

Вариант 6

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

1.1. $f(x) = 1 - x^2$, $x_0 = -1$; 1.2. $f(x) = \begin{cases} \ln(1 - x^2), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases} x_0 = 0.$

2. Найти производную функций:

2.1. $y = (1 + x) \cdot \ln(x^2 - 1)$; 2.2. $y = \frac{1}{x} - 5^x - 10$;

2.3. $y = (1 - x)^2 \cdot e^{\sqrt[3]{1 - x^2 + x}}$; 2.4. $y = \frac{\sin(2 - x^3)}{e^{\sqrt{x-1}}}$;

2.5. $y = \sqrt[3]{x^2 + 3} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3 + x}}$; 2.6. $y = \cos^2(1 + x^3)$;

2.7. $y = \log_3(3 - \sqrt{4^x - \sqrt{2x}})$; 2.8. $y = \arcsin(\cos(x + \sqrt{e^x - 1}))$.

3. Найти производную степенно-показательной функции $y = (1 + x)^{\sin x}$.

4. Найти производную неявной функции $y=y(x)$: $x \cdot y = \operatorname{arctg}(x^2 + y)$.

5. Найти производную параметрической функции: $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = 1 - \cos 2t. \end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке $M_0(x_0; y_0)$:

6.1. $y = 1 + \sin x - \cos 2x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$; 6.2. $\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^3, \end{cases} M_0(1; 2).$

7. Найти производную второго порядка $\frac{d^2 y}{dx^2}$ для функций:

7.1. $y = (x^2 - 1) \cdot \ln(1 - x^2)$; 7.2. $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = 1 - \cos 2t. \end{cases}$

8. Найти дифференциал функции $y = \frac{1}{\sqrt{2x^2 + x + 1}}$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y(1.016)$.

9. Найти дифференциал второго порядка функции $y = (x^2 - 1) \cdot \ln(1 - x^2)$ в точке $x_0 = 0$.

10. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталья:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x^3}{\sin^6 2x}$; б) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{2x - \pi}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} [\arcsin x \cdot \operatorname{ctg} x]$.

11. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0 :

а) $y = \sqrt{2 + x}$, $x_0 = -1$; б) $y = \frac{1 - e^{-3x}}{x}$, $x_0 = 0$.

12. Найти экстремумы функций:

$$a) y = x^3 - 6x^2 + 12x; \quad б) y = \frac{x^3}{x^2 + 3}; \quad в) y = x^3(x + 2)^2.$$

13. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

$$a) y = x^3 - 12x + 7, [0;3]; \quad б) y = \frac{\ln x}{x}, (0; \infty).$$

14. Исследовать и построить графики функций:

$$a) y = \sqrt[3]{(x^2 - 8)^2}; \quad б) y = \frac{1 - x^3}{x^2}.$$

15. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

- 1) Область определения: $X \in (-\infty; \infty)$.
- 2) Вертикальные асимптоты: —
- 3) Горизонтальные асимптоты: —
- 4) Наклонные асимптоты: $y = x (x \rightarrow \pm\infty)$.
- 5) Стационарные точки: $-2; 2; 3$.
- 6) Точки, где $(y' = \infty)$: 0 .
- 7) Интервалы монотонности:
 - a) возрастания: $(-2; 0), (2; 3)$,
 - б) убывания: $(-\infty; -2); (0; 2); (3; \infty)$.
- 8) Интервалы выпуклости и вогнутости:
 - a) выпуклости: $(2.5; 3.5)$
 - б) вогнутости: $(-\infty; 0), (0; 2.5), (3.5; \infty)$.
- 9) Значение функции в некоторых точках:
 $y(-2) = 3, y(0) = 5, y(2) = -3, y(3) = -1, y(5) = -4.5$.

Вариант 7

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

$$1.1. f(x) = 1 + x^2, x_0 = -1; \quad 1.2. f(x) = \begin{cases} \ln\left(1 - \frac{3\sin x^2}{x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases} x_0 = 0.$$

2. Найти производную функций:

$$2.1. y = x \cdot \ln(x^2 - 1);$$

$$2.2. y = \sqrt{x} - 2^x - 3;$$

$$2.3. y = (1 - \sqrt{x})^3 \cdot e^{\sin^4 x};$$

$$2.4. y = \frac{2 - x^3 + x^5}{e^{x-1}};$$

$$2.5. y = \sqrt[3]{3 - x^2} - \frac{1}{\sqrt[4]{1 - x^3 + x}};$$

$$2.6. y = \cos^2(1 - x^4);$$

$$2.7. y = \log_3(\sqrt{3} - \sqrt{4^x - \sqrt{1 - x}});$$

$$2.8. y = \arccos(\sin(x + \sqrt{e^x - 1})).$$

3. Найти производную степенно-показательной функции $y = (1 - x)^{\ln x}$.

4. Найти производную неявной функции $y=y(x)$: $\sin(x \cdot y) = x^2 + y$.

5. Найти производную параметрической функции: $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = 1 - \sin 2t. \end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке $M_0(x_0; y_0)$:

$$6.1. y = 1 + \sin x - \cos 2x, x_0 = -\frac{\pi}{6}; \quad 6.2. \begin{cases} x = \frac{2t + t^2}{1 + t^3}, \\ y = \frac{2t - t^2}{1 + t^3}, \end{cases} M_0\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

7. Найти производную второго порядка $\frac{d^2 y}{dx^2}$ для функций:

$$7.1. y = (x^2 - 1) \cdot \ln(x^2 - 1);$$

$$7.2. \begin{cases} x = \cos t, \\ y = 1 - \sin 2t. \end{cases}$$

8. Найти дифференциал функции $y = \arcsin x$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y(0.08)$.

9. Найти дифференциал второго порядка функции $y = (x^2 - 1) \cdot \ln(x^2 - 1)$ в точке $x_0 = 2$.

10. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталья:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 6x + 6\sin x}{x^5}; \quad б) \lim_{x \rightarrow 0^+} (x)^{\frac{6}{1+2\ln x}}; \quad в) \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right].$$

11. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0 :

$$a) y = \sqrt[3]{3 + x}, x_0 = -2;$$

$$б) y = \sin(100x^2), x_0 = 0.$$

12. Найти экстремумы функций:

$$a) y = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}; \quad б) y = \frac{\ln^2 x}{x}; \quad в) y = 2x^2 - x^4.$$

13. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

$$a) y = x^3 - 18x^2 + 96x, [0;9]; \quad б) y = \frac{(x+2)^2}{x-1}, [-4;0].$$

14. Исследовать и построить графики функций:

$$a) y = \frac{2}{x^2 - 4}; \quad б) y = xe^{-x}.$$

15. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения: $X \in (-\infty; -1) \cup (-1; \infty).$

2) Вертикальные асимптоты: -1

3) Горизонтальные асимптоты: $-$

4) Наклонные асимптоты: $y = \frac{1}{2}x - 1.$

5) Стационарные точки: $0; -3.$

6) Точки, где $(y' = \infty)$: $-$

7) Интервалы монотонности:

а) возрастания: $(-\infty; -3), (-1; \infty),$

б) убывания: $(-3; -1).$

8) Интервалы выпуклости и вогнутости:

а) выпуклости: $(-\infty; -1), (-1; 0)$

б) вогнутости: $(0; \infty).$

9) Значение функции в некоторых точках:

$$y(-3) = -\frac{27}{8}, y(-2) = -4, y(0) = 0, y(2) = \frac{4}{3}.$$

Вариант 8

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

1.1. $f(x) = 2 + x^3, x_0 = -1$; 1.2. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 3x}{x}, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0, \end{cases} x_0 = 0.$

2. Найти производную функций:

2.1. $y = x^4 \cdot \ln(x-1)$; 2.2. $y = \sqrt{x} - \frac{1}{x} - 3$;

2.3. $y = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right) \cdot e^{\cos^4 x}$; 2.4. $y = \frac{2 + x^3 - x^5}{e^{x+1}}$;

2.5. $y = \sqrt{3x - x^2} - \frac{1}{\sqrt{1 + x^3 + x}}$; 2.6. $y = \cos^3(1 - x^4)$;

2.7. $y = 4^{\sqrt{3} - \sqrt{4^x - \sqrt{1-x}}}$; 2.8. $y = \operatorname{arctg}(\sin(x + \sqrt{e^x - 1}))$.

3. Найти производную степенно-показательной функции $y = (\operatorname{tg} x)^{\ln x}$.

4. Найти производную неявной функции $y=y(x)$: $x \cdot y = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$.

5. Найти производную параметрической функции: $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = 1 - \cos t. \end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке $M_0(x_0; y_0)$:

6.1. $y = x + \sin x + \cos 2x, x_0 = \frac{\pi}{2}$; 6.2. $\begin{cases} x = \frac{3t}{1+t^2}, \\ y = \frac{3t^2}{1+t^2}, \end{cases} M_0\left(\frac{6}{5}; \frac{12}{5}\right).$

7. Найти производную второго порядка $\frac{d^2 y}{dx^2}$ для функций:

7.1. $y = (1 - x^2) \cdot \ln(x^2 - 1)$; 7.2. $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = 1 - \cos t. \end{cases}$

8. Найти дифференциал функции $y = \sqrt[3]{x^2 + 2x + 5}$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y(0.97)$.

9. Найти дифференциал второго порядка функции $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = 1 - \cos t. \end{cases}$ в точке $t_0 = \pi/3$.

10. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталья:

а) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\pi - 2x) \cdot \operatorname{tg} x$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$; в) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + e^x)^{\frac{1}{x}}$.

11. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0 :

а) $y = e^{2+x}$, $x_0 = -2$;

б) $y = \cos(100x^2)$, $x_0=0$.

12. Найти экстремумы функций:

а) $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 3$;

б) $y = \sqrt{2x - x^2}$;

в) $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

а) $y = x^3 - 12x + 7$, $[-3;0]$;

б) $y = \frac{x^3 + 16}{x}$, $[1;4]$.

14. Исследовать и построить графики функций:

а) $y = (x + 4)e^{2x}$;

б) $y = x - \ln(x + 1)$.

15. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения:

$$X \in (-\infty;1) \cup (1;\infty).$$

2) Вертикальные асимптоты:

$$x=1.$$

3) Горизонтальные асимптоты:

$$y=0.$$

4) Наклонные асимптоты:

—

5) Стационарные точки:

$$0; 3.$$

6) Точки, где $(y' = \infty)$:

—

7) Интервалы монотонности:

а) возрастания:

$$(0;1), (1;3),$$

б) убывания:

$$(-\infty;0), (3;\infty).$$

8) Интервалы выпуклости и вогнутости:

а) выпуклости:

$$(-\infty;-0.5), (1;4);$$

б) вогнутости:

$$(-0.5;1), (4;\infty).$$

9) Значение функции в некоторых точках:

$$y(-0.5) = -0.5, y(0) = -1, y(0.5) = 0, y(1.5) = 0, y(3) = 2, y(4) = 1.$$

Вариант 9

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

1.1. $f(x) = 2 - x^3, x_0 = -1$; 1.2. $f(x) = \begin{cases} 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2}, & x \neq 0; \\ \pi, & x = 0, \end{cases} x_0 = 0.$

2. Найти производную функций:

2.1. $y = x^4 \cdot \ln(1 - x)$;

2.2. $y = e^x - \frac{1}{x} - 3x$;

2.3. $y = \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} - \sqrt{3-x} \right) \cdot 5^{\cos^4 x}$;

2.4. $y = \frac{2+x-x^4}{e^{x+1}}$;

2.5. $y = \sqrt[4]{3x-x^3} - \frac{1}{\sqrt{1+x^3}-2x}$;

2.6. $y = \operatorname{tg}^3(1-x-x^4)$;

2.7. $y = 4^{\sqrt{3}-\sqrt{4^x-\sqrt{1-x}}}$;

2.8. $y = \operatorname{arctg}(\sin(x + \sqrt{e^x - 1}))$.

3. Найти производную степенно-показательной функции $y = (\operatorname{tg}^2 x)^{\ln x}$.

4. Найти производную неявной функции $y=y(x)$: $x + y = \operatorname{arctg}(x^2 \cdot y)$.

5. Найти производную параметрической функции: $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = t^2 - 2t. \end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке $M_0(x_0; y_0)$:

6.1. $y = x + \sin x - \cos 2x, x_0 = \pi$; 6.2. $\begin{cases} x = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{4}t^4, \\ y = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3, \end{cases} M_0(0; 0).$

7. Найти производную второго порядка $\frac{d^2 y}{dx^2}$ для функций:

7.1. $y = \sqrt{x^2 - 1} \cdot \ln(x^2 - 1)$;

7.2. $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = t^2 - 2t. \end{cases}$

8. Найти дифференциал функции $y = \sqrt{x^2 + x + 3}$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y(1.97)$.

9. Найти дифференциал второго порядка функции $y = x + \sin x - \cos 2x$ в точке $x_0 = \pi$.

10. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \operatorname{tg} x)$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{\ln x}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos 2x}$.

11. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0 :

$$a) y = e^{2-x}, x_0 = 2;$$

$$б) y = \frac{1}{\sqrt[3]{64-x^3}}, x_0=0.$$

12. Найти экстремумы функций:

$$a) y = 3 - 2x^2 - x^4;$$

$$б) y = \frac{x}{\sqrt[3]{x-4}};$$

$$в) y = e^x + e^{-x}.$$

13. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

$$a) y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}, [-2;0.5];$$

$$б) y = \sqrt[3]{2x^2+1}, [-2;1].$$

14. Исследовать и построить графики функций:

$$a) y = \frac{2-4x^2}{1-4x^2};$$

$$б) y = x^2 e^x.$$

15. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения:

$$X \in (-\infty; -1) \cup (-1; \infty).$$

2) Вертикальные асимптоты:

$$x = -1$$

3) Горизонтальные асимптоты:

—

4) Наклонные асимптоты:

$$y = x - 1.$$

5) Стационарные точки:

$$-2; 0; 2.$$

6) Точки, где $(y' = \infty)$:

$$1.$$

7) Интервалы монотонности:

а) возрастания:

$$(-\infty; -2), (1; \infty);$$

б) убывания:

$$(-2; -1), (-1; 0), (0; 1).$$

8) Интервалы выпуклости и вогнутости:

а) выпуклости:

$$(-\infty; -1), (0; 1), (1; 2);$$

б) вогнутости:

$$(-1; 0), (2; \infty).$$

9) Значение функции в некоторых точках:

$$y(-2) = -3.5, y(0) = 0, y(1) = -2, y(2) = 2.$$

Вариант 10

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

1.1. $f(x) = (2 + x)^2$, $x_0 = 3$; 1.2. $f(x) = \begin{cases} \ln\left(1 - x^3 \sin \frac{2}{x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad x_0 = 0.$

2. Найти производную функций:

2.1. $y = (x + 1)^4 \cdot \ln(x)$; 2.2. $y = 2^x - \sqrt{x} - 3x$;
2.3. $y = \left(\frac{1}{\sqrt{x-4}} - \sqrt{x+4}\right) \cdot 5^{\sin^4 3x}$; 2.4. $y = \frac{2x - 3x^2 - x^3}{x^2 + 1}$;
2.5. $y = \sqrt[3]{3 - x - x^3} - \frac{1}{\sqrt{1 + 3x - 4x^2}}$; 2.6. $y = \operatorname{tg}^5(1 + 4x - x^4)$;
2.7. $y = \log_5(\sqrt{3} - \sqrt{4^x - x^4})$; 2.8. $y = \operatorname{arctg}(\ln x + \sqrt{1 - e^x})$.

3. Найти производную степенно-показательной функции $y = (\operatorname{tg} x)^{\ln^2 x}$.

4. Найти производную неявной функции $y=y(x)$: $\frac{y}{x} = \operatorname{arctg}(x + y)$.

5. Найти производную параметрической функции: $\begin{cases} x = t^2 - 2t, \\ y = t - \cos t. \end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке $M_0(x_0, y_0)$:

6.1. $y = 1 + e^{-3x}$, $x_0 = 0$; 6.2. $\begin{cases} x = t \cos t, \\ y = t \sin t, \end{cases} \quad M_0\left(0; \frac{\pi}{2}\right).$

7. Найти производную второго порядка $\frac{d^2 y}{dx^2}$ для функций:

7.1. $y = (1 - x)^2 \cdot e^{x^2 - 1}$; 7.2. $\begin{cases} x = t^2 - 2t, \\ y = t - \cos t. \end{cases}$

8. Найти дифференциал функции $y = x^{11}$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y(1.021)$.

9. Найти дифференциал второго порядка функции $y = (1 - x)^2 \cdot e^{x^2 - 1}$ в точке $x_0 = 2$.

10. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталья:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right)$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot e^{(x/2)}}{x + e^x}$; в) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$.

11. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0 :

a) $y = \frac{1}{\sqrt[4]{2x - 1}}$, $x_0 = 1$; б) $y = \frac{1 - e^{-x^2}}{x^2}$, $x_0 = 0$.

12. Найти экстремумы функций:

$$a) y = \frac{1}{3}x^3 - x^4; \quad б) y = x \cdot \sqrt[3]{x-1}; \quad в) y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}.$$

13. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

$$a) y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1, \quad [-3;0]; \quad б) y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2, \quad [-3;0].$$

14. Исследовать и построить графики функций:

$$a) y = \ln(x^2 - 4x + 8); \quad б) y = (x-1)e^{3x}.$$

15. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

- 1) Область определения: $X \in (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; \infty)$.
- 2) Вертикальные асимптоты: $x = -2, x = 2$
- 3) Горизонтальные асимптоты: $y = 0 \quad (x \rightarrow \infty), \quad y = -1 \quad (x \rightarrow -\infty)$
- 4) Наклонные асимптоты: $-$
- 5) Стационарные точки: $-4; 0; 4$.
- 6) Точки, где $(y' = \infty)$: $-$
- 7) Интервалы монотонности:
 - a) возрастания: $(-\infty; -4), (-2; 2), (4; \infty)$;
 - б) убывания: $(-4; -2), (2; 4)$.
- 8) Интервалы выпуклости и вогнутости:
 - a) выпуклости: $(-5; -2), (-2; 0), (5; \infty)$;
 - б) вогнутости: $(-\infty; -5), (0; 2), (2; 5)$.
- 9) Значение функции в некоторых точках:
 $y(-5) = 0, y(-4) = 1, y(-3) = 0, y(0) = 0, y(3) = -1, y(4) = -2, y(5) = -1$.