

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ Первообразная функция и неопределённый интеграл

Определение первообразной	Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на промежутке X , если $F'(x) = f(x) \forall x \in X$.
----------------------------------	---

Лемма	Функция, производная которой на некотором промежутке X равна нулю, постоянна на этом промежутке.
--------------	--

Теорема (о множестве первообразных)	Если $F(x)$ – одна из первообразных для $f(x)$ на промежутке X , то любая другая первообразная $\Phi(x)$ для функции $f(x)$ на промежутке X имеет вид: $\Phi(x) = F(x) + C$, где C – некоторая постоянная.
--	---

Определение неопределённого интеграла	<p>. Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на промежутке X называется неопределённым интегралом от функции $f(x)$ на промежутке X и обозначается $\int f(x)dx$.</p> <p>В силу теоремы о множестве первообразных $\int f(x)dx = F(x) + C$, где $F(x)$ – одна из первообразных для $f(x)$, C – произвольная постоянная.</p>
--	--

Замечание. Иногда символом $\int f(x)dx$ обозначается не вся совокупность первообразных, а какая-либо одна из них.

Теорема (существования первообразной)	Всякая непрерывная на промежутке X функция имеет первообразную на этом промежутке.
--	--

Примеры «неберущихся» интегралов

$$\int \frac{e^x}{x} dx; \quad \int \frac{\sin x}{x} dx; \quad \int \frac{\cos x}{x} dx; \quad \int \frac{dx}{\ln x};$$
$$\int \exp(-x^2) dx; \quad \int \sin(x^2) dx; \quad \int \cos(x^2) dx;$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$i^2 = -1$$

§ Основные свойства неопределённого интеграла

Свойство 1 (о дифференциале интеграла)	Производная неопределённого интеграла равна подынтегральной функции: $(\int f(x)dx)' = f(x)$. Дифференциал неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению: $d\int f(x)dx = f(x)dx$.
Свойство 2 (об интеграле от дифференциала)	Неопределённый интеграл от дифференциала функции равен сумме этой функции и постоянного слагаемого: $\int dF(x) = F(x) + C$.

Вывод из свойств 1 и 2: знаки интеграла и дифференциала взаимно уничтожаются.

Свойство 3 (линейности)	Если существуют первообразные функций $f(x)$ и $g(x)$, а α и β – любые вещественные числа, то существует первообразная функции $\alpha f(x) + \beta g(x)$, причем $\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$.
------------------------------------	---

§ Метод замены переменных (подстановки) в неопределённом интеграле

Теорема (о замене переменных)	Пусть функция $x = \varphi(t)$ определена и дифференцируема на промежутке T , а промежуток X – множество её значений. Пусть функция $f(x)$ определена на X и имеет на этом промежутке первообразную $F(x)$. Тогда на промежутке T функция $F(\varphi(t))$ является первообразной для функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. То есть $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C$
--	--

Следствие (алгоритм замены переменных в неопределённо м интеграле)	$\int f(x)dx = \left \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{array} \right = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt ;$ $\int f(x)dx = \left \begin{array}{l} t = \varphi^{-1}(x) \\ dt = (\varphi^{-1}(x))'dx \end{array} \right = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$
---	--

Замечание. Частным случаем замены переменной является приём подведения некоторой функции под знак дифференциала, когда замена переменной делается устно.

§ Метод интегрирования по частям в неопределённом интеграле

<p>Теорема (об интегрировании по частям в неопределённом интеграле)</p>	<p>Пусть на промежутке X функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы и функция $v(x)u'(x)$ имеет первообразную на X.</p> <p>Тогда $u(x)v'(x)$ также имеет первообразную на X, и справедлива формула интегрирования по частям: $\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$,</p> <p style="text-align: center;">или</p> $\int u dv = uv - \int v du.$
--	--

Выберите методы, которыми можно найти следующие интегралы:

1.	$\int x^2 \exp(x^3) dx$	2.	$\int x^3 \exp(x^2) dx$
3.	$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$	4.	$\int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$
5.	$\int x \sin x^2 dx$	6.	$\int x^2 \sin x dx$
7.	$\int 5^x \cos x dx$	8.	$\int 5^{\sin x} \cos x dx$
9.	$\int \sqrt{x} \exp(\sqrt{x}) dx$	10.	$\int \frac{1}{\sqrt{x}} \exp(\sqrt{x}) dx$
11.	$\int \frac{x \arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}}$	12.	$\int \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}}$

§ Интегрирование дробных рациональных функций

А. Правильные и неправильные рациональные дроби

<p>Определение рациональной дроби</p>	<p>Рациональной дробью называется отношение двух многочленов:</p> $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \dots + b_m}$
--	--

<p>Определение правильной и неправильной рациональной дроби</p>	<p>Рациональная дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ называется правильной, если степень многочлена в числителе меньше степени многочлена в знаменателе ($n < m$).</p> <p>Рациональная дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ называется неправильной, если степень многочлена в числителе больше или равна степени многочлена в знаменателе ($n \geq m$).</p>
--	---

Теорема	Интегрирование неправильной рациональной дроби можно свести к интегрированию многочлена и правильной рациональной дроби.
----------------	--

Б. Основная теорема алгебры

Теорема (основная алгебры)	Любой многочлен степени n имеет ровно n корней и может быть представлен в виде произведения n сомножителей.
-----------------------------------	---

Теорема (о разложении многочлена на множители)	Любой многочлен степени m можно разложить на линейные и квадратичные множители: $Q_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m =$ $= b_0(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2} \dots (x-x_r)^{k_r} (x^2+p_1x+q_1)^{l_1} \dots (x^2+p_sx+q_s)^{l_s}$ В соответствии с его вещественными (x_1, x_2, \dots, x_r) и комплексными сопряжёнными корнями с учётом кратности k_1, k_2, \dots, k_r его вещественных и l_1, l_2, \dots, l_s комплексных корней, причём $k_1 + k_2 + \dots + k_r + 2l_1 + 2l_2 + \dots + 2l_s = m$.
---	---

В. Разложение правильной дроби на сумму простых дробей

Теорема (о сумме простых дробей)	Любую правильную рациональную дробь можно представить в виде суммы простых дробей с неопределёнными коэффициентами единственным образом, руководствуясь следующим правилом:
---	---

Вид множителя в знаменателе дроби	Сколько дробей	Сумма простых дробей, соответствующая множителю в знаменателе правильной рациональной дроби
$(x-a)^k$	k	$\frac{A_1}{(x-a)^k} + \frac{A_2}{(x-a)^{k-1}} + \dots + \frac{A_k}{x-a}$
$(x^2+px+q)^w$	w	$\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^w} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{w-1}} + \dots + \frac{M_wx+N_w}{x^2+px+q}$

Г. Методы нахождения неопределённых коэффициентов

Метод задания частных значений	<ol style="list-style-type: none"> Сумму простых дробей приводят к общему знаменателю. Приравнивают числители данной дроби и дроби с неопределёнными коэффициентами. В полученное уравнение подставляют вещественные корни знаменателя или другие любые значения.
---------------------------------------	--

Метод неопределённых коэффициентов	<ol style="list-style-type: none"> 1. Сумму простых дробей приводят к общему знаменателю. 2. Приравнивают числители данной дроби и дроби с неопределёнными коэффициентами. 3. Из полученного уравнения получают систему линейных уравнений, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях аргумента x в правой и левой частях уравнения.
---	---

Метод комбинированный	<ol style="list-style-type: none"> 1. Сумму простых дробей приводят к общему знаменателю. 2. Приравнивают числители данной дроби и дроби с неопределёнными коэффициентами. 3. В полученное уравнение последовательно подставляют все вещественные корни знаменателя, остальные коэффициенты находят методом неопределённых коэффициентов.
----------------------------------	--

Д. Интегрирование простых дробей

а) дроби первого типа $\int \frac{A}{x-a} dx = \int \frac{A}{x-a} d(x-a) = A \ln|x-a| + c;$

б) дроби второго типа $\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + c; (k > 1)$

в) дроби третьего

типа $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx = \int \frac{M(x+\frac{p}{2})+N}{(x+\frac{p}{2})^2 - \frac{p^2}{4} + q} dx = \int \frac{M(t-\frac{p}{2})+N}{t^2 \pm a^2} dt = M \int \frac{td(t^2 \pm a^2)}{(t^2 \pm a^2)^2} + (N - M\frac{p}{2}) \int \frac{dt}{t^2 \pm a^2} = \dots$

г) дроби четвертого типа $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n} dx = \int \frac{M(x+\frac{p}{2})+N}{(x+\frac{p}{2})^2 - \frac{p^2}{4} + q} dx = \dots$

$\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{2a^2(n-1)} \left(\frac{t}{(t^2+a^2)^{n-1}} + (2n-3) \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}} \right)$ – рекуррентная формула.

Пример 1. Найти $\int \frac{x^5 + x^4 + x^3 + 14x^2 - 2x + 5}{x^4 - 2x^3 + 5x^2} dx.$

Пример 2. Найти $\int \frac{x^7}{x^4 - 1} dx.$

Пример 3. $\int \frac{7x^3 - 14x^2 + 15x + 2}{x^3 - 2x^2 + 2x} dx.$

§ Интегрирование некоторых тригонометрических функций

Определение рациональной функции двух переменных	Рациональной функцией двух переменных $R(u, v)$ называется функция, полученная путём применения к аргументам u, v конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в целую степень.
---	--

Примеры.

$$1. \int \frac{dx}{\sin x} . \quad 2. \int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx . \quad 3. \int \sin^2 x \cos^4 x dx .$$

$$4. \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x} dx .$$

§ Интегрирование некоторых иррациональных функций

Определение иррациональной функции	Функция называется алгебраической иррациональной , если она получена путём применения к аргументу x конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в рациональную степень.
---	---

Примеры: 1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$. 2. $\int x \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx$. 3. $\int \sqrt[3]{x^3+1} dx$. 4.

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} .$$

5. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{(1+2x^2)^3}}$. 6. $\int \sqrt{3-2x-x^2} dx$.

При нахождении первообразной функции можно пользоваться следующим **алгоритмом**:

1. Попробовать применить непосредственное интегрирование и подведение функции под знак дифференциала;
2. Если это не приводит к успеху, определить класс подынтегральной функции (дробная рациональная, тригонометрическая, иррациональная функция) и применить соответствующие подстановки,
3. а если функция смешанных классов – интегрирование по частям.