4.2.1. Производная и правила дифференцирования

1. Пусть функция $y=f(x)$ получила приращение $\Delta\ y\equiv f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$, соответствующее приращению аргумента $\Delta x=x-x_0$.

Определение. Если существует предел отношения приращения функции Δy к вызвавшему его приращению аргумента Δx, при Δx, стремящимся к нулю, т. е. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, то он называется производной функции $y=f(x)$ по независимой переменной x и обозначается y'_x, или f'_x, или $\dfrac{dy}{dx}$.

Функция, имеющая производную, называется дифференцируемой.

Задача 1. Используя определение, найти производные функций а) $y=x$, б) $y=\dfrac{2}{x}$.

Решение: а) Дадим аргументу x приращение Δx и найдем соответствующее значение функции $y(x+\Delta x)=x+\Delta x$, теперь найдем Δy

$\Delta y=x+\Delta x-x=\Delta x$ и составим отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\Delta x}{\Delta x}=1$.

Осталось вычислить $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=1$, $y'=(x)'=1$.

б) пусть аргумент x получил приращение Δx, новому значению аргумента соответствует значение функции $y(x+\Delta x)=\dfrac{2}{x+\Delta x}$.

Найдем приращение Δy. $\Delta y=\dfrac{2}{x+\Delta x}-\dfrac{2}{x}=-\dfrac{2\Delta x}{x(x+\Delta x)}$.

Тогда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{-2\Delta x}{x(x+\Delta x)\Delta x}=-\dfrac{2}{x^2}$, $y'=\left(\dfrac{2}{x}\right)'=2\left(x^{-1}\right)'=\dfrac{-2}{x^2}$.

Основные правила дифференцирования

Если C=const, а функции $U=U(x)$, $V=V(x)$ дифференцируемы, то

1. $(c)'=0$;
2. $(x)'=1$;
3. $(U\pm V)'=U'\pm V'$;
4. $(UV)'=U'V+V'U$;
5. $\left(\dfrac{U}{V}\right)'=\dfrac{U'V-V'U}{V^2}$;
6. $(CU)'=CU'$.

Таблица производных основных элементарных функций

1. $\left(x^n\right)'=nx^{n-1}$;

10. $(\mathrm{arcctg}x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$;

2. $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0;$

3. $(\sin x)' = \cos x$;

4. $(\cos x)' = -\sin x$;

5. $(\mathrm{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

6. $(\mathrm{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

7. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

8. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

9. $(\mathrm{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;

11. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;

12. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a} = \dfrac{\log_a e}{x}$;

13. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$;

14. $\left(e^x\right)' = e^x$;

15. $(\mathrm{sh} x)' = \mathrm{ch} x$;

16. $(\mathrm{ch} x)' = \mathrm{sh} x$;

17. $(\mathrm{th} x)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$;

18. $(\mathrm{cth} x)' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$.

Правило дифференцирования сложной функции

Если $y = f(U)$ и $U = \varphi(x)$, т. е. $y = f\left[\varphi(x)\right]$, где y и U имеют производные, то $y' = f'_u U'_x$. Здесь $u = u(x)$ – промежуточный аргумент. Это правило распространяется на цепочку из любого конечного числа дифференцируемых функций.

Задача 2. Найти производные функций:

а) $2x^3 + \dfrac{3}{x^2} - 6\sqrt[3]{x^5}$, б) $\left(x^5 - \ln x\right)^3$, в) $\left(\mathrm{arctg}\dfrac{x}{3}\right)^6$, г) $e^{-2x}\cos x \ln \sin x$.

Решение: а) представим функцию в табличной форме как сумму степенных функций и затем только найдем производную.

$$y = 2x^3 + 3x^{-2} - 6x^{5/3},$$

$$y' = 2\cdot 3\cdot x^2 + 3\left(-2x^{-3}\right) - 6\cdot\frac{5}{3}x^{2/3} = 6x^2 - \frac{6}{x^3} - 10\sqrt[3]{x^2}.$$

б) введем промежуточный аргумент и затем воспользуемся правилом дифференцирования сложной функции.

$$U = x^5 - \ln x,\ y = U^3,\ y' = 3U^2 \cdot U'_x = 3\left(x^5 - \ln x\right)^2 \cdot \left(5x^4 - \frac{1}{x}\right);$$

в) пусть $U(x) = \mathrm{arctg}\dfrac{x}{3}$, где $\dfrac{x}{3} = V(x)$, тогда $U(x) = \mathrm{arctg} V$,

$$U' = \frac{1}{1+V^2}\cdot V'_x = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{3}{9+x^2}.$$

Окончательно: $y = U^6$, $y' = 6U^5 \cdot U'_x = 6\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\right)^5 \cdot \frac{3}{9+x^2}$;

г) правило 4 можно распространить на любое число сомножителей, если перемножаемые функции дифференцируемы.

$y = U(x)\cdot V(x)\cdot Z(x)$, $\quad y' = U'\cdot V\cdot Z + U\cdot V'\cdot Z + U\cdot V\cdot Z'$, в данном случае

$U = e^{-2x}$, $U' = e^{-2x}(-2x)' = -2e^{-2x}$, $V = \cos x$, $V' = -\sin x$,

$Z = \ln\sin x$, $Z' = \frac{1}{\sin x}(\sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x}$,

$y' = e^{-2x}\left(-2\cos x\ln\sin x - \sin x\ln\sin x + \cos x\cdot\operatorname{ctg}x\right)$.

Дифференцирование сложной показательно-степенной функции $y = U^V$. Логарифмическое дифференцирование

Пусть $U(x)$ и $V(x)$ – дифференцируемые функции. Чтобы найти производную функции U^V предварительно прологарифмируем ее по основанию e: $\ln y = V\ln U$, теперь воспользуемся правилом 3 и 6

$$\frac{1}{y}y' = V'_x\cdot\ln U + V\cdot\frac{1}{U}\cdot U'_x,\ \text{откуда}\quad y' = U^V\cdot\left(V'\ln U + \frac{V}{U}U'\right) \qquad (1)$$

Задача 3. Найти производные функций а) $(12+x)^{\sin x}$, б) $\sqrt[x]{\operatorname{tg}^5 x}$

Решение: а) воспользуемся формулой (1): Пусть $U = 12+x$, $V = \sin x$, найдем $U' = 1$, $V' = \cos x$ и подставим в формулу (1):

$$y' = (12+x)^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln(12+x) + \frac{\sin x}{12+x}\cdot 1\right)$$

б) сначала прологарифмируем $\ln y = \frac{5}{x}\ln\operatorname{tg}x = 5x^{-1}\ln\operatorname{tg}x$. Дифференцируя левую и правую части равенства, получим:

$\frac{y'}{y} = 5\left(-x^{-2}\ln\operatorname{tg}x + x^{-1}\frac{1}{\operatorname{tg}x}\frac{1}{\cos^2 x}\right)$, теперь найдем y'

$$y' = \frac{5}{x^2}(\operatorname{tg}x)^{\frac{5}{x}}\left(-\ln\operatorname{tg}x + \frac{x}{\sin x\cdot\cos x}\right) = \sqrt[x]{\operatorname{tg}^5 x}\cdot\frac{5}{x^2}\left(\frac{2x}{\sin 2x} - \ln\operatorname{tg}x\right).$$

Метод, основанный на предварительном логарифмировании функции, не требует запоминания формулы и имеет более широкий спектр применения, в частности при дифференцировании большого количества сомножителей.

Задача 4. Найти производные функций:

а) $\ln \sqrt[12]{\dfrac{e^{8x}x^{16}}{x^4+8}}$, б) $\dfrac{(x-3)^3 \cdot e^{6x}}{(x+3)^2 \operatorname{tg}^5 x}$.

Решение: а) воспользуемся свойствами логарифмической функции:

$\ln a \cdot b = \ln a + \ln b$, $\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$, $\ln a^b = b \cdot \ln a$, $\ln e = 1$.

Итак, $\ln y = \dfrac{1}{12}\left(8x + 16\ln x - \ln\left(x^4+8\right)\right)$, $\dfrac{1}{y}y' = \dfrac{1}{12}\left(8 + \dfrac{16}{x} - \dfrac{4x^3}{x^4+8}\right)$,

$y' = \dfrac{1}{3}\ln\sqrt{\dfrac{e^{8x}x^{16}}{x^4+8}} \cdot \left(\dfrac{2x+4}{x} - \dfrac{x^3}{x^4+8}\right)$.

Дифференцирование функций, заданных параметрически

Если зависимость функции y и аргумента x задана посредством параметра t $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, то $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$, или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{d\psi}{dt}}{\dfrac{d\varphi}{dt}}. \tag{2}$$

Пример 1. Найти $\dfrac{dy}{dx}$, если $x = R\cos t$, $y = R\sin t$. Это параметрические уравнения окружности $x^2 + y^2 = R^2$ с центром в начале координат и радиуса R.

Решение. Находим $\dfrac{dx}{dt} = -R\sin t$ и $\dfrac{dy}{dt} = R\cos t$.

Отсюда $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{R\cos t}{-R\sin t} = -\operatorname{ctg} t$.

Пример 2. Найти $\dfrac{dy}{dx}$ от функции: $x = \cos 3t$, $y = \operatorname{tg}^2 3t$.

Решение: $x'_t = -3\sin 3t$, $y'_t = 2\operatorname{tg}3t \cdot \dfrac{3}{\cos^2 3t}$, теперь по формуле (3)

найдем $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2\operatorname{tg}3t}{-\cos^2 3t \cdot \sin 3t} = \dfrac{-2}{\cos^2 3t} = -2\sec^3 3t$.

4.2.2. Производная неявной функции

Пусть уравнение $F(x,y) = 0$ не разрешено относительно функции $y(x)$, т.е. функция $y(x)$ задана неявно. Чтобы найти производную y'_x, надо продифференцировать левую и правую часть уравнения, учитывая, что y есть функция аргумента x.

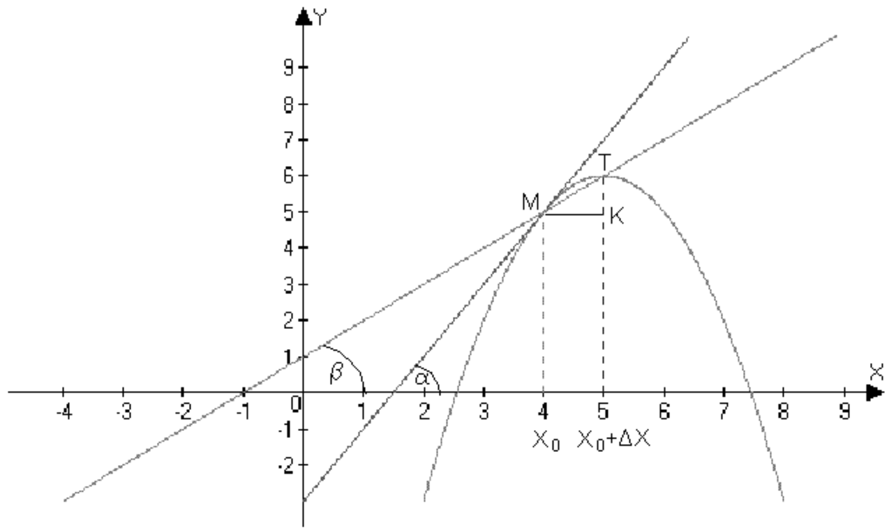
Рассмотрим это правило на примерах.

Пример 1. Найти y'_x, если а) $x^2 + y^2 = 1$, б) $\cos(x+y) = y^3$.

Решение: а) $2x + 2yy' = 0$, выразив y', получим $y' = -\frac{x}{y} . y'$;

б) дифференцируя обе части этого уравнения, получим уравнение относительно y': $-\sin(x+y)(x+y)'_x = 3y^2 y'_x$, $-\sin(x+y)(1+y'_x) = 3y^2 y'_x$; найдем теперь $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-\sin(x+y)}{3y^2 + \sin^2(x+y)}$.

Геометрический смысл производной



Здесь α – угол наклона касательной к графику функции $y = f(x)$ и точке $M(x_0, y_0)$. Через две точки $M(x_0, y_0)$ и $T(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ кривой $y = f(x)$ проведем секущую MT, ее угловой коэффициент $k_1 = \mathrm{tg}\beta = \frac{TK}{MK} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Двигая точку T по кривой к точке M, мы будем поворачивать секущую вокруг точки M, в результате секущая стремится занять положение касательной, проведенной к графику в точке, а угол β стремится к углу α – наклона касательной, т.е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \mathrm{tg}\alpha = k$,

где k – угловой коэффициент касательной. Известное уравнение прямой $y - y_0 = k(x - x_0)$ используем как уравнение касательной, проведенной к графику функции $f(x)$ в точке (x_0, y_0), с угловым коэффициентом $k = \operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$. Тогда $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ (1) – уравнение касательной.

Задача. Найти уравнение касательной к графику функции а) $y = 2\sin^4 2x$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{6}$, б) $x = t^4 - t + 3$, $y = t^6 - 4$ в точке $t = 1$.

Решение. а) Сначала вычислим ординату точки касания $y_0 = y(x_0) = 2\sin^4 \frac{\pi}{3} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 = \frac{9}{8}$. Затем производную в точке $x_0 = \frac{\pi}{6}$,
$y' = \left[8\sin^3 2x \cdot \cos 2x \cdot 2\right]_{x=\frac{\pi}{6}} = 3\sqrt{3}$. Это угловой коэффициент касательной.

Подставим найденные параметры в уравнение (1)

$$y - \frac{9}{8} = 3\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$ – искомая касательная;

б) кривая задана параметрически; найдем координаты точки касания, подставив значение параметра в уравнение кривой: $x_0 = 1 - 1 + 3 = 3$, $y_0 = 1 - 4 = 3$. Для отыскания углового коэффициента k воспользуемся формулой $\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{6t^5}{4t^3 - 1}$, $k = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{t=1} = \frac{6}{4-1} = 2$, теперь запишем уравнение касательной $y + 3 = 2(x - 3)$, или $2x - y - 9 = 0$.

4.2.3. Дифференциал функции и формула приближенного вычисления

Определение. Дифференциалом функции называется величина, пропорциональная бесконечно малому приращению аргумента Δx, отличающаяся от соответственного приращения функции Δy на величину более высокого порядка.

По определению производной: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$, откуда следует, что $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая при $\Delta x \to 0$, т. е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$, тогда $\Delta y = f'(x)\Delta x + \Delta x \cdot \alpha(\Delta x)$, где первое слагаемое и есть дифференциал

$$dy = f'(x)dx, \qquad \Delta x = dx,\ \Delta y \approx dy. \tag{4}$$

Определение дифференциала позволяет использовать его в приближенных вычислениях, заменив вычисление функции ее дифференциалом. Рассмотрим приращение функции: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, или $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta y$, тогда $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$. (5)

Это и есть формула приближенного вычисления. Ошибка, получаемая при приближенных вычислениях, есть бесконечно малая высшего порядка, чем приращение аргумента, т. к.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y-dy}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\cdot\alpha(\Delta x)}{\Delta x}=0.$$

Задача 1. Найти дифференциалы функций:

а) $\left(x^3+6x-1\right)^5$, б) $\operatorname{arctg}8x$, в) $6^{\arcsin x}$.

Решение: а) $dy=f'(x)dx$, найдем сначала $f'(x)=5\left(x^3+6x-1\right)^4\left(3x^2+6\right)$ и затем $dy=15\left(x^3+6x-1\right)^4\left(x^2+2\right)dx$;

б) $y'=\dfrac{1}{1+(8x)^2}(8x)'=\dfrac{8}{1+64x^2}$, $dy=\dfrac{8dx}{1+64x^2}$;

в) $y'=6^{\arcsin x}\ln 6(\arcsin x)'=6^{\arcsin x}\dfrac{\ln 6}{\sqrt{1-x^2}}$, $dy=\dfrac{6^{\arcsin x}\ln 6}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

Задача 2. Найти приращение и дифференциал функции $y=x^2-x$ при $x=1$ и $\Delta x=0{,}1$. Вычислить абсолютную и относительную ошибки, которые получаются при замене приращения функции ее дифференциалом.

Решение $y+\Delta y=y(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^2-(x+\Delta x)$, $\Delta y=y(x+\Delta x)-y(x)=$
$=x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2-x-\Delta x-x^2+x=\left[2x\Delta x+(\Delta x)^2-\Delta x\right]_{x=1,\Delta x=0{,}1}=0{,}11;$

$dy=\left(x^2-x\right)'dx=(2x-1)dx,\quad [dy]_{x=1,\Delta x=0{,}1}=0{,}1.$

Абсолютная ошибка $|\Delta y-dy|=|0{,}11-0{,}1|=0{,}01$, относительная ошибка

$\dfrac{|\Delta y-dy|}{\Delta y}\cdot 100\%=\dfrac{0{,}01}{0{,}11}\cdot 100\%\approx 9\%$.

Задача 3. Вычислить приближенно а) $\operatorname{ctg}44°$, б) $\sqrt{10}$.

Решение. Чтобы воспользоваться формулой (3) надо составить функцию $y=f(x)$ (по виду вычисляемого выражения) и выбрать начальные условия так, чтобы Δx было мало, а $f(x_0)$ можно было легко подсчитать. В случае а) выбираем $y=\operatorname{ctg}x$, $x_0=45°$,

$$\Delta x=x-x_0=44°-45°=-1°=-\frac{\pi}{180}\approx-\frac{3{,}142}{180},\quad f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x.$$

$f'(x)=(\operatorname{ctg}x)'=\left[\dfrac{-1}{\sin^2 x}\right]_{x=x_0}=-\left(\sqrt{2}\right)^2=-2,\qquad f(x_0)=\operatorname{ctg}45°=1,$

$\operatorname{ctg}44°\approx 1+2\cdot\dfrac{\pi}{180}\approx 1+\dfrac{3{,}142}{90}\approx 1{,}035;$

б) чтобы Δx было мало, необходимо извлечь целую часть корня, т. е. $\sqrt{10} = \sqrt{1+9} = \sqrt{9\left(1+\frac{1}{9}\right)} = 3\sqrt{1+\frac{1}{9}}$, откуда $x_0 = 1$, $\Delta x = \dfrac{1}{9}$, $f(x) = 3\sqrt{x}$,

$f(x_0) = 3$, $f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{x}}$, $f'(x_0) = \dfrac{3}{2}$, теперь вычислим приближенно $\sqrt{10}$:

$\sqrt{10} = 3\sqrt{1+\frac{1}{9}} \approx 3 + \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{9} \approx \dfrac{19}{6} = 3{,}1(6) \approx 3{,}17$.

4.2.4. Производные и дифференциалы высших порядков

Определение 1. Производной второго порядка от функции $f(x)$ называется производная от производной первого порядка и обозначается символом y'' или f'', или $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$.

Пример. $y = \sin^2 5x$, $y' = 2\sin 5x \cdot \cos 5x \cdot 5 = 5\sin 10x$, $y'' = 50\cos 10x$.

Определение 2. Производной n-го порядка называется производная первого порядка от производной $(n-1)$-го порядка и обозначается $y^{(n)}$ или $f^{(n)}(x)$, или $\dfrac{d^n y}{dx^n}$.

Пример. $y = \ln(x+3)$. Найти $y^{(n)}(x)$.

$y' = \dfrac{1}{x+3} = (x+3)^{-1}$, $y'' = -(x+3)^{-2}$, $y''' = 1\cdot 2\cdot (x+3)^{-3} = 2!\,(x+3)^{-3}$,

$y^{(4)} = -3!\,(x+3)^{-4}$, используя метод математической индукции, запишем формулу производной n-го порядка $y^{(n)} = (-1)^{n-1}(x+3)^{-n}(n-1)!$

Определение 3. Дифференциалом высшего порядка функции называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка:

$d^n y = d\left(d^{n-1} y\right) = y^{(n)} dx^n$, в частности $d^2 y = d(dy) = d(y' dx) = d(y')dx = = y'' dx^2$, здесь $dx = \text{const}$.

Пример: $y = \operatorname{arctg} 2x$. Найти $d^2 y$.

$y' = \dfrac{1}{1+4x^2}\cdot 2$, $y'' = -1\cdot 2\left(1+4x^2\right)^{-2} 2\cdot 4x = -\dfrac{16x}{\left(1+4x^2\right)^2}$;

Тогда $$d^2 y = -\frac{16x}{\left(1+4x^2\right)^2} dx^2.$$

Производная второго порядка от функции, заданной параметрически.

Если $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, то производные $y'_x = \dfrac{dy}{dx}$, $y''_{xx} = \dfrac{d^2y}{dx^2}$, последовательно могут быть вычислены по формулам:

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t},\ \ y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t},\ y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t} \text{ и т. д.}$$

Для производной второго порядка имеет место формула

$$y''_{xx} = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_x = \frac{y''_{tt} \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_{tt}}{(x'_t)^2}.$$

Пример. Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ от функции $\begin{cases} x = t + \ln\cos t \\ y = t - \ln\sin t \end{cases}$

Решение. Найдем сначала $x'_t = 1 - \dfrac{\sin t}{\cos t} = 1 - \operatorname{tg} t$, $y'_t = 1 - \operatorname{ctg} t = 1 - \dfrac{1}{\operatorname{tg} t}$,

тогда $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 - \operatorname{ctg} t}{1 - \operatorname{tg} t} = -\operatorname{ctg} t$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{(-\operatorname{ctg} t)'_t}{x'_t} = \dfrac{1}{\sin^2 t \cdot (1 - \operatorname{tg} t)}$.

4.2.5. Правило Лопиталя. Раскрытие неопределенностей при вычислении пределов

Теорема. Предел отношения двух бесконечно малых или двух бесконечно больших существует и равен пределу отношения их производных:

$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, если выполняются условия:

1) функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы в некоторой окрестности точки a и $\varphi(x) \neq 0$ в этой окрестности.

2) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0$ (или $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \infty$).

3) существует $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ конечный или бесконечный.

Здесь a может быть числом или одним из символов: $+\infty, -\infty, \infty$.

Задача 1. Вычислить пределы: а) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x - \pi}$, б) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{x^2}$.

Решение. а) Подставив предельное значение аргумента $x = \pi$, получаем неопределенность $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$, т.к. $\operatorname{tg}\pi = 0$, $\pi - \pi = 0$ и функции дифференцируемы.

Найдем $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\mathrm{tg}x}{x-\pi}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{(\mathrm{tg}x)'}{(x-\pi)'}=\dfrac{1}{\cos^2\pi}=1$.

б) При $x\to\infty$ имеем неопределенность $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$. Применим правило Лопиталя: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^2}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(e^x\right)'}{\left(x^2\right)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{2x}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$. Полученный предел снова представляет неопределенность вида $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$, применяя еще раз правило Лопиталя, найдем $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{2}=\infty$.

Другие виды неопределенностей $\{\infty-\infty\}$, $\{0\cdot\infty\}$, $\left\{1^\infty\right\}$, $\left\{0^0\right\}$ можно свести к виду $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ или $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$.

Задача 2. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(\mathrm{ctg}x-\dfrac{1}{x}\right)$.

Решение. Подставим предельное значение аргумента, получим неопределенность $\{\infty-\infty\}$, которая легко сводится к частному:

$$\lim_{x\to 0}\left(\mathrm{ctg}x-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\mathrm{tg}x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\mathrm{tg}x}{x\cdot\mathrm{tg}x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-1/\cos^2 x}{\mathrm{tg}x+x/\cos^2 x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{\cos^2 x\cdot\mathrm{tg}x+x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{\sin x\cdot\cos x+x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin x\cdot\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x+1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\cos x}=0.$$

4.2.6. Возрастание, убывание функции. Точки экстремума

Определение 1. Функция $f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на некотором промежутке $[a,b]$, если для любых $x_1<x_2$ этого промежутка $f(x_1)<f(x_2)$ ($f(x_1)>f(x_2)$).

Функция возрастающая (убывающая) называется монотонной.

Теорема 1. (Условие монотонности)

Если функция $f(x)$ 1) определена на $[a,b]$, 2) имеет конечную производную $f'(x)$ на (a,b), тогда, чтобы $f(x)$ была возрастающей (убывающей) на $[a,b]$, необходимо и достаточно, чтобы $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$).

Задача 1. Найти интервалы монотонности функции $y = 3x - x^3$.

Решение. Область определения функции $D(f) = (-\infty, \infty)$, $f(x)$ дифференцируема всюду в области определения: $f'(x) = 3 - 3x^2$.

Решим неравенство $f'(x) > 0 \Rightarrow 3 - 3x^2 > 0$, $3(1 - x^2) > 0$,

$|x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$ -это интервал возрастания функции.

Соответственно неравенство $3 - 3x^2 < 0$ справедливо для всех $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ – область убывания функции.

Определение 2. Точка x_0 называется точкой локального максимума (минимума), если в некоторой ее окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$) для всех x этой окрестности.

Теорема 2. (Необходимое условие существования экстремума)

Если $f(x)$ 1) определена в окрестности точки x_0, 2) дифференцируема в точке x_0 и 3) имеет в ней локальный экстремум, то $f'(x_0) = 0$.

Точки, в которых производная $f'(x) = 0$ называются критическими.

Замечание. Функция может иметь экстремум и в точках, где первая производная не существует. Например: $y = \begin{cases} \ln x, & x \geq 1, \\ -\ln x, & x < 1 \end{cases}$ Функция непрерывна в точке $x = 1$, но не дифференцируема т. к. $\lim\limits_{x \to 1+0} y' = \lim\limits_{x \to 1+0} \frac{1}{x} = 1$, $\lim\limits_{x \to 1-0} y' = -1$ односторонние пределы не равны, значит, $y'(x)$ не существует в точке $x = 1$, но функция имеет минимум.

Теорема 3. (Достаточное условие экстремума)

Если функция $f(x)$: 1) непрерывна в точке x_0, 2) дифференцируема в некоторой области $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, 3) $f'(x_0) = 0$ либо не существует и 4) при переходе через точку x_0 производная меняет знак, то x_0 – точка экстремума, причем, если производная слева от x_0 отрицательна, а справа положительна, то x_0 – точка минимума; если слева от x_0 производная положительна (функция возрастает) а справа отрицательна (функция убывает), то x_0 – точка максимума.

Замечание: в промежутке между критическими точками производная сохраняет знак, следовательно, это промежутки монотонности.

Теорема 4. (Исследование на экстремум с помощью второй производной или второе достаточное условие экстремума).

Если 1) в точке x_0 функция $f(x)$ дифференцируема и $f'(x_0) = 0$, 2) существует вторая производная, 3) $f''(x_0) \neq 0$ в окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, то при $f''(x_0) > 0$ функция имеет минимум, а при $f''(x_0) < 0$ – максимум.

Итак, при исследовании функции на экстремум необходимо пользоваться правилами:

1. Найти первую производную $y' = f'(x)$
2. Найти критические точки x_i, решив уравнения $y' = 0$ и $y' = \infty$.
3. Проверить, меняет ли знак первая производная при переходе через точку x_i или установить знак второй производной $f''(x_i)$, классифицировать экстремум.
4. Найти значение функции в экстремальных точках.

Задача. Исследовать на экстремум функцию $y = \frac{1}{x}\ln x$.

Решение. Область определения $D(f) = (0, \infty)$; $y' = \frac{1}{x^2} \cdot (1 - \ln x)$,

$y' = 0$, $\ln x = 1$, $x_1 = e$, $y' = \infty$ при $x = 0$. Это значение x не принадлежит области определения функции. Значит, $x = e$ – единственная критическая точка. Проверим знак первой производной слева и справа от нее.

При $x < e$, $f'(x) = \frac{1}{x^2}(1 - \ln x) > 0$, функция возрастает, при $x > e$, $f'(x) < 0$ функция убывает, значит $x = e$ – точка максимума, $y(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$ – максимальное значение функции.

Наибольшее и наименьшее значение функции.

Теорема Вейерштрасса. Если функция непрерывна на замкнутом промежутке $[a, b]$, то она достигает на нем наибольшее и наименьшее значения. Эти значения находятся либо на концах промежутка, либо в экстремальных точках.

Правило отыскания наибольшего и наименьшего значения функции

1. Найти первую производную и все критические точки x_i, принадлежащие $[a, b]$.
2. Вычислить значения $f(x_i)$.
3. Вычислить значения функции на концах промежутка.
4. Сравнить все полученные значения функции $f(x_i)$, $f(a)$, $f(b)$ и выбрать среди них наибольшее и наименьшее.

Задача. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 12x + 7$ на промежутке $[-3, 0]$.

Решение. Необходимое условие экстремума $y' = 0$, поэтому $3x^2 - 12 = 0$, а корни уравнения $x = \pm 2$ являются критическими точками, но промежутку принадлежит только $x=-2$. Найдем теперь $y(-2)=23$ и на концах промежутка $y(-3)=16$ и $y(0)=7$. Среди них самое большое 23, самое меньшее 7.

4.2.7. Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба

Пусть кривая задана функцией $y=f(x)$.

Определение 1. Кривая называется выпуклой вверх (вниз) на отрезке $[a,b]$, если все точки кривой находятся ниже (выше) любой касательной к графику функции.

Определение 2. Точка $M_0(x_0,y_0)$, отделяющая вогнутую часть от выпуклой, называется точкой перегиба графика функции $f(x)$.

Теорема. Если функция $f(x)$ дважды дифференцируема на некотором промежутке, причем $f''(x)<0$ для любого x из этого промежутка, то на этом промежутке график функции выпуклый, если $f''(x)>0$, то график вогнутый.

Из теоремы следует, что для нахождения промежутков (выпуклости) вогнутости надо найти вторую производную функции и определить промежутки, где она положительна (отрицательна). Необходимым условием существования точки перегиба является обращение в нуль второй производной или ее отсутствие в точке x_0, то есть условие $f''(x_0)=0$ или $f''(x_0)=\infty$. В случае выполнения одного из этих условий точка x_0 называется критической точкой второго рода.

Достаточным условием того, что точка M_0- точка перегиба является смена знака второй производной при переходе через критические точки второго рода.

Правило нахождения интервалов выпуклости, вогнутости и точек перегиба функции.

1. Указать область определения функции.
2. Найти критические точки второго рода, принадлежащие области определения функции.
3. Определить знак второй производной в каждом интервале области определения между соседними критическими точками.
4. По знаку $f''(x)$ установить интервалы выпуклости, вогнутости и по смене знака второй производной в окрестности точки – наличие или отсутствие точки перегиба.

4.2.8. Асимптоты графика функции

Определение. Асимптотой графика функции называется прямая, к которой неограниченно приближается график функции при $x\to\infty$ или $y\to\infty$. Различают вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты.

1. Вертикальные асимптоты. Прямая $x=a$ называется вертикальной асимптотой, если при $x\to a$ хотя бы один из односторонних пределов в точ-

ке $x=a$ бесконечен, т.е. $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\pm\infty$ или $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\pm\infty$ т. е. в точке $x=a$ функция терпит разрыв второго рода.

Задача. Найти вертикальные асимптоты функции $y=\dfrac{1}{x^2-1}$.

Решение. При $x=-1$ и $x=1$ функция не определена. Найдем односторонние пределы $f(x)$ при $x\to\pm1$.

$$\lim_{x\to-1-0}\frac{1}{x^2-1}=\infty,\quad \lim_{x\to-1+0}\frac{1}{x^2-1}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to1-0}\frac{1}{x^2-1}=-\infty,\quad \lim_{x\to1+0}\frac{1}{x^2-1}=+\infty;$$

Следовательно, $x=1$, $x=-1$ вертикальные асимптоты графика.

Наклонные и горизонтальные асимптоты

<u>Определение.</u> Прямая $y=kx+b$ называется наклонной асимптотой графика функции $y=f(x)$ при $x\to\pm\infty$,если эту функцию можно представить в виде $f(x)=kx+b+\alpha(x)$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\alpha(x)=0$, т. е. разность между ординатами точек кривой и асимптоты при $x\to\pm\infty$ есть бесконечно малая величина.

<u>Теорема.</u> Для того, чтобы график функции имел наклонную асимптоту, необходимо и достаточно, чтобы имели место соотношения:

$k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right]$, причем эти пределы могут быть неравными при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$. Если $k=0$, $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$, получаем горизонтальную асимптоту $y=b$. Таким образом, прямая $y=b$ является горизонтальной асимптотой кривой $y=f(x)$, если $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=b$.

Задача 2. Найти асимптоты графика функции $y=\dfrac{x^2}{x-1}$.

Решение. $D(f)=(\infty,1)\cup(1,\infty)$. Вычислим

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(x-1)\cdot x}=$$

$$=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x(1-1/x)}=1,\ k=1.$$

Найдем b: $$b=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{x-1}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2+x}{x-1}=1.$$

Получим уравнение асимптоты $y=x+1$; убедимся, что утверждение теоремы выполняется. Преобразуем функцию, выделив целую часть.

$$f(x)=\frac{x^2}{x-1}=\frac{x^2-1+1}{x-1}=x+1+\frac{1}{x-1}, \text{ где } \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x-1}=0\ ,\ f(x)=x+1+\alpha(x)$$

Кроме того, функция имеет вертикальную асимптоту $x=1$, т. к.

$$\lim_{x\to1-0} f(x)=\lim_{x\to1-0}\frac{x^2}{x-1}=\left\{-\frac{1}{0}\right\}=-\infty,\quad \lim_{x\to1+0}\frac{x^2}{x-1}=\left\{+\frac{1}{0}\right\}=+\infty.$$

Задача 3. Найти асимптоты графика функции $y=e^{1/(2-x)}$.

Решение. Найдем $D(f)=(-\infty,2)\cup(2,\infty)$. При $x=2$ функция $y=e^{1/(2-x)}$ терпит разрыв второго порядка, т. к.

$$\lim_{x\to2+0} e^{1/(2-x)}=e^{-1/0}=e^{-\infty}=0,\quad \lim_{x\to2-0} e^{1/(2-x)}=e^{1/0}=e^{\infty}=\infty\cdot$$

Таким образом, $x=2$ является вертикальной асимптотой.

Найдем горизонтальные асимптоты.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{1/(2-x)}=e^{1/(\infty)}=e^0=1$, следовательно, $y=1$ является горизонтальной асимптотой.

4.2.9. Общая схема исследования функции

1. Найти область определения функции, исследовать ее поведение на границах области определения.
2. Найти точки разрыва и установить их характер с помощью односторонних пределов.
3. Исследовать периодичность, четность (нечетность), найти точки пересечения графика с осями координат.
4. Найти интервалы монотонности и экстремумы функции.
5. Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции.
6. Найти асимптоты графика.
7. Построить график, используя результаты исследования.

Задача 4. Провести полное исследование и построить график функции

$$y=x+\frac{2x}{x^2-1}.$$

1. Найдем область определения $D(f)$. из условия $x^2-1\neq0$, $x\neq1, x\neq-1$, следовательно,

2. $x_1=1,\ x_2=-1$ – точки разрыва. Найдем односторонние пределы:

$$\lim_{x\to-1-0}\left(x+\frac{2x}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to-1+0}\frac{x\left(x^2+1\right)}{x^2-1}=-\infty,\quad \lim_{x\to-1+0}\frac{x(x^2+1)}{x^2-1}=\infty,$$

$$\lim_{x\to1-0}\left(x+\frac{2x}{x^{2-1}}\right)=1+\frac{2}{-0}=1-\infty=-\infty,\quad \lim_{x\to1+0}\left(x+\frac{2x}{x^2-1}\right)=1+\frac{2}{0}=\infty.$$

Отсюда следует, что $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$ – точки разрыва второго рода, и $x = \pm 1$ – вертикальные асимптоты.

3. Для установления симметрии графика функции найдем $f(-x) = -x + \dfrac{2(-x)}{(-x)^2 - 1} = -x - \dfrac{2x}{x^2 - 1} = -\left(x + \dfrac{2x}{x^2 - 1}\right) = -f(x)$, это означает, что $f(x)$ – нечетная функция, и ее график симметричен относительно начала координат. Достаточно провести ее исследование для $x \geq 0$. Очевидно, что функция не является периодической. Точка О (0,0) является единственной точкой пересечения с осями координат, т.к. $f(0) = 0$.

4. Первая производная: $y' = 1 + 2\dfrac{x^2 - 1 - 2x^2}{\left(x^2 - 1\right)^2} = 1 - \dfrac{2\left(x^2 + 1\right)}{(x^2 - 1)^2}$,

Критические точки найдем из условий $y' = 0$, $y' = \infty$.

а) $1 - \dfrac{2(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2} = 0$, $\dfrac{x^4 - 4x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2} = 0$, $x^4 - 4x^2 - 1 = 0$, $x^2 - 1 \neq 0$.

Решая биквадратное уравнение, найдем $x1, x2 \cong \pm 2{,}05$.

б) $1 - \dfrac{2(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2} = \infty$, $x^4 - 4x^2 - 1 \neq 0$, $x^2 - 1 = 0$, $x3, x4 = \pm 1$.

Таким образом, критические точки функции: $x1 = \sqrt{4{,}236} \neq 2{,}05$, $x2 = -\sqrt{4{,}326} \approx -2{,}05$, а точки $x3, x4 = \pm 1$ не входят в область определения, следовательно, не являются критическими точками. Проверим критические точки на экстремум по первому признаку.

$y' = \dfrac{x^4 - 4x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2} < 0$, при $0 < x < 2{,}05$, $y' = \dfrac{x^4 - 4x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2} > 0$, при $x > 2{,}05$

Так как производная меняет знак при переходе через критическую точку, то в точке $x = 2{,}05$ функция имеет минимум. Составим таблицу.

x	0	(0, 1)	1	(1; 2.05)	2,05	(2,05, ∞)
$f(x)$	0	$\downarrow$	не сущ.	$\downarrow$	(min) 3,4	$\uparrow$
$f'(x)$	0	–	не сущ.	–	0	+

5. Найдем $y'' = \left(1 - 2\dfrac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}\right)' = \dfrac{4x(x^2 + 3)}{(x^2 + 3)^3}$. Критические точки второго рода найдем из условия $y'' = 0$, $4x(x^2 + 3) = 0$, $x1 = 0$; при $(x^2 - 1)^3 = 0$,откуда $x = \pm 1$. Так как $x = \pm 1$ не входят в область определения

функции, то $x=0$ единственная критическая точка. Проверим знак второй производной при переходе через точку $x=0$ $y''>0$ при $x<0$,
$y''<0$ при $x>0$. y'' меняет знак с «+» на «–», значит, $x=0$ – точка перегиба, и график меняет вогнутость на выпуклость при переходе через критическую точку. Итак, в (0, 1) функция выпукла, а в $(1,\infty)$ – вогнута.

6. Найдем асимптоты. Наклонные асимптоты имеют вид: $y=kx+b$;

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}\cdot\left(x+\frac{2x}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)=1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left(x+\frac{2x}{x^2-1}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{x^2-1}=0, b=0,$$

отсюда уравнение наклонной асимптоты $y=x$. Горизонтальные асимптоты отсутствуют, а вертикальные были найдены в п. 2.

7. По результатам исследования построим график. Так как функция нечетная, то можно построить график для $x>0$ и отобразить его симметрично начала координат.