§2 Предел функции

2.1 Предел числовой последовательности

Определение 1. Бесконечной числовой последовательностью (или просто числовой последовательностью) называется функция $f = f(n)$, определенная на множестве всех натуральных чисел $N = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$. Значения функции $f_1, f_2, ..., f_n, ...$ называются ее членами.

Последовательность $a_n = f(n)$ иногда обозначают так: $\{a_n\}$. Это означает, что задана последовательность с общим членом a_n. По данному общему члену всегда можно найти любой член последовательности a_k, подставив в a_n вместо *n* число *k*. Ниже приведены примеры последовательностей, причем сначала приведена форма записи $\{a_n\}$, а затем записаны несколько первых членов:

1) $\{(-1)^n \cdot n\}$; $-1, 2, -3, ...$; 2) $\{3n+1\}$; $4, 7, 10, ...$; 3) $\{2-n\}$; $1, 0, -1, ...$;

4) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$; $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...$; 5) $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$; $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, ...$; 6) $\left\{\frac{n+1}{2n}\right\}$; $1, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, ...$;

7) $\left\{(-1)^n \frac{1}{n}\right\}$; $-1, \frac{1}{2}, ...$;

Для числовой последовательности, как и для любой функции, можно построить график. Он не является линией, а состоит из отдельных точек, расположенных справа от оси *Oy*.

Определение 2. Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется *невозрастающей* (*неубывающей*), если для любого номера *n* справедливо неравенство $a_n \ge a_{n+1}$, $(a_n \le a_{n+1})$.

Если $a_n > a_{n+1}$, $(a_n < a_{n+1})$, то последовательность $\{a_n\}$ называется строго убывающая (строго возрастающая). Например, последовательность $\{2-n\}$ − убывающая, последовательность $\{3n+1\}$ − возрастающая.

Невозрастающие, неубывающие, возрастающие и убывающие последовательности называются *монотонными.*

Определение 3. Последовательность $\{a_n\}$ называется ограниченной сверху (снизу), если существует такое число *M*, что для любого номера *n* выполняется неравенство $a_n \le M$, $(a_n \ge M)$. Последовательность

$\{2-n\}$ ограничена сверху, например числом 1. Последовательности, одновременно ограниченные сверху и снизу, называются ограниченными. Последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ − ограниченная.

Определение 4. Число a называется пределом числовой последовательности $\{a_n\}$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N = N(\varepsilon)$, зависящий от ε, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$. Это записывается так: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ или $a_n \to a$ при $n \to \infty$.

Характер стремления последовательности к своему пределу различен. Последовательности $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ и $\left\{\frac{n+1}{2n}\right\}$ стремятся к своим пределам убывая; последовательность $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ стремится к единице возрастая; последовательность $\left\{(-1)^n \frac{1}{n}\right\}$ стремится к нулю так, что ее члены становятся поочередно то больше, то меньше нуля.

Сформулируем важные свойства пределов числовых последовательностей (без доказательства).

1. Последовательность может иметь только один предел.

2. Любая неубывающая (невозрастающая) последовательность, ограниченная сверху (снизу), имеет предел.

2.2 Число *e*.

Рассмотрим числовую последовательность

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}.$$

Эта последовательность как возрастающая и ограниченная сверху имеет предел. Этот предел принято обозначать буквой *e* (так называемый второй замечательный предел):

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n. \qquad (1)$$

Число *e* является иррациональным и приблизительно равно 2,71828 (*e* = 2,71828182...).

2.3 Предел функции.

Выше рассмотрено понятие предела для частного вида функций − числовых последовательностей. Обобщим это определение на произвольные функции.

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x = a$, кроме, быть может, самой точки a:

Определение 5. Число *A* называется пределом функции $f(x)$ при стремлении *x* к *a* (или в точке *a*), если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех $x \neq a$, удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta$, и $x \in D(f)$, имеет место неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Обозначают это так:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \text{ или } f(x) \to A \text{ при } x \to a.$$

Отсюда, если число *A* есть предел функции $f(x)$ в точке $x = a$, то для всех *x*, достаточно близких к числу *a* и отличных от него, соответствующие им значения функции $f(x)$ оказываются сколь угодно близкими к числу *A* (естественно в тех точках *x*, в которых функция $f(x)$ определена).

Замечание. Если в формуле (1) положить $\frac{1}{n} = x$, то она примет вид

$$e = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}. \tag{2}$$

При изучении свойств функции приходится рассматривать и предел функции при стремлении аргумента *x* к бесконечности.

Определение 6. Число *A* называется пределом функции $f(x)$ при стремлении *x* к $+\infty$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое положительное число *N*, что для всех *x*, удовлетворяющих условию $x > N$, имеет место неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. При этом пишут $A = \lim_{x \to \infty} f(x)$.

Аналогично определяется предел функции $f(x)$ при стремлении *x* к $-\infty$

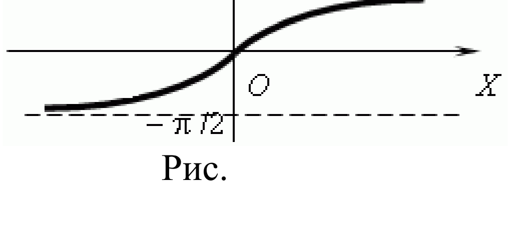

Рис.

§3 Бесконечно малые и бесконечно большие величины

3.1 Бесконечно малые и их свойства

При изучении свойств пределов функций особую роль играют функции, предел которых при стремлении аргумента к какой-либо точке равен нулю. Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется бесконечно малой, если ее предел равен нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Последовательности $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, $\left\{(-1)\cdot\frac{1}{n}\right\}$ являются бесконечно малыми: их пределами является нуль. Понятие бесконечно малой последовательности можно перенести на произвольные функции.

Определение 1. Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = 0$, т.е. если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех *x*, удовлетворяющих неравенству $0 < |x-a| < \delta$, выполняется неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon$.

Бесконечно малую функцию $\alpha(x)$ называют также бесконечно малой величиной или просто бесконечно малой.

Пример. Показать, что функция $y = x^2 - 1$ является бесконечно малой при $x \to 1$. Пусть ε − произвольное положительное число. Найдем такое число $\delta > 0$, что для всех *x*, удовлетворяющих неравенству $0 < |x-1| < \delta$, выполняется неравенство $|x^2 - 1| < \varepsilon$. Таким δ является $\delta = -1 + \sqrt{1+\varepsilon}$. Следовательно, функция $y = x^2 - 1$ является бесконечно малой при $x \to 1$.

В дальнейшем в этом параграфе при рассмотрении бесконечно малых будем иметь в виду, что они являются бесконечно малыми при $x \to a$.

Остановимся на основных свойствах бесконечно малых функций. Эти свойства будут верны также и для бесконечно малых последовательностей.

1. Если функции $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ являются бесконечно малыми, то функция $\alpha_1(x) + \alpha_2(x)$ также есть бесконечно малая.

2.Произведение ограниченной при $x \to a$ функции на бесконечно малую есть функция бесконечно малая.

Непосредственно из свойства 2 следуют свойства 3 и 4.

3. Произведение постоянной на бесконечно малую есть бесконечно малая.

4. Произведение двух бесконечно малых есть бесконечно малая.

Замечание. Свойство 4 распространяется на любое конечное число бесконечно малых.

3.2 Бесконечно большие функции

Определение 2. Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется бесконечно большой, если для любого положительного числа *M* найдется такое натуральное число *N*, что для любого $n > N$ выполняется неравенство $|a_n| > M$. В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Последовательности $\{n\}, \{2^n\}$, $\{(-1)^n \cdot n\}$ являются бесконечно большими.

Понятие бесконечно большой последовательности можно перенести на произвольные функции.

Определение 3. Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* при $x \to a$, если для любого числа $M > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что $|f(x)| > M$ для всех *x*, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - a| < \delta$. Обозначается это так: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.

Если при этом $f(x)$ положительна (отрицательна) в окрестности точки *a*, то пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ ($\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$).

Замечания.

1. Бесконечность (∞) не число, а символ, который употребляется, например, для того, чтобы указать, что соответствующая функция есть бесконечно большая.

2. Бесконечно большая функция $f(x)$ при $x \to a$ не имеет предела, так как предел переменной (если он существует) − некоторое число. То же в случае бесконечно большой числовой последовательности.

В дальнейшем всегда под пределом последовательности (функции) будем понимать конечный предел, т.е. число, если не оговорено противное.

Ниже рассматриваются бесконечно большие функции при $x \to a$. Как видно из следующих свойств, которые верны и для последовательностей, бесконечно большие и бесконечно малые функции тесно связаны между собой.

1. Если функция $f(x)$ бесконечно большая, то $\dfrac{1}{f(x)}$ бесконечно малая.

2. Если функция $\alpha(x)$ бесконечно малая и не обращается в нуль, то $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ − бесконечно большая.

Замечание. В данном параграфе были рассмотрены функции аргумента x для случая, когда $x \to a$. Однако все предложения, установленные здесь, остаются в силе и для случая, когда x стремится к бесконечности.

§4 Основные теоремы о пределах и их применение

4.1 Основные теоремы о пределах

Прежде сделаем следующее замечание. Ниже рассматриваются функции аргумента x, при этом x стремится к a или x стремится к бесконечности. Все устанавливаемые в этом пункте предложения о пределах имеют место в обоих случаях; они верны также и для последовательностей.

Теорема 1. Для того чтобы число A было пределом функции $f(x)$ при $x \to a$, необходимо и достаточно, чтобы эта функция была представима в виде $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ − бесконечно малая.

Теорема 2. Предел постоянной величины равен самой постоянной.

Это предложение непосредственно вытекает из определения предела.

Теорема 3. Если функция $f(x) \ge 0$ ($f(x) \le 0$) для всех x в некоторой окрестности точки a, кроме, быть может, самой точки a, и в точке a имеет предел, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) \ge 0$ ($\lim\limits_{x\to a} f(x) \le 0$).

Теорема 4. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют пределы при $x \to a$, то при $x \to a$ имеют пределы также их сумма $f_1(x) + f_2(x)$, произведение $f_1(x) \cdot f_2(x)$ и при условии $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) \ne 0$ частное $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$, причем

$$\lim_{x\to a}\left[f_1(x) + f_2(x)\right] = \lim_{x\to a} f_1(x) + \lim_{x\to a} f_2(x), \tag{1}$$

$$\lim_{x\to a}\left[f_1(x) \cdot f_2(x)\right] = \lim_{x\to a} f_1(x) \cdot \lim_{x\to a} f_2(x), \tag{2}$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}. \tag{3}$$

Замечание. Формула (1) распространяется на случай алгебраической суммы любого конечного числа слагаемых, а формула (2) − на случай любого конечного числа сомножителей.

Следствие 1. Если функция $f(x)$ имеет предел при $x \to a$, то

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$$

где n − натуральное число.

Следствие 2. Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x\to a} c\cdot f(x) = c\lim_{x\to a} f(x),$$

c − const.

Теорема 5. Если для функций $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ в некоторой окрестности точки a выполняется неравенство

$$f_1(x) \le f(x) \le f_2(x) \qquad (4)$$

и $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = \lim\limits_{x\to a} f_2(x) = A$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

4.2 Примеры вычисления пределов.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\left(2x^2+1\right)$

Используя теоремы 4, 2, следствия 2, 1 последовательно, получаем

$$\lim_{x\to 1}\left(2x^2+1\right) = \lim_{x\to 1}\left(2x^2\right) + \lim_{x\to 1}(1) = 2\lim_{x\to 1}(x)^2 + 1 = 2+1 = 3.$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x+1}{x^3+1}$.

Применяя теоремы 4, 2, следствия 1, 2 , находим

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-5x+1}{x^3+1} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2-5x+1\right)}{\lim\limits_{x\to 1}\left(x^3+1\right)} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}x^2 - \lim\limits_{x\to 1}5x + \lim\limits_{x\to 1}1}{\lim\limits_{x\to 1}x^3 + \lim\limits_{x\to 1}1} =$$

$$= \frac{\left(\lim\limits_{x\to 1}x\right)^2 - 5\lim\limits_{x\to 1}x + 1}{\left(\lim\limits_{x\to 1}x\right)^3 + 1} = \frac{1-5+1}{1+1} = -\frac{3}{2}.$$

Как показывают решения приведенных примеров, в простейших случаях нахождение предела сводится к подстановке в данное выражение предельного значения аргумента. Однако не всегда можно вычислить предел с помощью формул (1), (2), (3). Так, формулы (1) и (2) утрачивают смысл, если хотя бы одна из функций $f_1(x)$ или $f_2(x)$ не имеет предела. Формула (3) неверна, если знаменатель дроби стремится к нулю. Рассмотрим здесь два случая.

а) Предел числителя не равен нулю.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2}{1-x^2}$.

Имеем $\lim\limits_{x\to 1}\left(1-x^2\right)=0$. Поэтому формулу (3) в этом примере использовать нельзя. Так как $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{x^2}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}(1-x^2)}{\lim\limits_{x\to 1}x^2}=\dfrac{0}{1}=0$, то функция $f(x)=\dfrac{1-x^2}{x^2}$ бесконечно малая при $x\to 1$. Тогда функция $f_1(x)=\dfrac{x^2}{1-x^2}$ бесконечно большая при $x\to 1$, т.е. $\lim\limits_{x\to 1}f_1(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2}{1-x^2}=\infty$.

Можно отметить, что, когда *x* приближается к 1 слева, т. е. оставаясь все время меньше 1 (что записывают $x\to 1-0$), функция $f_1(x)=\dfrac{x^2}{1-x^2}$ остается все время положительной. В этом случае записывают $\lim\limits_{x\to 1-0}f_1(x)=\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{x^2}{1-x^2}=+\infty$.

Если же *x* приближается к 1 справа, т.е. оставаясь все время больше 1 (что записывают $x\to 1+0$), эта функция остается все время отрицательной. В этом случае записывают

$$\lim_{x\to 1+0}f_1(x)=\lim_{x\to 1+0}\frac{x^2}{1-x^2}=-\infty.$$

б) предел числителя равен нулю.

Пример4. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+3x}{x^2+x}$.

Здесь $\lim\limits_{x\to 0}(x^2+3x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}(x^2+x)=0$. Говорят, что в этом случае имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Однако предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+3x}{x^2+x}$ существует, и его можно найти. Для его нахождения, т.е. раскрытия неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$, надо предварительно преобразовать дробь $\dfrac{x^2+3x}{x^2+x}$, разделив числитель и знаменатель на *x*, что возможно, так как до перехода к предельному значению $x\neq 0$. Следовательно, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+3x}{x^2+x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+3)}{x(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+3}{x+1}.$$

Но $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+3}{x+1}=3$ (здесь формула (3) применима, так как $\lim\limits_{x\to 0}\left(x+1\right)=1\neq 0$).

В результате имеем $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+3x}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+3}{x+1}=3$.

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{x}$.

Так как $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}\right)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}x=0$,то здесь также имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Для того чтобы раскрыть эту неопределенность, преобразуем дробь, стоящую под знаком предела, умножив числитель и знаменатель этой дроби на $(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x})$ и сделав после чего необходимые упрощения:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}\right)\left(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}\right)}{x\left(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4-x-\left(4+x\right)}{x\left(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x}{x\left(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}\right)}=$$

$$=-2\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}\right)}=-2\cdot\frac{1}{2+2}=-\frac{1}{2}$$

Рассмотрим теперь примеры на вычисление пределов функций при $x\to\infty$.

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4}{3x+2}$.

Очевидно, $\lim\limits_{x\to 0}\left(3x+2\right)=\infty$. Поэтому функция $\dfrac{4}{3x+2}$ бесконечно малая при $x\to\infty$, т.е. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{3x+2}=0$.

Пример 7. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+5}{4x+1}$.

Здесь $\lim\limits_{x\to\infty}(3x+5)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}(4x+1)=\infty$. Говорят, что в этом случае имеем неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Для ее раскрытия предварительно числитель и знаменатель дроби $\dfrac{3x+5}{4x+1}$ почленно разделим на x.

Получим $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+5}{4x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+\frac{5}{x}}{4+\frac{1}{x}}$. Но $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{x}=0$.

В результате имеем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+5}{4x+1}=\frac{3}{4}.$$

Аналогично устанавливается, что при $x\to\infty$ дробно-рациональная функция стремится либо к нулю, либо к бесконечности, либо к конечному числу, отличному от нуля, в зависимости от того, будет ли степень числителя меньше степени знаменателя, больше ее или равна ей.

4.3 Первый замечательный предел.

Справедливо равенство

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{5}$$

Равенство (5) называется первым замечательным пределом. С его помощью можно вычислять пределы различных функций, содержащих тригонометрические функции и степени x.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$.

Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x}=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=3.$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 5x}$.

Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2\sin 2x}{2x}}{\frac{5\sin 5x}{5x}}=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 2x}{2x}}{\frac{\sin 5x}{5x}}=\frac{2}{5}$$

4.4 Сравнение бесконечно малых.

Рассмотрим отношение двух бесконечно малых $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \to a$ (для компактности записи будем обозначать их просто α и β). Выделим три случая.

1. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta}=0$.

В этом случае говорят, что α – бесконечно малая более высокого порядка, чем β.

2. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta}=A\neq 0$ (A – число).

В этом случае функции α и β называют бесконечно малыми одного и того же порядка

3. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta}=\infty$.

В этом случае говорят, что α – бесконечно малая более низкого порядка, чем β. Можно сказать также, что β − бесконечно малая более высокого порядка, чем α.

Пример 1. При $x \to 2$ функция $(x-2)^3$ бесконечно малая более высокого порядка, чем $x-2$, так как $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)^3}{x-2}=0$.

Пример 2. При $x \to 0$ функции $5x^2$ и x^2 являются бесконечно малыми одного порядка, так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2}{x^2}=5$.

Пример 3. При $x \to -1$ функция $x+1$ бесконечно малая более низкого порядка, чем $(x-1)(x+1)^2$, так как

$$\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{(x-1)(x+1)^2}=\infty$$

Определение. Если функции α и β бесконечно малые одного и того же порядка, причем $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta}=1$, то они называются эквивалентными бесконечно малыми. Символически это записывают так: $\alpha \sim \beta$.

Из определения, в частности, следует, что если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta}=A\neq 0$, т.е. если α и β − бесконечно малые одного порядка, то α и $A\beta$ будут являться эквивалентными бесконечно малыми: $\alpha\sim A\beta$.

Пример 4. Как замечено в пункте 3, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, т. е. $\sin x$ и x при $x\to 0$ являются эквивалентными бесконечно малыми.

Пример 5. Так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1,$$

то $\mathrm{tg}x\sim x$.

Теорема 6. Если существует предел отношения двух бесконечно малых α и β, то он равен пределу отношения соответствующих им эквивалентных бесконечно малых.

Пример 6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\mathrm{tg}3x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{3x}=\frac{5}{3}$, так как $\sin 5x\sim 5x$ и $\mathrm{tg}3x\sim 3x$ при $x\to 0$.

Применение первого и второго замечательных пределов позволяет доказать справедливость формул приведенных в **таблице эквивалентных** бесконечно малых функций при *x* → *a.*

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций.

$\alpha(x)\to 0$ при $x\to a$			
1	$\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$	6	$\log_a(1+\alpha(x))\sim\frac{\alpha(x)}{\ln a}$
2	$tg\alpha(x)\sim\alpha(x)$	6a	$\ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x)$
3	$\arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x)$	7	$a^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)\ln a$
4	$arctg\alpha(x)\sim\alpha(x)$	7a	$e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)$
5	$1-\cos\alpha(x)\sim\frac{(\alpha(x))^2}{2}$	8	$(1+\alpha(x))^{\mu}-1\sim\mu\alpha(x)$

Например, вычислим $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{tg(\dfrac{\pi x}{2})}$.

Так как при $x\to 0 \Rightarrow \arcsin 2x \sim 2x,\ tg(\dfrac{\pi x}{2}) \sim \dfrac{\pi x}{2}$,

то имеет место

равенство: $$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x}{tg(\frac{\pi x}{2})}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\frac{\pi x}{2}}=\frac{4}{\pi}.$$

Замечание. В случаях, когда аргумент α (x) функции в вычисляемом пределе стремится не к нулю, а к отличному от нуля числу, например, $\alpha(x)\to a,\ a\neq 0$, вводят новую переменную

$t = \alpha(x) - a.$

Тогда, если $\alpha(x)\to a$, то $t\to 0$ (функция $t(x)$ должна быть непрерывной функцией в окрестности точки $t = 0$).

Новая переменная $t\to 0$ (при $\alpha(x)\to a$), и для нее легко можно использовать таблицу эквивалентных бесконечно малых функций.

Например, вычислим предел

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\ln(\operatorname{tg}x)}=\left\{\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\ln 1}\right\}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\left|x-\frac{\pi}{4}=t\Leftrightarrow x\to\frac{\pi}{4}\Rightarrow t\to 0\right|=$$

Предварительно сделаем следующие преобразования:

$$\sin x=\sin(t+\frac{\pi}{4})=\sin t\cos\frac{\pi}{4}+\cos t\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos t+\sin t);$$

$$\cos x=\cos(t+\frac{\pi}{4})=\cos t\cos\frac{\pi}{4}-\sin t\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos t-\sin t);$$

$$\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}(t+\frac{\pi}{4})=\frac{\operatorname{tg}t+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1-\operatorname{tg}t\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}=\frac{\operatorname{tg}t+1}{1-\operatorname{tg}t}=\frac{1-\operatorname{tg}t+2\operatorname{tg}t}{1-\operatorname{tg}t}=1+\frac{2\operatorname{tg}t}{1-\operatorname{tg}t};$$

$$\frac{2\operatorname{tg}t}{1-\operatorname{tg}t}\to 0 \quad \text{при} \quad t\to 0$$

и воспользуемся результатами преобразований:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin t+\cos t)-\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos t-\sin t)}{\ln(1+\frac{2\,\mathrm{tg}\,t}{1-\mathrm{tg}\,t})}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{2}\sin t}{2\frac{\mathrm{tg}\,t}{1-\mathrm{tg}\,t}}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{2}\,t}{2\frac{t}{1-t}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$