Непрерывность функций.

Непрерывность функции в точке

Односторонние пределы.

Определение. Число A называется пределом функции $f(x)$ слева при стремлении x к a, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $x \in (a-\delta; a)$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Обозначают это так:

$\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = A$ или $f(a-0) = A$.

Аналогично определяется предел функции $f(x)$ справа.

Определение. Число A называется пределом функции $f(x)$ справа при стремлении x к a, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $x \in (a; a+\delta)$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Обозначают это так:

$\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A$ или $f(a+0) = A$.

Непрерывность функций

Определение *1.* Функция $y = f(x)$ с областью определения D называется непрерывной в точке x_0, если выполнены следующие условия:

1) функция $y = f(x)$ определена в точке x_0, т.е. $x_0 \in D$;
2) существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;
3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Условие пункта 2 эквивалентно существованию равных односторонних пределов функции $f(x)$ в точке x_0, т.е.

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x_0).$$

Если в точке x_0 нарушено хотя бы одно из условий 1−3, то точка x_0 называется точкой разрыва функции $y = f(x)$.

Можно дать еще одно определение непрерывности функции, опираясь на понятия приращения аргумента и функции.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некотором интервале (a,b). Возьмем произвольную точку $x_0 \in (a,b)$. Для любого $x_0 \in (a,b)$ разность $x - x_0$ называется приращением аргумента x в точке x_0 и обозначается Δx («дельта x;»): $\Delta x = x - x_0$. Отсюда $x = x_0 + \Delta x$.

Разность соответствующих значений функций $f(x) - f(x_0)$ называется приращением функции $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначается Δy (или Δf или $\Delta f(x_0)$): $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ или $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ (см. рис.47).

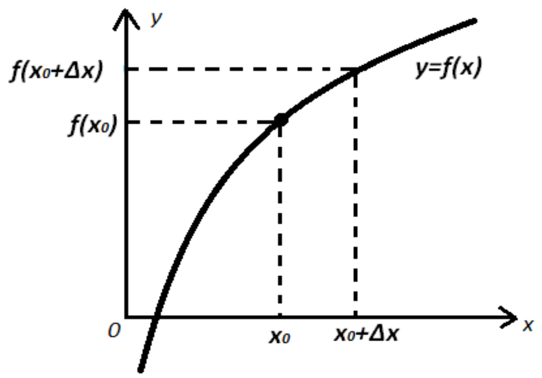


Рис. 47.

Очевидно, приращения Δx и Δy могут быть как положительными, так и отрицательными числами.

Определение. Запишем равенство

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad (1),$$

в новых обозначениях.

Так как $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0, \quad \lim\limits_{x \to x_0}(f(x) - f(x_0)) = 0$,

$x \to x_0$, $x - x_0 \to 0$ то равенство принимает вид или

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0. \qquad (2)$$

Полученное равенство является еще одним определением непрерывности функции в точке: функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если она определена в точке x_0 и ее окрестности и выполняется равенство (2), т. е. бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Исследуя непрерывность функции в точке, применяют либо первое определение (равенство (1)), либо второе (равенство (2)).

Пример. Исследовать на непрерывность функцию $y = \sin x$.

Решение: Функция $y = \sin x$ определена при всех $x \in \mathbb{R}$. Возьмем произвольную точку x и найдем приращение Δy:

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\frac{\Delta x}{2}.$$

Тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\frac{\Delta x}{2} = 0$, так как произведение ограниченной функции и б.м.ф. есть б.м.ф.

Согласно определению (3), функция $y = \sin x$ непрерывна в точке x.

Аналогично доказывается, что функция $y = \cos x$; также непрерывна.

Непрерывность функции в интервале и на отрезке

Определение. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в интервале (a,b), если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной на отрезке $[a,b]$, если она непрерывна в интервале (a,b) и в точке $x = a$ непрерывна справа (т.е. $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a)$), а в точке $x = b$ непрерывна слева (т. е. $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = f(b)$.

При исследовании функции на непрерывность пользуются следующей **теоремой:**

Всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке, в которой она определена.

Точки разрыва функции и их классификация

Определение. Если функция $y = f(x)$ непрерывна в каждой точке некоторого интервала (a,b), где $a < b$, то говорят, что функция непрерывна на этом интервале.

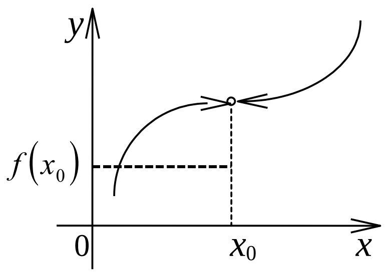
Следовательно, функция может иметь разрыв в точках, где она меняет способ своего задания или не определена.

Существуют следующие виды точек разрыва.

1. Если в точке x_0 существует конечный предел функции $f(x)$, но он не равен значению функции в этой точке, т.е.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0),$$

то такая точка называется точкой разрыва I рода (устранимый разрыв).

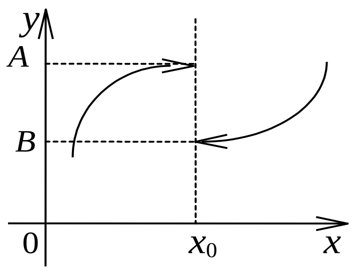


2. Точка x_0 называется точкой разрыва I рода (точка скачка) функции $f(x)$, если в этой точке существуют конечные односторонние пределы функции

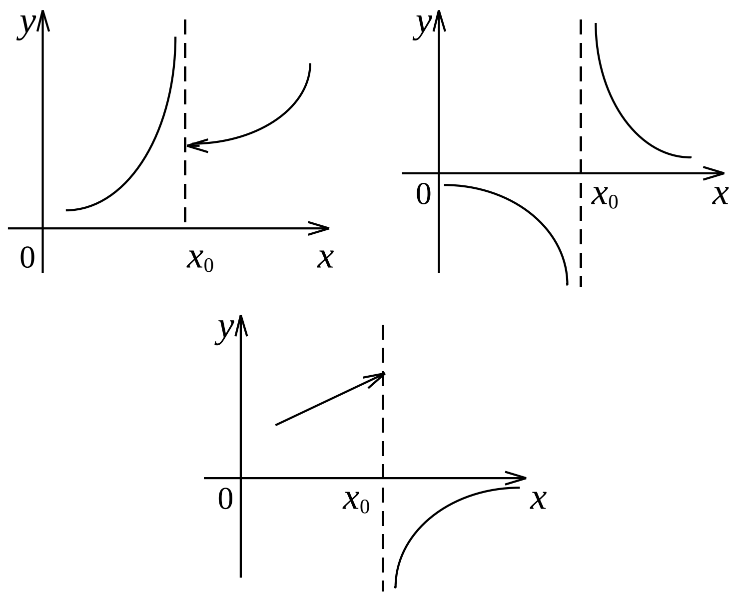
$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A,$$

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = B, \quad (A, B - \text{const}),$$

но они не равны между собой.



3.Точка x_0 называется точкой разрыва II рода или точкой бесконечного разрыва, если хотя бы один из односторонних пределов функции $f(x)$ в точке x_0 равен бесконечности $(\pm\infty)$.



Пример. Исследовать функции на непрерывность, найти точки разрыва и определить их тип:

а) $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{2}x^2 & \text{при} \quad x\le 2, \\ x, & \text{при} \quad x>2. \end{cases}$,

Данная функция определена на всей числовой оси. Она задана двумя различными формулами для интервалов $(-\infty;2]$ и $(2,+\infty)$ и может иметь разрыв в точке $x_0=2$, где меняется способ ее задания. Найдем односторонние пределы в точке $x_0=2$:

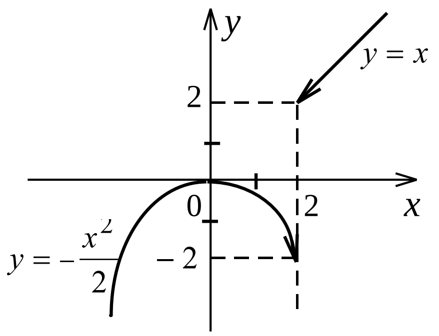
$$\lim_{x\to 2-0} f(x)=\lim_{x\to 2-0}\left(-\frac{1}{2}x^2\right)=-\frac{1}{2}\cdot 2^2=-2,$$

так как слева от точки $x_0=2$ функция $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2$,

$$\lim_{x\to 2+0} f(x)=\lim_{x\to 2+0} x=2,$$

так как справа от точки $x_0=2$ функция $f(x)=x$.

Таким образом, в точке $x_0=2$ функция $f(x)$ имеет конечные односторонние пределы, но они не равны между собой $-2\ne 2$. Следовательно, $x_0=2$ - точка разрыва I рода (точка скачка). Во всех остальных точках числовой оси данная функция непрерывна, так как формулы, которыми она задана определяют элементарные непрерывные функции. Построим график этой функции.



б) $y=\dfrac{1}{x^2-25}$

Функция y определена для всех значений кроме $x_1=5$ и $x_2=-5$. Эта функция элементарная, значит, она непрерывна во всей области своего определения $D(y)=(-\infty;-5)\cup(-5;5)\cup(5;+\infty)$. В точках $x_1=5$ и $x_2=-5$ функция y имеет разрывы, так как нарушается первое условие непрерывности. Чтобы определить характер разрыва в этих точках, найдем односторонние пределы

$$\lim_{x\to5-0}\frac{1}{x^2-25}=\lim_{x\to5-0}\frac{1}{(x-5)(x+5)}=\frac{1}{(5-0-5)(5-0+5)}=\left(\frac{1}{-0\cdot10}\right)=\left(\frac{1}{-0}\right)=-\infty,$$

$$\lim_{x\to5+0}\frac{1}{x^2-25}=\lim_{x\to5+0}\frac{1}{(x-5)(x+5)}=\frac{1}{(5+0-5)(5+0+5)}=\left(\frac{1}{+0\cdot10}\right)=\left(\frac{1}{+0}\right)=+\infty,$$

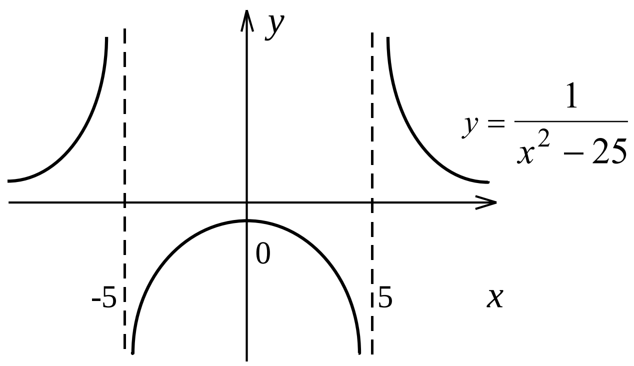
$$\lim_{x\to-5-0}\frac{1}{x^2-25}=\lim_{x\to-5-0}\frac{1}{(x-5)(x+5)}=\frac{1}{(-5-0-5)(-5-0+5)}=\left(\frac{1}{-10\cdot(-0)}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{+0}\right)=+\infty,$$

$$\lim_{x\to-5+0}\frac{1}{x^2-25}=\lim_{x\to-5+0}\frac{1}{(x-5)(x+5)}=\frac{1}{(-5+0-5)(-5+0+5)}=\left(\frac{1}{-10\cdot(+0)}\right)=$$

$$\left(\frac{1}{-0}\right)=-\infty.$$

Поскольку все односторонние пределы равны бесконечности, функция $y=\dfrac{1}{x^2-25}$ терпит в точках $x_1=5$ и $x_2=-5$ разрывы II рода. Построим график функции



в) $y = 3 + e^{1/(2x+1)}$.

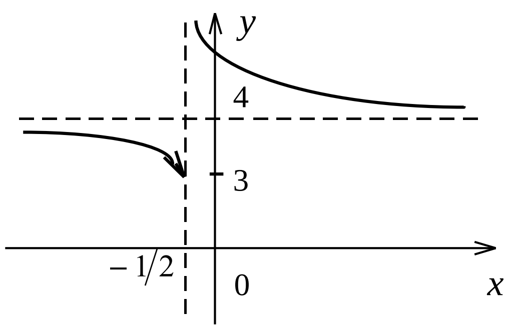
Функция определена и непрерывна на всей числовой оси, кроме точки $x_0 = -1/2$. Из этого следует, что в точке $x_0 = -1/2$ функция y имеет разрыв. Найдем односторонние пределы

$$\lim_{x \to -1/2-0}\left(3 + e^{\frac{1}{2x+1}}\right) = \left(3 + e^{\frac{1}{2\cdot(-1/2-0)+1}}\right) = \left(3 + e^{\frac{1}{-0}}\right) = \left(3 + e^{-\infty}\right) =$$

$$= \left(3 + \frac{1}{e^{\infty}}\right) = \left(3 + \frac{1}{\infty}\right) = (3 + 0) = 3,$$

$$\lim_{x \to -1/2+0}\left(3 + e^{\frac{1}{2x+1}}\right) = \left(3 + e^{\frac{1}{2\cdot(-1/2+0)+1}}\right) = \left(3 + e^{\frac{1}{+0}}\right) = (3 + \infty) = \infty.$$

Так как предел справа в точке $x_0 = -1/2$ равен бесконечности, заключаем, что x_0 – точка разрыва II рода. Построим график функции $y = 3 + e^{1/(2x+1)}$



Основные теоремы о непрерывных функциях. Непрерывность элементарных функций

Теоремы о непрерывности функций следуют непосредственно из соответствующих теорем о пределах.

Теорема 1. Сумма, произведение и частное двух непрерывных функций есть функция непрерывная (для частного за исключением тех значений аргумента, в которых делитель равен нулю).

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на некотором множестве X и x_0 – любое значение из этого множества. Докажем, например, непрерывность произведения $F(X) = f(x)\cdot\varphi(x)$. Применяя теорему о пределе произведения, получим:

$$\lim_{x\to x_0} F(x) = \lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot\varphi(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}\varphi(x) = f(x_0)\cdot\varphi(x_0) = F(x_0).$$

Итак, $\lim\limits_{x\to x_0} F(x) = F(x_0)$, что и доказывает непрерывность функции $f(x)\cdot\varphi(x)$ в точке x_0.

Теорема 2. Пусть функции $u=\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $y = f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = \varphi(x_0)$. Тогда сложная функция $f\left(\varphi(x)\right)$, состоящая из непрерывных функций, непрерывна в точке x_0.

Доказательство. В силу непрерывности функции $u=\varphi(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = \varphi(x_0) = u_0$, т. е. при $x\to x_0$ имеем $u\to u_0$. Поэтому, вследствие непрерывности функции $y = f(u)$ имеем:

$$\lim_{x\to x_0}\left(f\left(\varphi(x)\right)\right) = \lim_{u\to u_0} f(u) = f(u_0) = f\left(\varphi(x_0)\right).$$

Это и доказывает, что сложная функция $y = f\left(\varphi(x)\right)$ $y = f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0.

Теорема 3. Если функция $y = f(x)$ непрерывна и строго монотонна на $\left[a,b\right]$ оси *Ox*, то обратная функция $y=\varphi(x)$ также непрерывна и монотонна на соответствующем отрезке $\left[c,d\right]$ оси *Oy* (без доказательства).

Так, например, функция $\mathrm{tg}x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, в силу теоремы 1, есть функция непрерывная для всех значений x, кроме тех, для которых $\cos x = 0$, т. е. кроме значений $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$.

Функции $\arcsin x$, $\mathrm{arctg} x$, $\arccos x$, $\mathrm{arcctg} x$, в силу теоремы 3, непрерывны при всех значениях x, при которых эти функции определены.

Можно доказать, что все основные элементарные функции непрерывны при всех значениях x, для которых они определены.

Как известно, элементарной называется такая функция, которую можно задать одной формулой, содержащей конечное число арифметических действий и суперпозиций (операции взятия функции от функции) основных элементарных функций. Поэтому из приведенных выше теорем вытекает: всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке, в которой она определена.

Этот важный результат позволяет, в частности, легко находить пределы элементарных функций в точках, где они определены.

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to 4} 2^{\mathrm{ctg} x}$.

Решение: Функция $2^{\mathrm{ctg} x}$ непрерывна в точке $x=\dfrac{\pi}{4}$, поэтому

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} 2^{\mathrm{ctg} x} = 2^{\mathrm{ctg}\frac{\pi}{4}} = 2.$$

5. Свойства функций, непрерывных на отрезке

Непрерывные на отрезке функции имеют ряд важных свойств. Сформулируем их в виде теорем, не приводя доказательств.

Теорема 4. (Вейерштрасса). Если функция непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений.

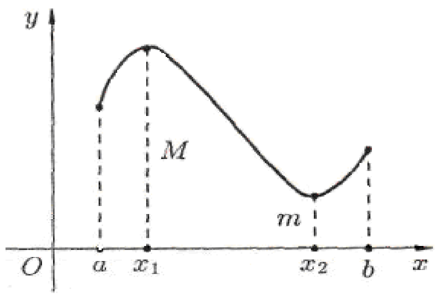


Рис.50.

Изображенная на рисунке 50 функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, принимает свое наибольшее значение M в точке x_1, а наименьшее m — в точке x_2. Для любого $x \in [a,b]$ имеет место неравенство $m \le f(x) \le M$.

Следствие 1. Если функция непрерывна на отрезке, то она ограничена на этом отрезке.

Теорема 5. (Больцано-Коши). Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и принимает на его концах неравные значения $f(a) = A$ и $f(b) = B$, то на этом отрезке она принимает и все промежуточные значения между *A* и *B*.

Геометрически теорема очевидна (см. рис.51).

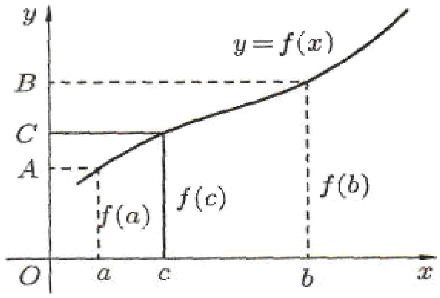


Рис. 51.

Для любого числа C, заключенного между *A* и *B*, найдется точка *c* внутри отрезка $[a,b]$ такая, что $f(c) = C$. Прямая $y = C$ пересечет график функции по крайней мере в одной точке.

Следствие 2. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и на его концах принимает значения разных знаков, то внутри отрезка $[a,b]$ найдется хотя бы одна точка *c*, в которой данная функция $f(x)$ обращается в нуль: $f(c) = 0$.

Геометрический смысл теоремы: если график непрерывной функции переходит с одной стороны оси *Ox* на другую, то он пересекает ось *Ox* (см. рис.52).

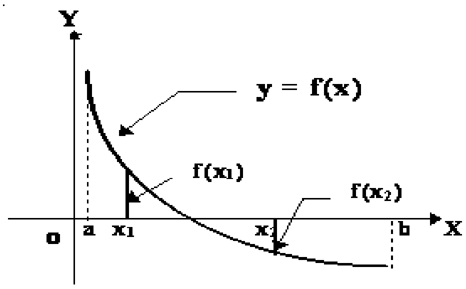


Рис.52.

Следствие 2 лежит в основе так называемого «метода половинного деления», который используется для нахождения корня уравнения $f(x)=0$.

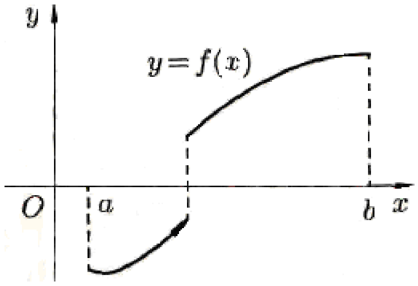


Рис. 53.

Утверждения теорем 4 и 5, вообще говоря, становятся неверными, если нарушены какие-либо из их условий: функция непрерывна не на отрезке $[a,b]$, а в интервале (a,b), либо функция на отрезке $[a,b]$ имеет разрыв.

Рисунок 53 показывает это для следствия теоремы 5: график разрывной функции не пересекает ось *Ox*.

Пример. Определить с точностью до e = 0,00001 корень уравнения $e^{2x+1}+x^2-5+0$, принадлежащий отрезку [0; 1], применив метод половинного деления.

Решение: Обозначим левую часть уравнения через $f(x)$.

Шаг 1. Вычисляем $\varphi = f(a)$ и $\psi = f(b)$, где $a=0,\quad b=1$.

Шаг 2. Вычисляем $x=\dfrac{a+b}{2}$.

Шаг 3. Вычисляем $y=f(x)$. Если $f(x)=0$, то x – корень уравнения.

Шаг 4. При $f(x)\neq 0$ если $y\cdot\varphi<0$, то полагаем $b=x,\ \psi=y$, иначе полагаем $a=x,\ \varphi=y$.

Шаг 5. Если $b-a-\varepsilon<0$ то задача решена. В качестве искомого корня (с заданной точностью ε) принимается величина $x=\dfrac{a+b}{2}$. Иначе процесс деления отрезка $[a,b]$ пополам продолжаем, возвращаясь к шагу 2.

В результате произведенных действий получим: $x=0,29589$.