Численное интегрирование

Задача численного интегрирования: $$J = \int_a^b f(x)dx \qquad (1.1)$$

a и b пределы интегрирования,

f(x) непрерывная на интервале [a,b] функция

Историческое название – вычисление ***квадратуры***

Способы задания функции f(x):

1. f(x) задается явно в виде формулы
2. f(x) не задается явно, но ее значение может быть вычислено в любой точке отрезка [a,b]
3. f(x) задается в виде конечного набора точек $\{x_i, f(x_i)\}$

Численные методы вычисления определенных интегралов основаны на замене подынтегральной функции f(x) аппроксимирующей функцией φ(x).

$$J = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b j(x)dx + R = S + R \quad (1.2)$$

Для аппроксимации может быть использован любой класс простых функций, таких как полиномы, кусочные полиномы, тригонометрические, экспоненциальные или логарифмические функции, в наиболее распространенном случае в качестве таких функций используются степенные полиномы.

$$j(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \mathbf{K} + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad (1.3)$$

Квадратурные формулы Ньютона-Котеса

это совокупность техник приближенного интегрирования, основанных на:

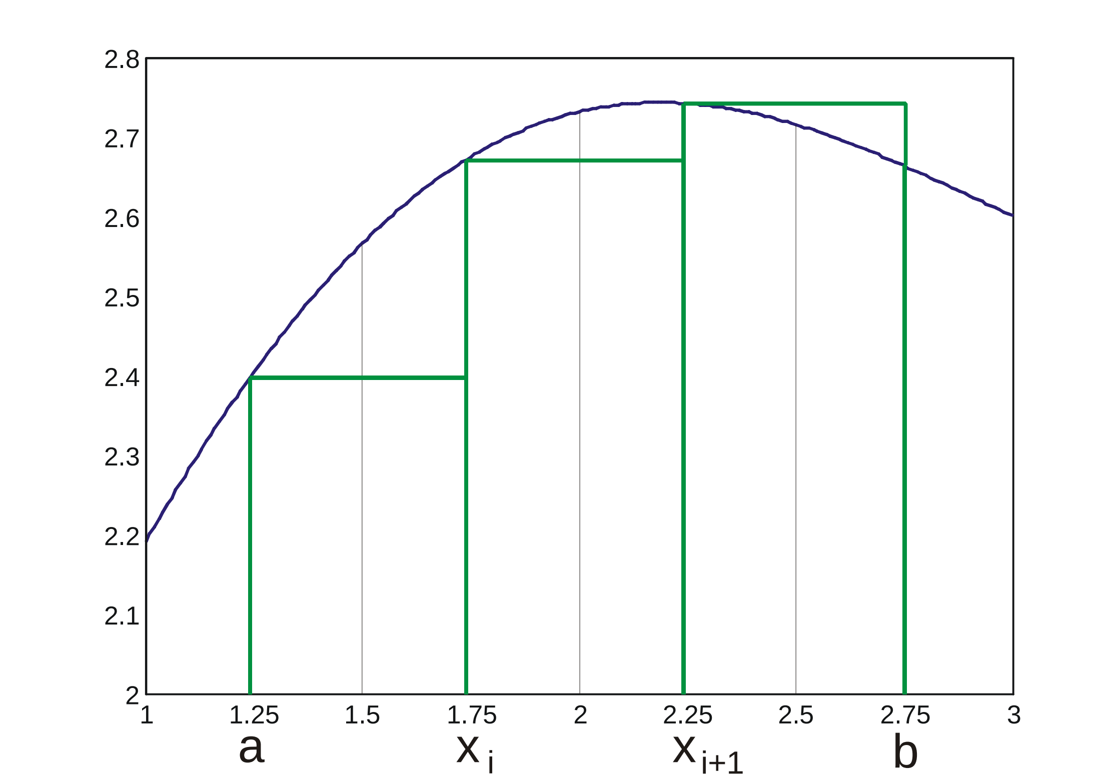
- разбиении отрезка интегрирования на равные промежутки;
- аппроксимации подынтегральной функции на выбранных промежутках степенными интерполяционными многочленами;
- нахождении суммарной площади полученных криволинейных трапеций.

При замене подынтегральной функции на полином нулевой, первой и второй степени получаются соответственно методы прямоугольников, трапеций и Симпсона (парабол).

МЕТОД ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ

$$j\,(x) = const \qquad (1.4)$$

Метод левых прямоугольников



$$J = \int_a^b f(x)dx$$

$$h = x_{i+1} - x_i; h = \frac{b-a}{n};$$

$$j\,[x_i, x_{i+1}] = f(x_i)$$

$$J_i \approx h \cdot j_i = h \cdot f(x_i)$$

$$R = \frac{h}{2}\int_a^b f'(x)dx \qquad (1.5)$$

$$J = \sum_{i=1}^{n} J_i = h\sum_{i=1}^{n} j_i + R = h\sum_{i=1}^{n} f(x_i) + R \qquad (1.6)$$

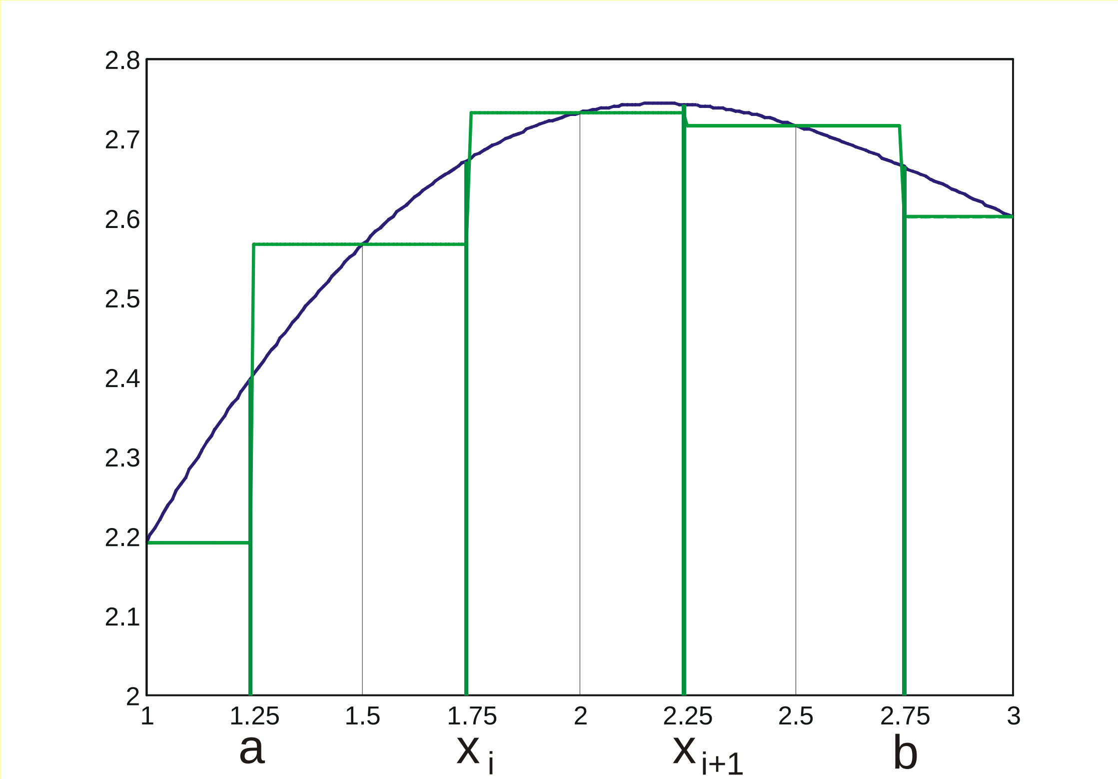
где h – шаг интегрирования, n – число интервалов разбиения

МЕТОД ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ

$$j(x) = const$$

Метод средних прямоугольников

$$J = \int_a^b f(x)dx$$



$$j[x_i, x_{i+1}] = f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$$

$$J_i \approx h \cdot j_i = h \cdot f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$$

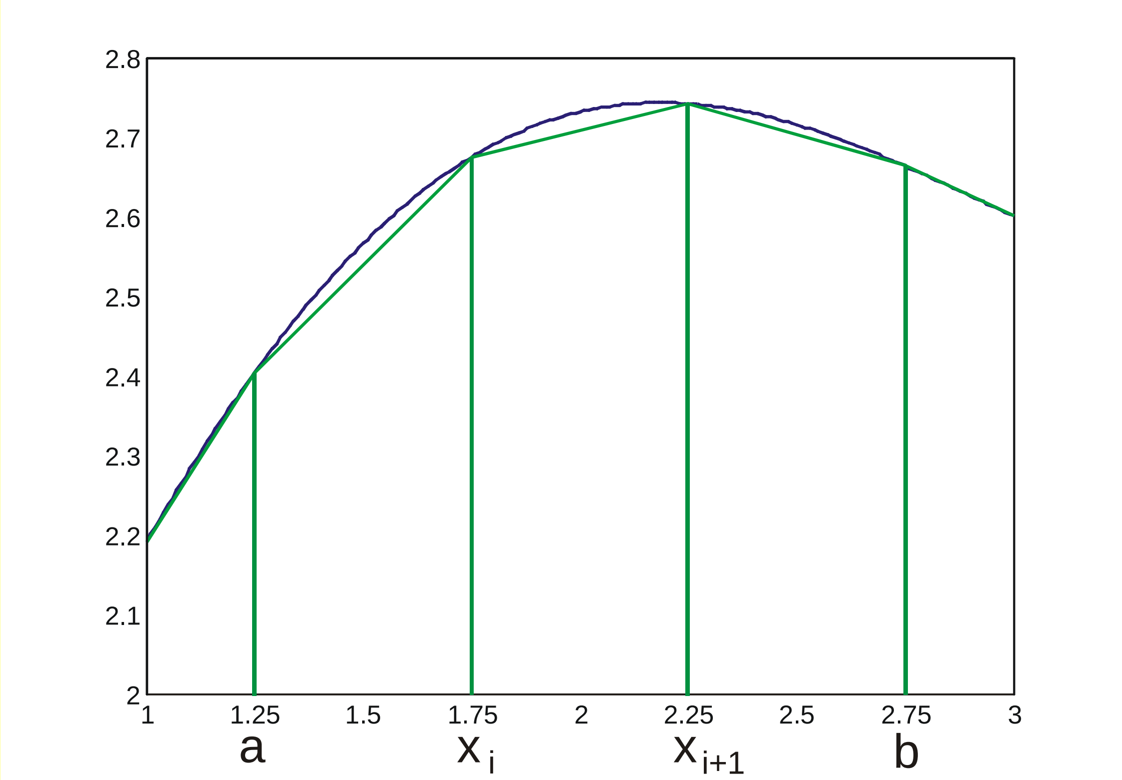
$$R = \frac{h^2}{24}\int_a^b f''(x)dx \qquad (1.7)$$

$$J = \sum_{i=1}^{n} J_i = h\sum_{i=1}^{n} j_i + R = h\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + R \qquad (1.8)$$

МЕТОД ТРАПЕЦИЙ

$$j(x) = a_1 x + a_0 \qquad (1.9)$$

$$J = \int_a^b f(x)dx$$



$$j[x_i, x_{i+1}] =$$

$$= \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i} x + f_i - \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i} x_i$$

$$J_i \approx \int_{x_i}^{x_{i+1}} j_i dx = h \cdot \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}$$

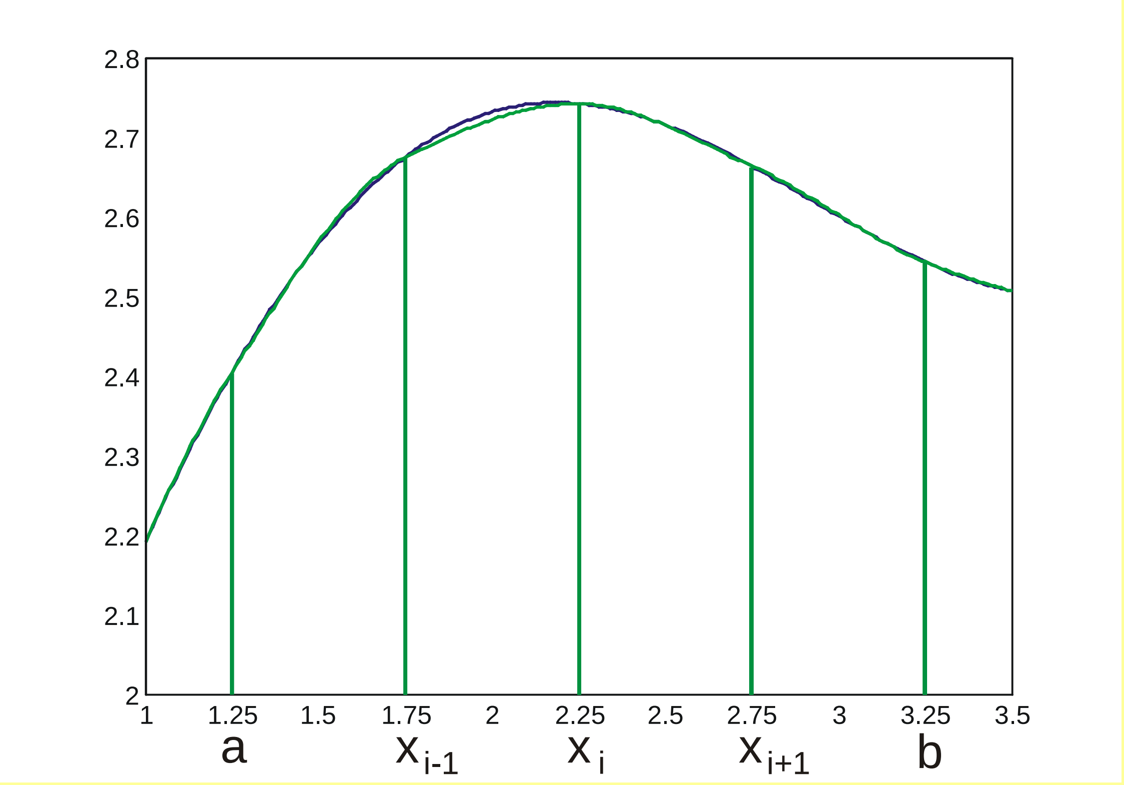
$$R = \frac{h^2}{12} \int_a^b f''(x)dx \qquad (1.10)$$

$$J = h \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} + R = h\left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right) + R \qquad (1.11)$$

МЕТОД СИМПСОНА

$$j(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad (1.12)$$

$$J = \int_a^b f(x)dx$$



$$j[x_i, x_{i+2}] = a_i x^2 + b_i x + g_i$$

$$a_i, b_i, g_i - ?$$

$$R = \frac{h^4}{180} \int_a^b f^{IV}(x)dx \quad (1.13)$$

$$j_i(x) = A_0 + A_1(x - x_i) + A_2(x - x_i)(x - x_{i+1})$$

Интерполяционный полином Ньютона 2-го порядка

$$j_i(x_i) = f(x_i) \qquad k \le i \le k+2$$

Условие Лагранжа

$$\varphi_i(x) = A_0 + A_1(x - x_i) + A_2(x - x_i)(x - x_{i+1})$$

$$x = x_i \qquad A_0 = f_i,$$

$$x = x_{i+1} \quad f_i + A_1(x_{i+1} - x_i) = f_{i+1}, \qquad A_1 = \frac{f_i - f_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}$$

$$x = x_{i+2} \quad f_i + \frac{f_i - f_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}(x_{i+2} - x_i) + A_2(x_{i+2} - x_i)(x_{i+2} - x_{i+1}) = f_{i+2}$$

$$A_2 = \frac{\dfrac{f_i - f_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} - \dfrac{f_i - f_{i+2}}{x_i - x_{i+2}}}{x_{i+1} - x_{i+2}}$$

$$J_i \approx \int_{x_i}^{x_{i+2}} \varphi_i\,dx = \frac{h}{3}\left(f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})\right)$$

$$J = \frac{h}{3}\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_{i-1}) + 4f(x_i) + f(x_{i+1})\right) + R = \frac{h}{3}\left(f(a) + f(b) + 4\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2i+1}) + 2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2i})\right) + R$$

(1.14)

Для семейства методов Ньютона-Котеса можно записать общее выражение:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{j=1}^{N} c_j\, f\left(x_j\right) = \frac{n \cdot h}{C_n} \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=0}^{n} c_{in}\, f\left(x_i\right) \quad (1.15)$$

где n – порядок метода Ньютона-Котеса, N – количество частичных отрезков,

$$h = \frac{x_j - x_{j-1}}{n} \qquad C_n = \sum_{i=0}^{n} c_{in} \qquad x_i = x_j + i \cdot h$$

Из выражения (1.15) легко можно получить формулу прямоугольников для n=0, формулу трапеций для n=1, формулу Симпсона для n=2.

n	C_n	c_{0n}	c_{1n}	c_{2n}	c_{3n}	c_{4n}	c_{5n}
0	1	1					
1	2	1	1				
2	6	1	4	1			
3	8	1	3	3	1		
4	90	7	32	12	32	7	
5	288	19	75	50	50	75	19

Оценка точности вычисления определённого интеграла правило Рунге

Интеграл вычисляется выбранным методом при числе шагов, равном n, а затем при числе шагов, равном $2n$.

Погрешность вычисления значения интеграла при числе шагов, равном $2n$, определяется по формуле Рунге:

$$D_{2n} \text{»} Q\,|J_{2n}-J_n| \qquad (1.16)$$

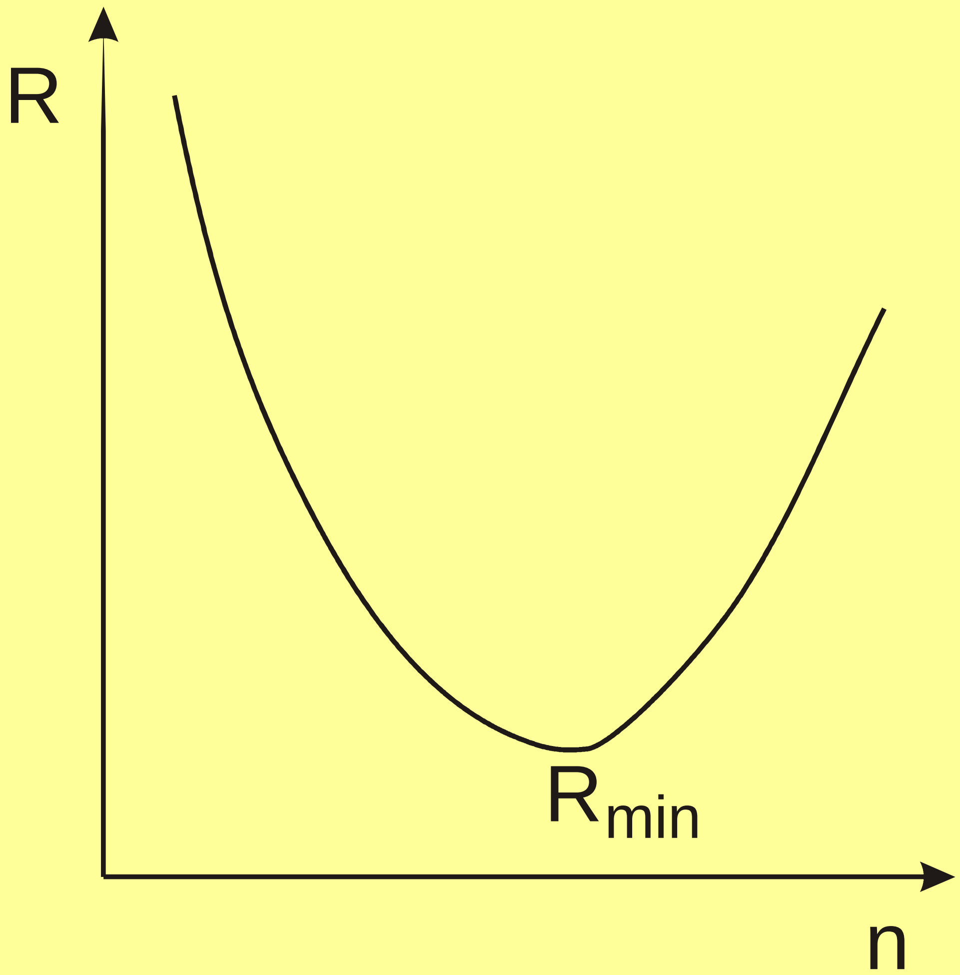
для методов прямоугольников и трапеции $Q = 1/3$

для формулы Симпсона $Q = 1/15$

Значение интеграла вычисляется для последовательных значений числа шагов $N = n_0, 2n_0, 4n_0, \ldots,$ где n_0 – начальное число шагов.

Процесс вычислений заканчивается, когда для очередного значения N будет выполнено условие $D_{2n}<e$, где e – заданная точность вычисления интеграла.

ПОГРЕШНОСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛА



Погрешность вычисления интеграла уменьшается при увеличении числа n за счет более точной аппроксимации подынтегральной функции, но при этом возрастает *погрешность суммирования* частичных интегралов J_i, которая начиная с некоторого значения $n_{опт}$ становится преобладающей