6]{x+1}-2=0$; 3) $\sqrt{x}-2\sqrt[4]{x}+1=0$;

4) $\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}-2=0$; 5) $\sqrt{x-2}-\sqrt[4]{x-2}-6=0$; 6) $\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+5=0$;

7) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}-6=0$; 8) $\sqrt[6]{x+3}+6\sqrt[12]{x+3}+8=0$; 9) $\sqrt[6]{x}+5\sqrt[12]{x}+6=0$.

Задание 4. Выполните задание по образцу.

Образец. 1. Проверьте, является ли x = 23 корнем уравнения $\sqrt[3]{x+4}=3$.

Решение. Сделаем **проверку**. Подставим **в левую часть** уравнения **вместо** x **число** 23:

$$\sqrt[3]{23+4}=\sqrt[3]{27}=3.$$

Получили **верное равенство**. Следовательно, число 23 **является корнем уравнения**.

2. Проверьте, является ли x = 5 корнем уравнения $\sqrt{14-x}=2-x$.

Решение. Сделаем **проверку**. Подставим **в обе части** уравнения **вместо** x **число** 5:

$$\sqrt{14-5}=2-5 \Rightarrow \sqrt{9}=-3.$$

Получили **неверное равенство**, потому что $3\neq -3$. Следовательно, число 5 **не является корнем уравнения**.

1) $\sqrt{15-2x}=3,\ x=3$; 2) $\sqrt{10-x}=3,\ x=-1$; 3) $\sqrt{59-x}=8,\ x=-5$;

4) $\sqrt[3]{x-4}=3,\ x=31$; 5) $\sqrt[3]{x-10}=2,\ x=19$; 6) $\sqrt[5]{x-3}=-2,\ x=35$;

7) $\sqrt[3]{x+2}=4,\ x=64$; 8) $\sqrt[3]{x+5}=5,\ x=120$; 9) $\sqrt[4]{x-9}=4,\ x=265$;

10) $\sqrt{5+2x}=1,\ x=2$; 11) $\sqrt[4]{x-1}=-1,\ x=0$; 12) $\sqrt[6]{x-12}=1,\ x=12$.

Задание 5. Прочитайте записи по образцу.

Образец. $\begin{cases} x+2\geq 0, \\ 3x\geq 0 \end{cases}$ – система неравенств $x+2\geq 0$ и $3x\geq 0$.

1) $\begin{cases} 2x-3\geq 0, \\ 5x\geq 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+1\leq 1, \\ 3-x\geq 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 5+2x>1, \\ x<2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x-9\geq 0, \\ x-1<-1; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2-3x\geq 3, \\ 4x>4; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x+5<1, \\ x\geq 12; \end{cases}$ 7) $\begin{cases} 8-x\leq 0, \\ 2+x\geq 2; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x-3\leq 3, \\ 10x\leq 10; \end{cases}$

9) $\begin{cases} 10-3x>0, \\ 7x\leq 7; \end{cases}$ 10) $\begin{cases} x+7\geq 5, \\ 1-x>4; \end{cases}$ 11) $\begin{cases} 3x-4<2, \\ -x\geq 3; \end{cases}$ 12) $\begin{cases} x+12>1, \\ x-1\leq 2. \end{cases}$

Прочитайте.

Иррациональными уравнениями называются уравнения, которые содержат переменную под знаком корня.

Например, $\sqrt{x^3+1}=x$ – это иррациональное уравнение, потому что оно содержит переменную x под знаком корня.

Чтобы решить иррациональное уравнение, надо избавиться от иррациональности. Существуют два способа решения иррациональных уравнений:

1) возведение в степень обеих частей уравнения;

2) замена переменной.

Например, чтобы в уравнении $\sqrt{x^3+1}=x$ избавиться от корня, надо обе части уравнения возвести в квадрат:

$$\left(\sqrt{x^3+1}\right)^2=x^2.$$

Чтобы решить уравнение $\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[6]{x+2}-2=0$, надо сделать замену переменной $\sqrt[6]{x+2}=t$, где $t\geq 0$, и свести его к квадратному уравнению

$$t^2+t-2=0.$$

Рассмотрим иррациональное уравнение

$$\sqrt[2n]{f(x)}=g(x),\ \text{где } n\in N.$$

Корень чётной степени имеет смысл, если подкоренное выражение $f(x)\geq 0$. Выражение в правой части уравнения $g(x)\geq 0$, т. к. арифметический корень принимает только неотрицательные значения. Поэтому при решении иррационального уравнения $\sqrt[2n]{f(x)}=g(x)$ надо сделать проверку или найти область допустимых значений (ОДЗ) уравнения. Чтобы найти ОДЗ иррационального уравнения $\sqrt[2n]{f(x)}=g(x)$, надо решить систему неравенств:

$$\begin{cases} f(x)\geq 0, \\ g(x)\geq 0. \end{cases}$$

Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Что называется иррациональным уравнением?
2. Назовите способы решения иррациональных уравнений.
3. Что надо сделать, чтобы избавиться от иррациональности в уравнении $\sqrt{x^3+1}=x$?
4. Какую замену надо сделать в уравнении $\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[6]{x+2}-2=0$, чтобы избавиться от иррациональности?
5. Когда корень чётной степени имеет смысл?
6. Почему $g(x)\geq 0$ в иррациональном уравнении $\sqrt[2n]{f(x)}=g(x)$?
7. Запишите область допустимых значений уравнения $\sqrt[2n]{f(x)}=g(x)$.

Задание 6. Выполните задание по образцу.

Образец. Решите уравнение $\sqrt[4]{2x+5}=2$.

Решение. Чтобы в иррациональном уравнении избавиться от корня четвёртой степени, надо возвести **обе части** уравнения **в четвертую степень** и найти x

$$\sqrt[4]{2x+5}=2 \Rightarrow \left(\sqrt[4]{2x+5}\right)^4 = 2^4 \Rightarrow 2x+5=16 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x = 16-5 \Rightarrow 2x = 11 \Rightarrow x = 5{,}5.$$

Сделаем проверку. Подставим в первоначальное уравнение вместо x число 5,5:

$$\sqrt[4]{2\cdot 5{,}5+5}=2 \Rightarrow \sqrt[4]{16}=2.$$

Получили верное числовое равенство. Следовательно, $x = 5{,}5$ – корень уравнения.

Ответ: $x = 5{,}5$.

1) $\sqrt[4]{x-9}=4$; 2) $\sqrt{10-x}=3$; 3) $\sqrt[3]{x+2}=4$; 4) $\sqrt[3]{x-4}=3$;

5) $\sqrt[3]{x-10}=2$; 6) $\sqrt[5]{x-3}=-2$; 7) $\sqrt{59-x}=8$; 8) $\sqrt[3]{x+5}=5$;

9) $\sqrt{15-2x}=3$; 10) $\sqrt{5+2x}=1$; 11) $\sqrt[4]{x-1}=-1$; 12) $\sqrt[6]{x-12}=1$.

Прочитайте.

Пример. Решите уравнение $\sqrt{14-x}+x=2$.

Решение. Сначала перенесём x в правую часть уравнения с противоположным знаком. Потом возведём в квадрат обе части уравнения и воспользуемся формулой $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$:

$$\sqrt{14-x}+x=2 \Rightarrow \left(\sqrt{14-x}\right)^2=(2-x)^2 \Rightarrow 14-x=2^2-2\cdot 2\cdot x+x^2.$$

Перенесём все члены уравнения из левой части уравнения в правую и приведём подобные слагаемые

$$4-4x+x^2-14+x=0 \Leftrightarrow x^2-3x-10=0.$$

Решим квадратное уравнение

$$x^2-3x-10=0.$$

Найдём дискриминант и корни квадратного уравнения

$$D=b^2-4ac=(-3)^2-4\cdot 1\cdot(-10)=9+40=49;$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{3+7}{2}=5;\ x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{3-7}{2}=-2.$$

Сделаем проверку. При $x = 5$ получим

$$\sqrt{14-5}+5=\sqrt{9}+5=3+5=8\neq 2.$$

Следовательно, $x = 5$ не является корнем уравнения.

При $x = -2$ получим

$$\sqrt{14-(-2)}-2=\sqrt{16}-2=4-2=2.$$

Следовательно, $x = -2$ является корнем уравнения.

Ответ: $x = -2$.

Ответьте на вопросы.

1. Почему уравнение $\sqrt{14-x}+x=2$ является иррациональным?

2. Какую формулу применили при возведении в квадрат правой части уравнения $\sqrt{14-x}=2-x$?

3. Чему равен дискриминант квадратного уравнения $x^2-3x-10=0$?

4. Сколько корней имеет квадратное уравнение $x^2-3x-10=0$? Почему?

5. Какие корни имеет квадратное уравнение $x^2-3x-10=0$?

6. Почему число 5 не является корнем уравнения $\sqrt{14-x}+x=2$?

7. Почему число (–2) является корнем уравнения $\sqrt{14-x}+x=2$?

8. Сколько корней имеет уравнение $\sqrt{14-x}+x=2$?

Задания

Задание 1. Решите иррациональные уравнения.

1) $\sqrt{4-x}=4-x;$	2) $\sqrt{x-4}=2x-8;$	3) $\sqrt{x+1}-\sqrt[4]{x+1}-2=0;$
4) $-5\sqrt{x}+x=-6;$	5) $\sqrt{7-x}-4+x=0;$	6) $\sqrt{x+5}-\sqrt[4]{x+5}-6=0;$
7) $-2\sqrt{x}+x=-1;$	8) $\sqrt{1+2x}+2x+1=0;$	9) $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt[6]{2-x}-6=0;$
10) $-2\sqrt{x}+x=15;$	11) $x-6-2\sqrt{x-3}=0;$	12) $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[6]{x-1}-2=0.$

Задание 2. Выберите правильный вариант ответа.

1. … обе части уравнения в квадрат.

(А) Возведём; (Б) Перенесём; (В) Получим.

2. … замену переменной.

(А) Приведём; (Б) Решим; (В) Сделаем.

3. … в уравнение вместо x число 23.

(А) Воспользуемся; (Б) Подставим; (В) Рассмотрим.

4. Чтобы решить иррациональное уравнение, надо … от иррациональности.

(А) избавиться; (Б) называться; (В) являться.

5. Чтобы решить иррациональное уравнение $\sqrt[4]{2x+5}=2$, надо возвести обе части уравнения в … степень.

(А) пятую; (Б) четвёртую; (В) шестую.

6. При решении иррационального уравнения надо … область допустимых значений.

(А) найти; (Б) принять; (В) существовать.

7. Чтобы решить уравнение $\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[6]{x+2}-2=0$, надо … его к квадратному уравнению.

(А) иметь; (Б) свести; (В) содержать.

Тема 19. Показательные, логарифмические и тригонометрические уравнения

19.1. Показательные уравнения

Словарь к теме

логарифми́ческое уравне́ние
показа́тельное уравне́ние
прира́внивать – приравня́ть *что? к чему?*

Задание 1. Выполните задание по образцу.

Образец. $2^x = 4$ – это **показательное уравнение**, потому что уравнение содержит переменную *x* в показателе степени. Число 2 – это основание степени.

1) $3^x = 27$; 2) $3^{2x-1} = 9$; 3) $0{,}2^x = 0{,}04$; 4) $2^{x-3} = 16$;

5) $4^x = 16$; 6) $2^{4x-3} = 8$; 7) $0{,}1^x = 0{,}01$; 8) $3^{2x-5} = 81$;

9) $5^x = 25$; 10) $5^{3x+2} = 5$; 11) $0{,}5^x = 0{,}25$; 12) $4^{-x+5} = 64$.

Прочитайте.

Показательные уравнения – это уравнения, которые содержат переменную *x* в показателе степени.

Простейшее показательное уравнение имеет вид

$$a^x = a^b, \text{ где } a > 0,\ a \neq 1.$$

При решении показательных уравнений используют два способа:

1) сводят уравнение к простейшему показательному уравнению и приравнивают показатели степени:

$$a^x = a^b \Leftrightarrow x = b;$$

2) делают замену переменной.

Например, $5^x = 25$ – это простейшее показательное уравнение. Запишем число 25 как степень 5^2 и найдём решение уравнения

$$5^x = 25 \Leftrightarrow 5^x = 5^2 \Leftrightarrow x = 2.$$

Следовательно, значение $x = 2$ – корень уравнения $5^x = 25$.

Показательное уравнение $2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$ сводится к квадратному уравнению $t^2 - 6t + 8 = 0$ с помощью замены $2^x = t$ $(t > 0)$.

Значения $t_1 = 4$ и $t_2 = 2$ являются решениями уравнения $t^2 - 6t + 8 = 0$.

Чтобы найти значения *x*, надо вернуться к исходной переменной:

1) $2^x = t_1 \Rightarrow 2^x = 4 \Leftrightarrow 2^x = 2^2 \Leftrightarrow x_1 = 2$;

2) $2^x = t_2 \Rightarrow 2^x = 2 \Leftrightarrow 2^x = 2^1 \Leftrightarrow x_2 = 1$.

Следовательно, уравнение $2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$ имеет два действительных корня: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$.

Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Какое уравнение называется показательным?
2. Запишите простейшее показательное уравнение.
3. Каким способом решали уравнение $5^x = 25$?
4. Назовите решение уравнения $5^x = 25$.
5. Каким способом решали уравнение $2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$?
6. Какую замену сделали в уравнении $2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$?
7. Назовите решения уравнения $2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$.

Задание 2. Решите показательные уравнения.

1) $3^x = 27$;	2) $3^{2x-1} = 9$;	3) $0{,}1^x = 0{,}01$;	4) $2^{x-3} = 16$;
5) $4^x = 16$;	6) $2^{4x-3} = 8$;	7) $0{,}2^x = 0{,}04$;	8) $3^{2x-5} = 81$;
9) $5^x = 125$;	10) $5^{3x+2} = 5$;	11) $0{,}5^x = 0{,}25$;	12) $4^{-x+5} = 64$.

19.2. Логарифмические уравнения

Задание 3. Выполните задание по образцу.

Образец. 1. $\log_2 x = 3$ – это логарифмическое уравнение. Число 2 – это основание логарифма.

2. $\lg x = 3$ – это логарифмическое уравнение. Число 10 – это основание логарифма.

3. $\ln x = 3$ – это логарифмическое уравнение. Число e – это основание логарифма.

1) $\log_3 x = 2$;	2) $\lg x = 4$;	3) $\log_{0,2} x = 3$;	4) $\ln x = 2$;
5) $\log_5 x = 3$;	6) $\lg x = -1$;	7) $\log_{0,1} x = 2$;	8) $\ln x = 3$;
9) $\log_6 x = 2$;	10) $\lg x = 0$;	11) $\log_{0,3} x = 1$;	12) $\ln x = 0$.

Прочитайте.

Логарифмические уравнения – это уравнения, которые содержат неизвестное x под знаком логарифма.

Простейшее логарифмическое уравнение имеет вид

$$\log_a x = \log_a b,$$

где a – основание логарифма ($a > 0$, $a \neq 1$), x и b – аргументы логарифма ($x > 0$, $b > 0$).

При решении логарифмических уравнений используют три способа:

1) сводят уравнение к простейшему логарифмическому уравнению и приравнивают аргументы:

$$\log_a x = \log_a b \Leftrightarrow x = b;$$

2) используют определение логарифма:

$$\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b;$$

3) делают замену переменной.

При решении логарифмических уравнений надо учитывать область допустимых значений уравнения или делать проверку.

Например, уравнение $\log_2 x = 3$ можно записать в виде

$$\log_2 x = \log_2 2^3.$$

Тогда

$$\log_2 x = \log_2 2^3 \Leftrightarrow x = 2^3 \Leftrightarrow x = 8.$$

Сделаем проверку. Подставим в уравнение $\log_2 x = 3$ вместо x число 8:

$$\log_2 8 = 3 \Leftrightarrow 3 = 3.$$

Получили верное числовое равенство.

Следовательно, значение $x = 8$ является корнем уравнения $\log_2 x = 3$.

Чтобы решить уравнение $\log_2^2 x - 4\log_2 x + 3 = 0$, сначала надо найти ОДЗ уравнения (ОДЗ: $x > 0$), потом сделать замену $\log_2 x = t$ и свести уравнение к квадратному

$$t^2 - 4t + 3 = 0.$$

Значения $t_1 = 1$ и $t_2 = 3$ являются решениями уравнения $t^2 - 4t + 3 = 0$.

Чтобы найти значения x, надо вернуться к исходной переменной:

1) $\log_2 x = t_1 \Rightarrow \log_2 x = 1 \Leftrightarrow x = 2$;

2) $\log_2 x = t_2 \Rightarrow \log_2 x = 3 \Leftrightarrow x = 8$.

Значения $x = 2$ и $x = 8$ удовлетворяют ОДЗ уравнения, т. к. оба значения больше нуля. Следовательно, уравнение имеет два корня: $x = 2$, $x = 8$.

Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Какое уравнение называется логарифмическим?
2. Запишите простейшее логарифмическое уравнение.
3. Назовите решение уравнения $\log_2 x = 3$.
4. Каким способом и решали уравнение $\log_2^2 x - 4\log_2 x + 3 = 0$?
5. Какую замену делали в уравнении $\log_2^2 x - 4\log_2 x + 3 = 0$?
6. Назовите решения уравнения $\log_2^2 x - 4\log_2 x + 3 = 0$.
7. Что надо учитывать при решении логарифмических уравнений?
8. Назовите ОДЗ уравнения $\log_2^2 x - 4\log_2 x + 3 = 0$.
9. Назовите ОДЗ уравнения $\log_2 x = 3$.

Задание 4. Решите логарифмические уравнения.

1) $\log_3 x = 2$;	2) $\lg x = -3$;	3) $\log_{0,2} x = 3$;	4) $\ln x = 2$;
5) $\log_5 x = 3$;	6) $\lg x = -1$;	7) $\log_{0,1} x = 2$;	8) $\ln x = 3$;
9) $\log_6 x = 2$;	10) $\lg x = 0$;	11) $\log_{0,3} x = 1$;	12) $\ln x = 0$.

19.3. Тригонометрические уравнения

Словарь к теме

ча́стный слу́чай

Задание 5. Прочитайте записи по образцу.

Образец. $\sin x = \frac{1}{2}$ – это тригонометрическое уравнение.

1) $\sin x = 0$; 2) $\cos x = 1$; 3) $\mathrm{tg} x = 1$; 4) $\mathrm{ctg} x = -1$;
5) $\sin x = -1$; 6) $\cos x = 0$; 7) $\mathrm{tg} x = \sqrt{3}$; 8) $\mathrm{ctg} x = \sqrt{3}$;
9) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 10) $\cos x = \frac{1}{2}$; 11) $\mathrm{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$; 12) $\mathrm{ctg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Прочитайте.

Решение тригонометрических уравнений сводится к решению простейших тригонометрических уравнений. К **простейшим тригонометрическим уравнениям** относятся уравнения вида

$$\sin x = a,\ \cos x = a,\ \mathrm{tg}\, x = a,\ \mathrm{ctg}\, x = a.$$

Чтобы решить простейшие тригонометрические уравнения, надо знать формулы, которые представлены в таблице.

Простейшие тригонометрические уравнения	**Решения**
$\sin x = a$, где $a \in [-1; 1]$	$x = (-1)^n \cdot \arcsin a + \pi n,\ n \in Z$
$\cos x = a$, где $a \in [-1; 1]$	$x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z$
$\mathrm{tg}\, x = a$, где $a \in R$	$x = \mathrm{arctg}\, a + \pi n,\ n \in Z$
$\mathrm{ctg}\, x = a$, где $a \in R$	$x = \mathrm{arcctg}\, a + \pi n,\ n \in Z$

Чтобы найти решение простейших тригонометрических уравнений, используют следующие формулы

$$\boxed{\begin{gathered} \arcsin(-a) = -\arcsin a \\ \mathrm{arctg}(-a) = -\mathrm{arctg}\, a \\ \arccos(-a) = \pi - \arccos a \\ \mathrm{arcctg}(-a) = \pi - \mathrm{arcctg}\, a \end{gathered}}$$

Например, $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

При значениях $a = -1$, $a = 0$ и $a = 1$ получаем частные случаи простейших тригонометрических уравнений. Их решения представлены в таблице.

Уравнение	Решение уравнения		
	$a = -1$	$a = 0$	$a = 1$
$\sin x = a$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$	$x = \pi n,\ n \in Z$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$
$\cos x = a$	$x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$	$x = 2\pi n,\ n \in Z$
$\operatorname{tg} x = a$	$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$	$x = \pi n,\ n \in Z$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$
$\operatorname{ctg} x = a$	$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$

Решение многих тригонометрических уравнений сводится к решению простейших тригонометрических уравнений с помощью замены переменной или преобразований.

Задание 6. Решите тригонометрические уравнения.

Образец. Решите уравнение $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение. Решение тригонометрического уравнения найдём по формуле

$$x = (-1)^n \cdot \arcsin a + \pi n, n \in Z.$$

Получим

$$x = (-1)^n \cdot \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi n, n \in Z.$$

По таблице значений синусов основных углов $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Следовательно, $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$.

Тогда

$$x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z.$$

Ответ: $x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$.

1) $\sin x = 0$; 2) $\cos x = 1$; 3) $\operatorname{tg} x = 1$; 4) $\operatorname{ctg} x = -1$;

5) $\sin x = -1$; 6) $\cos x = 0$; 7) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$; 8) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$;

9) $\sin x = -\frac{1}{2}$; 10) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 11) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$; 12) $\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Запишите простейшие тригонометрические уравнения.

2. Запишите формулу, по которой находят решение уравнения $\cos x = a$.

3. Какую формулу применили при решении уравнения $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$?

4. Какую замену надо сделать в уравнении $\mathrm{tg}^2 x + 4\mathrm{tg} x + 3 = 0$, чтобы свести его к квадратному?

5. При каких значениях a получаем частные случаи простейших тригонометрических уравнений?

Задания

Задание 1. Решите показательные уравнения.

1) $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 25\sqrt{5}$; 2) $\left(\frac{4}{5}\right)^x = \frac{25}{16}$;

3) $\left(\frac{1}{6}\right)^{2x-8} = 216^x$; 4) $\left(\frac{2}{3}\right)^{8x+1} = 1{,}5^{2x-3}$;

5) $\left(\frac{1}{6}\right)^{2x} + 5\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^x - 6 = 0$; 6) $\left(\frac{1}{3}\right)^{5x-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{5x} = \frac{4}{9}$;

7) $27\cdot 3^{4x-9} = 9^{x+1}$; 8) $3^x - 3^{x+3} = -78$;

9) $4^x + 2^{x+1} - 24 = 0$; 10) $3^{2x} - 12\cdot 3^x + 27 = 0$;

11) $2^{2x} - 10\cdot 2^x + 16 = 0$; 12) $4\cdot 2^{2x} + 15\cdot 2^x - 4 = 0$.

Задание 2. Решите логарифмические уравнения.

1) $\log_6(2x-7) = 3$; 2) $\log_5(3-x) = 2$;

3) $\log_{x-4} 36 = 2$; 4) $\log_{2-3x} 196 = 2$;

5) $\log_{0,25}(15-2x) = -3$; 6) $\log_5(x+3) = \log_5(5x-1)$;

7) $\log_3(x-1) = \log_3(3x-9)$; 8) $\log_6(x^2+7x) = \log_6(8x+42)$;

9) $\log_6(12x+1) = 2\cdot\log_6 7$; 10) $\log_2(x^2-4x) = \log_2(6x-16)$;

11) $\log_4^2 x - \log_4 x - 2 = 0$; 12) $2\log_5^2 x + 5\log_5 x + 2 = 0$.

Задание 3. Решите тригонометрические уравнения.

1) $2\cos^2 x - \cos x - 3 = 0$; 2) $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$;

3) $\mathrm{tg}^2 x + 4\mathrm{tg}\, x + 3 = 0$; 4) $\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}\, x - 2 = 0$;

5) $\cos 2x - 5\cos x + 3 = 0$; 6) $8\sin^2 x + \cos x + 1 = 0$;

7) $2\cos^2 x + 5\sin x = 5$; 8) $3\mathrm{tg}^2 x + 2\mathrm{tg}\, x - 1 = 0$;

9) $2\mathrm{tg}^2 x + 3\mathrm{tg}\, x - 2 = 0$; 10) $\cos 2x + 3\sin x - 1 = 0$;

11) $\cos 2x + 3\cos x = 1$; 12) $2 - \cos 2x + 3\sin x = 0$.

Задание 4. Установите соответствия.

Уравнение	Название уравнения
1. $\log_3(x-1)=\log_3(3x-9)$	**а)** биквадратное уравнение
2. $\mathrm{tg}^2 x+4\mathrm{tg}x+3=0$	**б)** линейное уравнение
3. $\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[6]{x+2}-2=0$	**в)** логарифмическое уравнение
4. $x^2+2x+1=0$	**г)** показательное уравнение
5. $4x-5=3x$	**д)** квадратное уравнение
6. $4\cdot 5^{2x}+15\cdot 5^x-4=0$	**е)** тригонометрическое уравнение
7. $x^4+3x^2-4=0$	**ж)** иррациональное уравнение

Задание 5. Выберите **несколько** правильных вариантов ответа.

1. В уравнениях … и … число a является основанием.

(А) $a^x=a^b$; (Б) $\sin x=a$;

(В) $\log_a x=\log_a b$; (Г) $\mathrm{tg}x=a$.

2. Чтобы решить …, … и …. уравнения, часто делают замену переменной.

(А) тригонометрические; (Б) простейшие;

(В) логарифмические; (Г) показательные.

3. Уравнения … и … – это простейшие уравнения.

(А) $\log_a x=\log_a b$; (Б) $a^x=a^b$;

(В) $\log_2^2 x-4\log_2 x+3=0$; (Г) $2^{2x}-6\cdot 2^x+8=0$.

4. В логарифмическом уравнении $\log_2 x=\log_2 2^3$ … и … – это аргументы логарифма.

(А) log; (Б) x;

(В) 2; (Г) 2^3.

5. В логарифмических уравнениях $\lg x=3$ и $\ln x=3$ основания … и … .

(А) 10; (Б) e;

(В) 3; (Г) x.

6. При решении логарифмических уравнений надо … или … .

(А) делать проверку; (Б) использовать формулы;

(В) приравнивать показатели степени; (Г) учитывать ОДЗ уравнения.

7. При значениях a равно …, … и … получаем частные случаи простейших тригонометрических уравнений.

(А) π; (Б) 0;

(В) 1; (Г) –1.

8. Чтобы решить простейшие тригонометрические уравнения, … формулы.

(А) используют; (Б) надо знать;

(В) найти значения; (Г) сводят.

9. Уравнение $2^x=4$ … показательным уравнением.

(А) называется; (Б) относится;

(В) сводится; (Г) является.

Тема 20. Неравенства

20.1. Основные понятия

Словарь к теме

ве́рное нера́венство двойно́е нера́венство	нестро́гое нера́венство стро́гое нера́венство

Задание 1. Прочитайте записи по образцу.

Образец. 1) $x < 16$ – это строгое неравенство;

2) $x \leq 8$ – это нестрогое неравенство.

1) $2 < 40$; 2) $5 > 3$; 3) $4 < 10$; 4) $6 < 8$; 5) $1 < 4$; 6) $12 > 0$;
7) $a \leq 40$; 8) $b \geq 3$; 9) $x \geq 10$; 10) $y \leq 8$; 11) $t \leq 4$; 12) $d \geq 0$.

Задание 2. Прочитайте записи по образцу.

Образец. Неравенство $1 < b < 2$ **читают:** b больше, чем 1, **и** меньше, чем 2. Это двойное неравенство.

1) $0 < x < 31$; 2) $8 \leq a \leq 32$; 3) $2 \leq a < 18$; 4) $7 < b < 41$;
5) $6 < x \leq 10$; 6) $5 \leq z < 12$; 7) $4 < d < 19$; 8) $3 \leq y \leq 72$;
9) $0 \leq y < 13$; 10) $1 < d \leq 2$; 11) $7 \leq z \leq 8$; 12) $0 < b < 4$.

Прочитайте.

Если два выражения соединены знаками $<$, $>$, $\leq$, $\geq$, то говорят, что задано **неравенство**. Если два выражения соединены знаками $<$ или $>$, то это **строгое неравенство**. Если два выражения соединены знаками $\leq$ или $\geq$, то это **нестрогое неравенство**.

Неравенство $2x < 16$ – это строгое неравенство. Неравенство $2x + 5 \leq 8$ – это нестрогое неравенство.

Если $a < b$ и $b < c$, то можно записать **двойное неравенство**:

$$a < b < c.$$

Решить неравенство – значит найти значения переменной, которые обращают это неравенство в верное числовое неравенство.

Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Когда говорят, что задано неравенство?
2. Какие знаки соединяют два выражения, если неравенство строгое?
3. Приведите пример строгого неравенства.
4. Какие знаки соединяют два выражения, если неравенство нестрогое?
5. Приведите пример нестрогого неравенства.
6. Сколько знаков сравнения содержит двойное неравенство?
7. Приведите пример двойного неравенства.
8. Неравенство $5x \geq 10$ – это строгое или нестрогое неравенство?
9. Неравенство $2x < 16$ – это строгое или нестрогое неравенство?
10. Что значит решить неравенство?

20.2. Линейные неравенства

Словарь к теме

лине́йное нера́венство равноси́льный	вы́колотая то́чка закра́шенная то́чка

Задание 3. Выполните задание по образцу.

Образец. 1) $2x – 4 < 0$ – это строгое линейное неравенство, потому что оно содержит одну переменную x в первой степени;

2) $2x – 4 \le 0$ – это нестрогое линейное неравенство, потому что оно содержит одну переменную x в первой степени.

1) $x – 20 < 0$; 2) $2y + 1 > 0$; 3) $4x – 3 \le 0$; 4) $6y + 8 \ge 0$;
5) $x + 15 < 0$; 6) $3y – 2 > 0$; 7) $3x + 5 \le 0$; 8) $7x – 9 \ge 0$;
9) $x – 32 \ge 0$; 10) $y +12 \le 0$; 11) $t – 19 \le 0$; 12) $t + 7 \le 0$.

Задание 4. Прочитайте записи по образцу.

Образец. $2x < 16 \Leftrightarrow x < 8$. **Читаем:** $2x < 16$ **тогда и только тогда, когда** $x < 8$.

1) $2a \le 10 \Leftrightarrow a \le 5$; 2) $(– t) < 7 \Leftrightarrow t > –7$; 3) $2d \ge 6 \Leftrightarrow d \ge 3$;
4) $6y \le 24 \Leftrightarrow y \le 4$; 5) $(–3t) < 9 \Leftrightarrow t > –3$; 6) $3x \ge 12 \Leftrightarrow x \ge 4$;
7) $5a \le 35 \Leftrightarrow a \le 7$; 8) $(–5b) > 5 \Leftrightarrow b < –1$; 9) $5x \ge 10 \Leftrightarrow x \ge 2$;
10) $6y \le 12 \Leftrightarrow y \le 2$; 11) $(–2b) > 4 \Leftrightarrow b < –2$; 12) $4d \ge 20 \Leftrightarrow d \ge 5$.

Задание 5. Прочитайте записи по образцу.

Образец. 1) $x \in [–1; 2]$ – x принадлежит отрезк**у** **от** минус одного **до** двух;

2) $x \in (– \infty; 2)$ – x принадлежит интервал**у** **от** минус бесконечности **до** двух;

3) $x \in (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$ – x принадлежит объединен**ию** полуинтервал**ов** **от** минус бесконечности **до** одного **и** **от** трёх **до** бесконечности.

1) $x \in (-\infty; 0)$; 2) $y \in [10; \infty)$; 3) $x \in (-\infty; 0] \cup [5; +\infty)$;
4) $x \in [–1; 1]$; 5) $y \in [0; \pi/2]$; 6) $x \in (-\infty; 15) \cup (20; \infty)$;
7) $y \in (-\infty; \infty)$; 8) $y \in (– \infty; 1]$; 9) $x \in [0; 12] \cup [190; 200]$;
10) $x \in [0; 19)$; 11) $y \in [–\pi; \pi]$; 12) $x \in [-1; 8] \cup (20; 90]$.

Прочитайте.

Неравенства вида $ax + b < 0$, $ax + b > 0$, $ax + b \le 0$, $ax + b \ge 0$, где a и b – некоторые числа, причём $a \ne 0$, называются **простейшими линейными неравенствами**.

Неравенства $ax + b < 0$ и $ax + b > 0$ – это строгие линейные неравенства. Неравенства $ax + b \ge 0$ и $ax + b \le 0$ – это нестрогие линейные неравенства.

Неравенства, которые содержат одну переменную **в первой степени**, можно свести к простейшим линейным неравенствам с помощью равносильных (тождественных) преобразований.

В таблице представлены равносильные (тождественные) преобразования неравенств и примеры.

Равносильные преобразования неравенств	**Примеры**
В любой части неравенства можно раскрывать скобки.	$5 \cdot (3x + 4) < 2 \Leftrightarrow 15x + 20 < 2$
В любой части неравенства можно приводить подобные слагаемые.	$15x + 4 - 2x > 2 \Leftrightarrow 13x + 4 > 2$
Любой член неравенства можно переносить из одной части неравенства в другую с противоположным знаком.	$15x + 20 \le 2 \Leftrightarrow 15x \le 2 \mathbf{- 20}$
К обеим частям неравенства можно прибавлять одно и то же выражение.	$-2x + 6 < 2 \Leftrightarrow -2x + 6 \mathbf{+ 2x} < 2 \mathbf{+ 2x}$
Из обеих частей неравенства можно вычитать одно и то же выражение.	$3x + 4 < 2 \Leftrightarrow 3x + 4 \mathbf{- 3x} < 2 \mathbf{- 3x}$
Обе части неравенства можно умножать или делить на одно и то же положительное число.	$8x < 16 \Leftrightarrow 8x : \mathbf{8} < 16 : \mathbf{8}$
Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, то знак неравенства изменится на противоположный.	$-8x < 16 \Leftrightarrow -8x : \mathbf{(-8)} > 16 : \mathbf{(-8)}$

Пример 1. Решите неравенство $8x - 16 < 0$.

Решение. Перенесём число (–16) в правую часть неравенства с противоположным знаком. Затем разделим обе части неравенства на 8. Знак неравенства не изменится, т. к. число $8 > 0$.

Запишем решение и ответ

$$8x - 16 < 0 \Leftrightarrow 8x < 16 \Leftrightarrow 8x : 8 < 16 : 8 \Leftrightarrow x < 2.$$

Отметим на числовой оси́ число 2 **выколотой точкой** (рис. 16), потому что неравенство $x < 2$ – строгое. Так как $x < 2$, то решением неравенства являются все значения, которые находятся слева от числа 2 (рис. 16).

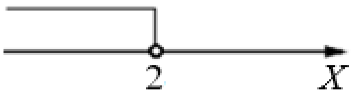


Рис. 16. Решение неравенства $8x - 16 < 0$

Следовательно, решением неравенства является интервал $(-\infty; 2)$.

Ответ: $x \in (-\infty; 2)$.

Пример 2. Решите неравенство $12 - 4x \geq 0$.

Решение. Перенесём число 12 в правую часть неравенства с противоположным знаком. Затем разделим обе части неравенства на (– 4). Знак неравенства изменится, т. к. $(-4) < 0$.

Запишем решение

$$12 - 4x \geq 0 \Leftrightarrow -4x \geq -12 \Leftrightarrow -4x : (-4) \leq -12 : (-4) \Leftrightarrow x \leq 3.$$

Отметим на числовой оси́ число 3 **закрашенной точкой** (рис. 17), потому что неравенство $x \leq 3$ – нестрогое. Так как $x \leq 3$, то решением неравенства являются все значения, которые находятся слева от числа 3 (рис. 17).

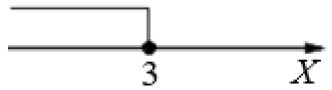


Рис. 17. Решение неравенства $12 - 4x \geq 0$

Следовательно, решением неравенства является полуинтервал $(-\infty; 3]$.

Ответ: $x \in (-\infty; 3]$.

Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Что называют простейшими линейными неравенствами?
2. Какие линейные неравенства являются строгими?
3. Какие линейные неравенства являются нестрогими?
4. Можно раскрывать скобки в неравенстве?
5. Можно прибавлять к обеим частям неравенства одно и то же выражение?
6. Можно прибавлять к обеим частям неравенства разные выражения?
7. Можно приводить подобные слагаемые в неравенстве?
8. Что будет со знаком неравенства, если разделить обе части неравенства на одно и то же положительное число?
9. Что будет со знаком неравенства, если умножить обе части неравенства на одно и то же отрицательное число?
10. Приведите пример строгого линейного неравенства.
11. Приведите пример нестрого линейного неравенства.
12. Почему на числовой оси число 2 отметили выколотой точкой (рис. 16)?
13. Что является решением неравенства $8x - 16 < 0$?
14. Почему на числовой оси число 3 отметили закрашенной точкой (рис. 17)?
15. Что является решением неравенства $12 - 4x \geq 0$?

Задание 6. Решите неравенства и объясните решение.

1) $3x - 4 > 0$;	2) $5 - 6x \geq 0$;	3) $3 + x < 0$;
4) $3 \cdot (2x - 3) < 4x$;	5) $3x - 6 \geq 5x$;	6) $3 \cdot (5x - 6) > 7x$;
7) $x^2 + 2x + 5 > 0$;	8) $x^2 - 5x + 6 < 0$;	9) $x^2 - 2x - 3 \geq 0$;
10) $x^2 + 3x - 4 > 0$;	11) $x^2 - 6x + 9 > 0$;	12) $x^2 - 4x + 4 \leq 0$.

20.3. Квадратные неравенства

Словарь к теме

квадра́тное нера́венство ме́тод интерва́лов	разбива́ть – разби́ть *что? на что?* чередова́ться

Прочитайте.

Рассмотрим квадратные неравенства.

Название неравенства	**Вид неравенства**	**Условие**
Строгое квадратное неравенство	$ax^2+bx+c<0$, $ax^2+bx+c>0$	$a\neq 0$
Нестрогое квадратное неравенство	$ax^2+bx+c\leq 0$, $ax^2+bx+c\geq 0$	$a\neq 0$

Рассмотрим решение квадратного неравенства **методом интервалов**.

Пример. Решите **методом интервалов** квадратное неравенство $x^2-4x+3\geq 0$.

Решение. Найдём нули квадратного трёхчлена x^2-4x+3. Для этого приравняем квадратный трёхчлен к нулю и решим квадратное уравнение

$$x^2-4x+3=0.$$

Найдём дискриминант квадратного уравнения по формуле

$$D=b^2-4ac.$$

Получим

$$D=(-4)^2-4\cdot 1\cdot 3=16-12=4.$$

Так как $D>0$, то квадратное уравнение имеет два различных действительных корня.

Найдём корни квадратного уравнения по формуле

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}.$$

Получим

$$x_1=\frac{4+2}{2\cdot 1}=3,\ x_2=\frac{4-2}{2\cdot 1}=1.$$

Построим числовую ось. Отметим на числовой оси значения x_1 и x_2 закрашенными точками, потому что неравенство нестрогое. Чи́сла 1 и 3 разбивают числову́ю ось на три промежутка. Определим знак квадратного трёхчлена x^2-4x+3 на каждом промежутке.

На полуинтервале $(-\infty; 1]$ возьмём любое число, например $x = 0$, и найдём значение квадратного трёхчлена при этом значении: $0^2-4\cdot 0+3=3$. Получили число 3, которое больше нуля. Следовательно, на этом промежутке выражение имеет знак «+». На интервале $(1; 3)$ выражение имеет знак «–». На полуинтервале $[3; \infty)$ выражение имеет знак «+».

Отметим знаки неравенства на рисунке. **Знаки неравенства** на промежутках **чередуются** (рис. 18).

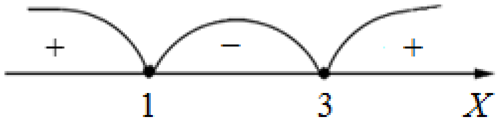


Рис. 18. Знаки неравенства $x^2 - 4x + 3 \geq 0$

Выберем интервалы со знаком «+», потому что $x^2 - 4x + 3 \geq 0$.

Следовательно, решением неравенства $x^2 - 4x + 3 \geq 0$ является множество x, таких, что $x \in (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$.

Ответ: $x \in (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$.

Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Каким методом решали квадратное неравенство?
2. Неравенство $x^2 - 4x + 3 \geq 0$ – это строгое или нестрогое неравенство?
3. Почему квадратное уравнение $x^2 - 4x + 3 = 0$ имеет два различных действительных корня?
4. Чему равны нули квадратного трёхчлена $x^2 - 4x + 3$?
5. Какие точки соответствуют значениям x_1 и x_2 на числовой оси?
6. На сколько промежутков разбивают числовую ось числа 1 и 3?
7. Почему на полуинтервале $(-\infty; 1]$ квадратный трёхчлен $x^2 - 4x + 3$ имеет знак «+»?
8. Почему выбрали промежутки со знаком «+»?
9. Назовите промежутки, на которых знак «+».
10. Запишите решение неравенства $x^2 - 4x + 3 \geq 0$.

20.4. Рациональные и дробно-рациональные неравенства

Задание 7. Прочитайте записи по образцу.

Образец. 1) $(x-1) \cdot (x+2) \cdot (x-3) \leq 0$ – это рациональное неравенство;

2) $\dfrac{x^2 + 2x - 15}{x - 1} > 0$ – это дробно-рациональное неравенство.

1) $(x-3) \cdot (x+1) \cdot (x-2) > 0$;

2) $(x^2 + 2x - 3) \cdot (x^2 - 3x + 2) \geq 0$;

3) $\dfrac{6 - x - x^2}{x + 1} \geq 0$;

4) $\dfrac{7x - 40}{(x-5) \cdot (x+4)} \leq 1$;

5) $(x^2 - 5x + 6) \cdot (x^2 + 5x + 4) \leq 0$;

6) $(x-5) \cdot (x-1) \cdot (x+4) \leq 0$;

7) $\dfrac{x^3 - 8x^2 + 15x}{x^2 - 7x + 12} > 0$;

8) $\dfrac{x^2 + 3x - 4}{x + 2} > 0$;

9) $x \cdot (3x + 12) \cdot (x - 2) < 0$;

10) $(x+7) \cdot (x+4) \cdot (x+2) > 0$;

11) $\dfrac{x - 3}{(x-1) \cdot (x+1)} > 0$;

12) $\dfrac{x \cdot (x-3)}{x + 4} \leq 0$.

Прочитайте.

Рациональными неравенствами называются неравенства вида

$$P(x) > 0,\ P(x) < 0,\ P(x) \geq 0,\ P(x) \leq 0,$$

где $P(x)$ – многочлен, x – переменная.

Например, $(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x-3)\leq 0$ – это рациональное неравенство, где $P(x)=(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x-3)$ – многочлен третьей степени.

Если многочлен $P(x)$ можно разложить на произведение линейных множителей, то рациональное неравенство можно решить **методом интервалов**.

Пример 1. Решите **методом интервалов** неравенство $x^3-9x>0$.

Решение. Разложим многочлен $P(x)=x^3-9x$ на множители

$$x^3-9x = x\cdot(x^2-9) = x\cdot(x-3)\cdot(x+3).$$

Тогда неравенство примет вид

$$x\cdot(x-3)\cdot(x+3)>0.$$

Найдём нули многочлена, для этого решим уравнение

$$x\cdot(x-3)\cdot(x+3)=0.$$

Произведение равно нулю, если хотя бы один из множителей равен нулю. Следовательно, $x_1=0$, $x_2=3$ и $x_3=-3$ – корни уравнения.

Построим числовую ось. Отметим на числовой оси значения $x_1=0$, $x_2=3$ и $x_3=-3$ выколотыми точками, потому что неравенство строгое.

Числа (–3), 0 и 3 разбивают числовую ось на четыре промежутка.

На интервале $(-\infty; -3)$ возьмём любое число, например, $x=-4$ и найдём значение многочлена в точке $x=-4$: $P(-4)=(-4)^3-9\cdot(-4)=-28$. Получили число (–28), которое меньше нуля. Следовательно, для любого $x\in(-\infty;-3)$ левая часть неравенства отрицательная, т. е. имеет знак «–».

Дальше знаки неравенства на промежутках **чередуются**, потому что уравнение третьей степени имеет три различных корня.

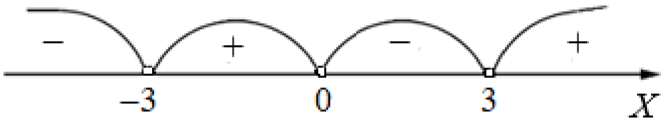


Рис. 19. Знаки неравенства $x^3-9x>0$

Выберем интервалы со знаком «+», потому что $x^3-9x>0$.

Следовательно, решением неравенства $x^3-9x>0$ является множество x, таких, что $x\in(-3;0)\cup(3;\infty)$.

Ответ: $x\in(-3;0)\cup(3;\infty)$.

Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Какой вид имеют рациональные неравенства?
2. Приведите пример строгого рационального неравенства.
3. Приведите пример нестрогого рационального неравенства.

4. Каким методом можно решить рациональное неравенство, если многочлен $P(x)$ можно разложить на произведение линейных множителей?

5. Какие сделали преобразования, чтобы разложить многочлен $P(x) = x^3 - 9x$ на множители?

6. Сколько корней имеет уравнение $x \cdot (x-3) \cdot (x+3) = 0$?

7. Запишите интервалы, которые изображены на рис. 19.

8. Почему выбрали интервалы со знаком «+»?

9. Что является решением неравенства $x^3 - 9x > 0$?

Прочитайте.

Дробно-рациональными неравенствами называются неравенства вида

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0,\ \frac{P(x)}{Q(x)} < 0,\ \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0,\ \frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0,$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены, причём $Q(x) \neq 0$.

Например, $\dfrac{x^2 + 2x - 15}{x-1} > 0$ – это дробно-рациональное неравенство.

Если многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ можно разложить на произведение линейных множителей, то дробно-рациональные неравенства можно решить **методом интервалов**.

Пример 2. Решите **методом интервалов** неравенство $\dfrac{x^2 + 2x - 15}{x-1} \leq 0$.

Решение. Разложим квадратный трёхчлен на множители

$$x^2 + 2x - 15 = (x+5) \cdot (x-3).$$

Тогда неравенство примет вид

$$\frac{(x+5) \cdot (x-3)}{x-1} \leq 0.$$

Дробь имеет смысл, если знаменатель дроби отличен от нуля

$$x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1.$$

Следовательно, область допустимых значений неравенства – это все действительные числа, кроме единицы.

Приравняем левую часть неравенства к нулю и решим уравнение

$$\frac{(x+5) \cdot (x-3)}{x-1} = 0.$$

Получим два корня $x_1 = -5$ и $x_2 = 3$.

Построим числовую ось. Отметим на числовой оси значения $x_1 = -5$ и $x_2 = 3$ закрашенными точками, потому что неравенство нестрогое. Отметим на числовой оси значение $x_3 = 1$ выколотой точкой, потому что $x \neq 1$.

Числа (–5), 1 и 3 разбивают числовую ось на четыре промежутка. Определим знак неравенства на каждом промежутке. Знаки неравенства будут чередоваться, потому что дробь содержит линейные множители в первой степени.

На полуинтервале $(-\infty; -5]$ возьмём любое число, например $x = -6$, и найдём значение функции $f(x) = \dfrac{(x+5)\cdot(x-3)}{x-1}$ в точке $x = -6$:

$$f(-6) = \frac{(-6+5)\cdot(-6-3)}{-6-1} = -\frac{9}{7} < 0.$$

Получили отрицательное число. Следовательно, для любого $x \in (-\infty; -5]$ левая часть неравенства отрицательна, т. е. имеет знак «–».

Дальше знаки неравенства на промежутках **чередуются**.

Отметим знаки неравенства на рисунке 20.

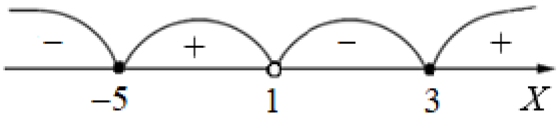


Рис. 20. Знаки неравенства $\dfrac{x^2+2x-15}{x-1} \le 0$

Выберем интервалы со знаком «–», потому что $\dfrac{x^2+2x-15}{x-1} \le 0$.

Следовательно, решением неравенства является множество x, таких, что $x \in (-\infty; -5] \cup (1; 3]$.

Ответ: $x \in (-\infty; -5] \cup (1; 3]$.

Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Какой вид имеют дробно-рациональные неравенства?
2. Приведите пример строгого дробно-рационального неравенства.
3. Приведите пример нестрогого дробно-рационального неравенства.
4. Что является решением неравенства $\dfrac{x^2+2x-15}{x-1} \le 0$?
5. Почему выбрали промежутки со знаком «–»?

Задания

Задание 1. Запишите глаголы в скобках в форме первого лица множественного числа будущего времени.

(Решить) ________________ линейное неравенство $5\cdot(x-4)+5>2x$.

(Раскрыть) ___________ скобки в левой части неравенства $5x-5\cdot 4+5>2x$. В правую часть неравенства (перенести) ___________________ числа с противоположными знаками. В левую часть неравенства (перенести) _________________ переменные с противоположными знаками. (Получить) _______________ $5x - 2x > 20 - 5$. (Привести) ____________ подобные слагаемые. (Получить) _____________________ $3x > 15$. (Разделить) __________ обе части неравенства на 3. Знак неравенства при этом не изменится. (Получить) ____________________ $x > 5$.

(Построить) __________ числовую ось. (Отметить) _____________ на числовой оси́ число 5 выколотой точкой (рис. 21).

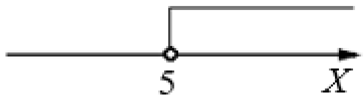


Рис. 21. Решение неравенства $5 \cdot (x - 4) + 5 > 2x$

Значения $x > 5$ находятся на числовой оси́ справа от числа 5. (Записать) _______ ответ: $x \in (5; +\infty)$.

Задание 2. Запишите в конструкции предлоги: *в, до, к, на, от, с(о)*.

1) выберем интервалы ____ знаком «+»; 2) знак неравенства изменится ____ противоположный; 3) изобразим ____ числовой оси; 4) интервал ____ пяти ____ десяти; 5) обращать неравенство ____ верное числовое неравенство; 6) разбивают числовую ось ____ три промежутка; 7) сводятся ____ простейшим линейным неравенствам; 8) справа ____ числа 5.

Задание 3. Запишите в предложения слова: *если; который; почему; потому что*.

1. ___________ два выражения соединены знаками <, >, ≤, ≥, то говорят, что задано неравенство.
2. ___________ дискриминант квадратного уравнения больше нуля, то уравнение имеет два различных действительных корня.
3. ___________ на числовой оси число 5 отметили выколотой точкой?
4. Выберем интервалы со знаком «+», ___________ $x^2 - 4x + 3 \geq 0$.
5. Получили число 3, ___________ больше нуля.

Задание 4. Выберите правильный вариант ответа.

1. Неравенство вида $ax + b < 0$, где a и b – некоторые числа, $a \neq 0$, называют … линейным неравенством.

(А) бесконечным; (Б) простейшим; (В) числовым.

2. Если два выражения соединены знаками < или >, то это … неравенство.

(А) двойное; (Б) нестрогое; (В) строгое.

3. Если два выражения соединены знаками ≤ или ≥, то это … неравенство.

(А) двойное; (Б) нестрогое; (В) строгое.

4. Если $a < b$ и $b < c$, то можно записать … неравенство.

(А) двойное; (Б) нестрогое; (В) строгое.

5. Если два выражения соединены знаками <, >, ≤, ≥, то говорят, что … неравенство.

(А) задано; (Б) можно; (В) равносильно.

6. В любой части неравенства … раскрывать скобки.

(А) задано; (Б) можно; (В) равносильно.

Тема 21. Геометрия на плоскости

Словарь к теме

геоме́трия	равнобе́дренная трапе́ция
гра́дус	равнобе́дренный треуго́льник
диагона́ль (ж. р.)	равносторо́нний треуго́льник
квадра́т	верши́на треуго́льника
квадра́тные едини́цы (кв. ед.)	высота́ треуго́льника
многоуго́льник	медиа́на треуго́льника
окру́жность (ж. р.)	сторона́ треуго́льника
диа́метр окру́жности	у́гол
длина́ окру́жности	у́гол при верши́не
ра́диус окру́жности	о́стрый у́гол
центр окру́жности	прямо́й у́гол
параллелогра́мм	биссектри́са угла́
пери́метр	фигу́ра
планиме́трия	четырёхуго́льник
пло́щадь (ж. р.)	паралле́лен, паралле́льно, -а, -ы *чему?*
прямоуго́льник	попа́рно паралле́льны
расстоя́ние	перпендикуля́рен *чему?*
ромб	перпендикуля́рно, -а, -ы *чему?*
теоре́ма	противополо́жные сто́роны
трапе́ция	равноудалён, равноудалена́, -о, -ы *от чего?*
треуго́льник	опуска́ть – опусти́ть *что? на что? из чего?*
произво́льный треуго́льник	проводи́ть – провести́ *что? из чего?*
прямоуго́льный треуго́льник	проходи́ть – пройти́ *через что?*
	соединя́ть – соедини́ть *что? с чем?*

Задание 1. Прочитайте записи по образцу.

Образец. 1) ΔABC – треугольник ABC;

2) $S_{\Delta ABC}$ – площадь треугольник**а** ABC.

1) ΔABD;	2) ΔBCD;	3) ΔACD;	4) ΔCDK;
5) ΔKLM;	6) ΔLMN;	7) ΔLKN;	8) ΔEFG;
9) $S_{\Delta ABD}$;	10) $S_{\Delta BCD}$;	11) $S_{\Delta ACD}$;	12) $S_{\Delta CDK}$;
13) $S_{\Delta KLM}$;	14) $S_{\Delta LMN}$;	15) $S_{\Delta LKN}$;	16) $S_{\Delta EFG}$.

Задание 2. Прочитайте записи по образцу.

Образец. 1) $\angle A$ – угол A; **2)** $\angle BAC$ – угол BAC.

1) $\angle B$;	2) $\angle C$;	3) $\angle D$;	4) $\angle M$;
5) $\angle E$;	6) $\angle K$;	7) $\angle ABC$;	8) $\angle CAB$;
9) $\angle ACD$;	10) $\angle KLM$;	11) $\angle DAC$;	12) $\angle ABD$.

Задание 3. Прочитайте записи по образцу.

Образец. $\angle ACB = 90^0$ – угол ACB равен девяност**а** градус**ам**.

1) $\angle ACB = 60^0$; 2) $\angle ACB = 120^0$; 3) $\angle ACB = 21^0$; 4) $\angle ACB = -90^0$;
5) $\angle ACB = 30^0$; 6) $\angle ACB = 135^0$; 7) $\angle ACB = 50^0$; 8) $\angle ACB = -60^0$;
9) $\angle ACB = 45^0$; 10) $\angle ACB = 10^0$; 11) $\angle ACB = 81^0$; 12) $\angle ACB = -30^0$.

Задание 4. Прочитайте записи по образцу.

Образец. 1) $\angle A = \angle B$ – угол A рав**ен** угл**у** B;
2) $\angle CAM = \angle MAC$ – угол CAM рав**ен** угл**у** MAC.

1) $\angle A = \angle C$; 2) $\angle ABD = \angle BCD$; 3) $\angle E = \angle D$;
4) $\angle C = \angle B$; 5) $\angle ABC = \angle ADC$; 6) $\angle E = \angle F$;
7) $\angle D = \angle F$; 8) $\angle MNL = \angle NKL$; 9) $\angle A = \angle E$;
10) $\angle A = \angle D$; 11) $\angle MNK = \angle MLK$; 12) $\angle M = \angle N$.

Задание 5. Прочитайте записи по образцу.

Образец. 1) $AC \perp CB$ – отрезок AC перпендикуляр**ен** отрезк**у** CB;
2) $BC || AD$ – отрезок BC параллел**ен** отрезк**у** AD.

1) $AB \perp CD$; 2) $AB || CD$; 3) $NM \perp KL$; 4) $EF || AC$;
5) $AD \perp CB$; 6) $AD || CB$; 7) $MN \perp LK$; 8) $FE || CA$;
9) $AC \perp CD$; 10) $NM || KL$; 11) $NK \perp ML$; 12) $FA || EC$.

Прочитайте.

Планиметрия – это раздел геометрии, в котором изучают точки, расстояние между двумя точками, прямые и фигуры на плоскости. Рассмотрим некоторые фигуры на плоскости.

Окружность – это геометрическое место всех точек плоскости, которые равноудалены от заданной точки O (рис. 22). Точку O называют **центром окружности**. Расстояние от точки O до любой точки окружности называют **радиусом окружности**. Радиус окружности обозначают большой латинской буквой R или маленькой латинской буквой r.

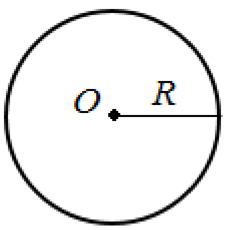


Рис. 22. Окружность

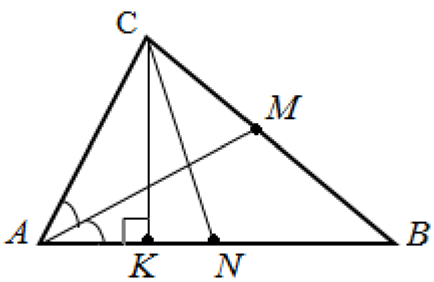


Рис. 23. Треугольник ABC

Диаметр окружности – это отрезок, который проходит через центр окружности и соединяет две её точки. Диаметр окружности обозначают буквой d. Диаметр окружности находят по формуле $d = 2R$. Длину окружности L находят по формуле $L = 2\pi R$.

Треугольник – это геометрическая фигура. Треугольник состоит из трёх точек, которые последовательно соединены отрезками. Треугольник имеет три вершины, три стороны и три угла. Вершины треугольника не лежат на одной прямой.

Рассмотрим произвольный ΔABC и его элементы (рис. 23). Пусть точка N делит отрезок AB пополам ($AN = NB$). Соединим точку N с вершиной C. Получим отрезок CN. Отрезок CN называют **медианой** ΔABC.

Проведём из вершины A прямую, которая делит $\angle BAC$ пополам ($\angle CAM = \angle MAB$). Прямую AM называют **биссектрисой** угла A.

Из вершины C проведём прямую CK перпендикулярно прямой AB. Прямая CK – это **высота**, **опущенная** из вершины C на сторону AB.

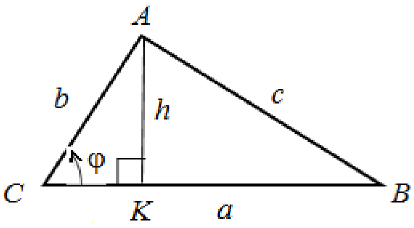
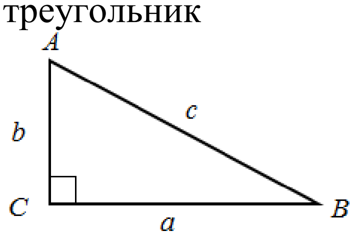
В любом треугольнике можно провести три высоты, три медианы и три биссектрисы.

Если в треугольнике все стороны равны или все углы равны, то треугольник называют **равносторонним**. В равностороннем треугольнике все углы равны 60^0, т. к. сумма всех углов треугольника равна 180^0.

Если угол равен 90^0, то его называют **прямым углом**. Если треугольник имеет прямой угол, то треугольник называют **прямоугольным треугольником**.

Если в треугольнике ABC равны две стороны ($CA = CB$), то треугольник называют **равнобедренным**, а сторону AB называют **основанием** треугольника.

Запишем элементы треугольника и некоторые формулы для треугольника.

Некоторые виды треугольников	**Элементы треугольника**	**Формулы**
1. Произвольный треугольник 	Точки A, B, C – это вершины треугольника. Отрезки AB, AC, BC – это стороны треугольника. $AK \perp CB$, где AK – это высота, опущенная из вершины A на сторону CB.	$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ab\sin\varphi$, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ah$ – площадь треугольника; $P = a + b + c$ – периметр ΔABC.
2. Прямоугольный треугольник 	$AC \perp CB$, т. е. $\angle ACB = 90^0$, сторона AB – гипотенуза, стороны CA и CB – катеты.	$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ab$ – площадь треугольника; $c^2 = a^2 + b^2$ – теорема Пифагора.

Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Что изучает планиметрия?
2. Запишите формулу нахождения длины окружности через её диаметр.
3. Чему равна сумма всех углов треугольника?
4. В каком треугольнике все углы равны 60^0?
5. Как называют треугольник, в котором один угол равен 90^0?
6. Как называют треугольник, у которого все стороны равны?
7. Как называют треугольник, у которого две стороны равны?
8. Сумма двух углов треугольника равна 130^0. Найдите третий угол треугольника (в градусах).
9. Что такое высота треугольника?
10. Что такое медиана треугольника?
11. Сколько медиан можно провести в треугольнике?
12. Что такое биссектриса угла A?
13. Сколько биссектрис можно провести в треугольнике?

Задание 6. Изучите рисунок 24 и ответьте на вопросы.

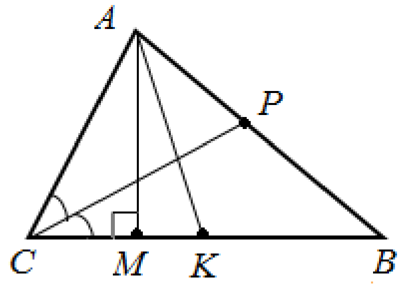


Рис. 24. Произвольный треугольник ABC

1. Что такое A, B и C?
2. Что такое AB, AC и CB?
3. Что такое AK?
4. Что такое AM?
5. Что такое CP?
6. При какой вершине $\angle ACB$?

Прочитайте.

Четырёхугольник – это геометрическая фигура. Четырёхугольник имеет четыре вершины, четыре стороны и четыре угла.

Трапеция – это четырёхугольник, у которого две противоположные стороны параллельны. Параллельные стороны трапеции называют **основаниями трапеции**.

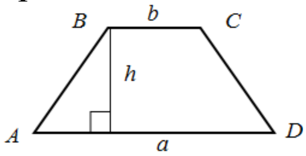
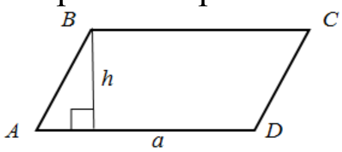
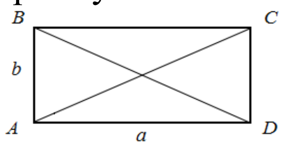
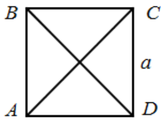
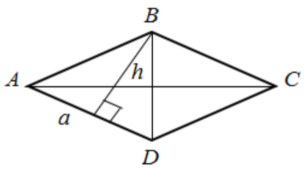
Параллелограмм – это четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

Прямоугольник – это параллелограмм, у которого все углы прямые.

Квадрат – это прямоугольник, у которого все стороны равны.

Ромб – это параллелограмм, у которого все стороны равны.

Изучите основные виды четырёхугольников и их элементы.

Виды четырёхугольников	**Элементы четырёхугольника**	**Формулы**
1. Трапеция 	Точки A, B, C, D – это вершины трапеции. AB, AD, BC, CD – это стороны трапеции. $BC \parallel AD$, BC и AD – основания трапеции.	$S = \frac{1}{2}(a+b)\cdot h$ – площадь трапеции.
2. Параллелограмм 	$BC \parallel AD$, $AB \parallel CD$. BD и AC – диагонали параллелограмма, a – основание, h – высота, опущенная из вершины B на сторону AD.	$S = a \cdot h$ – площадь параллелограмма.
3. Прямоугольник 	$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^0$. $AB = CD = b$, $BC = AD = a$, BD и AC – диагонали прямоугольника.	$S = a \cdot b$ – площадь прямоугольника.
4. Квадрат 	$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^0$. $AB = BC = CD = AD = a$, BD и AC – диагонали квадрата.	$S = a^2$ – площадь квадрата.
5. Ромб 	$\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$. $AB = BC = CD = AD = a$, $BD = d_1$ и $AC = d_2$ – диагонали ромба; h – высота, опущенная из вершины B на сторону AD.	$S = \frac{1}{2}\cdot d_1 \cdot d_2$ – площадь ромба; $S = a \cdot h$ – площадь ромба.

Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Как называют параллельные стороны трапеции?
2. Назовите четырёхугольники, у которых все углы прямые.
3. Назовите четырёхугольники, у которых стороны попарно параллельны.
4. Назовите четырёхугольник, у которого две противоположные стороны параллельны.
5. Назовите четырёхугольники, у которых все стороны равны.
6. Чему равна сумма всех углов четырёхугольника?
7. Чему равен угол между диагоналями ромба?

Задание 7. Изучите рисунки 25 и 26 и ответьте на вопросы.

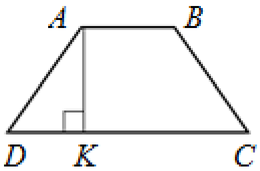


Рис. 25. Трапеция *ABCD*

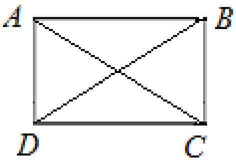


Рис. 26. Прямоугольник *ABCD*

1. Что такое *A*, *B*, *C* и *D* (рис. 25, 26)?
2. Что такое *AB*, *BC*, *CD* и *AD* (рис. 25, 26)?
3. Что такое *AB* и *CD* (рис. 25)?
4. Что такое *AK* (рис. 25)?
5. Что такое *AC* и *BD* (рис. 26)?

Задание 8. Установите соответствия.

Формула	**Название формулы**
1. $S = a^2$	**а)** площадь параллелограмма
2. $S = a \cdot b$	**б)** площадь трапеции
3. $S = a \cdot h$	**в)** площадь треугольника
4. $S = \frac{a \cdot h}{2}$	**г)** площадь ромба
5. $S = \frac{1}{2}(a+b) \cdot h$	**д)** периметр треугольника
6. $P = a + b + c$	**е)** площадь прямоугольника
7. $S = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2$	**ж)** площадь квадрата

Задания

Задание 1. Закончите предложения.

1. Если в треугольнике все стороны равны или все углы равны, то треугольник называется ________________ .

2. Если в треугольнике две стороны равны, то треугольник называется ________________ .

3. Если в треугольнике угол равен 90^0, то треугольник называется ________________ .

4. Четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны, называется ____________________ .

5. Четырёхугольник, у которого две противоположные стороны параллельны, называется ____________________.

6. Параллелограмм, у которого все углы прямые, называется ___________ .

7. Параллелограмм, у которого все стороны равны, называется __________ .

8. Прямоугольник, у которого все стороны равны, называется ___________ .

Задание 2. Выполните задание по образцу.

Образец. Длина, окружность, L. → Длину окружности **обозначают** буквой L.

1. Радиус, окружность, R. → ……………………………………………………...
2. Диаметр, окружность, d. → ………………………………………………
3. Центр, окружность, O. → ………………………………………………
4. Высота, треугольник, h. → ……………………………………………..
5. Площадь, фигура, S. → …………………………………………………
6. Периметр, квадрат, P. → ………………………………………………

Задание 3. А. Прочитайте текст.

Периметр – это сумма длин всех сторон многоугольника. Периметр обозначают большой латинской буквой P. Например, периметр прямоугольника – это сумма длин всех сторон прямоугольника. Периметр прямоугольника со сторонами a и b находят по формуле $P = 2(a + b)$.

Б. Выполните задание по образцу.

Образец. Периметр прямоугольника, стороны a и b, $P = 2(a + b)$ → Периметр прямоугольник**а со сторонами** a и b **находят по формуле** $P = 2(a + b)$.

1. Периметр квадрат**а**, сторона a, $P = 4a$ → …………………………………...
…………………………………………………………………………………
2. Периметр треугольник**а**, стороны a, b и c, $P = a + b + c$ → ………………..
…………………………………………………………………………………
3. Периметр равностороннего треугольник**а**, сторона a, $P = 3a$ → …………
…………………………………………………………………………………
4. Периметр равнобедренного треугольник**а**, стороны a, b и c ($c = b$), $P = a + 2b$ → ……………………………………………………………………...
5. Периметр равнобедренной трапеци**и**, стороны a, b, c и d ($c = d$), $P = a + b + 2c$ → ………………………………………………………………
6. Периметр параллелограмм**а**, стороны a и b, $P = 2(a + b)$ → ………………
…………………………………………………………………………………
7. Периметр четырёхугольника, стороны a, b, c и d, $P = a + b + c + d$ → …...
…………………………………………………………………………………

Задание 4. Соедините два предложения в одно.

Образец. Прямоугольник – это параллелограмм. **У него** все углы прямые. → Прямоугольник – это параллелограмм, **у которого** все углы прямые.

1. Квадрат – это прямоугольник. **У него** все стороны равны.
2. Параллелограмм – это четырёхугольник. **У него** противоположные стороны попарно параллельны.
3. Планиметрия – это раздел геометрии. **В нём** изучают точки, расстояние между двумя точками, прямые и фигуры на плоскости.
4. Прямоугольный треугольник – это треугольник. **В нём** один угол равен 90^0.
5. Ромб – это параллелограмм. **У него** все стороны равны.

6. Трапеция – это четырёхугольник. **У него** две противоположные стороны параллельны.

7. $P = 2(a + b)$ – это формула. **По ней** находят периметр прямоугольника со сторонами a и b.

Задание 5. Вставьте в предложения предлоги *до, из, на, от, по, с(о), у*.

1. Рассмотрим некоторые фигуры ___ плоскости.

2. Окружность – это геометрическое место всех точек плоскости, которые равноудалены ___ центра окружности.

3. Расстояние ___ центра окружности ___ любой точки окружности называют радиусом окружности.

4. Диаметр окружности находят ___ формуле $d = 2R$.

5. Треугольник состоит ___ трёх точек, которые последовательно соединены отрезками.

6. Соединим точку N ___ вершиной C.

7. Проведём ___ вершины A прямую, которая делит угол при вершине A пополам.

8. Прямая CK – это высота, опущенная ___ вершины C ___ сторону AB.

9. Параллелограмм, __ которого все углы прямые, называется прямоугольником.

10. Периметр прямоугольника ___ сторонами a и b находят ___ формуле $P = 2(a + b)$.

Задание 6. Выберите правильный вариант ответа.

1. Расстояние от центра окружности до любой точки окружности – это … окружности.

(А) диаметр; (Б) радиус; (В) центр.

2. Отрезок, который опущен из вершины треугольника и делит противоположную сторону пополам, – это … треугольника.

А) биссектриса; (Б) высота; (В) медиана.

3. Прямая, которая делит угол пополам, – это … угла.

(А) биссектриса; (Б) высота; (В) медиана.

4. Перпендикуляр, который опущен из вершины треугольника на противоположную сторону, – это … треугольника.

(А) биссектриса; (Б) высота; (В) медиана.

5. Сумма длин всех сторон многоугольника – это … .

(А) высота; (Б) периметр; (В) площадь.

6. Треугольник, у которого все стороны равны, – это … треугольник.

(А) равносторонний; (Б) равнобедренный; (В) прямоугольный.

7. Треугольник, у которого две стороны равны, – это … треугольник.

(А) равносторонний; (Б) равнобедренный; (В) прямоугольный.

8. Треугольник, у которого угол равен 90^0 градусов, – это … треугольник.

(А) равносторонний; (Б) равнобедренный; (В) прямоугольный.

Тема 22. Стереометрия

Словарь к теме

грань (ж. р.)	простра́нство
ко́нус	при́зма
круг	четырёхуго́льная при́зма
куб	ребро́
объём те́ла	длина́ ребра́
многогра́нник	стереоме́трия
параллелепи́пед	сфе́ра
пирами́да	цили́ндр
пло́скость (ж.р.)	шар
пло́щадь основа́ния	куби́ческие едини́цы (куб. ед.)
пове́рхность (ж. р.)	ограни́ченный

Обозначение читают:

$S_{осн.}$ – площадь основан**ия** (S основан**ия**).

Прочитайте.

Стереометрия – это раздел геометрии, в котором изучают свойства фигур в пространстве. Фигурами в пространстве являются точки, прямые, плоскости и поверхности.

Рассмотрим некоторые поверхности в пространстве.

На рисунке 27 изображена сфера.

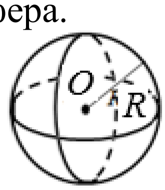


Рис. 27. Сфера

Точка O – это центр сферы. Расстояние от точки O до любой точки сферы называют **радиусом сферы**. Радиус сферы обозначают большой латинской буквой R или малой латинской буквой r.

Объём шара, ограниченного сферой, находят по формуле

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

На рисунке 28 изображён круговой цилиндр.

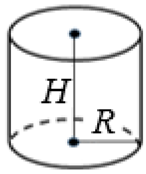


Рис. 28. Круговой цилиндр

В основании цилиндра лежит круг. Высоту цилиндра обозначают буквой H. Радиус цилиндра – это радиус основания.

Радиус основания обозначают большой латинской буквой *R*. Объём цилиндра находят по формуле

$$V = \pi R^2 H.$$

На рисунке 29 изображён конус.

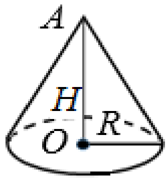


Рис. 29. Конус

Точка A – это вершина конуса. Отрезок $AO = H$ – это высота конуса. В основании конуса лежит круг. Радиус окружности обозначают большой латинской буквой *R*.

Объём конуса находят по формуле

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H.$$

На рисунке 30 изображена треугольная пирамида.

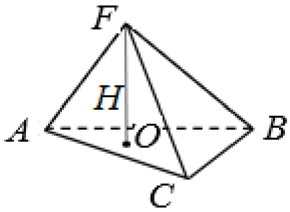


Рис. 30. Треугольная пирамида

Точка F – это вершина пирамиды. Отрезок $FO = H$ – это высота пирамиды. В основании пирамиды лежит треугольник ABC. Треугольная пирамида имеет 4 грани и 6 рёбер. Грани пирамиды – это треугольники FAC, FCB, FAB и ABC. Рёбра пирамиды – это отрезки FA, FC, FB, AC, AB и CB.

Объём пирамиды находят по формуле

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{осн.} \cdot H.$$

На рисунке 31 изображён прямоугольный параллелепипед.

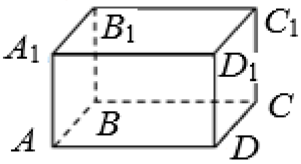


Рис. 31. Параллелепипед

Точки A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1 – это вершины прямоугольного параллелепипеда. Прямоугольный параллелепипед имеет 6 граней и 12 рёбер. Например, отрезок AA_1 – ребро параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Каждая грань прямоугольного параллелепипеда – это прямоугольник. Прямоугольник $ABCD$ – это основание прямоугольного параллелепипеда.

Объём параллелепипеда находят по формуле

$$V = S_{осн.} \cdot H.$$

На рисунке 32 изображён куб.

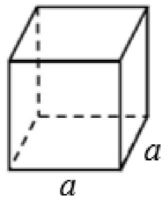


Рис. 32. Куб

Куб является частным случаем параллелепипеда. Каждая грань куба – это квадрат. Все рёбра куба равны.

Объём куба со стороной *a* находят по формуле

$$V = a^3.$$

Объём тела, ограниченного поверхностью, измеряется в кубических единицах.

Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Что изучает стереометрия?
2. Что является фигурой в пространстве?
3. Назовите поверхности, у которых в основании лежит круг.
4. Найдите радиус сферы, если объём шара, ограниченного сферой, равен 24 кубическим единицам ($\pi \approx 3$).
5. Что является гранями треугольной пирамиды?
6. Сколько граней имеет треугольная пирамида?
7. Сколько рёбер имеет треугольная пирамида?
8. Что является основанием конуса?
9. Сколько граней имеет куб?
10. Сколько рёбер имеет куб?
11. Найдите сторону куба, если его объём равен 64 кубическим единицам.

Задание 1. Изучите рисунок 33 и ответьте на вопросы.

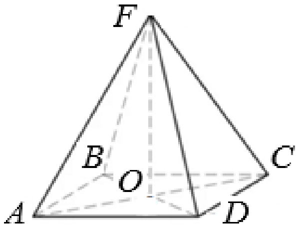


Рис. 33. Пирамида FABCD

1. Как называется многогранник *FABCD*?
2. Что такое *F*?
3. Что лежит в основании пирамиды *FABCD*?
4. Что такое *AB*, *AD*, *CB*, *DC*, *FA*, *FB*, *FC* и *FD*?
5. Сколько рёбер имеет пирамида *FABCD*?
6. Что такое *FO*?
7. Что такое *FAD*?
8. Сколько граней имеет пирамида *FABCD*?
9. Что такое *BD* и *AC*?

Задания

Задание 1. Ответьте на вопросы.

1. Чему равен объём цилиндра, если $R = 2$ и $H = 1$?

2. Цилиндр и конус имеют одинаковые основания и высоту. Во сколько раз объём цилиндра больше, чем объём конуса?

3. Чему равен радиус сферы, если её объём равен 36 куб. единицам?

Задание 2. Выберите правильный вариант ответа.

1. В основании треугольной призмы лежит … .

(А) квадрат; (Б) круг;
(В) прямоугольник; (Г) треугольник.

2. В основании цилиндра лежит … .

(А) квадрат; (Б) круг;
(В) прямоугольник; (Г) треугольник.

3. Каждая грань куба – это … .

(А) квадрат; (Б) круг;
(В) прямоугольник; (Г) треугольник.

4. Каждая грань прямоугольного параллелепипеда – это … .

(А) квадрат; (Б) круг;
(В) прямоугольник; (Г) треугольник.

5. Высоту цилиндра обозначают буквой … .

(А) R; (Б) V;
(В) H; (Г) O.

6. Объём цилиндра обозначают буквой … .

(А) R; (Б) V;
(В) H; (Г) O.

7. Радиус цилиндра обозначают буквой … .

(А) R; (Б) V;
(В) H; (Г) O.

8. Центр сферы обозначают буквой … .

(А) R; (Б) V;
(В) H; (Г) O.

9. Куб является частным случаем … .

(А) единицах; (Б) параллелепипеда;
(В) радиусом; (Г) рёбер.

10. Объём тела, ограниченного поверхностью, измеряется в кубических … .

(А) единицах; (Б) параллелепипеда;
(В) радиусом; (Г) рёбер.

11. Треугольная пирамида имеет 4 грани и 6 … .

(А) единицах; (Б) параллелепипеда;
(В) радиусом; (Г) рёбер.

12. Расстояние от центра сферы до любой точки сферы называют … сферы.

(А) единицах; (Б) параллелепипеда;
(В) радиусом; (Г) рёбер.

Тема 23. Системы линейных уравнений

23.1. Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными

Словарь к теме

систе́ма уравне́ний	убежда́ться – убеди́ться *в чём?*
па́ра чи́сел	удовлетворя́ть уравне́нию
выполня́ется усло́вие	одновреме́нно
проверя́ть – прове́рить *что?*	таки́м о́бразом
обраща́ть – обрати́ть *что? во что?*	причём

Задание 1. Прочитайте записи по образцу.

Образец. $\begin{cases} 2x+3y=5, \\ 3x-2y=1 \end{cases}$ – систем**а** уравнений $2x + 3y = 5$, $3x - 2y = 1$.

1) $\begin{cases} 2x-3y=4, \\ 3x+2y=7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y=3, \\ x-y=1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 5x+6y=1, \\ 6x+7y=1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 7x+2y=3, \\ 3x+2y=3; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 2x-y=1, \\ 3x+y=7; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 5x-6y=3, \\ 2x-3y=0; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 9x-4y=5, \\ 6x-5y=1; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 2y-x=3, \\ 5x+y=7; \end{cases}$ 9) $\begin{cases} 2x+y=-2, \\ 3x-2y=8; \end{cases}$

10) $\begin{cases} 3x-2y=-3, \\ 5x+2y=-2; \end{cases}$ 11) $\begin{cases} 2x-5y=1, \\ 5x-6y=9; \end{cases}$ 12) $\begin{cases} 3x+y=-7, \\ 2x+y=-5. \end{cases}$

Задание 2. Выполните задание по образцу.

Образец. 1. Проверьте, является ли пара чисел (1; 1) решением системы уравнений $\begin{cases} 2x+3y=5, \\ 3x-2y=1. \end{cases}$

Подставим **в каждое** уравнение системы вместо x число 1, вместо y – число 1:

$$\begin{cases} 2\cdot1+3\cdot1=5, \\ 3\cdot1-2\cdot1=1. \end{cases}$$

Значения x и y **обращают** каждое уравнение системы **в верное числовое равенство**, т. е. **удовлетворяют** каждому уравнению системы.

Следовательно, пара чисел (1; 1) **является решением** системы уравнений.

2. Проверьте, является ли пара чисел (2; 1) решением системы уравнений $\begin{cases} 2x-3y=3, \\ 3x+2y=8. \end{cases}$

Подставим **в каждое** уравнение системы вместо x число 2, вместо y – число 1:

$$\begin{cases} 2\cdot 2-3\cdot 1=1\neq 3, \\ 3\cdot 2+2\cdot 1=8. \end{cases}$$

Значения x и y **не удовлетворяют** первому уравнению системы.

Следовательно, пара чисел (2; 1) **не является решением** системы уравнений.

1) $\begin{cases} 2x-3y=4, \\ 3x+2y=7, \end{cases}$ (1; 2); 2) $\begin{cases} 2y-x=3, \\ 5x+y=7, \end{cases}$ (1; 2); 3) $\begin{cases} 5x+6y=1, \\ 6x+7y=1, \end{cases}$ (–1; 1);

4) $\begin{cases} 7x+2y=3, \\ 3x+2y=3, \end{cases}$ (1; –2); 5) $\begin{cases} 2x-y=1, \\ 3x+y=7, \end{cases}$ (2; 3); 6) $\begin{cases} 5x-6y=3, \\ 2x-3y=0, \end{cases}$ (3; 2);

7) $\begin{cases} 3x-2y=-3, \\ 5x+2y=-2, \end{cases}$ (1; 3); 8) $\begin{cases} 2x-5y=1, \\ 5x-6y=9, \end{cases}$ (3; 1); 9) $\begin{cases} 2x+y=-2, \\ 3x-2y=8, \end{cases}$ (–2; 2);

10) $\begin{cases} 9x-4y=5, \\ 6x-5y=1, \end{cases}$ (1; 1); 11) $\begin{cases} x+y=3, \\ x-y=1, \end{cases}$ (1; 2); 12) $\begin{cases} 3x+y=-7, \\ 2x+y=-4, \end{cases}$ (–3; 2).

Прочитайте.

Системой двух линейных уравнений с двумя неизвестными называется система уравнений вида

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2, \end{cases} \qquad (1)$$

где x и y – неизвестные, a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 и c_2 – некоторые числа, причём a_1 и b_1, а также a_2 и b_2 не равны одновреме́нно нулю.

Решением системы уравнений (1) называется пара чисел (x_0; y_0), которая удовлетворяет каждому уравнению системы (1), т. е. обращает каждое уравнение системы в верное числовое равенство.

Например, пара чисел (1; 1) является решением системы уравнений

$$\begin{cases} 2x+3y=5, \\ 3x-2y=1, \end{cases}$$

потому что значения $x=1$ и $y=1$ обращают каждое уравнение системы в верное числовое равенство.

Решить систему уравнений – значит найти множество всех решений системы или убедиться, что система не имеет решений.

При решении системы уравнений (1) возможны три случая.

Случай 1. Если выполняется условие $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$, то система уравнений (1) имеет **единственное решение**.

Случай 2. Если выполняется условие $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$, то система уравнений (1) **не имеет решений**.

Случай 3. Если выполняется условие $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, то система уравнений (1) имеет **бесконечное множество решений**.

Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Что называется системой двух линейных уравнений с двумя неизвестными?
2. Что называется решением системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными?
3. Что значит решить систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными?
4. Когда система двух линейных уравнений с двумя неизвестными имеет единственное решение?
5. Когда система двух линейных уравнений с двумя неизвестными имеет бесконечное множество решений?
6. Когда система двух линейных уравнений с двумя неизвестными не имеет решений?
7. Запишите систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными, которая не имеет решений.
8. Запишите систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными, которая имеет бесконечное множество решений.
9. Запишите систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными, которая имеет единственное решение.

23.2. Равносильные системы уравнений

Словарь к теме

да́нная систе́ма подстано́вка (заме́на) равноси́льный равноси́льное уравне́ние равноси́льная систе́ма уравне́ний	равноси́лен, равноси́льна, -о, -ы выража́ть – вы́разить *что?* заменя́ть – замени́ть *что? чем?* совпада́ть – совпа́сть *с чем?* како́й-нибудь

Запись читают:

$\begin{cases} 2x + 3y = 5, \\ 3x - 2y = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 5, \\ 6x - 4y = 2. \end{cases}$ – систем**а** уравнений $2x + 3y = 5$, $3x - 2y = 1$ равносильн**а** систем**е** уравнений $2x + 3y = 5$, $6x - 4y = 2$.

Задание 3. А. Изучите конструкции.

Выразить что? (В. п.) из чего? (Р. п.)
Подставить что? (В. п.) вместо чего? (Р. п.) во что? (В. п.)

Б. Выполните задание по образцу.

Образец. Решите систему уравнений $\begin{cases} x+3y=4, \\ 2x-3y=-1. \end{cases}$

Решение. Выразим из первого уравнения системы $x + 3y = 4$ неизвестное x:

$$x = 4 - 3y.$$

Подставим во второе уравнение системы **вместо** x выражение $(4 - 3y)$ и найдём y

$$2x - 3y = -1 \Leftrightarrow 2 \cdot (4 - 3y) - 3y = -1 \Leftrightarrow 8 - 6y - 3y = -1 \Leftrightarrow y = 1.$$

Подставим в первое уравнение системы **вместо** y число 1 и найдём x

$$x + 3 \cdot 1 = 4 \Leftrightarrow x = 4 - 3 \cdot 1 = 1.$$

Ответ: $x = 1$, $y = 1$.

1) $\begin{cases} x+2y=5, \\ 2x+y=4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+y=-1, \\ 3x+4y=1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+2y=4, \\ 3x-y=-2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x-y=1, \\ 2x+3y=8; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x-2y=-3, \\ 2y-3x=5; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3x-y=-2, \\ x+3y=6; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2x+3y=5, \\ 4x-y=3; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 3x+4y=-1, \\ 2x-y=3; \end{cases}$ 9) $\begin{cases} 3x-2y=9, \\ x-15y=3; \end{cases}$

10) $\begin{cases} 5x-2y=3, \\ x+4y=5; \end{cases}$ 11) $\begin{cases} 4x+3y=1, \\ x-2y=3; \end{cases}$ 12) $\begin{cases} 5x+4y=5, \\ 3x-y=3. \end{cases}$

Прочитайте.

Две системы линейных уравнений называются **равносильными**, если их множества решений совпадают.

Рассмотрим свойства равносильных систем уравнений и примеры.

Свойство 1. Если заменить любое уравнение системы равносильным уравнением, то получим систему, которая равносильна данной.

$$\begin{cases} 2x+3y=5, \\ 3x-2y=1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y=5, \\ 6x-4y=2. \end{cases}$$

Свойство 2. Если любое уравнение системы заменить суммой или разностью уравнений системы, то получим систему, которая равносильна данной.

$$\begin{cases} 2x+3y=5, \\ -2x+y=-1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y=5, \\ 4y=4. \end{cases}$$

Свойство 3. Если из любого уравнения выразить какое-нибудь неизвестное и подставить это выражение в другое уравнение системы, то получим систему, которая равносильна данной.

$$\begin{cases} x+3y=4, \\ 2x-3y=-1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4-3y, \\ 2\cdot(4-3y)-3y=-1. \end{cases}$$

Ответьте на вопросы.

1. Какие системы линейных уравнений называются равносильными?
2. Можно заменить любое уравнение системы равносильным уравнением?
3. Можно выразить из любого уравнения какое-нибудь неизвестное и подставить это выражение в другое уравнение системы?
4. Можно заменить любое уравнение системы суммой или разностью уравнений системы?

23.3. Методы решения систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными

Прочитайте.

Рассмотрим два метода решения систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными: **метод подстановки** и **метод сложения**.

Пример 1. Решите **методом подстановки** систему уравнений

$$\begin{cases} x+3y=4, \\ 2x-3y=-1. \end{cases}$$

Решение. Запишем решение через равносильные системы

$$\begin{cases} x+3y=4, \\ 2x-3y=-1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4-3y, \\ 2\cdot(4-3y)-3y=-1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4-3y, \\ 8-6y-3y=-1, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=4-3y, \\ 8-9y=-1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4-3y, \\ -9y=-9, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4-3\cdot 1=1, \\ y=1. \end{cases}$$

Следовательно, пара чисел (1; 1) является решением данной системы уравнений.

Ответ: $x = 1$; $y = 1$.

Пример 2. Решите **методом сложения** систему уравнений

$$\begin{cases} x+3y=4, \\ 2x-3y=-1. \end{cases}$$

Решение. Умножим первое уравнение системы на (–2)

$$\begin{cases} x+3y=4, \\ 2x-3y=-1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x-6y=-8, \\ 2x-3y=-1. \end{cases}$$

Прибавим первое уравнение системы ко второму уравнению и запишем равносильную систему

$$\begin{cases} -2x-6y=-8, \\ 2x-3y=-1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x-6y=-8, \\ -9y=-9. \end{cases}$$

Разделим первое уравнение системы на число (–2), а второе – на число (–9)

$$\begin{cases} -2x-6y=-8, \\ -9y=-9, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y=4, \\ y=1. \end{cases}$$

Подставим значение $y = 1$ в первое уравнение равносильной системы и найдём значение x

$$\begin{cases} x + 3y = 4, \\ y = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 \cdot 1 = 4, \\ y = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 1. \end{cases}$$

Ответ. $x = 1$; $y = 1$.

Ответьте на вопросы.

1. Какими методами можно решить систему уравнений $\begin{cases} x + 3y = 4, \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$?

2. Какие значения x и y являются решениями системы $\begin{cases} x + 3y = 4, \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$?

3. Почему значения $x = 1$ и $y = 1$ являются решениями системы уравнений $\begin{cases} x + 3y = 4, \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$?

23.4. Метод Крамера

Словарь к теме

ма́трица	строка́
квадра́тная ма́трица	столбе́ц
основна́я ма́трица систе́мы	ма́трица-столбе́ц
определи́тель	теоре́ма

Обозначения читают:

a_{11} – a один, один;

a_{12} – a один, два;

a_{21} – a два, один;

a_{22} – a два, два.

Задание 4. Прочитайте записи по образцу.

Образец. 1) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ – матрица A равна первая строка: a_{11}, a_{12}, вторая строка: a_{21}, a_{22};

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – матрица A равна первая строка: 2, 3, вторая строка: 0, 1.

1) $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$; 3) $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$;

4) $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$; 5) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; 6) $A = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$;

7) $X=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$; 8) $A=\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$; 9) $A=\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$;

10) $У=\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}$; 11) $A=\begin{pmatrix} -7 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$; 12) $A=\begin{pmatrix} 7 & -7 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$.

Задание 5. Прочитайте записи по образцу.

Образец. 1) $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ – дельта равно определитель первая строка: a_{11}, a_{12}, вторая строка: a_{21}, a_{22};

2) $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ – дельта равно определитель первая строка: 2, 3, вторая строка: 0, 1.

1) $\Delta=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$; 2) $\Delta=\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 7 \end{vmatrix}$; 3) $\Delta=\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 8 & -1 \end{vmatrix}$;

4) $\Delta=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}$; 5) $\Delta=\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$; 6) $\Delta=\begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}$;

7) $\Delta=\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix}$; 8) $\Delta=\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}$; 9) $\Delta=\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}$;

10) $\Delta=\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix}$; 11) $\Delta=\begin{vmatrix} -7 & 2 \\ -5 & 4 \end{vmatrix}$; 12) $\Delta=\begin{vmatrix} 7 & -7 \\ 9 & -5 \end{vmatrix}$.

Прочитайте.

Квадратной матрицей второго порядка называется таблица чисел, которая состоит из двух строк и двух столбцов.

Числа, из которых составили матрицу, называются **элементами матрицы**. Матрицы обозначают большими латинским буквами *A*, *B*, *C* и т. д. Элементы матрицы обозначают малыми латинскими буквами *a*, *b*, *c* и т. д.

Квадратную матрицу второго порядка записывают так:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Матрица *A* имеет две строки и два столбца. Числа a_{11}, a_{12}, a_{21} и a_{22} – это элементы матрицы *A*. Элементы матрицы a_{11} и a_{12} стоят в первой строке, элементы a_{21} и a_{22} стоят во второй строке. Элементы матрицы a_{11} и a_{21} стоят в первом столбце, элементы a_{12} и a_{22} стоят во втором столбце.

Определителем квадратной матрицы второго порядка называется число, которое обозначают $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ и вычисляют по формуле

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = c_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = c_2. \end{cases} \qquad (2)$$

Основной матрицей системы уравнений (2) называется матрица, которая составлена из коэффициентов при неизвестных x и y

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Определитель основной матрицы системы обозначают греческой буквой Δ

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Матрица-столбец $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ называется **столбцом свободных членов**.

Заменим первый столбец определителя Δ столбцом свободных членов. Получим определитель, который обозначают Δ_x и называют **определителем неизвестного *x***

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Заменим второй столбец определителя Δ столбцом свободных членов. Получим определитель, который обозначают Δ_y и называют **определителем неизвестного *y***

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{vmatrix}.$$

Теорема. Если определитель основной матрицы системы уравнений (2) отличен от нуля ($\Delta \neq 0$), то система линейных уравнений (2) имеет единственное решение, которое находится по формулам

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \; y = \frac{\Delta_y}{\Delta}. \qquad (3)$$

Формулы (3) называются **формулами Крамера**. Метод решения системы линейных уравнений с помощью формул Крамера называется **методом Крамера**.

Пример. Решите **методом Крамера** систему уравнений

$$\begin{cases} x+3y=4, \\ 2x-3y=-1. \end{cases}$$

Решение. Найдём определитель основной матрицы системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1\cdot(-3) - 2\cdot 3 = -9 \neq 0.$$

Заменим первый столбец определителя Δ столбцом свободных членов и вычислим определитель неизвестного x

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 4\cdot(-3) - (-1)\cdot 3 = -9.$$

Заменим второй столбец определителя Δ столбцом свободных членов и вычислим определитель неизвестного y

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1) - 2\cdot 4 = -9.$$

По формулам Крамера найдём неизвестные x и y

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-9}{-9} = 1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-9}{-9} = 1.$$

Ответ: $x = 1$, $y = 1$.

Ответьте на вопросы и выполните задание.

1. Что называется основной матрицей системы уравнений (2)?
2. По какой формуле находят определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$?
3. Когда система уравнений (2) имеет единственное решение?
4. В чём заключается метод Крамера?
5. Запишите формулы Крамера.
6. Как получили определитель неизвестного x?
7. Как называется определитель Δ_y?

Задания

Задание 1. Решите системы линейных уравнений: 1) методом подстановки; 2) методом сложения; 3) методом Крамера.

1) $\begin{cases} 2x-y=1, \\ 3x+y=7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y=3, \\ x-y=-1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x+y=-7, \\ 2x+y=-4. \end{cases}$

Задание 2. Запишите слова в скобках в правильной форме.

1. Найдём множество всех решений (система) ___________________.
2. Любое уравнение системы можно заменить равносильным (уравнение) ___________________.
3. Пара чисел (1; 1) является (решение) _________________ системы.

4. Пара чисел $(x_0; y_0)$ обращает каждое уравнение системы в верное числовое (равенство) _____________.

5. Пара чисел $(x_0; y_0)$ удовлетворяет каждому (уравнение) _____________ системы.

6. Подставим в левую (часть) ________ уравнения $3x - 2y = 1$ вместо неизвестного x число 1.

7. Получим (система) _______________, которая равносильна данной (система) _________________ .

8. Рассмотрим (система) ________________ двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

9. Решите систему уравнений (метод) ______________ сложения.

Задание 3. Запишите числительное *два, две* в правильной форме.

1. _________ системы линейных уравнений являются равносильными.
2. Подставим вместо неизвестного x число _________ .
3. Пять икс плюс три игрек равно _________ .
4. Рассмотрим _________ метода решения системы уравнений.
5. Это уравнение с _________ неизвестными.
6. Это система _________ линейных уравнений с _________ неизвестными.

Задание 4. Выберите правильный вариант ответа.

1. Системой двух линейных уравнений с двумя неизвестными называется система уравнений … $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$

(А) вида; (Б) типа; (В) формы.

2. Рассмотрим уравнение $a_1x + b_1y = c_1$, где x и y – это … .

(А) некоторые числа; (Б) неизвестные; (В) система.

3. Решением системы двух уравнений с двумя неизвестными называется … чисел $(x_0; y_0)$, которая удовлетворяет каждому уравнению системы.

(А) два; (Б) пара; (В) равенство.

4. В выражение $x = 4 - 3y$ вместо y … число 1.

(А) выразим; (Б) обратим; (В) подставим.

5. Если выполняется … $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$, то система двух линейных уравнений с двумя неизвестными имеет единственное решение.

(А) запись; (Б) правило; (В) условие.

6. Если любое уравнение системы … суммой или разностью уравнений системы, то получим систему, которая равносильна данной.

(А) выразить; (Б) заменить; (В) назвать.

7. Две системы линейных уравнений называются равносильными, если их множества решений … .

(А) выражают; (Б) совпадают; (В) удовлетворяют.

Тема 24. Элементы векторной алгебры

24.1. Основные понятия

Словарь к теме

ве́ктор те́рмин напра́вленный нача́льная точка (нача́ло) коне́чная точка (коне́ц)	коллинеа́рный, коллинеа́рен сонапра́вленный, сонапра́влен ограни́чен *чем?* совпада́ть – совпа́сть *с чем?*

Задание 1. Прочитайте записи по образцу.

Образец. 1) $\bar{a}$ – вектор *a*; **2)** $\overline{AB}$ – вектор *AB*.

1) $\bar{b}$; 2) $\overline{AC}$; 3) $\bar{c}$; 4) $\overline{CD}$; 5) $\bar{d}$; 6) $\overline{E_1F_1}$;
7) $\bar{g}$; 8) $\overline{A_1C_1}$; 9) $\bar{s}$; 10) $\overline{MN}$; 11) $\bar{x}$; 12) $\overline{DC}$.

Задание 2. Прочитайте записи по образцу.

Образец. 1) $|\bar{a}|$ – модуль вектора *a*; **2)** $|\overline{AB}|$ – модуль вектора *AB*.

1) $|\bar{b}|$; 2) $|\overline{AC}|$; 3) $|\bar{c}|$; 4) $|\overline{CD}|$;
5) $|\bar{d}|$; 6) $|\overline{E_1F_1}|$; 7) $|\bar{g}|$; 8) $|\overline{A_1C_1}|$;
9) $|\bar{s}|$; 10) $|\overline{MN}|$; 11) $|\bar{x}|$; 12) $|\overline{DC}|$.

Задание 3. Выполните задание по образцу.

Образец. $\overline{AB}$ – вектор *AB*, точка *A* – начало вектора *AB*, точка *B* – конец вектора *AB*.

1) $\overline{CF}$; 2) $\overline{AC}$; 3) $\overline{DE}$; 4) $\overline{CD}$; 5) $\overline{QE}$; 6) $\overline{E_1F_1}$;
7) $\overline{F_1C_1}$; 8) $\overline{A_1C_1}$; 9) $\overline{E_1D_1}$; 10) $\overline{MN}$; 11) $\overline{B_1C_1}$; 12) $\overline{DC}$.

Задание 4. Прочитайте записи по образцу.

Образец. 1) $\bar{a} \parallel \bar{b}$ – векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ – параллельные векторы (вектор $\bar{a}$ коллинеарен вектору $\bar{b}$);

2) $\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{CD}$ – векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ сонаправлены;

3) $\overline{AB} \uparrow\downarrow \overline{CD}$ – векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ противоположно направлены.

1) $\bar{c} \parallel \bar{b}$; 2) $\overline{EF} \uparrow\uparrow \overline{MN}$; 3) $\overline{BC} \uparrow\downarrow \overline{ED}$; 4) $\overline{AC} \parallel \overline{FN}$;
5) $\bar{d} \parallel \bar{c}$; 6) $\overline{BC} \uparrow\uparrow \overline{DE}$; 7) $\overline{QE} \uparrow\downarrow \overline{CF}$; 8) $\overline{CN} \parallel \overline{MK}$;
9) $\bar{k} \parallel \bar{n}$; 10) $\overline{QS} \uparrow\uparrow \overline{AD}$; 11) $\overline{AC} \uparrow\downarrow \overline{DE}$; 12) $\overline{DC} \parallel \overline{LM}$.

Задание 5. Прочитайте записи по образцу.

Образец. 1) $\bar{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ – вектор $\bar{a}$ с координатами a_x, a_y и a_z;

2) $\bar{a} = \{1, 0, -2\}$ – вектор $\bar{a}$ с координатами 1, 0 и (– 2).

1) $\bar{c} = \{c_x, c_y, c_z\}$;	2) $\bar{x} = \{2, 3, 5\}$;	3) $\bar{i} = \{1, 0, 0\}$;
4) $\bar{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$;	5) $\bar{b} = \{-3, 1, 6\}$;	6) $\bar{j} = \{0, 1, 0\}$;
7) $\bar{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$;	8) $\bar{d} = \{-2, 0, 5\}$;	9) $\bar{k} = \{0, 0, 1\}$;
10) $\bar{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$;	11) $\bar{c} = \{-1, 3, 2\}$;	12) $\bar{0} = \{0, 0, 0\}$.

Задание 6. Выполните задание по образцу.

Образец. 1) $\bar{a} = \{a_x, a_y, a_z\} \Rightarrow |\bar{a}| = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2 + (a_z)^2}$;

2) $\bar{a} = \{1, 0, -2\} \Rightarrow |\bar{a}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$.

1) $\bar{c} = \{c_x, c_y, c_z\}$;	2) $\bar{x} = \{2, 3, 5\}$;	3) $\bar{i} = \{1, 0, 0\}$;
4) $\bar{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$;	5) $\bar{b} = \{-3, 1, 6\}$;	6) $\bar{j} = \{0, 1, 0\}$;
7) $\bar{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$;	8) $\bar{d} = \{-2, 0, 5\}$;	9) $\bar{k} = \{0, 0, 1\}$;
10) $\bar{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$;	11) $\bar{c} = \{-1, 3, 2\}$;	12) $\bar{0} = \{0, 0, 0\}$.

Задание 7. Выполните задание по образцу.

Образец. $A(1; 2; -3)$, $B(2; 0; 2) \Rightarrow \overline{AB} = \{2-1, 0-2, 2-(-3)\} = \{1, -2, 5\}$.

1) $A(3; 2; 4)$, $B(2; 3; -1) \Rightarrow \overline{BA}$;	2) $B(1; -3; 4)$, $C(2; 1; 3) \Rightarrow \overline{BC}$;
3) $A(1; 3; -2)$, $D(4; 2; 2) \Rightarrow \overline{DA}$;	4) $P(3; 2; 4)$, $Q(0; 0; 3) \Rightarrow \overline{PQ}$;
5) $E(3; 1; -5)$, $F(1; 1; 2) \Rightarrow \overline{EF}$;	6) $A(3; -2; 1)$, $B(4; 2; 5) \Rightarrow \overline{BA}$;
7) $A(0; 2; -2)$, $C(5; 0; 3) \Rightarrow \overline{CA}$;	8) $C(3; 2; 3)$, $D(1; 0; 2) \Rightarrow \overline{DC}$;
9) $N(2; 0; -6)$, $M(1; 0; 1) \Rightarrow \overline{MN}$;	10) $C(2; -1; 5)$, $D(3; 5; 4) \Rightarrow \overline{CD}$;
11) $G(0; 5; -3)$, $F(2; 3; 4) \Rightarrow \overline{FG}$;	12) $C(1; -3; 1)$, $K(3; 0; 0) \Rightarrow \overline{CK}$.

Прочитайте.

Вектором называется **направленный отрезок**, т. е. отрезок прямой, который ограничен двумя точками, одна из которых называется **начальной** точкой вектора, а другая – **конечной** точкой вектора.

Если A – начальная точка (начало) вектора, а B – конечная точка (конец), то вектор обозначают двумя большими латинскими буквами $\overrightarrow{AB}$ (рис. 34).

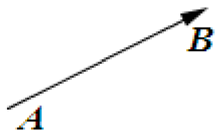


Рис. 34. Вектор $\overrightarrow{AB}$

Модуль вектора – это положительное число, равное длине вектора.

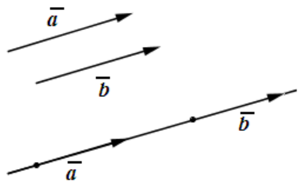
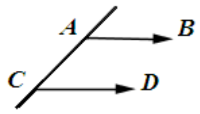
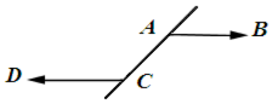
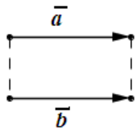
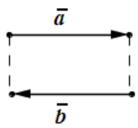
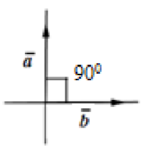
Длина вектора равна расстоянию между его начальной и конечной точками.

Модуль вектора обозначают так: $|\overline{AB}|$, $|\overline{a}|$.

Вектор, у которого конечная точка совпадает с начальной точкой, называется **нулевым вектором** и обозначается $\overline{0}$. Направление нулевого вектора не определено.

Вектор, длина которого равна единице, называется **единичным** вектором.

Ниже представлены термины, изображения векторов и их обозначения.

Термины	**Изображения**	**Обозначения**
1) коллинеарные векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$		$\overline{a} \parallel \overline{b}$
2) сонаправленные векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$		$\overline{AB}\uparrow\uparrow\overline{CD}$
3) противоположно направленные векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$		$\overline{AB}\uparrow\downarrow\overline{CD}$
4) равные векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$		$\overline{a}\uparrow\uparrow\overline{b}$, $\lvert\overline{a}\rvert=\lvert\overline{b}\rvert \Rightarrow \overline{a}=\overline{b}$
5) противоположные векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$		$\overline{a}\uparrow\downarrow\overline{b}$, $\lvert\overline{a}\rvert=\lvert\overline{b}\rvert \Rightarrow \overline{a}=-\overline{b}$
6) перпендикулярные векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$		$\overline{a} \perp \overline{b}$

Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Что такое вектор?

2. Как обозначают вектор, если A – начальная точка вектора, а B – конечная точка вектора?

3. Что такое модуль вектора? Как обозначают модуль вектора?

4. Чему равна длина единичного вектора?

5. Запишите символами: векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ перпендикулярны.

6. Запишите символами: векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ противоположно направлены.

24.2. Проекция вектора

Словарь к теме

пересека́ть – пересе́чь *что?* прое́кция *чего? на что?* простра́нство	трёхмерное простра́нство ра́диус-ве́ктор взаи́мно перпендикуля́рны

Задание 8. А. Прочитайте конструкцию.

Угол между чем? (Т. п.) и чем? (Т. п.) равен чему? (Д. п.)

Б. Прочитайте записи по образцу.

Образец. 1) $\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)=\varphi$ – угол между вектора**ми** $\bar{a}$ и $\bar{b}$ рав**ен** φ;

2) $\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ – угол между вектора**ми** $\bar{a}$ и $\bar{b}$ рав**ен** π **на** 2;

3) $\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)=10^0$ – угол между вектора**ми** $\bar{a}$ и $\bar{b}$ рав**ен** десят**и** градус**ам**.

1) $\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)=\alpha$; 2) $\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)=\beta$; 3) $\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)=\gamma$; 4) $\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)=\theta$;

5) $\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)=30^0$; 6) $\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)=21^0$; 7) $\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)=45^0$; 8) $\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)=8^0$;

9) $\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)=\dfrac{2\pi}{3}$; 10) $\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)=\dfrac{\pi}{4}$; 11) $\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)=\dfrac{\pi}{6}$; 12) $\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)=\dfrac{\pi}{3}$.

Задание 9. Прочитайте записи по образцу.

Образец. 1) $\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a}$ – проекция вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$;

2) $\text{пр}_{OX}\bar{a}$ – проекция вектора $\bar{a}$ на ось OX.

1) $\text{пр}_{\bar{c}}\bar{b}$; 2) $\text{пр}_{\overline{CD}}\overline{AB}$; 3) $\text{пр}_{OY}\bar{a}$; 4) $\text{пр}_{\bar{k}}\bar{i}$;

5) $\text{пр}_{\bar{d}}\bar{c}$; 6) $\text{пр}_{\overline{FT}}\overline{DE}$; 7) $\text{пр}_{OZ}\bar{a}$; 8) $\text{пр}_{\bar{j}}\bar{k}$;

9) $\text{пр}_{\bar{g}}\bar{e}$; 10) $\text{пр}_{\overline{BF}}\overline{DC}$; 11) $\text{пр}_{OX}\bar{b}$; 12) $\text{пр}_{\bar{k}}\bar{j}$.

Прочитайте.

Проекцией вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ называется число, равное произведению модуля вектора $\bar{a}$ на косинус угла между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Проекцию вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ обозначают так: $\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a}$ (или $\text{Proj}_{\bar{b}}\bar{a}$).

Проекцию вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ (рис. 35) находят по формуле:

$$\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a} = |\bar{a}| \cdot \cos\varphi, \text{ где } \varphi = \left(\bar{a}\widehat{,}\bar{b}\right).$$

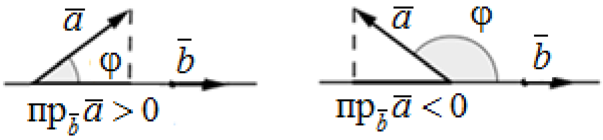


Рис. 35. Проекция вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$

Если $\left(\bar{a}\widehat{,}\bar{b}\right) = \dfrac{\pi}{2}$, то векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ перпендикулярны друг другу.

Записывают: $\bar{a} \perp \bar{b}$.

Перпендикуляр к прямой – это отрезок прямой, который пересекает данную прямую и образует с ней угол 90 градусов (прямой угол).

Опустить перпендикуляр из точки на прямую – значит провести через точку прямую, перпендикулярную данной прямой.

Если $\bar{a} \perp \bar{b}$, то проекция вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ – это точка.

Если $\left(\bar{a}\widehat{,}\bar{b}\right) = 0^0$ или $\left(\bar{a}\widehat{,}\bar{b}\right) = 180^0$, то векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ – **параллельные векторы**, или **коллинеарные векторы**.

Записывают: $\bar{a} \parallel \bar{b}$.

Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Что называется проекцией вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$?
2. Как обозначают проекцию вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$?
3. Прочитайте запись: $\text{пр}_{\bar{c}}\bar{b} = 3$.
4. Запишите формулу проекции вектора $\bar{b}$ на вектор $\bar{a}$.
5. Когда векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ перпендикулярны друг другу?
6. Запишите символами: вектор $\bar{a}$ перпендикулярен вектору $\bar{b}$.
7. Что такое перпендикуляр к прямой?
8. Что значит опустить перпендикуляр?
9. Запишите символами: вектор $\bar{a}$ параллелен вектору $\bar{b}$.
10. Чему равен угол (в градусах) между перпендикулярными векторами?
11. Чему равен угол (в градусах) между параллельными векторами?
12. Когда проекция вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ – точка?
13. Проекция вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ – это вектор или число?

Прочитайте.

Рассмотрим прямоугольную систему координат *XOУZ* в трёхмерном пространстве (рис. 36). Прямые *OX*, *OУ* и *OZ* – это оси координат. Оси *OX*, *OУ* и *OZ* взаимно перпендикулярны друг другу. Ось *OX* – это ось абсцисс, ось *OУ* – это ось ординат, ось *OZ* – это ось аппликат. Точка *O* – начало отсчёта.

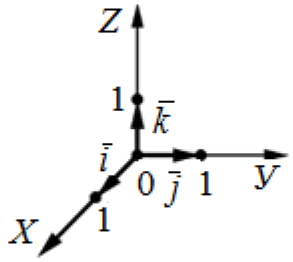


Рис. 36. Прямоугольная система координат

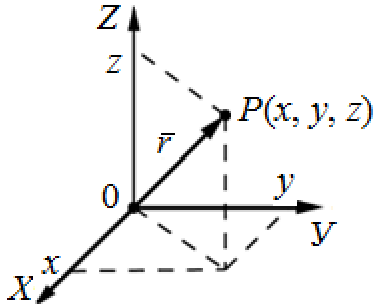


Рис. 37. Радиус-вектор точки P

В трёхмерном пространстве (**в** пространств**е**) любой вектор $\bar{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$ можно записать в виде

$$\bar{a}=a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k},$$

где $\bar{i}\in OX$, $\bar{j}\in OУ$, $\bar{k}\in OZ$, $a_x=\text{пр}_{OX}\bar{a}$, $a_y=\text{пр}_{OУ}\bar{a}$, $a_z=\text{пр}_{OZ}\bar{a}$.

Векторы $\bar{i}$, $\bar{j}$ и $\bar{k}$ – единичные векторы, т. е. $|\bar{i}|=|\bar{j}|=|\bar{k}|=1$.

На плоскости любой вектор $\bar{a}=\{a_x,a_y\}$ можно записать в виде

$$\bar{a}=a_x\bar{i}+a_y\bar{j},$$

где $\bar{i}\in OX$, $\bar{j}\in OУ$, $a_x=\text{пр}_{OX}\bar{a}$, $a_y=\text{пр}_{OУ}\bar{a}$.

Рассмотрим в прямоугольной системе координат точку *P*(*x*, *y*, *z*). Соединим точку *P* с началом координат. Вектор $\overline{OP}$ называют **радиус-вектором** точки *P* и обозначают $\bar{r}$ (рис. 37).

Координаты радиус-вектора $\bar{r}$ совпадают с координатами его конечной точки *P*.

Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Запишите координаты вектора $\bar{a}=a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k}$.
2. Запишите координаты вектора $\bar{b}=b_x\bar{i}+b_y\bar{j}$.
3. Назовите координаты вектора $\bar{a}=3\bar{i}+\bar{j}-\bar{k}$.
4. Найдите проекции вектора $\bar{a}=\{1,\ -1,\ 2\}$ на ось *OX*, на ось *OУ* и на ось *OZ*.
5. Чему равна длина вектора $\bar{i}$?
6. Чему равен модуль вектора $\bar{j}$?
7. Что называют радиус-вектором точки *P*?
8. С чем совпадают координаты радиус-вектора точки?
9. Найдите координаты радиус-вектора точки *A*(1; 2; –1).

24.3. Скалярное произведение векторов

Словарь к теме

скаля́рное произведе́ние ве́кторов

Задание 10. Прочитайте записи по образцу.

Образец. 1) $(\bar{a},\bar{b})$ – скаля́рное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$;

2) $\bar{a}\cdot\bar{b}$ – скаля́рное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$;

3) $\bar{a}\bar{b}$ – скаля́рное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

1) $(\bar{c},\bar{b})$;	2) $\bar{e}\cdot\bar{q}$;	3) $\bar{b}\bar{c}$;	4) $(\overline{AB},\overline{CD})$;
5) $\bar{k}\cdot\bar{m}$;	6) $\bar{i}\cdot\bar{j}$;	7) $\bar{b}\bar{r}$;	8) $\overline{CE}\cdot\overline{DA}$;
9) $(\bar{v},\bar{s})$;	10) $(\bar{k},\bar{i})$;	11) $(\bar{d},\bar{b})$;	12) $\overline{EF}\cdot\overline{AK}$.

Задание 11. Прочитайте записи.

1) $(\bar{a},\bar{b})=0$;

2) $(\bar{a},\bar{b})=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)$;

3) $\cos\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)=\dfrac{(\bar{a},\bar{b})}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}$;

4) $|\bar{a}|=\sqrt{(a_x)^2+(a_y)^2+(a_z)^2}$;

5) $\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a}=\dfrac{(\bar{a},\bar{b})}{|\bar{b}|}$;

6) $\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a}=2\Rightarrow 0^0<\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)<90^0$;

7) $|\bar{a}|=\sqrt{(\bar{a},\bar{a})}$;

8) $(\bar{a},\bar{b})=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$;

9) $\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a}=0\Rightarrow\bar{a}\perp\bar{b}$;

10) $\bar{a}\perp\bar{b}\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$.

Прочитайте.

Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними.

Для обозначения скалярного произведения векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ используют следующие записи:

$$(\bar{a},\bar{b}),\ \bar{a}\cdot\bar{b}\ \text{или}\ \bar{a}\bar{b}.$$

Скалярное произведение двух ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ можно найти по формуле

$$(\bar{a},\bar{b})=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right).$$

Пусть даны векторы $\bar{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$ и $\bar{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$. Тогда скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ находят по формуле

$$(\bar{a},\bar{b})=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

Если $\bar{a} \perp \bar{b}$, то скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равно нулю. И наоборот, если $(\bar{a},\bar{b})=0$, то $\bar{a} \perp \bar{b}$.

Скалярное произведение векторов может быть положительным числом, отрицательным числом или равно нулю.

Запомните!

Условие перпендикулярности ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$: $\bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow (\bar{a},\bar{b})=0$

Ответьте на вопросы.

1. Что называется скалярным произведением векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$?
2. Когда скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равно нулю?
3. Как найти скалярное произведение векторов, если известны их координаты?
4. Чему равно скалярное произведение перпендикулярных векторов?

24.4. Векторное произведение векторов

Словарь к теме

ве́кторное произведе́ние ве́кторов
поворо́т
упоря́доченная тро́йка
часова́я стре́лка
ви́ден *из чего?*
воспо́льзоваться *чем?*

Задание 12. Прочитайте записи по образцу.

Образец. 1) $[\bar{a},\bar{b}]$ – ве́кторное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$;

2) $\bar{a}\times\bar{b}$ – ве́кторное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

1) $[\bar{i},\bar{j}]$;	2) $\bar{i}\times\bar{k}$;	3) $[\overline{AB},\overline{CD}]$;	4) $\overline{ED}\times\overline{BA}$;
5) $[\bar{b},\bar{c}]$;	6) $\bar{c}\times\bar{d}$;	7) $[\overline{MN},\overline{CK}]$;	8) $\overline{BA}\times\overline{DC}$;
9) $[\bar{g},\bar{a}]$;	10) $\bar{j}\times\bar{k}$;	11) $[\overline{FE},\overline{QS}]$;	12) $\overline{AD}\times\overline{BC}$.

Задание 13. Прочитайте записи по образцу.

Образец. 1) $\left|[\bar{a},\bar{b}]\right|$ – модуль векторн**ого** произведени**я** векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$;

2) $\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|$ – модуль векторн**ого** произведени**я** векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

1) $\left|[\bar{i},\bar{j}]\right|$;	2) $\left|\bar{i}\times\bar{k}\right|$;	3) $\left|[\overline{AB},\overline{CD}]\right|$;	4) $\left|\overline{ED}\times\overline{BA}\right|$;
5) $\left|[\bar{b},\bar{c}]\right|$;	6) $\left|\bar{c}\times\bar{d}\right|$;	7) $\left|[\overline{MN},\overline{CK}]\right|$;	8) $\left|\overline{BA}\times\overline{DC}\right|$;
9) $\left|[\bar{g},\bar{a}]\right|$;	10) $\left|\bar{j}\times\bar{k}\right|$;	11) $\left|[\overline{FE},\overline{QS}]\right|$;	12) $\left|\overline{AD}\times\overline{BC}\right|$.

Прочитайте.

Упорядоченная тройка векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ называется **правой**, если поворот от вектора $\bar{a}$ к вектору $\bar{b}$ на меньший угол виден из конца вектора $\bar{c}$ против часовой стрелки (рис. 38).

Ве́кторным произведением двух ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c}$, удовлетворяющий условиям:

- вектор $\bar{c}$ перпендикулярен векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (рис. 38);
- тройка векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ правая;
- модуль вектора $\bar{c}$ равен произведению длин векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ на синус угла между ними: $|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin(\widehat{\bar{a},\bar{b}})$.

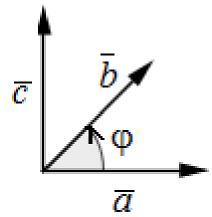


Рис. 38. Правая тройка векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$

Ве́кторное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ обозначается так:

$$[\bar{a},\bar{b}] \text{ или } \bar{a}\times\bar{b}.$$

Если векторы $\bar{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ и $\bar{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, то ве́кторное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ находят по формуле

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \left\{ \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right\}.$$

Запомните!

Условие коллинеарности двух ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$$\bar{a} \parallel \bar{b} \Leftrightarrow [\bar{a},\bar{b}] = 0$$

Ответьте на вопросы.

1. Что называется векторным произведением векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$?
2. Как обозначают векторное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$?
3. Что является результатом векторного произведения векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$?
4. Чему равен модуль векторного произведения векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$?
5. По какой формуле можно найти векторное произведение векторов $\bar{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ и $\bar{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$?
6. Чему равно векторное произведение параллельных векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$?

Задания

Задание 1. Запишите символами.

1. Вектор $\bar{k}$ параллелен вектору $3\bar{k}$.
2. Вектор $\bar{k}$ перпендикулярен вектору $\bar{i}$.
3. Угол между векторами $\bar{k}$ и $\bar{j}$ – прямой.
4. Проекция вектора $\bar{j}$ на вектор $\bar{i}$ равна нулю.

Задание 2. Найдите скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Образец. Дано: $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 3$, $\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right) = \dfrac{\pi}{4}$. Найдите $(\bar{a},\bar{b})$.

Решение. Воспользуемся формулой

$$(\bar{a},\bar{b}) = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right).$$

Получим

$$(\bar{a},\bar{b}) = 2 \cdot 3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}.$$

1) $|\bar{a}| = 1$, $|\bar{b}| = 3$, $\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$;

2) $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 5$, $\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right) = \dfrac{\pi}{6}$;

3) $|\bar{a}| = 4$, $|\bar{b}| = 2$, $\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$;

4) $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 3$, $\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$;

5) $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 1$, $\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right) = \dfrac{5\pi}{6}$;

6) $|\bar{a}| = 6$, $|\bar{b}| = 2$, $\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right) = \dfrac{3\pi}{4}$.

Задание 3. Найдите скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Образец. Дано: $\bar{a} = \{2, 3, 1\}$, $\bar{b} = \{3, 0, -2\}$. Найдите $(\bar{a},\bar{b})$.

Решение. Воспользуемся формулой

$$(\bar{a},\bar{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Получим

$$(\bar{a},\bar{b}) = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) = 4.$$

1) $\bar{a} = \{5, 2, -1\}$, $\bar{b} = \{1, -2, -1\}$;

2) $\bar{a} = \{6, -2, 3\}$, $\bar{b} = \{-1, 1, 8\}$;

3) $\bar{a} = \{3, 0, -2\}$, $\bar{b} = \{3, -1, -5\}$;

4) $\bar{a} = \{1, -3, 0\}$, $\bar{b} = \{-2, 0, 2\}$;

5) $\bar{a} = \{4, 3, -7\}$, $\bar{b} = \{-7, 0, -2\}$;

6) $\bar{a} = \{2, -1, 5\}$, $\bar{b} = \{-3, 2, 7\}$.

Задание 4. Найдите модуль векторного произведения векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Образец. Дано: $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 3$, $\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right) = \dfrac{\pi}{4}$. Найдите $|[\bar{a},\bar{b}]|$.

Решение. Воспользуемся формулой

$$\left|[\bar{a},\bar{b}]\right| = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right).$$

Получим

$$\left|[\bar{a},\bar{b}]\right| = 2\cdot 3\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}\,.$$

1) $|\bar{a}|=1,\ |\bar{b}|=3,\ \left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)=\frac{\pi}{3}$;

2) $|\bar{a}|=2,\ |\bar{b}|=5,\ \left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)=\frac{\pi}{6}$;

3) $|\bar{a}|=4,\ |\bar{b}|=2,\ \left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)=\frac{2\pi}{3}$;

4) $|\bar{a}|=2,\ |\bar{b}|=3,\ \left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)=\frac{\pi}{2}$;

5) $|\bar{a}|=3,\ |\bar{b}|=1,\ \left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)=\frac{5\pi}{6}$;

6) $|\bar{a}|=6,\ |\bar{b}|=2,\ \left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)=\frac{3\pi}{4}$.

Задание 5. Найдите векторное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$.
Образец. Дано: $\bar{a}=\{2, 3, 1\}$, $\bar{b}=\{3, 0, -2\}$. Найдите $[\bar{a},\bar{b}]$.
Решение. Воспользуемся формулой

$$\left[\bar{a},\bar{b}\right]=\left\{\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix};-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix};\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\right\}.$$

Получим

$$\left[\bar{a},\bar{b}\right]=\left\{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix};-\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}\right\}=\{-6;7;-9\}.$$

1) $\bar{a}=\{5, 2, -1\}$, $\bar{b}=\{1, -2, -1\}$;

2) $\bar{a}=\{6, -2, 3\}$, $\bar{b}=\{-1, 1, 8\}$;

3) $\bar{a}=\{3, 0, -2\}$, $\bar{b}=\{3, -1, -5\}$;

4) $\bar{a}=\{1, -3, 0\}$, $\bar{b}=\{-2, 0, 2\}$;

5) $\bar{a}=\{4, 3, -7\}$, $\bar{b}=\{-7, 0, -2\}$;

6) $\bar{a}=\{2, -1, 5\}$, $\bar{b}=\{-3, 2, 7\}$.

Задание 6. Запишите слово *вектор* в правильной форме.

1. Направленный отрезок называют _______________.
2. Если $\overline{AB}$ – это _______________, то точка A – это начальная точка _______________, точка B – это конечная точка _______________.
3. Если угол между _______________ $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен 0^0, то $\bar{a}$ и $\bar{b}$ – это параллельные _______________.
4. Если угол между _______________ $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен 180^0, то ___________ $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются противоположно направленными.
5. Если угол между _______________ $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен 90^0, то _______________ $\bar{a}$ перпендикулярен _______________ $\bar{b}$.
6. Если $\bar{a}\perp\bar{b}$, то проекция _______________ $\bar{a}$ на _______________ $\bar{b}$ – это точка.

Задание 7. Выберите правильный вариант ответа.

1. Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ … направлены.

(А) противоположные; (Б) противоположны; (В) противоположно.

2. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ – … векторы.

(А) параллельные; (Б) параллельны; (В) параллельно.

3. Длина вектора равна … между его начальной и конечной точками.

(А) расстояние; (Б) расстоянию; (В) расстояния.

4. $\text{пр}_{\overline{b}}\overline{a}$ – проекция вектора $\overline{a}$ … $\overline{b}$.

(А) на вектор; (Б) к вектору; (В) с вектором.

5. Рассмотрим прямоугольную систему координат … трёхмерном пространстве.

(А) о; (Б) на; (В) в.

6. Угол … векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равен φ.

(А) между; (Б) на; (В) с.

7. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ перпендикулярны … .

(А) друг с другом; (Б) друг другу; (В) друга другу.

8. Точка A – … вектора $\overline{AB}$.

(А) конец; (Б) модуль; (В) начало.

9. Точка B – … вектора $\overline{AB}$.

(А) конец; (Б) модуль; (В) начало.

10. Вектором называется … отрезок.

(А) направленный; (Б) начальный; (В) нулевой.

11. Вектор, у которого конечная точка совпадает с начальной точкой, называется … вектором.

(А) единичным; (Б) нулевым; (В) конечным.

12. … вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$ называется число, равное произведению модуля вектора $\overline{a}$ на косинус угла между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

(А) Перпендикуляром; (Б) Проекцией; (В) Радиус-вектором.

13. … произведением двух ненулевых векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними.

(А) Векторным; (Б) Коллинеарным; В) Скалярным.

14. Перпендикуляр к прямой – это отрезок прямой, который … данную прямую и образует с ней прямой угол.

(А) опускает; (Б) пересекает; (В) совпадает.

15. … перпендикуляр из точки на прямую – значит провести через точку прямую, перпендикулярную данной прямой.

(А) Опустить; (Б) Пересечь; (В) Совпасть.

16. Если $\left(\overline{a}\,\hat{,}\,\overline{b}\right)=0^0$ или $\left(\overline{a}\,\hat{,}\,\overline{b}\right)=180^0$, то векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ – … векторы.

(А) параллельные; (Б) перпендикулярные; (В) равные.

Тема 25. Предел функции

Словарь к теме

неопределённость (ж. р.) конста́нта преде́л	вычисля́ть – вы́числить *что?* стреми́ться *к чему?* стремя́щийся (который стремится) *к чему?*

Задание 1. А. Изучите конструкции.

> **Что? (И. п.) стремится к чему? (Д. п.)**
> **… при чём? (Т. п.), стремящемся к чему? (Д. п.)**

Б. Прочитайте записи по образцу.

Образец. 1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ – предел $f(x)$ **при** *x*, стремящ**емся к** *x* нулев**о́му**;

2) $\lim\limits_{x \to 1} x^2$ – предел x^2 **при** *x*, стремящ**емся** к одн**ому**;

3) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x}$ – предел $\frac{1}{x}$ **при** *x*, стремящ**емся** к бесконечност**и**.

1) $\lim\limits_{x \to \infty} x^3$; 2) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x$; 3) $\lim\limits_{t \to t_0} s(t)$; 4) $\lim\limits_{x \to x_0} u(x)$;

5) $\lim\limits_{y \to y_0} t(y)$; 6) $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$; 7) $\lim\limits_{y \to 2}(1+y)$; 8) $\lim\limits_{x \to 3}(x-1)$;

9) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{e^x}{x^2-1}$; 10) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\mathrm{tg} 5x}$; 11) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1-x}{x}$; 12) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$.

Задание 2. Прочитайте записи по образцу.

Образец. $\lim\limits_{x \to 1}(x+1) = 2$ – предел (*x* + 1) при *x*, стремящемся к одному, рав**ен** дв**ум**.

1) $\lim\limits_{x \to 5}(3x-1) = 14$; 2) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos x = 0$; 3) $\lim\limits_{x \to 0} 2e^x = 2$;

4) $\lim\limits_{x \to 2}(x^3+4) = 12$; 5) $\lim\limits_{x \to 10}(x+8) = 18$; 6) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \mathrm{tg} x = 1$;

7) $\lim\limits_{x \to 0}(\sqrt{x}-1) = -1$; 8) $\lim\limits_{x \to 3}(7+4x) = 19$; 9) $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$;

10) $\lim\limits_{x \to -1}(1-x^3) = 2$; 11) $\lim\limits_{x \to 4}(5x+1) = 21$; 12) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1+x}{x} = 1$.

Задание 3. Выполните задание по образцу.

Образец. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$. Если подставим в функцию $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ вместо x число 2, то получим неопределённость $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$.

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\mathrm{tg}x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{x^2-25}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x^2-x}$; 7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x}{2x}$; 8) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x-4}$;

9) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^3-8}$; 10) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}$; 11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$; 12) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x-3}}$.

Задание 4. Вычислите пределы.

Образец. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2+4x-12}$.

Решение. Если подставим в функцию $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2+4x-12}$ вместо x число 2, то получим неопределённость $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$.

Разложим числитель и знаменатель дроби на множители

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2+4x-12}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\cdot(x+2)}{(x+6)\cdot(x-2)}.$$

Сократим дробь $\dfrac{(x-2)\cdot(x+2)}{(x+6)\cdot(x-2)}$ на $(x-2)$ и вычислим предел

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\cdot(x+2)}{(x+6)\cdot(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x+6}=\frac{2+2}{2+6}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2+4x-12}=\dfrac{1}{2}$.

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-4x+3}$; 2) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x^2-x-6}$; 3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-3x+2}$;

4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-6x+8}{4-x^2}$; 5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-3x+2}$; 6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+2x-5}{x^2-1}$;

7) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x^2-8x+15}$; 8) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-2x-8}{x^2-4}$; 9) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^2+2x-7}{x^3-1}$;

10) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-x}{x^2-3x-4}$; 11) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2-7x+12}$; 12) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-2x-3}{x^3+1}$.

Задание 5. Вычислите пределы.

Образец. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$.

Решение. Если подставим в функцию $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ вместо x число 1, то получим неопределённость $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$.

Умножим числитель и знаменатель дроби на выражение $(\sqrt{x+3}+2)$ и применим в числителе дроби формулу «разность квадратов», потом сократим дробь на выражение $(x-1)$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x+3}-2)\cdot(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)\cdot(\sqrt{x+3}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x+3})^2-(2)^2}{(x-1)\cdot(\sqrt{x+3}+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)\cdot(\sqrt{x+3}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}=\frac{1}{\sqrt{1+3}+2}=\frac{1}{4}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\dfrac{1}{4}$.

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{1-\sqrt{x-1}}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x+8}-3}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2-3}-1}{x-2}$; 5) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2-\sqrt{x-1}}{x^2-25}$; 6) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2-8}-1}{x-3}$;

7) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2-3}-1}{x^3-4x}$; 8) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1-\sqrt{x^2-3}}{x^2-4}$; 9) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x^2-7}-3}{x^2-16}$;

10) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-4}$; 11) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x^2+8}-3}$; 12) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2-5}-2}{x^2-9}$.

Прочитайте.

Слово «лимит» происходит от латинского слова «limes», которое означает «предел».

С английского языка слово «limit» переводится как «предел», «граница». В математике для обозначения предела функции используют сокращение от слова «limit»: lim.

Если переменная x стремится к значению x_0, то предел функции $y=f(x)$ записывают так:

$$\lim_{x\to x_0} f(x).$$

При вычислении пределов используют свойства пределов:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$, где c – константа;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, где c – константа;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$;

4) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$;

5) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$, где $g(x) \neq 0$.

Ответьте на вопросы.

1. Что означает латинское слово «лимит»?
2. Чему равен предел константы?
3. Чему равен предел суммы двух функций?
4. Чему равен предел произведения двух функций?
5. Чему равен предел частного двух функций?

Задания

Задание 1. Установите соответствия.

Формула	Свойство
1. $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$	**А.** Предел суммы двух функций равен сумме пределов этих функций.
2. $\lim\limits_{x \to x_0} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	**Б.** Предел константы равен константе.
3. $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	**В.** Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций.
4. $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	**Г.** Константу можно выносить за знак предела.
5. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$, где $g(x) \neq 0$	**Д.** Предел произведения двух функций равен произведению пределов этих функций.

Задание 2. Запишите слово *предел* в правильной форме.

При вычислении _______________ используют свойства _______________ . Например: 1) _______________ суммы двух функций равен сумме _____________ этих функций; 2) константу можно выносить за знак ______________; 3) ________________ константы равен константе; 4) _______________ частного двух функций равен частному _____________ этих функций.

Тема 26. Дифференцирование функции одной переменной

26.1. Приращение функции и приращение аргумента

Словарь к теме

прираще́ние прираще́ние аргуме́нта прираще́ние фу́нкции	не́который соотве́тствующий соотве́тствовать *чему?*

Задание 1. Прочитайте записи по образцу.

Образец. $\Delta x = 0{,}1$ – дельта x равно нуль целых, одна десятая.

1) $\Delta x = 0{,}2$; 2) $\Delta x = 0{,}11$; 3) $\Delta x = 0{,}01$; 4) $\Delta x = -0{,}01$;
5) $\Delta x = 0{,}3$; 6) $\Delta x = 0{,}12$; 7) $\Delta x = 0{,}02$; 8) $\Delta x = -0{,}02$;
9) $\Delta x = 0{,}4$; 10) $\Delta x = 0{,}13$; 11) $\Delta x = 0{,}5$; 12) $\Delta x = -0{,}03$.

Задание 2. Прочитайте записи по образцу.

Образец. 1) $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ – дельта y равно f **от** $(x+\Delta x)$ минус $f(x)$;

2) $\Delta y = (x+\Delta x)^2 - x^2$ – дельта y равн**о** $(x+\Delta x)$ в квадрате минус x^2.

1) $\Delta y = \ln(x+\Delta x) - \ln x$; 2) $\Delta y = e^{x+\Delta x} - e^x$;
3) $\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x$; 4) $\Delta y = 2^{x+\Delta x} - 2^x$;
5) $\Delta y = \cos(x+\Delta x) - \cos x$; 6) $\Delta y = \sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}$;
7) $\Delta y = f(x_1+\Delta x) - f(x_1)$; 8) $\Delta y = (x+\Delta x)^3 - x^3$;
9) $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$; 10) $\Delta y = \sqrt[3]{x+\Delta x} - \sqrt[3]{x}$;
11) $\Delta y = \operatorname{ctg}(x+\Delta x) - \operatorname{ctg} x$; 12) $\Delta y = \operatorname{tg}(x+\Delta x) - \operatorname{tg} x$.

Прочитайте.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$. Пусть x – некоторое значение аргумента, $f(x)$ – соответствующее значение функции. От значения аргумента x перейдём к другому значению аргумента x_1 (рис. 39).

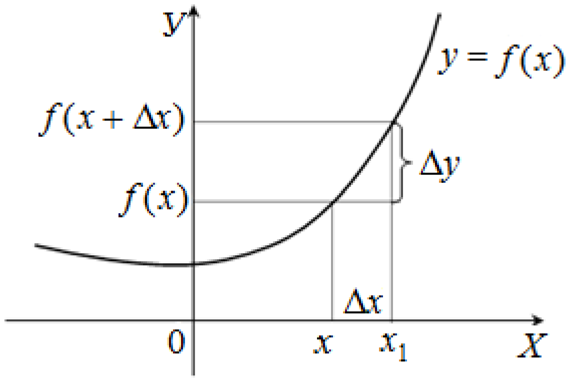


Рис. 39. График произвольной функции y = f(x)

Разность $(x_1 - x)$ называется **приращением аргумента**.

Приращение аргумента обозначают через Δx и записывают: $\Delta x = x_1 - x$.

Если $\Delta x = x_1 - x$, то $x_1 = x + \Delta x$.

Значению аргумента x_1 соответствует значение функции $f(x_1)$, где $f(x_1) = f(x + \Delta x)$.

Разность $f(x + \Delta x) - f(x)$ называется **приращением функции** $y = f(x)$ **в точке *x***, соответствующим приращению аргумента Δx.

Приращение функции обозначают через Δy или $\Delta f(x)$ и записывают:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Приращение функции и приращение аргумента могут быть отрицательными, положительными и равными нулю.

Запомните!

Δx – это приращение аргумента
Δy – это приращение функции

Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Что называется приращением аргумента x?
2. Как обозначают приращение аргумента?
3. Запишите формулу приращения аргумента.
4. Что называется приращением функции $y = f(x)$?
5. Как обозначают приращение функции $y = f(x)$?
6. Запишите формулу приращения функции $y = f(x)$.

26.2. Производная функции

Словарь к теме

дифференциа́л	произво́дная
дифференци́рование	штрих
пе́рвый поря́док	конста́нта
преде́л	существова́ть

Задание 3. Прочитайте записи по образцу.

Образец. $y' = (x^2)' = 2x$ – y **штрих** равен x^2 **штрих** равн**о** $2x$ (**производная** функции x^2 равн**а** $2x$).

1) $y' = (x^3)' = 3x^2$; 2) $y' = x' = 1$; 3) $y' = (e^x)' = e^x$;

4) $y' = (x^n)' = n \cdot x^{n-1}$; 5) $y' = 5' = 0$; 6) $y' = (a^x)' = a^x \cdot \ln a$;

7) $y' = (\sin x)' = \cos x$; 8) $y' = (2x)' = 2$; 9) $y' = (\cos x)' = -\sin x$;

10) $y' = (\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; 11) $y' = (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$; 12) $y' = (\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Задание 4. Прочитайте записи по образцу.

Образец. $\dfrac{dy}{dx}$ – *dy* **по** *dx*.

1) $\dfrac{dx}{dy}$; 2) $\dfrac{dS}{dt}$; 3) $\dfrac{dx}{dt}$; 4) $\dfrac{dy}{dt}$; 5) $\dfrac{dV}{dt}$; 6) $\dfrac{d\varphi}{dx}$;

7) $\dfrac{d\omega}{dt}$; 8) $\dfrac{da}{dt}$; 9) $\dfrac{d\psi}{dt}$; 10) $\dfrac{dh}{dx}$; 11) $\dfrac{dr}{dt}$; 12) $\dfrac{dz}{dx}$.

Задание 5. Прочитайте записи по образцу.

Образец. 1) $y'(x_0)$ – *y* штрих **от** *x* нулев**о́е** (производная функции в точке x_0);

2) $f'(x_1)$ – *f* штрих **от** *x* один (производная функции в точке x_1);

3) $y'(1)$ – *y* штрих **от** одн**ого** (производная функции в точке один).

1) $f'(x)$; 2) $y'(3)$; 3) $f'(x_2)$; 4) $f'(2)$;

5) $y'(x)$; 6) $y'(x_1)$; 7) $y'(x_2)$; 8) $y'(x_3)$;

9) $y'(2)$; 10) $f'(x_0)$; 11) $f'(1)$; 12) $f'(x_3)$.

Задание 6. Выполните задание по образцу.

Образец. 1. $y'(1)=2$ – *y* штрих **от** одн**ого** рав**ен** двум. Число 2 – это **значение производной функции в точке x_0 = 1**.

2. $f'(1)=2$ – *f* штрих **от** одн**ого** равн**о** двум. Число 2 – это **значение производной функции в точке x_0 = 1**.

1) $y'(-3)=5$; 2) $f'(5)=0$; 3) $f'(1)=3$; 4) $f'(-3)=6$;

5) $y'(-1)=1$; 6) $y'(8)=4$; 7) $y'(1)=-2$; 8) $y'(-7)=8$;

9) $f'(-2)=3$; 10) $y'(0)=1$; 11) $f'(0)=-1$; 12) $f'(2)=9$.

Задание 7. А. Прочитайте конструкцию и пример её использования.

Для обозначения чего? (Р. п.) используют что? (В. п.)

Для обозначения производной функции в точке x_0 *используют* следующие записи:

$$y'(x_0),\ f'(x_0).$$

Б. Измените предложение по конструкции.

1. Приращение аргумента функции $y=f(x)$ обозначают через Δx.
2. Приращение функции $y=f(x)$ обозначают через Δy.
3. Производную функции $y=f(x)$ обозначают так: $f'(x)$.

Прочитайте.

Производной функции $y = f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, при Δx, стремящемся к нулю, при условии, что предел существует и конечен, т. е. равен константе.

Для обозначения производной функции $y = f(x)$ в точке x используют следующие записи:

$$y', \; f'(x), \; \frac{dy}{dx}.$$

Запишем символами определение производной функции $y = f(x)$:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Производную y' называют **производной первого порядка** функции $y = f(x)$.

Для обозначения производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 используют следующие записи:

$$y'(x_0), \; f'(x_0).$$

Процесс нахождения производной функции называется **дифференцированием этой функции**. Функция, которая имеет производную, называется **дифференцируемой функцией**.

Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Что называется производной функции $y = f(x)$ в точке x?
2. Как обозначают производную функции $y = f(x)$ в точке x?
3. Запишите символами определение производной функции $y = f(x)$.
4. Прочитайте запись: $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.
5. Как называется функция, которая имеет производную?
6. Как называется процесс нахождения производной функции?
7. Что называют производной первого порядка функции $y = f(x)$?
8. Как обозначают производную функции $y = f(x)$ в точке x_0?
9. Какая функция называется дифференцируемой?
10. Что называют дифференцированием функции?

Задание 8. Запишите в предложения слова *дифференцирование, дифференцируемая* в правильной форме.

1. ______________________________ – это процесс нахождения производной.
2. Функция, которая имеет производную, называется ___________________ функцией.
3. Процесс нахождения производной называется ____________________.
4. ______________________________ функция – это функция, которая имеет производную.

26.3. Основные правила дифференцирования. Таблица производных

Прочитайте.

Справедливы следующие правила дифференцирования.

Пусть даны дифференцируемые функции $u = u(x)$, $v = v(x)$.

Правило	Формула
1. Производная суммы (разности) двух функций равна сумме (разности) производных этих функций.	$(u \pm v)' = u' \pm v'$
2. Производная произведения двух функций равна сумме произведений производной первого множителя на второй и производной второго множителя на первый.	$(u \cdot v)' = u'v + v'u$
3. Производная частного равна дроби: в числителе – производная числителя умножить на знаменатель минус производная знаменателя умножить на числитель, в знаменателе – квадрат знаменателя.	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$
4. Постоянную величину можно выносить за знак производной.	$(c \cdot u)' = c \cdot u'$, где c = const

В таблице записаны производные элементарных функций.

1	$c' = 0,$ где c – константа	**2**	$x' = 1$
3	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	**4**	$(x^2)' = 2x$
5	$(e^x)' = e^x$	**6**	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a,$ где $a > 0, a \neq 1$
7	$(\cos x)' = -\sin x$	**8**	$(\sin x)' = \cos x$
9	$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	**10**	$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
11	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x},$ где $x > 0$	**12**	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a},\ a > 0, a \neq 1,\ x > 0$
13	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	**14**	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15	$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	**16**	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Найдём производную функции $y = 5$. Так как число 5 – это константа, то $y' = 5' = 0.$

Найдём производную функции $y = x^5$. Воспользуемся формулой 3. В нашем случае $n = 5$. Тогда $y' = (x^5)' = 5 \cdot x^{5-1} = 5x^4.$

Задание 9. Найдите производную функции.

Образец. $y = x^7$; $y' = \left(x^7\right)' = 7x^6$.

1) $y = 7x + 4$; 2) $y = x^2$; 3) $y = 3\operatorname{ctg} x$; 4) $y = x^2 \cdot e^x$;

5) $y = x \cdot \operatorname{tg} x$; 6) $y = x^{20}$; 7) $y = 2\sin x$; 8) $y = x^3 - 2x$;

9) $y = \cos x + 3$; 10) $y = x^{10}$; 11) $y = \sqrt{x} + 1$; 12) $y = x^3 \cdot \sqrt{x}$;

13) $y = x \cdot \sin x$; 14) $y = 4\operatorname{tg} x$; 15) $y = 2\cos x$; 16) $y = -6x + 1$.

Ответьте на вопросы.

1. Чему равна производная разности двух функций?
2. Чему равна производная произведения двух функций?
3. Чему равна производная частного двух функций?
4. Чему равна производная константы?
5. Чему равна производная показательной функции?
6. Чему равна производная степенной функции?
7. Чему равна производная логарифмической функции?

26.4. Геометрический смысл производной

Словарь к теме

каса́тельная
геометри́ческий смысл
составля́ть – соста́вить *что?*

Задание 10. Выполните задание по образцу.

Образец. $y = x^2, x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = y(2) = 4$ – это **значение функции** $y = x^2$ **в точке** $x_0 = 2$.

1) $y = x^3$, $x_0 = -1$; 2) $y = e^x$, $x_0 = 0$; 3) $y = 2x + 1$, $x_0 = 1$;

4) $y = x^2$, $x_0 = -2$; 5) $y = 2^x$, $x_0 = 0$; 6) $y = 3x - 1$, $x_0 = 2$;

7) $y = 2x$, $x_0 = -3$; 8) $y = \ln x$, $x_0 = 1$; 9) $y = 5x + 1$, $x_0 = 0$;

10) $y = \operatorname{tg} x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$; 11) $y = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$; 12) $y = \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

Задание 11. Выполните задание по образцу.

Образец. $y = x^2, x_0 = -2 \Rightarrow y' = (x^2)' = 2x$, $y'(2) = 2 \cdot (-2) = -4 \Rightarrow k = -4$ – это **угловой коэффициент касательной** к графику функции $y = x^2$ в точке $x_0 = -2$.

1) $y = x^3$, $x_0 = -1$; 2) $y = e^x$, $x_0 = 0$; 3) $y = 2x + 1$, $x_0 = 1$;

4) $y = x^2$, $x_0 = -5$; 5) $y = 2^x$, $x_0 = 0$; 6) $y = 3x - 1$, $x_0 = 2$;

7) $y = 2x$, $x_0 = -3$; 8) $y = \ln x$, $x_0 = 1$; 9) $y = 5x + 1$, $x_0 = 0$;

10) $y = \operatorname{tg} x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$; 11) $y = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$; 12) $y = \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

Прочитайте.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Прямая, которая проходит через точку $(x_0;\ f(x_0))$ (рис. 40) и имеет угловой коэффициент $k = y'(x_0)$, называется **касательной к графику функции** $y = f(x)$ **в точке** $\boldsymbol{x_0}$.

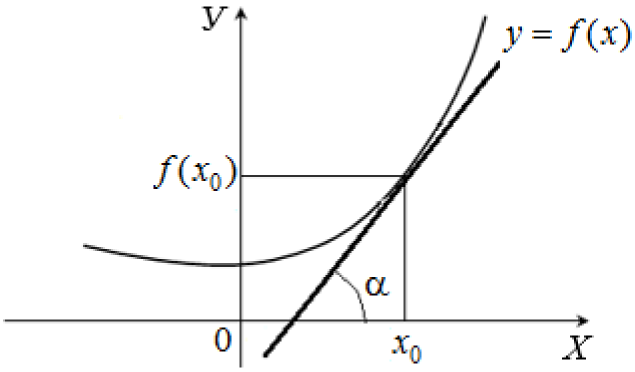


Рис. 40. Касательная к графику функции y = f(x) в точке (x₀, f(x₀))

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 имеет вид

$$y - y_0 = y'(x_0)\cdot(x - x_0).$$

Геометрический смысл производной. Производная функции в данной точке равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции в этой точке

$$k = y'(x_0) = \mathrm{tg}\alpha,$$

где α – угол между положительным направлением оси OX и касательной к графику функции.

Задание 12. Составьте уравнение касательной к графику функции в точке.

Образец. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = x^2$ в точке $x_0 = -2$.

Решение. Вычислим значение функции $y = x^2$ в точке $x_0 = -2$

$$y_0 = y(-2) = (-2)^2 = 4.$$

Найдём производную функции $y = x^2$

$$y' = (x^2)' = 2x.$$

Вычислим значение производной в точке $x_0 = -2$

$$y'(x_0) = y'(-2) = 2\cdot(-2) = -4.$$

Подставим значения $x_0 = -2$, $y_0 = 4$ и $y'(x_0) = -4$ в уравнение касательной

$$y - y_0 = y'(x_0)\cdot(x - x_0).$$

Получим

$$y - 4 = -4\cdot(x + 2).$$

Преобразуем последнее уравнение

$$y - 4 = -4\cdot(x + 2) \Leftrightarrow y - 4 = -4x - 8 \Leftrightarrow y = -4x - 4.$$

Ответ: $y = -4x - 4$ – уравнение касательной к графику функции $y = x^2$ в точке $x_0 = -2$.

1) $y=x^3, x_0=-1$; 2) $y=e^x, x_0=0$; 3) $y=x^2+1, x_0=1$;
4) $y=x^2, x_0=-3$; 5) $y=2^x, x_0=0$; 6) $y=3x^2-1, x_0=2$;
7) $y=x^4, x_0=-1$; 8) $y=\ln x, x_0=1$; 9) $y=2x^3+1, x_0=1$;
10) $y=2x, x_0=5$; 11) $y=3x, x_0=2$; 12) $y=5x-2, x_0=3$.

26.5. Производные второго порядка

Задание 13. Прочитайте записи по образцу.
Образец. 1) y'' – *y* два штриха́;
2) $f''(x)$ – *f* два штрих**а́ от** *x*;
3) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ – *d* два *y* **по** *dx* два́**жды**.

1) x''; 2) z''; 3) $g''(x)$; 4) $z''(y)$; 5) $S''(t)$; 6) $\varphi''(t)$;
7) $\dfrac{d^2x}{dy^2}$; 8) $\dfrac{d^2S}{dt^2}$; 9) $\dfrac{d^2\psi}{dt^2}$; 10) $\dfrac{d^2\varphi}{dx^2}$; 11) $\dfrac{d^2r}{dt^2}$; 12) $\dfrac{d^2z}{dx^2}$.

Прочитайте.

Пусть функция $y=f(x)$ имеет производную на некотором интервале $(a;\,b)$. Производная от производной функции $y=f(x)$ называется **производной второго порядка** (или **второй производной**) этой функции. Для производной второго порядка функции $y=f(x)$ используют следующие обозначения:

$$y'',\ f''(x),\ \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Пример. Найдите производную второго порядка функции $y=2x^3-3x^6$.

Решение. Найдём производную первого порядка функции $y=2x^3-3x^6$

$$y'=\left(2x^3-3x^6\right)'=2\cdot 3x^2-3\cdot 6x^5=6x^2-18x^5.$$

Найдём производную от производной

$$y''=\left(6x^2-18x^5\right)'=6\cdot 2x-18\cdot 5x^4=12x-90x^4.$$

Ответьте на вопросы и выполните задание.

1. Что называется производной второго порядка функции $y=f(x)$?
2. Как обозначают производную второго порядка функции $y=f(x)$?
3. Найдите производную второго порядка функции $y=e^x$.
4. Чему равна производная первого порядка функции $y=2x^3-3x^6$?
5. Чему равна производная второго порядка функции $y=2x^3-3x^6$?

Задания

Задание 1. Найдите значение производной заданной функции в точке x_0.

Образец. 1) $y = -x + 2$, $x_0 = -2$. Найдём производную функции $y = -x + 2$

$$y' = \left(-x + 2\right)' = -1.$$

Следовательно, $y'(-2) = -1$.

2) $y = x^3$, $x_0 = -2$. Найдём производную функции $y = x^3$

$$y' = (x^3)' = 3x^2.$$

Подставим в выражение $3x^2$ вместо x число (–2) и вычислим значение производной функции в точке $x_0 = -2$.

Получим

$$y'(x_0) = y'(-2) = 3 \cdot (-2)^2 = 12.$$

Следовательно, $y'(-2) = 12$.

1) $y = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$;	2) $y = x^2$, $x_0 = -7$;	3) $y = 10^x$, $x_0 = 0$;
4) $y = \sin x$, $x_0 = 0$;	5) $y = x^3$, $x_0 = -3$;	6) $y = \ln x$, $x_0 = 21$;
7) $y = 2e^x$, $x_0 = 0$;	8) $y = x^5$, $x_0 = -1$;	9) $y = 3x + 1$, $x_0 = 2$;
10) $y = \cos x$, $x_0 = 0$;	11) $y = \operatorname{tg} x$, $x_0 = 0$;	12) $y = 6x - 9$, $x_0 = 1$.

Задание 2. Запишите в предложения слово *функция* в единственном или множественном числе в правильном падеже.

1. Для обозначения производной ________________ используют следующие записи: y', $f'(x)$, $\dfrac{dy}{dx}$.

2. Найдём производную _________________ $y = 5x + 1$.

3. Приращение _________________ обозначают через Δy или $\Delta f(x)$.

4. Производная суммы двух _________________ равна сумме производных этих _________________ .

5. Производную y' называют производной первого порядка _____________ $y = f(x)$.

6. Прочитайте производные элементарных _________________ .

7. Пусть даны дифференцируемые _________________ $u = u(x)$, $v = v(x)$.

8. __________, которая имеет производную, называется дифференцируемой _________________ .

9. Составьте уравнение касательной к графику _____________ в точке x_0.

10. Рассмотрим дифференцируемую _________________ .

Тема 27. Исследование функций

27.1. Основные понятия

Словарь к теме

иссле́дование нечётная фу́нкция чётная фу́нкция возраста́ющая фу́нкция убыва́ющая фу́нкция моното́нная фу́нкция	то́чка ма́ксимума то́чка ми́нимума экстре́мум фу́нкции то́чка экстре́мума фу́нкции убыва́ть – убы́ть *где?* возраста́ть – возрасти́ *где?* симметри́чен относи́тельно *чего?*

Задание 1. Выполните задание по образцу.

Образец. $y = 3x^2$ – это функция; x – это переменная, или аргумент функции.

1) $y = \sin x$; 2) $y = \arcsin x$; 3) $y = 2^x$; 4) $y = \log_2 x$;
5) $y = \cos x$; 6) $y = \arccos x$; 7) $y = 3^x$; 8) $y = \lg 2x$;
9) $y = \mathrm{ctg} x$; 10) $y = \mathrm{arcctg} x$; 11) $y = e^x$; 12) $y = \ln 3x$.

Задание 2. Выполните задание по образцу.

Образец. 1. $y = 2x^2$ – это чётная функция. Функция $y = 2x^2$ **убывает** на интервале (– ∞; 0). Функция $y = 2x^2$ **возрастает** на интервале (0; + ∞). График функции **симметри́чен относительно оси ординат *ОУ***.

2. $y = 2x$ – это нечётная функция. Функция $y = 2x$ **возрастает** на интервале (– ∞; + ∞). График функции **симметри́чен относительно начала координат**.

1) $y = 3x^2$; 2) $y = 5x$; 3) $y = x^2$; 4) $y = 2x^4$;
5) $y = 5x^2$; 6) $y = 3x$; 7) $y = 2x^3$; 8) $y = 3x^5$;
9) $y = 7x^2$; 10) $y = x$; 11) $y = x^3$; 12) $y = x^6$.

Прочитайте.

Говорят, что **на множестве *X* задана функция *f* со значениями из множества *У***, если каждому элементу *x* из множества *X* по правилу *f* поставлен в соответствие один и только один элемент *y* из множества *У*.

Множество *X* называют **областью определения функции** и записывают $D(f) = X$. Множество *У* называют **областью значений функции** и записывают $E(f) = У$.

Функцию обозначают так: $y = f(x)$, где $x \in X$, $y \in У$.

Величину x называют **независимой переменной**, или **аргументом** функции $y = f(x)$. Величину y называют **зависимой переменной**, или **функцией**.

Функция $y = f(x)$ называется **чётной функцией**, если область определения функции X симметрична относительно нуля и для любого значения $x \in X$ (x, принадлежащего множеству X) выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

Функция $y = f(x)$ называется **нечётной функцией**, если область определения функции X симметрична относительно нуля и для любого значения $x \in X$ выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

График чётной функции симметричен относительно оси ординат OY. График нечётной функции симметричен относительно начала координат.

Например, функции $y = x^2$, $y = \cos x$, $y = |x|$ – это чётные функции. Функции $y = x^3$, $y = \frac{1}{x}$, $y = \sin x$ – это нечётные функции.

Функция $y = f(x)$ называется **убывающей** на интервале $(a; b)$, если для любых значений x_1 и x_2 из этого интервала выполняется условие:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Функция $y = f(x)$ называется **возрастающей** на интервале $(a; b)$, если для любых значений x_1 и x_2 из этого интервала выполняется условие:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Возрастающие и убывающие функции называются **монотонными функциями**.

Например, функция $y = x^2$ **убывает (монотонно убывает)** на интервале $(-\infty; 0)$. Функция $y = x^2$ **возрастает (монотонно возрастает)** на интервале $(0; \infty)$.

Точка x_0 называется **точкой максимума функции** $y = f(x)$ в области $A \subset D(f)$, если для любого значения $x \in A$ выполняется условие $f(x) < f(x_0)$.

Точка x_0 называется **точкой минимума функции** $y = f(x)$ в области $A \subset D(f)$, если для любого значения $x \in A$ выполняется условие $f(x) > f(x_0)$.

Для точек максимума и минимума используют следующие обозначения:

$$x_{\max} \text{ и } x_{\min}.$$

Точки максимума и минимума функции называют **точками экстремума функции**.

Значение функции $y = f(x)$ в точке максимума называют **максимумом** функции и записывают: $y_{\max} = f(x_{\max})$.

Значение функции $y = f(x)$ в точке минимума называют **минимумом** функции и записывают: $y_{\min} = f(x_{\min})$.

Максимумы и минимумы функции называют **экстремумами** функции.

Например, точка экстремума функции $y = x^2$ является точкой минимума $x_{\min} = 0$. Значение функции в точке минимума – это минимум функции. Тогда $y_{\min} = 0$ – это экстремум функции $y = x^2$.

Ответьте на вопросы и выполните задание.

1. Когда говорят, что на множестве *X* задана функция со значениями из множества *У*?
2. Что называется областью определения функции $y = f(x)$?
3. Что называется областью значений функции $y = f(x)$?
4. Что называют зависимой переменной, или функцией?
5. Что называют независимой переменной, или аргументом функции?
6. Что называют точкой максимума функции?
7. Что называют точкой минимума функции?
8. Что называют точками экстремума функции?
9. Что называют экстремумами функции?
10. Назовите точку экстремума функции $y = x^2$. Это точка максимума или точка минимума функции?
11. Чему равен экстремум функции $y = x^2$?

Задание 3. Прочитайте. Сделайте рисунок к каждому утверждению.

1. Если функция $y = f(x)$ является чётной и возрастает при $x > 0$, то она убывает при $x < 0$.
2. Если функция $y = f(x)$ является чётной и убывает при $x > 0$, то она возрастает при $x < 0$.
3. Если функция $y = f(x)$ является нечётной и возрастает при $x > 0$, то она возрастает при $x < 0$.
4. Если функция $y = f(x)$ является нечётной и убывает при $x > 0$, то она убывает при $x < 0$.
5. Если функция $y = f(x)$ является нечётной и имеет в точке x_1 максимум, то в точке $(-x_1)$ она имеет минимум.
6. Если функция $y = f(x)$ является нечётной и имеет в точке x_1 минимум, то в точке $(-x_1)$ она имеет максимум.
7. Если функция $y = f(x)$ является чётной и имеет в точке x_1 максимум, то и в точке $(-x_1)$ она имеет максимум.
8. Если функция $y = f(x)$ является чётной и имеет в точке x_1 минимум, то и в точке $(-x_1)$ она имеет минимум.

27.2. Исследование функции на монотонность

Словарь к теме

интерва́л моното́нности фу́нкции крити́ческая то́чка достато́чное усло́вие	разбива́ть – разби́ть *что? на что?* дифференци́руем, -а, -о, -ы определён, определена́, -о, -ы

Задание 4. Выполните задание по образцу.

Образец. 1) $y = f(x)\uparrow$, если $x \in (-\infty;0) \cup (6;+\infty)$ – функция $y = f(x)$ **возрастает на** интервалах (– ∞; 0) и (6; + ∞);

2) $y = f(x)\downarrow$, если $x \in (0; 6)$ – функция $y = f(x)$ **убывает на** интервал**е** (0; 6).

1) $y = f(x)\uparrow$, если $x \in (-\infty; 8)$;
2) $y = f(x)\downarrow$, если $x \in (-\infty; \infty)$;
3) $y = f(x)\uparrow$, если $x \in (-1; \infty)$;
4) $y = f(x)\downarrow$, если $x \in (-10; 7)$;
5) $y = f(x)\uparrow$, если $x \in (-\infty; 3)$;
6) $y = f(x)\downarrow$, если $x \in (12; 19)$;
7) $y = f(x)\uparrow$, если $x \in (-4; \infty)$;
8) $y = f(x)\downarrow$, если $x \in (-\infty; 1)$;
9) $y = f(x)\uparrow$, если $x \in (-\infty; 0)$;
10) $y = f(x)\downarrow$, если $x \in (-3; 9)$;
11) $y = f(x)\uparrow$, если $x \in (-2; 5)$;
12) $y = f(x)\downarrow$, если $x \in (0; 18)$.

Прочитайте.

Критическими точками функции называются точки, в которых производная функции равна нулю или не существует.

Промежутки возрастания и убывания функции называются **интервалами монотонности функции**.

Для того чтобы найти интервалы монотонности, необходимо воспользоваться следующей теоремой.

Теорема (достаточное условие возрастания (убывания) функции).

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$.

1. Если $f'(x) > 0$ для любого значения x из интервала $(a; b)$, то функция $y = f(x)$ возрастает на интервале $(a; b)$.

2. Если $f'(x) < 0$ для любого значения x из интервала $(a; b)$, то функция $y = f(x)$ убывает на интервале $(a; b)$.

Схема исследования функции на монотонность

1. Найти область определения функции $y = f(x)$.
2. Найти производную функции $y = f(x)$.
3. Найти критические точки.
4. Определить знак производной на каждом из промежутков, на которые критические точки разбивают область определения функции.
5. По знаку производной определить промежутки возрастания и убывания.

Пример. Найдите промежутки монотонности функции $y = x^3 - 9x^2 - 3$.

Решение. Функция $y = x^3 - 9x^2 - 3$ определена на множестве всех действительных чисел, т. е. $x \in R$.

Найдём производную данной функции

$$y' = \left(x^3 - 9x^2 - 3\right)' = 3x^2 - 18x.$$

Найдём **критические точки** функции. Для этого решим уравнение $y' = 0$:

$$3x^2 - 18x = 0 \Leftrightarrow 3x \cdot (x - 6) = 0.$$

Получим $x_1 = 0$, $x_2 = 6$.

Точки $x_1 = 0$ и $x_2 = 6$ – это критические точки функции.

Точки $x_1 = 0$ и $x_2 = 6$ разбивают область определения функции на три интервала:

$$(-\infty; 0), (0; 6) \text{ и } (6; +\infty).$$

Возьмём любые точки из интервалов $(-\infty; 0)$, $(0; 6)$ и $(6; +\infty)$ и вычислим значение производной функции в этих точках

$$f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 - 18 \cdot (-1) = 3 + 18 = 21 > 0;$$

$$f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 18 \cdot 2 = 12 - 36 = -24 < 0;$$

$$f'(7) = 3 \cdot 7^2 - 18 \cdot 7 = 147 - 126 = 21 > 0.$$

Запишем данные в таблицу:

x	$(-\infty; 0)$	$(0; 6)$	$(6; +\infty)$
$f'(x)$	+	–	+
$f(x)$	возрастает	убывает	возрастает

Ответ: Функция $f(x) = x^3 - 9x^2 - 3$ возрастает на интервалах $(-\infty; 0)$ и $(6; +\infty)$. Функция $f(x) = x^3 - 9x^2 - 3$ убывает на интервале $(0; 6)$.

Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Запишите область определения функции $f(x) = x^3 - 9x^2 - 3$.
2. Как найти критические точки функции?
3. Назовите критические точки функции $f(x) = x^3 - 9x^2 - 3$.
4. На каких промежутках функция возрастает?
5. На каких промежутках функция убывает?

Задание 5. Найдите промежутки монотонности функции.

1) $y = 3x - x^3$; 2) $y = 3x^2 - 2 - x^3$; 3) $y = 2x^3 + 5x^2 + 4x$;

4) $y = 27x - x^3$; 5) $y = 2x^3 - 3x^2 - 4$; 6) $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$;

7) $y = 12x - 3x^3$; 8) $y = 2 - 8x^3 - 12x^2$; 9) $y = 2x^3 + 9x^2 + 12x$;

10) $y = 6x - 8x^3$; 11) $y = 4x^3 - 9x^2 + 6x$; 12) $y = 16x^3 + 12x^2 - 5$.

27.3. Исследование функции на экстремум

Словарь к теме

окре́стность (ж. р.) экстрема́льный непреры́вен, непреры́вна, -о, -ы	доста́точный при́знак проверя́ть – прове́рить *что?* иссле́довать *что? на что?*

Задание 6. Выполните задание по образцу.

Образец. 1) $x_{\max} = 0$ – это точка максимума;

2) $x_{\min} = 2$ – это точка минимума.

1) $x_{\max} = 2$; 2) $x_{\min} = -4$; 3) $x_{\max} = -5$; 4) $x_{\min} = 19$;
5) $x_{\max} = 1$; 6) $x_{\min} = -8$; 7) $x_{\max} = -7$; 8) $x_{\min} = 12$;
9) $x_{\max} = 3$; 10) $x_{\min} = 0$; 11) $x_{\max} = 11$; 12) $x_{\min} = 6$.

Задание 7. Выполните задание по образцу.

Образец. 1) $y_{\max} = 0$ – это максимум функции;

2) $y_{\min} = 3$ – это минимум функции.

1) $y_{\max} = 5$; 2) $y_{\min} = -6$; 3) $y_{\max} = -12$;
4) $y_{\min} = 8$; 5) $y_{\max} = -1$; 6) $y_{\min} = -20$;
7) $y_{\max} = 10$; 8) $y_{\min} = -2$; 9) $y_{\max} = -19$;
10) $y_{\min} = 0$; 11) $y_{\max} = 7$; 12) $y_{\min} = -3$.

Прочитайте.

Чтобы найти экстремумы функции, надо воспользоваться первым достаточным признаком существования экстремума функции.

Теорема (первый достаточный признак существования экстремума функции). Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 и дифференцируема в некоторой её окрестности, причём:

1) $f'(x_0) = 0$ либо не существует;

2) при переходе через точку x_0 **производная меняет знак** с «–» на «+», то x_0 – **точка минимума** (рис. 41);

3) при переходе через точку x_0 **производная меняет знак** с «+» на «–», то x_0 – **точка максимума** (рис. 42).

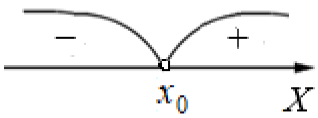


Рис. 41. Точка минимума функции

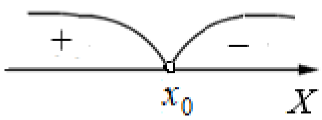


Рис. 42. Точка максимума функции

Значение функции в точке максимума – это максимум функции. Значение функции в точке минимума – это минимум функции. **Максимум функции и минимум функции** – это **экстремумы** функции.

Схема исследования функции на экстремумы

1. Найти область определения функции $y = f(x)$.
2. Найти производную функции $y = f(x)$.
3. Найти критические точки.
4. Определить знак производной на каждом из промежутков, на которые критические точки разбивают область определения функции.
5. Выбрать точки, в которых производная меняет знак.
6. Найти значения функции в точках экстремума.

Пример. Исследуйте на экстремум функцию $y = x^2 \cdot e^x$.

Решение. Функция определена на всей числовой оси, т. к. $e^x > 0$. Найдём производную функции и критические точки:

$$y' = \left(x^2 \cdot e^x\right)' = 2xe^x + e^x \cdot x^2 = e^x \cdot x \cdot (2 + x);$$

$$y' = 0 \Rightarrow e^x \cdot x \cdot \left(2 + x\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -2.$$

Отметим критические точки на оси OX и проверим знак производной на каждом интервале (рис. 43):

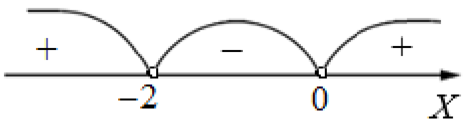


Рис. 43. Знаки производной функции $y = x^2e^x$

При $x = 1$ получим $y'(1) = e^1 \cdot 1 \cdot (2 + 1) = 3e > 0$. Дальше знаки производной **чередуются**.

При переходе через точку $x_1 = 0$ производная меняет знак «–» на «+». Следовательно, $x_1 = 0$ – **точка минимума** функции. При переходе через точку $x_2 = -2$ производная меняет знак «+» на «–». Следовательно, $x_2 = -2$ – **точка максимума** функции.

Найдём значение функции в точках экстремума:

$y_{\max} = y(-2) = \left(-2\right)^2 \cdot e^2 = 4e^2$ – это максимум функции;

$y_{\min} = y(0) = 0^2 \cdot e^0 = 0$ – это минимум функции.

Ответ: $y_{\max} = 4e^2$, $y_{\min} = 0$.

Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Назовите область определения функции $y = x^2 \cdot e^x$.
2. Чему равна производная функции $y = x^2 \cdot e^x$?
3. Сколько критических точек имеет функция $y = x^2 \cdot e^x$?
4. Почему точка $x_1 = 0$ является точкой минимума функции?
5. Почему точка $x_2 = -2$ является точкой максимума функции?
6. Назовите экстремумы функции $y = x^2 \cdot e^x$.

Задание 8. Исследуйте на экстремум функцию $y = f(x)$.

1) $y = x^3 - 12x$; 2) $y = x \cdot \ln x$; 3) $y = 16x^3 + 12x^2$;

4) $y = (x+5) \cdot e^x$; 5) $y = x^2 + x^4$; 6) $y = 2 - 2x^2 - x^4$;

7) $y = 6x - 8x^3$; 8) $y = x^3 - 3x$; 9) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$.

Задания

Задание 1. Соедините начало и конец предложений.

Начало предложения	**Конец предложения**
1. Возрастающие и убывающие функции – это	**а)** область определения функции.
2. Зависимая переменная – это	**б)** аргумент функции.
3. Максимумы и минимумы функции – это	**в)** интервалы монотонности функции.
4. Множество Y – это	**г)** монотонные функции.
5. Множество X – это	**д)** область значений функции.
6. Независимая переменная – это	**е)** функция.
7. Промежутки возрастания и убывания функции – это	**ж)** экстремумы функции.

Задание 2. Выберите правильный вариант ответа.

1. Если область определения функции X симметрична относительно нуля и для любого значения $x \in X$ выполняется равенство $f(-x) = f(x)$, то функция $y = f(x)$ называется … функцией.

(А) чётной; (Б) нечётной.

2. Если для любых значений x_1 и x_2 из интервала $(a; b)$ выполняется условие $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$, то функция $y = f(x)$ называется … на интервале $(a; b)$.

(А) возрастающей; (Б) убывающей.

3. Если $f'(x) > 0$ для любого значения x из интервала $(a; b)$, то функция $y = f(x)$ … на $(a; b)$.

(А) возрастает; (Б) убывает.

4. Если в точке x_0 производная равна нулю, а при переходе через точку x_0 производная меняет знак с «+» на «–», то x_0 – точка … функции.

(А) максимума; (Б) минимума.

5. График чётной функции симметричен относительно … .

(А) оси абсцисс; (Б) оси ординат.

6. Возрастающие и убывающие функции называются … функциями.

(А) критическими; (Б) монотонными.

7. Промежутки возрастания и убывания функции называются … монотонности функции.

(А) интервалами; (Б) точками.

8. Максимумы и минимумы функции называют … функции.

(А) точками экстремума; (Б) экстремумами.

Тема 28. Наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке

Задание 1. Выполните задание по образцу.

Образец. 1) $y_{\text{наиб.}} = 9$ – наибольшее значение функции равно девяти;

2) $y_{\text{наим.}} = 0$ – наименьшее значение функции равно нулю.

1) $y_{\text{наиб.}} = 3$;	2) $y_{\text{наим.}} = -2$;	3) $y_{\text{наиб.}} = -7$;	4) $y_{\text{наим.}} = 12$;
5) $y_{\text{наиб.}} = 5$;	6) $y_{\text{наим.}} = -8$;	7) $y_{\text{наиб.}} = -6$;	8) $y_{\text{наим.}} = 19$;
9) $y_{\text{наиб.}} = 4$;	10) $y_{\text{наим.}} = -1$;	11) $y_{\text{наиб.}} = -9$;	12) $y_{\text{наим.}} = 11$.

Прочитайте.

Значение функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется **наибольшим значением** этой функции на некотором интервале X, если для любого $x \in X$ выполняется неравенство $f(x_0) > f(x)$.

Значение функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется **наименьшим значением** этой функции на некотором интервале X, если для любого $x \in X$ выполняется неравенство $f(x_0) < f(x)$.

Схема нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке

1. Найти область определения функции $y = f(x)$.
2. Найти производную функции $y = f(x)$.
3. Найти критические точки.
4. Вычислить значения функции в критических точках, которые принадлежат отрезку, и на концах отрезка.
5. Сравнить полученные значения и выбрать из них наибольшее и наименьшее значения функции.

Пример. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ на отрезке [0; 3].

Решение. Функция $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ определена на множестве всех действительных чисел, т. е. $x \in R$.

Найдём производную функции

$$y' = \left(2x^3 - 9x^2 + 12x\right)' = 6x^2 - 18x + 12.$$

Найдём **критические точки** функции. Для этого решим уравнение $y' = 0$:

$$6x^2 - 18x + 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0.$$

Найдём дискриминант и корни квадратного уравнения

$$D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1;$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 1}{2};$$

$$x_1 = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1; \;\; x_2 = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Получили две критические точки

$$x_1 = 1, \;\; x_2 = 2.$$

Обе критические точки принадлежат отрезку [0; 3].

Вычислим значения функции в критических точках $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ и на концах отрезка [0; 3] в точках $a = 0$ и $b = 3$

$$y(1) = 2 \cdot 1^3 - 9 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 = 5;$$

$$y(2) = 2 \cdot 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 = 4;$$

$$y(0) = 2 \cdot 0^3 - 9 \cdot 0^2 + 12 \cdot 0 = 0;$$

$$y(3) = 2 \cdot 3^3 - 9 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3 = 9.$$

Сравним полученные значения и выберем наибольшее и наименьшее значения функции

$y_{\text{наиб.}} = y(3) = 9$ – наибольшее значение функции,

$y_{\text{наим.}} = y(0) = 0$ – наименьшее значение функции.

Ответ: $y_{\text{наиб.}} = 9$, $y_{\text{наим.}} = 0$.

Ответьте на вопросы и выполните задание.

1. Что называется наибольшим значением функции на интервале?
2. Что называется наименьшим значением функции на интервале?
3. Как найти критические точки функции?
4. Чему равна производная функции $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$?
5. Назовите критические точки функции $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$.
6. Чему равно наибольшее значение функции $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ на отрезке [0; 3]?
7. Чему равно наименьшее значение функции $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ на отрезке [0; 3]?

Задания

Задание 1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.

1) $y = x^4 + 4x$, [–2; 2];
2) $y = x^3 - 12x + 7$, [0; 3];
3) $y = x^3(8 - x)$, [0; 7];
4) $y = x^4 - 8x^2 + 3$, [–1; 2];
5) $y = x^3 - 18x^2$, [0; 9];
6) $y = x^4 - 2x^2 + 3$, [–3; 2].
7) $y = x^4 - 2x^2$, [–3; 2];
8) $y = x^3 + 3x^2 - 9x$, [–5; 0];
9) $y = 2x^3 + 3x^2$, [–1; 5];
10) $y = x^4 + 8x^3 + 16x^2$, [–3; 1].

Тема 29. Исследование квадратичной функции

29.1. Построение параболы

Словарь к теме

исслéдование
плáвная лúния
дополнúтельный

Задание 1. Выполните задание по образцу.

Образец. Найдите координаты вершины параболы $y = x^2 - 2x - 8$.

Решение. Найдём абсциссу вершины параболы по формуле

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

Получим

$$x_0 = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1.$$

Найдём ординату вершины параболы

$$y_0 = y(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 - 8 = -9.$$

Следовательно, точка $A(1; -9)$ – вершина параболы $y = x^2 - 2x - 8$.

1) $y = x^2 + 2x + 3$; 2) $y = -x^2 - 2x + 3$; 3) $y = x^2 + 2x + 9$;

4) $y = x^2 + 2x - 1$; 5) $y = -x^2 - 4x + 3$; 6) $y = x^2 + 6x + 2$;

7) $y = x^2 - 6x + 2$; 8) $y = -x^2 + 4x + 1$; 9) $y = x^2 + 4x + 6$;

10) $y = x^2 - 4x + 1$; 11) $y = -x^2 + 4x - 1$; 12) $y = x^2 + 4x + 2$.

Задание 2. Выполните задание по образцу.

Образец. Найдите точки пересечения параболы $y = x^2 - 2x - 8$ с осью OX.

Решение. Чтобы найти точки пересечения параболы с осью OX, надо решить квадратное уравнение

$$x^2 - 2x - 8 = 0.$$

Найдём дискриминант квадратного уравнения

$$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 36 = 6^2.$$

Так как $D > 0$, то уравнение имеет два действительных корня

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 + 6}{2} = 4;$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 - 6}{2} = -2.$$

Следовательно, точки B(4; 0) и C(–2; 0) – точки пересечения параболы с осью OX.

1) $y = x^2 + 2x - 3$;	2) $y = -x^2 + x - 9$;	3) $y = x^2 - 2x + 3$;
4) $y = x^2 + 2x + 1$;	5) $y = 3x^2 + 4x + 1$;	6) $y = x^2 + 5x + 6$;
7) $y = x^2 - 3x + 2$;	8) $y = -x^2 - 5x - 6$;	9) $y = x^2 + 3x + 2$;
10) $y = x^2 - x - 2$;	11) $y = -x^2 + 4x - 4$;	12) $y = x^2 + 4x + 3$.

Задание 3. Выполните задание по образцу.

Образец. Найдите точку пересечения параболы $y = x^2 - 2x - 8$ с осью OY.

Решение. Чтобы найти точку пересечения параболы с осью OY, надо вычислить значение функции в точке $x = 0$

$$y(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 - 8 = -8.$$

Следовательно, точка D(0; –8) – точка пересечения параболы с осью OY.

1) $y = x^2 - x - 2$;	2) $y = 3x^2 - 2x + 3$;	3) $y = x^2 + 5x + 6$;
4) $y = x^2 + 2x + 1$;	5) $y = 5x^2 + 2x - 3$;	6) $y = x^2 + 3x + 2$;
7) $y = x^2 - 2x + 1$;	8) $y = -x^2 + 4x + 4$;	9) $y = -x^2 + x - 9$;
10) $y = x^2 + 4x - 1$;	11) $y = -x^2 - x - 6$;	12) $y = x^2 + 4x + 5$.

Задание 4. Выполните задание по образцу.

Образец. Найдите дополнительные точки параболы $y = x^2 - 2x - 8$.

Решение. Возьмём любые точки, например, $x = -2$, $x = -1$ и $x = 2$ и вычислим значения функции в этих точках

$$y(-2) = (-2)^2 - 2 \cdot (-2) - 8 = 4 + 4 - 8 = 0;$$

$$y(-1) = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 8 = 1 + 2 - 8 = -5;$$

$$y(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 - 8 = 4 - 4 - 8 = -8.$$

Получили точки A(–2; 0), B(–1; –5) и C(2; –8).

1) $y = 5x^2 - x + 1$;	2) $y = -x^2 - 5x + 3$;	3) $y = x^2 + 5x + 6$;
4) $y = 3x^2 + 2x - 1$;	5) $y = -3x^2 + 2x + 1$;	6) $y = x^2 + 3x + 2$;
7) $y = 7x^2 + 2x + 1$;	8) $y = -8x^2 - 2x + 3$;	9) $y = -x^2 + x + 9$;
10) $y = 6x^2 - x + 10$;	11) $y = -9x^2 + x + 4$;	12) $y = x^2 + 4x - 1$.

Прочитайте.

Рассмотрим квадратичную функцию $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$. Квадратичная функция определена при всех значениях x, т. е. $x \in R$. Графиком квадратичной функции является **парабола**. Парабола имеет две **ветви** и одну **вершину**.

Найдём координаты вершины параболы – точку (x_0, y_0). Абсциссу вершины параболы x_0 найдём по формуле

$$x_0 = -\frac{b}{2a},$$

тогда ордината вершины параболы $y_0 = y(x_0)$.

Если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх и множество значений функции – это полуинтервал $[y_0;\infty)$. Если $a < 0$, то ветви параболы направлены вниз и множество значений функции – это полуинтервал $(-\infty; y_0]$.

Найдём точки пересечения параболы с осью *OX*. Для этого решим квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$. Значения переменной x, при которых значение функции равно 0, называют **нулями функции**.

Если $D = b^2 - 4ac > 0$, то парабола имеет две точки пересечения с осью *OX* – точки $(x_1;\, 0)$ и $(x_2;\, 0)$, где $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Если $D = 0$, то парабола имеет одну точку пересечения с осью *OX* – точку $(x_1;\, 0)$. Эта точка является вершиной параболы.

Если $D < 0$, то парабола не имеет точек пересечения с осью *OX*. Если $a > 0$ и $D < 0$, то парабола расположена выше оси *OX*. Если $a < 0$ и $D < 0$, то парабола расположена ниже оси *OX*.

Чтобы найти точку пересечения параболы с осью *OY*, надо вычислить значение функции при $x = 0$: $y(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$. Получим точку $(0; c)$.

Чтобы построить параболу, надо знать координаты вершины параболы, точки пересечения с осями координат *OX* и *OY* или дополнительные точки.

Пример. Постройте график функции $y = x^2 - 2x - 8$.

Область определения квадратичной функции – это множество всех действительных чисел, т. е. $x \in R$. График квадратичной функции – парабола. Так как $a = 1 > 0$, то ветви параболы направлены вверх.

Найдём координаты вершины параболы

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1, \quad y_0 = y(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 - 8 = -9.$$

Следовательно, точка $(1; -9)$ – вершина параболы. Тогда множество значений функции – это полуинтервал $[-9; \infty)$.

Найдём точки пересечения параболы с осью *OX*. Для этого решим квадратное уравнение

$$x^2 - 2x - 8 = 0;$$

$$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 36 = 6^2;$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 + 6}{2} = 4;$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{2-6}{2} = -2.$$

Таким образом, точки (4; 0) и (–2; 0) – точки пересечения параболы с осью *ОХ*.

Найдём точку пересечения параболы с осью *ОУ*:

$$x = 0 \Rightarrow y(0) = 0^2 - 2\cdot 0 - 8 = -8.$$

Точка (0; –8) – точка пересечения параболы с осью *ОУ*.

Построим прямоугольную систему координат *ХОУ*. Выберем на осях *ОХ* и *ОУ* масштаб и отметим на плоскости *ХОУ* найденные точки. Соединим эти точки плавной линией и получим параболу (рис. 44).

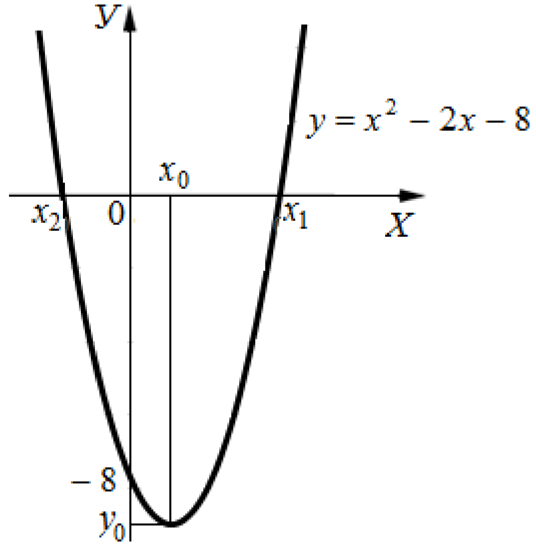


Рис. 44. График функции $y = x^2 - 2x - 8$

Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Как называется график квадратичной функции?
2. Запишите множество значений квадратичной функции, если $a < 0$.
3. Как найти точки пересечения параболы с осью *ОХ*?
4. Как найти точку пересечения параболы с осью *ОУ*?
5. Когда парабола не имеет точек пересечения с осью *ОХ*?
6. Где расположена парабола, если $D < 0$ и $a < 0$?
7. Что является областью определения функции $y = x^2 - 2x - 8$?
8. Что является множеством значений функции $y = x^2 - 2x - 8$?
9. Почему ветви параболы $y = x^2 - 2x - 8$ направлены вверх?
10. Запишите координаты вершины параболы $y = x^2 - 2x - 8$.
11. Сколько точек пересечения имеет парабола $y = x^2 - 2x - 8$ с осью *ОХ*?
12. Какие координаты имеет точка пересечения параболы $y = x^2 - 2x - 8$ с осью *ОУ*?
13. В какой четверти находится вершина параболы $y = x^2 - 2x - 8$?

29.2. Исследование квадратичной функции

Словарь к теме

ось симме́трии
о́бщий вид
знакопостоя́нство

Схема исследования квадратичной функции

1. Найти область определения функции $D(f)$.
2. Найти вершину параболы.
3. Определить, куда направлены ветви параболы.
4. Найти область значений функции $E(f)$.
5. Исследовать функцию на чётность.
6. Найти нули функции.
7. Найти точку пересечения с осью *ОУ*.
8. Построить график функции.
9. Найти промежутки знакопостоянства функции.
10. Найти промежутки возрастания и убывания функции.
11. Найти точку экстремума и экстремум функции.

Множества значений *x*, при которых функция $y = f(x)$ больше нуля и меньше нуля, называются **промежутками знакопостоянства функции**. Чтобы найти промежутки знакопостоянства функции, надо решить неравенства

$$y > 0 \text{ и } y < 0.$$

При $b \neq 0$ квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ является **ни чётной** и **ни нечётной**, потому что

$$f(-x) = a \cdot (-x)^2 + b \cdot (-x) + c = ax^2 - bx + c \neq f(x) \text{ и } f(-x) \neq -f(x).$$

Это функция **общего вида**. График квадратичной функции симметричен относительно прямой, которая проходит через вершину параболы параллельно оси ординат. Прямая $x = x_0$ – это **ось симметрии параболы**.

Пример. Исследовать функцию $y = x^2 - 4x + 3$ и построить её график.

1. Область определения функции $D(f) = R$.

2. $x_0 = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-4}{2 \cdot 1} = 2$, $y_0 = y(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1$.

Следовательно, точка $A(2; -1)$ – вершина параболы.

3. Так как $a = 1 > 0$, то ветви параболы направлены вверх.

4. Множество значений функции $E(f) = [-1; \infty)$.

5. $f(-x) = (-x)^2 - 4 \cdot (-x) + 3 = x^2 + 4x + 3 \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$.

Следовательно, функция $y = x^2 - 4x + 3$ – функция общего вида.

6. Найдём нули функции. Для этого решим квадратное уравнение

$$x^2 - 4x + 3 = 0.$$

Найдём дискриминант и корни квадратного уравнения:

$$D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4;$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2};$$

$$x_1 = \frac{4+2}{2} = 3; \; x_2 = \frac{4-2}{2} = 1.$$

Следовательно, парабола имеет две точки пересечения с осью *OX*:

B(1; 0) и *C*(3; 0).

7. Найдём точку пересечения параболы с осью *OУ*:

$$x = 0 \Rightarrow y(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 3.$$

Точка *D*(0; 3) – точка пересечения параболы с осью *OУ*.

8. Найдём дополнительные точки параболы и запишем их в таблицу.

x	–1	0	1	2	3	4	5
y	8	3	0	–1	0	3	8

Построим график функции (рис. 45).

Прямая *x* = 2 – ось симметрии параболы.

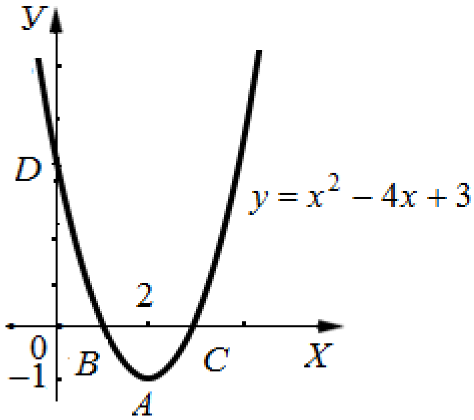


Рис. 45. График функции $y = x^2 - 4x + 3$

9. Найдём промежутки знакопостоянства функции:

$y > 0$, если $x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$;

$y < 0$, если $x \in (1; 3)$.

10. Найдём промежутки возрастания и убывания функции:

$y \uparrow$, если $x \in (2; +\infty)$;

$y \downarrow$, если $x \in (-\infty; 2)$.

11. Найдём точку экстремума и экстремум функции.

$x_{\min} = 2$ – точка минимума функции,

$y_{\min} = -1$ – минимум функции.

Задания

Задание 1. Исследуйте квадратичную функцию и постройте её график.

1) $y = x^2 - 4$; 2) $y = x^2 - 4x + 4$; 3) $y = x^2 + 2x - 8$;

4) $y = 1 - 2x^2$; 5) $y = x^2 - 4x + 5$; 6) $y = x^2 + 6x + 5$;

7) $y = -x^2 + 4$; 8) $y = -x^2 + 2x - 1$; 9) $y = -x^2 + 6x - 5$;

10) $y = 3x^2 - 1$; 11) $y = -x^2 - 4x - 5$; 12) $y = x^2 + 3x - 4$.

Задание 2. Соедините начало и конец предложений.

Начало предложения	**Конец предложения**
1. Чтобы найти абсциссу вершины параболы, надо	**а)** найти значение функции при $x = 0$.
2. Чтобы найти точки пересечения параболы с осью *OX*, надо	**б)** решить квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$.
3. Чтобы найти точку пересечения параболы с осью *OУ*, надо	**в)** использовать формулу $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

Задание 3. Выберите правильный вариант ответа.

1. Если $a > 0$, то ветви параболы направлены … .

(А) вверх; (Б) вниз.

2. Если $a < 0$, то множество значений функции – это … .

(А) полуинтервал $[y_0;\infty)$; (Б) полуинтервал $(-\infty; y_0]$.

3. Если $D = b^2 - 4ac > 0$, то парабола имеет … пересечения с осью *OX*.

(А) две точки; (Б) одну точку.

4. Если $D < 0$ и $a > 0$, то парабола расположена … оси *OX*.

(А) выше; (Б) ниже.

5. Значения переменной *x*, при которых значение функции равно 0, называют … функции.

(А) вершинами; (Б) нулями; (В) координатами.

6. Квадратичная функция … при всех значениях *x*, т. е. $x \in R$.

(А) определена; (Б) направлена; (В) расположена.

7. График квадратичной функции называется … .

(А) вершиной; (Б) ветвью; (В) параболой.

8. … точки пересечения графика функции с осью *OX*.

(А) Найдём; (Б) Построим; (В) Решим.

9. … значение функции при $x = 0$.

(А) Выберем; (Б) Вычислим; (В) Соединим.

10. Множества значений *x*, при которых функция $y = f(x)$ больше нуля и меньше нуля, – это … .

(А) экстремум функции; (Б) ось симметрии параболы;

(В) промежутки знакопостоянства функции.

Тема 30. Интегрирование функции одной переменной

30.1. Неопределённый интеграл

Словарь к теме

интегра́л неопределённый интегра́л интегри́рование интегри́руемая фу́нкция	подынтегра́льная фу́нкция подынтегра́льное выраже́ние первообра́зная фу́нкции интегри́ровать – проинтегри́ровать *что?*

Задание 1. Прочитайте записи по образцу.

Образец. $\int x^2 dx$ – интеграл $x^2 dx$.

1) $\int x^3 dx$; 2) $\int e^{3x} dx$; 3) $\int 2x dx$; 4) $\int 5 dx$;

5) $\int \sin x dx$; 6) $\int \sqrt{x}\, dx$; 7) $\int 5^x dx$; 8) $\int \sqrt[3]{x} dx$;

9) $\int \operatorname{ctg} x\, dx$; 10) $\int x\, dx$; 11) $\int \operatorname{tg} x\, dx$; 12) $\int x^6 dx$.

Задание 2. Выполните задание по образцу.

Образец. $\int x^2 dx$ – это неопределённый интеграл; x^2 – это подынтегральная функция, $x^2 dx$ – это подынтегральное выражение, x – это переменная интегрирования.

1) $\int \cos x dx$; 2) $\int \sqrt{t}\, dt$; 3) $\int 5^y dy$; 4) $\int 2x dx$;

5) $\int \operatorname{ctg} z\, dz$; 6) $\int e^{3t} dt$; 7) $\int x^3 dx$; 8) $\int 3x^2 dx$;

9) $\int \frac{dz}{\operatorname{tg} z + 1}$; 10) $\int \frac{dt}{t^3 - t}$; 11) $\int \frac{dy}{y^2 + 2}$; 12) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Задание 3. Выполните задание по образцу.

Образец. $\int 3x^2 dx = x^3 + c \Rightarrow F(x) = x^3 + c$ – первообразная функции $3x^2$.

1) $\int 5x^4 dx = x^5 + c$; 2) $\int 2x dx = x^2 + c$; 3) $\int 7 dx = 7x + c$;

4) $\int 5^x dx = \frac{5^x}{\ln 5} + c$; 5) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c$; 6) $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + c$;

7) $\int \frac{2dx}{x} = 2\ln|x| + c$; 8) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$; 9) $\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \operatorname{arctg} x + c$;

10) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$; 11) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c$; 12) $\int \frac{2x dx}{x^2 + 1} = \ln(x^2 + 1) + c$.

Прочитайте.

Функция $F(x)$ называется **первообразной** для функции $y = f(x)$ в области D, если для любого $x \in D$ (икс, принадлежа́щ**его** D) выполняется равенство

$$F'(x) = f(x).$$

Множество всех первообразных $F(x)$ для функции $y = f(x)$ называется **неопределённым интегралом**.

Неопределённый интеграл от функции $y = f(x)$ обозначается так:

$$\int f(x)dx.$$

Определение неопределённого интеграла можно записать символами:

$$\int f(x)dx = F(x) + c,$$

где $f(x)$ – подынтегральная функция;

$f(x)dx$ – подынтегральное выражение;

$F(x)$ – первообразная для функции $y = f(x)$, причём $F'(x) = f(x)$;

x – переменная интегрирования;

c – постоянная интегрирования (константа).

Операция нахождения первообразной для функции $y = f(x)$ называется **интегрированием**. Интегралы, которые записаны в таблице неопределённых интегралов, называют **табличными интегралами**.

Таблица неопределённых интегралов

1	$\int dx = x + c,\ c = \text{const}$	**2**	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,\ n \neq -1$
3	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + c,\ x \neq 0$	**4**	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c$
5	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c,\ a > 0,\ a \neq 1$	**6**	$\int e^x dx = e^x + c$
7	$\int \cos x dx = \sin x + c$	**8**	$\int \sin x dx = -\cos x + c$
9	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\text{ctg}\, x + c$	**10**	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tg}\, x + c$
11	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert \frac{x-a}{x+a} \right\rvert + c$	**12**	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right\rvert + c$
13	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c$	**14**	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\arccos \frac{x}{a} + c$
15	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \text{arctg} \frac{x}{a} + c$	**16**	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = -\frac{1}{a} \text{arcctg} \frac{x}{a} + c$

Запишем некоторые **свойства** неопределённого интеграла:

1) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;

2) $\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$, где $k = \mathrm{const}$;

3) $\int \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$;

4) $\int f(ax+b)dx = \dfrac{1}{a}F\left(ax+b\right) + c$, где a = const, b = const.

Ответьте на вопросы и выполните задание.

1. Что называется первообразной для функции $y = f(x)$?
2. Что называется неопределённым интегралом?
3. Как обозначается неопределённый интеграл от функции $y = f(x)$?
4. Как называется операция нахождения первообразной для функции?
5. Запишите символами определение неопределённого интеграла. Объясните значение символов.
6. Что такое интегрирование?
7. Чему равна производная от неопределённого интеграла?
8. Чему равен неопределённый интеграл от разности двух функций?
9. Чему равен неопределённый интеграл от функции $y = \sin x$?
10. Чему равен неопределённый интеграл от единицы?

30.2. Определённый интеграл

Словарь к теме

определённый интегра́л непреры́вная фу́нкция преде́лы интегри́рования	ни́жний преде́л интегри́рования ве́рхний преде́л интегри́рования фо́рмула Нью́тона-Ле́йбница

Задание 4. Прочитайте записи по образцу.

Образец. 1) $\int\limits_0^1 e^x dx$ – интеграл от нуля до одного $e^x dx$;

2) $\int\limits_{\pi}^{2\pi} \cos x dx$ – интеграл от π до 2π $\cos x dx$.

1) $\int\limits_2^3 x^2 dx$; 2) $\int\limits_0^{\pi} \sin x dx$; 3) $\int\limits_1^2 x dx$; 4) $\int\limits_0^2 x^3 dx$;

5) $\int\limits_0^1 2^x dx$; 6) $\int\limits_1^2 (x^2+1)dx$; 7) $\int\limits_0^1 e^{3x} dx$; 8) $\int\limits_1^e \ln x\, dx$;

9) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{dx}{x^2+1}$; 10) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{dx}{\sin^2 x+1}$; 11) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{dx}{\cos x}$; 12) $\int\limits_1^9 \dfrac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$.

Задание 5. Выполните задание по образцу.

Образец. $\int\limits_0^1 e^x dx$. Число 0 – это нижний предел интегрирования, число 1 – это верхний предел интегрирования, e^x – это подынтегральная функция.

1) $\int\limits_2^3 x^2 dx$; 2) $\int\limits_1^2 3x^2 dx$; 3) $\int\limits_1^2 x dx$; 4) $\int\limits_0^2 x^3 dx$;

5) $\int\limits_0^1 2^x dx$; 6) $\int\limits_0^{\pi} \sin x dx$; 7) $\int\limits_0^1 e^x dx$; 8) $\int\limits_1^e \ln x\, dx$;

9) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2 + x}$; 10) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin x - 2}$; 11) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$; 12) $\int\limits_5^{13} \frac{dx}{\sqrt{x-4}}$.

Прочитайте.

Запись читают:

$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ – F больш**ое** от икс, где x изменяется **от** a **до** b, равн**о** F большое **от** b минус F большое **от** a.

Определённый интеграл обозначается так:

$$\int\limits_a^b f(x)dx,$$

где $f(x)$ – подынтегральная функция;

$f(x)dx$ – подынтегральное выражение;

x – переменная интегрирования;

a – нижний предел интегрирования;

b – верхний предел интегрирования.

Теорема. Если $y = f(x)$ – непрерывная функция на отрезке $[a; b]$ и $F(x)$ – первообразная для функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$, то справедлива формула

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \qquad (4)$$

Формула (4) называется **формулой Ньютона-Лейбница**.

Определённый интеграл – это число, которое можно найти с помощью формулы Ньютона-Лейбница.

Запишем некоторые свойства определённого интеграла:

1) $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$;

2) $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$;

3) $\int\limits_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int\limits_a^b f(x)dx$, где $k = \text{const}$;

4) $\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx$;

5) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$, где $c \in [a; b]$.

Ответьте на вопросы и выполните задание.

1. Чем отличаются записи определённого и неопределённого интегралов?
2. Как называется число a в записи $\int\limits_a^b f(x)dx$?
3. Как называется число b в записи $\int\limits_a^b f(x)dx$?
4. Запишите формулу Ньютона-Лейбница.

Задание 6. А. Прочитайте пример и его решение.

$$\int\limits_0^2 (3x^2 + 3)\,dx = (x^3 + 3x)\Big|_0^2 = 2^3 + 3 \cdot 2 - (0^3 + 3 \cdot 0) = 14.$$

Б. Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Назовите подынтегральную функцию.
2. Назовите первообразную для подынтегральной функции.
3. Чему равен верхний предел интегрирования?
4. Чему равен нижний предел интегрирования?
5. Чему равно значение определённого интеграла?

Задания

Задание 1. Запишите пропущенные слова в правильной форме: *интегрирование, неопределённый, первообразная, подынтегральная, табличный*.

Функция $F(x)$ называется ________________ для функции $y = f(x)$, если $F'(x) = f(x)$. Выражение $\int f(x)dx = F(x) + c$ – это ______________________ интеграл, где $f(x)$ – это ___________________ функция. Операция нахождения первообразной для функции $y = f(x)$ называется _________________________ . Интеграл $\int e^x\,dx = e^x + c$ является _______________________ интегралом.

Задание 2. Запишите свойства неопределённого интеграла символами:

1) производная неопределённого интеграла равна подынтегральной функции;

2) постоянный множитель можно выносить за знак интеграла;

3) неопределённый интеграл от суммы двух функций равен сумме интегралов от этих функций.

Задание 3. Найдите интегралы (проинтегрируйте функцию).

1) $\int x^3 dx$; 2) $\int e^{2x} dx$; 3) $\int 3^x dx$; 4) $\int 7x^6 dx$;

5) $\int \sin(3x) dx$; 6) $\int (x+1) dx$; 7) $\int \cos x\, dx$; 8) $\int 2\sqrt{x} dx$;

9) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$; 10) $\int \frac{dx}{x^2+25}$; 11) $\int \frac{dx}{\sin^2 x}$; 12) $\int \frac{dx}{x^2-16}$.

Задание 4. Запишите свойства определённого интеграла символами:

1) постоянный множитель можно выносить за знак определённого интеграла;

2) определённый интеграл от суммы двух функций равен сумме определённых интегралов от этих функций;

3) определённый интеграл от разности двух функций равен разности определённых интегралов от этих функций;

4) если нижний и верхний пределы интегрирования совпадают, то определённый интеграл равен нулю.

Задание 5. Вычислите интегралы.

1) $\int_1^e \frac{dx}{3x}$; 2) $\int_1^2 3x^2 dx$; 3) $\int_1^2 (2x-1) dx$; 4) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x\, dx$;

5) $\int_0^1 2^x dx$; 6) $\int_{-2}^{-2} x^{14} dx$; 7) $\int_2^3 (1+3x^2) dx$; 8) $\int_0^{\pi} \sin 3x dx$;

9) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$; 10) $\int_0^4 \frac{dx}{x^2+16}$; 11) $\int_0^{\frac{5}{2}} \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}$; 12) $\int_1^2 \frac{dx}{x^3 \cdot \sqrt{x}}$.

Задание 6. Выберите правильный вариант ответа.

(А) интегрирование;	(Б) пределы интегрирования;
(В) неопределённый интеграл;	(Г) определённый интеграл;
(Д) табличный интеграл;	(Е) подынтегральное выражение.

1. Запись $\int f(x)dx$ читают: интеграл $f(x)dx$, где $f(x)dx$ – это … .

2. Множество всех первообразных $F(x)$ для функции $y = f(x)$ – это … .

3. Интеграл $\int \cos x dx$ – это … .

4. Операция нахождения первообразной для функции $y = f(x)$ – это … .

5. С помощью формулы Ньютона-Лейбница можно вычислить … .

6. Определённый интеграл имеет … .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Учебное пособие разработано для иностранных граждан, готовящихся к обучению в российских вузах по направлениям подготовки бакалавриата технического профиля. Цель пособия – ознакомление учащихся с основной терминологией математики на русском языке в рамках школьной программы и с принятыми в математике конструкциями.

Следует отметить, что пособие является не единственным в своем роде, предназначенным для изучения основных разделов школьной математики будущими иностранными студентами. Однако существующие на данный момент пособия по математике на русском языке как иностранном в большинстве своем не ориентированы на иностранных студентов (слушателей), владеющих русским языком на нулевом уровне. Ориентация на данную категорию граждан обусловила выбор структуры предложенного пособия и его содержание.

Надеемся, что изучение материала учебного пособия помогло иностранным гражданам сформировать навыки использования основных понятий, терминов, символов и математических конструкций на русском языке. В дальнейшем эти умения будут необходимы учащимся при освоении высшей математики на первых курсах бакалавриата.

Авторы выражают благодарность О.А. Казаковой, оказавшей большую помощь в разработке лексико-грамматических упражнений и тестовых заданий, направленных на закрепление и контроль знаний в области математической терминологии.

Рукопись пособия прошла апробацию в течение осеннего и весеннего семестров 2018-2019 учебного года в группах иностранных слушателей подготовительного отделения Школы базовой инженерной подготовки Национально исследовательского Томского политехнического университета (технический профиль). Авторы будут признательны коллегам за комментарии и предложения по улучшению пособия.

ЧТЕНИЕ ОСНОВНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОБОЗНАЧЕНИЙ, ЗАПИСЕЙ И СОКРАЩЕНИЙ

$\in$ – принадлежит;
$\notin$ – не принадлежит;
$2 \in N$ – два принадлежит эн;
$n \in N$ – эн маленькое принадлежит множеству эн;
0,(3) – нуль целых, три в периоде;
$\approx$ – примерно равно;
$\Rightarrow$ – следовательно (тогда);
$\Leftrightarrow$ – равносильно (тогда и только тогда, когда);
$\subset$ – содержится;
$\bigcup$ – объединение;
$\bigcap$ – пересечение;
$\setminus$ – разность;
$\pm$ – плюс, минус;
$(\ldots)$ – круглые скобки;
$[\ldots]$ – квадратные скобки;
$\{\ldots\}$ – фигурные скобки;
$\varnothing$ – пустое множество;
∞ – бесконечность;
$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ – альфа больше нуля, но меньше пи на два;
$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ – множество A – это множество элементов 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
$\{x \in R \mid a \le x \le b\}$ – множество всех действительных чисел x, таких, что $a \le x \le b$;
$\frac{a}{b}$ – a разделить на b;
a^n – a в степени n;
$\sqrt[n]{a}$ – корень степени n из a;
$|a|$ – модуль a (абсолютная величина a);
% – процент;
$[a; b]$ – отрезок от a до b;
$(a; b)$ – интервал от a до b;
$(a; b]$ – полуинтервал от a до b включительно;
$[a; b)$ – полуинтервал от a включительно до b;
$M(x, y)$ – точка эм с координатами x, y;
$y = f(x)$ – y равен f от x;
$\log_a x$ – логарифм x по основанию a;
$\ln x$ – натуральный логарифм x;

$\lg x$ – десятичный логарифм x;
$\sin\alpha$ – синус альфа;
$\cos\alpha$ – косинус альфа;
$\mathrm{tg}\,\alpha$ – тангенс альфа;
$\mathrm{ctg}\,\alpha$ – котангенс альфа;
ΔABC – треугольник ABC;
$S_{\Delta ABC}$ – площадь треугольника ABC;
$\angle ABC$ – угол ABC;
$\angle ABC = 90^0$ – угол ABC равен девяноста градусам;
$\angle A = \angle B$ – угол A равен углу B;
$AC \perp CB$ – отрезок AC перпендикулярен отрезку CB;
$BC \,||\, AD$ – отрезок BC параллелен отрезку AD;
Δx – дельта x;
Δy – дельта y;
$\Delta f(x)$ – дельта f от x;
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ – предел f от x при x, стремящемся к x нулевому;
$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ – предел отношения Δy к Δx при Δx, стремящемся к нулю;
y' – y штрих (производная функции y);
$f'(x)$ – f штрих от x (производная функции f от x);
$\dfrac{dy}{dx}$ – dy по dx;
$y'(x_0)$ – y штрих от x нулевое;
$f'(x_0)$ – f штрих от x нулевое;
y'' – y два штриха;
$f''(x)$ – f два штриха от x;
$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ – d два y по dx дважды;
$\int f(x)dx$ – интеграл $f(x)dx$;
$\int\limits_a^b f(x)dx$ – интеграл от a до b $f(x)dx$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Глазырина Е.Д. Теория вероятностей и математическая статистика. Рабочая тетрадь: учебное пособие / Е.Д. Глазырина. – Томск : Изд-во ТПУ, 2012. – 88 с.
2. Подберезина Е.И. Математика : учебное пособие / Е.И. Подберезина. – Томск : Изд-во ТПУ, 2012. – 312 с.
3. Третьяк И.В. ОГЭ. Математика: универсальный справочник / И.В. Третьяк. – М. : Эксмо, 2016. – 352 с.
4. Единый государственный экзамен. Математика. Комплекс материалов для подготовки учащихся : учебное пособие / А.В. Семёнов, А.С. Трепалин, И.В. Ященко и др.; под ред. И.В. Ященко; Московский Центр непрерывного математического образования. – М. : Интеллект-Центр, 2017. – 192 с.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ **3**

ВВЕДЕНИЕ **4**

Тема 1. Натуральные числа. Арифметические операции **5**
1.1. Натуральные числа 5
1.2. Арифметические операции. 6
1.3. Компоненты арифметических операций 8
Задания 13

Тема 2. Сравнение чисел. Положительные и отрицательные числа **15**
Задания 18

Тема 3. Делимость чисел **20**
3.1. Делитель и кратное 18
3.2. Простые и составные числа 21
Задания 23

Тема 4. Дроби **24**
4.1. Обыкновенные дроби 24
4.2. Правильные и неправильные дроби. Смешанные дроби 26
Задания 28
4.3. Сокращение дробей. Приведение дробей к наименьшему общему знаменателю 30
4.4. Сравнение дробей 32
4.5. Действия с обыкновенными и смешанными дробями 33
Задания 36

Тема 5. Десятичные дроби **37**
Задания 39

Тема 6. Возведение в степень. Извлечение корня **41**
6.1. Чтение степеней и корней 41
6.2. Возведение в степень 42
6.3. Извлечение корня 45
Задания 48

Тема 7. Пропорции. Проценты **50**
7.1. Пропорции 50
7.2. Проценты 51
Задания 52

Тема 8. Множества. Модуль числа ... 53
8.1. Понятие множества ... 53
8.2. Операции над множествами ... 55
8.3. Числовые множества ... 56
8.4. Модуль числа ... 58
Задания ... 59

Тема 9. Числовые промежутки ... 62
9.1. Числовая ось ... 62
9.2. Отрезки, интервалы и полуинтервалы ... 63
Задания ... 66

Тема 10. Преобразование выражений ... 68
10.1. Алгебраические выражения ... 68
10.2. Формулы сокращённого умножения ... 70
10.3. Преобразование алгебраических выражений ... 71
Задания ... 73

Тема 11. Преобразование иррациональных выражений ... 75
Задания ... 78

Тема 12. Многочлены ... 81
12.1. Основные понятия ... 81
12.2. Действия с многочленами ... 83
12.3. Алгебраическая дробь ... 84
Задания ... 86

Тема 13. Функция ... 88
13.1. Координатная плоскость. Координаты точки ... 88
13.2. Числовая функция ... 90
Задания ... 92

Тема 14. Основные элементарные функции ... 94
14.1. Элементарные функции ... 94
14.2. Основные элементарные функции и их графики ... 96
Задания ... 101

Тема 15. Некоторые формулы элементарной математики ... 104
15.1. Определение логарифма. Свойства логарифмов ... 104
15.2. Формулы тригонометрии ... 106
Задания ... 110

Тема 16. Линейные и квадратные уравнения ... 113
16.1. Линейные уравнения ... 113
16.2. Квадратные уравнения ... 116
16.3. Разложение квадратного трёхчлена на множители ... 120

Задания 121

Тема 17. Уравнения, сводящиеся к квадратным 123
17.1. Биквадратные уравнения 123
17.2. Уравнения, которые сводятся к квадратным 124
Задания 125

Тема 18. Иррациональные уравнения 126
Задания 130

Тема 19. Показательные, логарифмические и тригонометрические уравнения 131
19.1. Показательные уравнения 131
19.2. Логарифмические уравнения 132
19.3. Тригонометрические уравнения 134
Задания 136

Тема 20. Неравенства 138
20.1. Основные понятия 138
20.2. Линейные неравенства 139
20.3. Квадратные неравенства 142
20.4. Рациональные и дробно-рациональные неравенства 143
Задания 146

Тема 21. Геометрия на плоскости 148
Задания 153

Тема 22. Стереометрия 156
Задания 159

Тема 23. Системы линейных уравнений 160
23.1. Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными 160
23.2. Равносильные системы уравнений 162
23.3. Методы решения систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными 164
23.4. Метод Крамера 165
Задания 168

Тема 24. Элементы векторной алгебры 170
24.1. Основные понятия 170
24.2. Проекция вектора 173
24.3. Скалярное произведение векторов 176
24.4. Векторное произведение векторов 177
Задания 179

Тема 25. Предел функции 182
Задания 185

Тема 26. Дифференцирование функции одной переменной 186
26.1. Приращение функции и приращение аргумента 186
26.2. Производная функции 187
26.3. Основные правила дифференцирования. Таблица производных 190
26.4. Геометрический смысл производной 191
26.5. Производные второго порядка 193
Задания 194

Тема 27. Исследование функций 195
27.1. Основные понятия 195
27.2. Исследование функции на монотонность 198
27.3. Исследование функции на экстремум 200
Задания 202

Тема 28. Наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке 203
Задания 204

Тема 29. Исследование квадратичной функции 205
29.1. Построение параболы 205
29.2. Исследование квадратичной функции 209
Задания 211

Тема 30. Интегрирование функции одной переменной 212
30.1. Неопределённый интеграл 212
30.2. Определённый интеграл 214
Задания 216

ЗАКЛЮЧЕНИЕ 218

ЧТЕНИЕ ОСНОВНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОБОЗНАЧЕНИЙ, ЗАПИСЕЙ И ОБОЗНАЧЕНИЙ 219

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 221