Вариант 11

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

   1.1. $f(x)=(1+x)^2$, $x_0=4$; 1.2. $f(x)=\begin{cases} arctgx\cdot\sin\dfrac{7}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0,\end{cases}$ $x_0=0$.

2. Найти производную функций:

   2.1. $y=x^4\cdot e^{x+1}$; 2.2. $y=3^x-\sqrt{1+x}-x^3$;

   2.3. $y=(\dfrac{1}{\sqrt{4-x}}-\sqrt{\ln x+4})\cdot 5^{\sin^2 3x}$; 2.4. $y=\dfrac{2-3x^3+x^4}{\sqrt{1-x}}$;

   2.5. $y=\sqrt[3]{3+x-2x^3}-\dfrac{1}{\cos(1-x)-4x^2}$; 2.6. $y=ctg^5(1-x^4)$;

   2.7. $y=\log_5(\sqrt{3}-\sin 4x+\cos^4 x)$; 2.8. $y=arctg\sqrt{1-e^x}$.

3. Найти производную степенно-показательной функции $y=(tgx)^{\sqrt{x}}$.

4. Найти производную неявной функции $y=y(x)$: $\dfrac{y}{x}=\sin(x\cdot y)$.

5. Найти производную параметрической функции: $\begin{cases} x=t^2-2t,\\ y=\sin t-t.\end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке M_0 $(x_0; y_0)$:

   6.1. $y=1+\ln(x-1)-x^2$, $x_0=2$; 6.2. $\begin{cases} x=\dfrac{1+t}{t^2},\\ y=\dfrac{3}{2t^2}+\dfrac{2}{t},\end{cases}$ $M_0\left(\dfrac{3}{4};\dfrac{11}{8}\right)$.

7. Найти производную второго порядка $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для функций:

   7.1. $y=(1-x)^2\cdot\sin(x^2-1)$; 7.2. $\begin{cases} x=t^2-2t,\\ y=\sin t-t.\end{cases}$

8. Найти дифференциал функции $y=x^{21}$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y(1.998)$.

9. Найти дифференциал второго порядка функции $y=(1-x)^2\cdot\sin(x^2-1)$ в точке $x_0=-1$.

10. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

    а) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)$; *б*) $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{tg\left(\pi x/2\right)}$;

    в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\left(e^x+e^{-x}\right)\cdot\cos x}{x^4}$.

11. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0:

а) $y=\cos^2 x,\ x_0=\dfrac{\pi}{4}$; *б*) $y=\dfrac{1}{\sqrt[4]{16+x^4}}$, $x_0=0$.

12. Найти экстремумы функций:

а) $y=x-\ln(1+x^2)$; *б*) $y=\dfrac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}$; *в*) $y=x-\sqrt[3]{x^2}$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

а) $y=arctg\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right),\quad [0;1]$; *б*) $y=\dfrac{x-3}{x^2+7},\quad [2;8]$.

14. Исследовать и построить графики функций:

а) $y=x^3\ln x$; *б*) $y=\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^2$.

15. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения: $X\in(-\infty;\infty)$.
2) Вертикальные асимптоты: –
3) Горизонтальные асимптоты: –
4) Наклонные асимптоты: $y=-0.5x$. –
5) Стационарные точки: 0; 4.
6) Точки, где $(y'=\infty)$: –3; 3.
7) Интервалы монотонности:
   а) возрастания: $(-3;0),(3;4)$;
   б) убывания: $(-\infty;-3),(0;3),(4;\infty)$.
8) Интервалы выпуклости и вогнутости:
   а) выпуклости: $(-\infty;-3),(-3;3),(3;5)$;
   б) вогнутости: $(5;\infty)$.
9) Значение функции в некоторых точках:
   $y(-4)=0$, $y(-3)=-4$, $y(-2)=0$, $y(0)=4$, $y(2)=0$, $y(3)=-4$, $y(4)=0$, $y(5)=2$.

Вариант 12

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

   1.1. $f(x)=x^2$, $x_0=-3$; 1.2. $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1+\ln\left(1+x^2\right)\cos\frac{1}{x}}-1, & x\neq 0;\\ 0, & x=0,\end{cases}$ $x_0=0$.

2. Найти производную функций:

   2.1. $y=(1-x)^2\cdot 2^{x+1}$; 2.2. $y=\ln x+\frac{1}{x}-\cos x$;

   2.3. $y=(\frac{1}{9-x^2}-\sqrt{e^x+x^3})\cdot tg^2 3x$; 2.4. $y=\frac{2+3x^2+5x^4}{\sqrt{1+x}}$;

   2.5. $y=\sqrt[3]{3-2x^3}-\frac{1}{\sin\,(1-x)-4x^2}$; 2.6. $y=ctg^4(1+x^5)$;

   2.7. $y=\log_2(\sqrt{3}-\cos 4x+\sin^4 x)$; 2.8. $y=arcctg\sqrt{1-e^x}$.

3. Найти производную степенно-показательной функции $y=(\sin x)^{\sqrt{1-x}}$.

4. Найти производную неявной функции $y=y(x)$: $\frac{y}{x}=x\sin y$.

5. Найти производную параметрической функции: $\begin{cases}x=\frac{1}{t^2-t},\\ y=t+t^2.\end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке M_0 $(x_0;\, y_0)$:

   6.1. $y=1+tg^2 x,\ x_0=\pi$; 6.2. $\begin{cases}x=1+\sin t,\\ y=1-\cos 2t,\end{cases}$ $M_0\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$.

7. Найти производную второго порядка $\frac{d^2y}{dx^2}$ для функций:

   7.1. $y=(x-1)^2\cdot\cos(x^2-1)$; 7.2. $\begin{cases}x=\frac{1}{t^2+t},\\ y=t+t^2.\end{cases}$

8. Найти дифференциал функции $y=x^6$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y(2.01)$.

9. Найти дифференциал второго порядка функции $y=(x-1)^2\cdot\cos(x^2-1)$ в точке $x_0=-1$.

10. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

    а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^x-x^2\right)$; *б)* $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^{\frac{a}{\ln 2(x-1)}}$; *в)* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\pi-arctgx}{e^{\frac{3}{x}}-1}$.

11. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0:

а) $y=\sin^2 x,\ x_0=\frac{\pi}{4}$; *б*) $y=x\cdot\ln(1-2x^2)$, $x_0=0$.

12. Найти экстремумы функций:

а) $y=\frac{x^3}{3}-x^2-3x$; *б*) $y=\frac{x}{1+x^2}$; *в*) $y=x\cdot e^{-x}$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

а) $y=x^4+4x,\ \ [-2;2]$; *б*) $y=\sqrt{100-x^2},\ \ [-6;8]$.

14. Исследовать и построить графики функций:

а) $y=\frac{x^3+16}{x}$; *б*) $y=x^2-2\ln x$.

15. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения: $X\in(-\infty;3)\cup(3;\infty)$.

2) Вертикальные асимптоты: $x = 3$.

3) Горизонтальные асимптоты: $y = 0$.

4) Наклонные асимптоты: – –

5) Стационарные точки: –2; 2; 5.

6) Точки, где $(y'=\infty)$: 0.

7) Интервалы монотонности:

а) возрастания: $(-\infty;-2),(0;2),(2;3),(3;5)$;

б) убывания: $(-2;0),(5;\infty)$.

8) Интервалы выпуклости и вогнутости:

а) выпуклости: $(-3;0),(0;2),(3;6)$;

б) вогнутости: $(-\infty;-3),(2;3),(6;\infty)$.

9) Значение функции в некоторых точках:

$y(-3)=1, y(-2)=2, y(0)=-4, y(2)=1, y(5)=2, y(6)=1$.

Вариант 13

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

1.1. $f(x) = 2 + x$, $x_0 = 10$;

1.2. $f(x) = \begin{cases} 3^{\frac{\sin x^2}{x}} - 1, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ $x_0=0$.

2. Найти производную функций:

2.1. $y = x^4 \cdot \ln(1-x)$;

2.2. $y = 2^x - ctgx + x^2$;

2.3. $y = (1-x)^3 \cdot e^{\sqrt[5]{x-1}}$;

2.4. $y = \dfrac{3x^4 + 2x^3 - 1}{\sqrt{1-x^3}}$;

2.5. $y = \sqrt{3x^2 - 1} - \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - x - 1}}$;

2.6. $y = tg^2(1-x^3)$;

2.7. $y = \ln(1 - \sqrt{5^x - \sqrt{x}})$;

2.8. $y = arctg(tg^2 x + \sqrt{1 - \sin x})$.

3. Найти производную степенно-показательной функции $y = (\sin x)^{\frac{1}{\sqrt{1-x}}}$

4. Найти производную неявной функции $y=y(x)$: $\dfrac{y}{x} = y \sin x$.

5. Найти производную параметрической функции: $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = 1 - tg\, t. \end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке M_0 $(x_0; y_0)$:

6.1. $y = 10 + x(3 - 2x^3)$, $x_0 = -1$;

6.2. $\begin{cases} x = \dfrac{1+t}{t}, \\ y = \dfrac{t-1}{t}, \end{cases}$ $M_0(0;\, 2)$.

7. Найти производную второго порядка $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для функций:

7.1. $y = (x-1)^2 \cdot \cos(1-x^2)$;

7.2. $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = 1 - tg\, t. \end{cases}$

8. Найти дифференциал функции $y = \sqrt[3]{x^2}$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y(1.03)$.

9. Найти дифференциал второго порядка функции $y = x^2 \cdot \cos(1 - x^2)$ в точке $x_0 = -1$.

10. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

$а)$ $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{ctg(x-\alpha)}{\ln(x-\alpha)}$; $б)$ $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{x^2-1} \right)$; $в)$ $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} (tgx)^{tg 2x}$.

11. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0:

а) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-2}}$, x_0=1; *б*) $y=x\cdot\sin 25x^2$, x_0=0.

12. Найти экстремумы функций:

а) $y=2x+3\cdot\sqrt[3]{x^2}$; *б*) $y=\dfrac{(x-2)(8-x)}{x^2}$; *в*) $y=x\cdot\ln x$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

а) $y=81x-x^4$, $[-1;4]$; *б*) $y=\dfrac{4-x^2}{4+x^2}$, $[-1;3]$.

14. Исследовать и построить графики функций:

а) $y=x^{\frac{2}{3}}\cdot e^{-x}$; *б*) $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$.

15. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения: $X\in(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;\infty)$.
2) Вертикальные асимптоты: $x=-1$, $x=1$.
3) Горизонтальные асимптоты: –
4) Наклонные асимптоты: $y=x\ (x\to\pm\infty)$. –
5) Стационарные точки: –2; 0; 2.
6) Точки, где $(y'=\infty)$: –3, 3.
7) Интервалы монотонности:
   а) возрастания: $(-\infty;-3),(-2;-1),(1;2),(3;\infty)$;
   б) убывания: $(-3;-2),(-1;1),(2;3)$.
8) Интервалы выпуклости и вогнутости:
   а) выпуклости: $(0;1),(1;3),(3;\infty)$;
   б) вогнутости: $(-\infty;-3),(-3;-1),(-1;0)$.
9) Значение функции в некоторых точках:
   $y(-3)=-1$, $y(-2)=-3$, $y(0)=0$, $y(2)=3$, $y(3)=1$.

Вариант 14

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

1.1. $f(x)=(2+x)^2$, $x_0=8$; 1.2. $f(x)=\begin{cases}10^{\frac{\arcsin x^2}{x}}-1, & x\neq 0;\\ 0, & x=0,\end{cases}$ $x_0=0$.

2. Найти производную функций:

2.1. $y=x\cdot\ln(1-x^2)$; 2.2. $y=7^x-\arccos x+x^7$;

2.3. $y=(1-x^3)\cdot e^{\sqrt{x-1}}$; 2.4. $y=\dfrac{x-2x^3+3}{\sqrt{1-x^3}}$;

2.5. $y=\sqrt[3]{1-3x^2}-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-x}}$; 2.6. $y=\sin^3(1-x^2)$;

2.7. $y=\ln(x^2+\sqrt{5^x-\sqrt{x}})$; 2.8. $y=arctg(\cos^2 x+\sqrt{1-tgx})$.

3. Найти производную степенно-показательной функции $y=(\sin\sqrt{x})^x$.

4. Найти производную неявной функции $y=y(x)$: $\dfrac{x}{y}=x\sin y$.

5. Найти производную параметрической функции: $\begin{cases}x=tg\,2t,\\ y=1-\sin 2t.\end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке M_0 $(x_0; y_0)$:

6.1. $y=x+\sin\dfrac{x}{2}-2\cos\dfrac{x}{4}$, $x_0=2\pi$; 6.2. $\begin{cases}x=1-t^2,\\ y=t-t^3,\end{cases}$ $M_0(-3;-6)$.

7. Найти производную второго порядка $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для функций:

7.1. $y=x^3\cdot\ln^2 x$; 7.2. $\begin{cases}x=tg\,2t,\\ y=1-\sin 2t.\end{cases}$

8. Найти дифференциал функции $y=\sqrt{4x-1}$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y(2.56)$.

9. Найти дифференциал второго порядка функции $y=x^3\cdot\ln^2(x+1)$ в точке $x_0=0$.

10. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{\dfrac{1}{x(x-1)}+\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{1}{x}\right)$; *б*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{2x}+x\right)^{\frac{1}{x}}$.

11. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0:

а) $y=\sqrt[3]{x}$, $x_0= -1$; *б*) $y=x^3\cdot e^{-2x}$, $x_0=0$.

12. Найти экстремумы функций:

а) $y=x^2(x-12)^2$; *б*) $y=\dfrac{16}{x(4-x^2)}$; *в*) $y=\sqrt{x}\cdot\ln x$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

а) $y=x^3-3x+1,\ \ [0;2]$; *б*) $y=\dfrac{x^2}{x^2-4},\ \ (-2;3]$.

14. Исследовать и построить графики функций:

а) $y=\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$; *б*) $y=\ln(2x^2+3)$.

15. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения: $X\in(-\infty;-1)\cup(-1;\infty)$.

2) Вертикальные асимптоты: $x=-1$.

3) Горизонтальные асимптоты: –

4) Наклонные асимптоты: $y=-\dfrac{1}{2}x+1$. –

5) Стационарные точки: –2; 0; 2.

6) Точки, где $(y'=\infty)$: 1.

7) Интервалы монотонности:

а) возрастания: $(-2;-1),(1;2)$;

б) убывания: $(-\infty;-2),(-1;1),(2;\infty)$.

8) Интервалы выпуклости и вогнутости:

а) выпуклости: $(-\infty;-3),(0;1),(1;3)$;

б) вогнутости: $(-3;-1),(-1;0),(3;\infty)$.

9) Значение функции в некоторых точках:

$y(-3)=1, y(-2)=0, y(0)=0, y(1)=-2, y(2)=1, y(3)=0$.

Вариант 15

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

1.1. $f(x)=x^3$, $x_0=-2$; 1.2. $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{4arctg^2 x}{x}}-1, & x\neq 0; \\ 0, & x=0, \end{cases}$ $x_0=0$.

2. Найти производную функций:

2.1. $y=x+1+\ln(1-x)$; 2.2. $y=2^{x+1}-tgx+x^3$;

2.3. $y=(1-x^2)^3\cdot e^{\sqrt[5]{x-1}}$; 2.4. $y=\dfrac{3+x^4-2x^3}{\sqrt{1-x^3}}$;

2.5. $y=\sqrt[3]{3x^2-x}-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x-1}}$; 2.6. $y=ctg^2(1-2x^3)$;

2.7. $y=\ln(5^x-\sqrt{1-\sqrt{x}})$; 2.8. $y=arctg(\sin^4 x+\sqrt{1-\cos x})$.

3. Найти производную степенно-показательной функции $y=(\sin\sqrt{x})^{\sqrt{x}}$.

4. Найти производную неявной функции $y=y(x)$: $\dfrac{x}{y}=y\sin x$.

5. Найти производную параметрической функции: $\begin{cases} x=t+e^t, \\ y=t-e^{-t}. \end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке M_0 $(x_0; y_0)$:

6.1. $y=1+x^3+x^5$, $x_0=-1$; 6.2. $\begin{cases} x=t(1-\sin t), \\ y=t\cos t, \end{cases}$ $M_0(0;\,0)$.

7. Найти производную второго порядка $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для функций:

7.1. $y=(1-x)^3\cdot\ln^2(x-1)$; 7.2. $\begin{cases} x=t+e^t, \\ y=t-e^{-t}. \end{cases}$

8. Найти дифференциал функции $y=x^7$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y(2.002)$.

9. Найти дифференциал второго порядка функции $y=x\cdot\ln^2(x+1)$ в точке $x_0=1$.

10. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$; *б*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cdot\sqrt{\cos x}}{x^2}$; *в*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+e^x\right)^{tg\frac{2}{x}}$.

11. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0:

а) $y=\sqrt[4]{2-x}$, $x_0=1$; *б*) $y=x^4+\sin x^2$, $x_0=0$.

12. Найти экстремумы функций:

а) $y = x^3 + x^2 + 3$; *б*) $y = \dfrac{x^2 + 6x + 13}{x - 3}$; *в*) $y = x^2 \cdot e^{-x}$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

а) $y = x^3(8 - x), \ [0;7]$; *б*) $y = \dfrac{3 - x}{x^2 + 7}, \ [-3;2]$.

14. Исследовать и построить графики функций:

а) $y = \dfrac{x^3 - 1}{4x^2}$; *б*) $y = e^{3x - x^2}$.

15. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения: $X \in (-\infty;\infty)$.
2) Вертикальные асимптоты: –
3) Горизонтальные асимптоты: $y = -1 \quad (x \to +\infty)$, $y = 0 \quad (x \to -\infty)$.
4) Наклонные асимптоты: – –
5) Стационарные точки: –4; –2; 0; 2; 4.
6) Точки, где $(y' = \infty)$: –1; 1.
7) Интервалы монотонности:
   а) возрастания: $(-\infty;-4), (-2;-1), (0;1), (2;4)$;
   б) убывания: $(-4;-2), (-1;0), (1;2), (4;\infty)$.
8) Интервалы выпуклости и вогнутости:
   а) выпуклости: $(-5;-3), (3;5)$;
   б) вогнутости: $(-\infty;-5), (-3;-1), (-1;1), (1;3)$.
9) Значение функции в некоторых точках: $y(-5) = ½$, $y(-4) = 1$, $y(-3) = 0$, $y(-2) = -1$, $y(-1) = 2$, $y(0) = 1$, $y(2) = -2$, $y(3) = -1$, $y(4) = 0$, $y(5) = -½$.