Глава 3

ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ. РЯДЫ ФУРЬЕ

3.1. Числовые ряды

Пусть задана бесконечная последовательность чисел

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$$

Числовым рядом называется составленное из этих чисел выражение

$$u_1 + u_2 \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \,.$$

Числа $u_1, u_2, u_3, \ldots$ называются *членами ряда*, u_n – *общим членом ряда*.

Конечная сумма

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

называется n-й *частной суммой ряда*. Если существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, ряд называется *сходящимся*, в противном случае – *расходящимся*. Если ряд сходится, число $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ называется *суммой ряда*, а разность

$$r_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots$$

называется *остатком ряда* (после n-го члена).

Необходимый признак сходимости: если ряд сходится, то его общий член U_n стремится к нулю при $n \to \infty$.

Замечание. Данный признак не является достаточным, т. е. если $U_n \to 0$, то ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся; если U_n не стремится к нулю, то ряд расходится всегда.

Достаточные признаки сходимости числовых рядов (сравнения, Даламбера, Коши) применяются для исследования сходимости только знакоположительных рядов.

Признак сравнения. Если даны два знакоположительных ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n + \ldots \tag{130}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} V_n = V_1 + V_2 + \ldots + V_n + \ldots, \qquad (131)$$

причем члены ряда (130) не превосходят соответствующих членов ряда (131) $U_n \le V_n$, то: а) из сходимости ряда (131) следует сходимость ряда (130); б) из расходимости ряда (130) следует расходимость ряда (131).

Замечание. Для выполнения признака сравнения достаточно, чтобы неравенства выполнялись, начиная с некоторого номера N, т. е. для всех $n \ge N$.

Для сравнения часто используются ряды:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot q^n - \begin{cases} \text{при } |q| < 1 - \text{сходящийся (геометрическая прогрессия);} \\ \text{при } |q| \ge 1 - \text{расходящийся;} \end{cases}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n^{\alpha}} - \begin{cases} \text{при } \alpha > 1 - \text{сходящийся;} \\ \text{при } \alpha \le 1 - \text{расходящийся.} \end{cases}$

В частности, гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – расходится.

Предельная форма признака сходимости. Если для рядов (130) и (131) существует конечный, отличный от нуля $\lim_{n\to\infty} \frac{U_n}{V_n} = k > 0$, то рассматриваемые ряды одновременно сходятся или расходятся.

Признак Даламбера. Если для ряда с положительными членами $U_1+U_2+\ldots+U_n+\ldots$ существует $\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = l$, то при $l < 1$ ряд сходится, при $l > 1$ ряд расходится, при $l = 1$ требуются дополнительные исследования.

Радикальный признак Коши. Если для ряда с положительными членами $U_1+U_2+\ldots+U_n+\ldots$ существует $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n} = l$, то при $l < 1$ ряд сходится, при $l > 1$ ряд расходится, при $l = 1$ требуются дополнительные исследования.

Интегральный признак Коши. Если функция $f(x)$ непрерывная, положительная, невозрастающая для $x \ge a$ и, начиная с некоторого N, $U_n = f(n)$, то ряд $U_1 + U_2 + \ldots + U_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} U_n$ и несобственный интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ одновременно сходятся или расходятся:

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + (-1)^{n+1}a_n + ..., \qquad (132)$$

где все $a_n > 0$, называется знакочередующимся.

Теорема Лейбница. Если члены знакочередующегося ряда удовлетворяют условиям

$$a_1 > a_2 > a_3 > ... > a_n > ... \qquad (133)$$

и

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \qquad (134)$$

то такой ряд сходится.

Ряд, удовлетворяющий указанным условиям, называется рядом Лейбница.

Остаток $r_n = (-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1} a_{n+2} + ...$ ряда Лейбница имеет знак своего первого члена и меньше его по абсолютной величине, т. е. $|r_n| < a_{n+1}$.

Это неравенство удобно использовать для оценки погрешности, получаемой при замене суммы S ряда Лейбница ее приближенным значением

$$S_n = a_1 - a_2 + ... + (-1)^{n+1}a_n.$$

Замечание. Теорема Лейбница справедлива, если неравенства (133) выполняются, начиная с некоторого N.

Если ряд, составленный из абсолютных величин членов знакочередующегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$, т. е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, сходится, то знакочередующийся ряд сходится абсолютно.

Если же ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ по признаку Лейбница сходится, но ряд из абсолютных величин его членов расходится, то знакочередующийся ряд сходится условно.

Замечание. Аналогично дается определение условной и абсолютной сходимости для знакопеременных рядов.

Типовые примеры и их решения

Пример 1. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{9n^2-3n-2}$.

Решение. Вначале разложим знаменатель общего члена ряда на множители, используя корни квадратного уравнения:

$$U_n=\frac{1}{9n^2-3n-2}=\frac{1}{9\left(n-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(n+\frac{1}{3}\right)}=\frac{1}{(3n-2)\cdot(3n+1)}.$$

Давая n последовательно значения 1, 2, 3, ..., получим

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{1\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}.$$

Для нахождения суммы ряда надо найти предел при $n\to\infty$ n-й частичной суммы

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}.$$

Для того чтобы придать S_n более удобный вид для перехода к пределу, заменим дробь суммой простейших дробей:

$$\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{A}{3n-2}+\frac{B}{3n+1}.$$

Приводя правую часть к общему знаменателю и приравнивая числители, получим

$$1=A\cdot(3n+1)+B\cdot(3n-2).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях n, получим

$$\begin{array}{c|llll} n & 0=3A+3B, & A=-B & & \\ n^0 & 1=A-2B, & 1=-3B, & B=-\dfrac{1}{3}, & A=\dfrac{1}{3}; \end{array}$$

поэтому

$$\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{1}{3\cdot(3n-2)}-\frac{1}{3\cdot(3n+1)}.$$

Полагая здесь последовательно n = 1, 2, 3, ..., n, получим

$$\frac{1}{1\cdot 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{12},\qquad \frac{1}{4\cdot 7}=\frac{1}{12}-\frac{1}{21},\qquad \frac{1}{7\cdot 10}=\frac{1}{21}-\frac{1}{30},\qquad \ldots,$$

$$\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{1}{3(3n-2)}-\frac{1}{3(3n+1)},$$

следовательно,

$$S_n=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{21}\right)+\left(\frac{1}{21}-\frac{1}{30}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{3(3n-2)}-\frac{1}{3(3n+1)}\right).$$

Очевидно, что в этой сумме все слагаемые попарно уничтожаются, кроме первого и последнего, поэтому

$$S_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{3(3n+1)},\ \text{откуда}\ \lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3(3n+1)}\right)=\frac{1}{3},$$

т. е. ряд сходится, и его сумма равна $\frac{1}{3}$.

Ответ: $S=\frac{1}{3}$.

Пример 2. Установить, выполняется ли необходимый признак для рядов

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{n};\qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2}.$$

Решение. 1. Общий член ряда $U_n=n\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{n}$.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} U_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\cdot\frac{1}{n}\right)=1$, то необходимое условие сходимости ряда не выполняется и, следовательно, этот ряд расходится.

2. Общий член ряда имеет вид $U_n=\frac{n+1}{n^2}$, здесь

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=0.$$

Необходимое условие сходимости ряда выполняется, ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Пример 3. Используя признак сравнения, исследовать на сходимость следующие ряды:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(1+n^2)}},\quad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} tg\,\frac{\pi}{n+2},\quad 3)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\cdot 2^{n+1}}.$$

1. Общий член данного ряда $U_n=\dfrac{1}{\sqrt{n(1+n^2)}}<\dfrac{1}{\sqrt{n^3}}=\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}=V_n$, так как с уменьшением знаменателя дробь увеличивается; но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ – сходящийся (ряд вида 2, $\alpha=\dfrac{3}{2}>1$), поэтому данный ряд сходится.

2. Общий член данного ряда $V_n=\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi}{n+2}>\dfrac{1}{n}=U_n$, но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ – гармонический, расходящийся, следовательно, данный ряд расходится.

3. Общий член данного ряда $U_n=\dfrac{1}{(2n+1)\cdot 2^{n+1}}$ меньше общего члена сходящегося ряда геометрической прогрессии $V_n=\dfrac{1}{2^{n+1}}$, поэтому данный ряд сходится.

Пример 4. Пользуясь предельной формой признака сравнения, исследовать на сходимость следующие ряды:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right),\qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n},\qquad 3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)^3}{n^4+3n^2+2}.$$

Решение. 1. При $n\to\infty$ бесконечно малая величина $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ эквивалентна $\dfrac{1}{n}$, поэтому, беря для сравнения ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$, получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1>0.$$

Взятый для сравнения гармонический ряд $\sum_{n=}^{\infty}\frac{1}{n}$ – расходится, следовательно, и данный ряд расходится.

2. При $n\to\infty$ бесконечно малая величина $\sin\frac{\pi}{3^n}$ эквивалентна $\frac{\pi}{3^n}$, поэтому, беря для сравнения геометрическую прогрессию $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$, получим $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n\sin\frac{\pi}{3^n}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n\cdot\frac{\pi}{3^n}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\pi>0$.

Взятый для сравнения ряд сходится (он имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty}q^n$, где $q=\frac{2}{3}<1$), следовательно, и данный ряд сходится.

3. Данный ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{P_k(n)}{Q_l(n)}$.

Здесь $P_k(n)$ – многочлен от n степени k, а $Q_l(n)$ – многочлен от n степени l. Вопрос о сходимости рядов такого вида полностью исчерпывается сравнением с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$, где $\alpha = l - k$. В нашем случае в числителе многочлен степени $k = 3$, степень знаменателя $l = 4$. Сравниваем данный ряд с гармоническим рядом:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n-1)^3}{n^4+3n^2+2}\Bigg/\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)^3\cdot n}{n^4+3n^2+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^3}{1+\frac{3}{n^2}+\frac{2}{n^4}}=1>0;$$

так как гармонический ряд расходится, то расходится и данный ряд.

Пример 5. Пользуясь признаком Даламбера, исследовать на сходимость следующие ряды:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!},\qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{3^n},\qquad 3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$

Решение. 1. Для данного ряда $U_n=\dfrac{n^n}{n!}$, $U_{n+1}=\dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$, поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}\cdot n!}{(n+1)\cdot n!\cdot n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e>1,$$

так как e = 2,718... , поэтому ряд расходится.

2. Для данного ряда $U_n=\dfrac{n(n+1)}{3^n}$, $U_{n+1}=\dfrac{(n+1)(n+2)}{3^{n+1}}$, поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)\cdot 3^n}{3^{n+1}\cdot n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{3\cdot n}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)=\frac{1}{3}<1;$$

следовательно, ряд сходится.

3. Для данного ряда $U_n=\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$, $U_{n+1}=\dfrac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}$, поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{((n+1)!)^2(2n)!}{(2n+2)!(n!)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n!(n+1))^2\cdot(2n)!}{(2n)!(2n+1)\cdot(2n+2)(n!)^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)\cdot(n!)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{2}{n}\right)}=\frac{1}{4}<1,$$

следовательно, ряд сходится.

Пример 6. Пользуясь радикальным признаком Коши, исследовать на сходимость следующие ряды:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{3n^2-1}\right)^n,\qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2},\qquad 3)\ \sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\sin^n\frac{\pi}{2n}.$$

Решение. 1. Для данного ряда

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n^2+1}{3n^2-1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{3n^2-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n^2}}{3-\frac{1}{n^2}} = \frac{2}{3} < 1;$$

следовательно, ряд сходится.

2. Для данного ряда

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{\frac{n-1}{n}}}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{1-\frac{1}{n}}}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{2}\cdot e > 1;$$

следовательно, ряд расходится.

3. Для данного ряда

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n\cdot\sin^n\frac{\pi}{2n}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{2n}.$$

Учтем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{2n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n} = 0$; $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = \lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = (\infty^0)$.

Для раскрытия неопределенности вида ∞^0 введем обозначение $y = n^{\frac{1}{n}}$ и найдем вначале $\lim\limits_{n\to\infty}\ln y = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1} = 0.$

Так как ln y – функция непрерывная, то $\lim\limits_{n\to\infty}(\ln y) = \ln\left(\lim\limits_{n\to\infty} y\right)$;

следовательно, $\ln\left(\lim\limits_{n\to\infty} y\right) = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y = e^0 = 1$. Итак , $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$.

Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n\cdot\sin^n\frac{\pi}{2n}} = 1\cdot 0 = 0 < 1$; следовательно, ряд сходится.

Пример 7. Пользуясь интегральным признаком Коши, исследовать на сходимость следующие ряды:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}, \qquad 2)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}, \qquad 3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}.a.$$

Решение. 1. Для данного ряда следует рассмотреть несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x}$. Так как

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{a\to\infty}\int\limits_1^{a}\frac{dx}{x} = \lim_{a\to\infty}\ln|x|\Big|_1^a = \lim_{a\to\infty}(\ln a - \ln 1) = \infty,$$

т. е. интеграл и исходный гармонический ряд расходятся.

2. Для данного ряда

$$\int\limits_2^{\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^2} = \lim_{a\to\infty}\int\limits_2^{a}\frac{d(\ln x)}{(\ln x)^2} = \lim_{a\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln x}\right)\Bigg|_2^a =$$

$$= \lim_{a\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln a}+\frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{1}{\ln 2};$$

следовательно, ряд сходится.

3. Для данного ряда

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}} = -2\lim_{a\to\infty}\int\limits_1^{a}e^{-\sqrt{x}}d(-\sqrt{x}) = -2\lim_{a\to\infty}e^{-\sqrt{x}}\Big|_1^a =$$

$$= -2\lim_{a\to\infty}\left(\frac{1}{e^{\sqrt{x}}}-\frac{1}{e}\right) = \frac{2}{e};$$

следовательно, ряд сходится.

Пример 8. Выяснить, какие из указанных рядов сходятся абсолютно, какие условно, какие расходятся.

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n,$$

$$3)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^3}{2^n}, \qquad 4)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n}.$$

Решение. 1. Данный знакочередующийся ряд сходится по теореме Лейбница, так как

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \ldots > \frac{1}{n} > \ldots \ \text{ и } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Этот ряд сходится условно, так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, составленный из абсолютных величин членов данного ряда, расходится (гармонический ряд).

2. Данный знакочередующийся ряд сходится по теореме Лейбница, так как

$$\frac{1}{3} > \left(\frac{2}{5}\right)^2 > \left(\frac{3}{7}\right)^3 > \ldots > \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n > \ldots$$

и
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2+\frac{1}{n}}\right)^n = 0.$$

Сходимость соответствующего знакоположительного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ исследуем с помощью радикального признака Коши

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} < 1,$$

следовательно, ряд сходится и исходный ряд сходится абсолютно.

3. Данный знакочередующийся ряд сходится по теореме Лейбница, так как, начиная с $n = 4$,

$$\frac{4^3}{2^4} > \frac{5^3}{2^5} > \frac{6^3}{2^6} > \ldots > \frac{n^3}{2^n} > \ldots \text{ и } \lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{2^n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{2^n\cdot\ln 2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{6n}{2^n\cdot\ln^2 2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{6}{2^n\ln^3 2} = 0.$$

Сходимость соответствующего знакоположительного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}$ исследуем с помощью признака Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3\cdot 2^n}{2^{n+1}\cdot n^3}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3}{n^3}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3=\frac{1}{2}<1,$$

следовательно, ряд сходится и исходный ряд сходится абсолютно.

4. Данный ряд расходится, так как

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1\neq 0.$$

Пример 9. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряд

$$\frac{1}{3^2}-\frac{1}{6^2}+\frac{1}{9^2}-\frac{1}{12^2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{(3n)^2}+\ldots\quad .$$

Найти приближенно (с точностью 0,01) сумму этого ряда.

Решение. Все условия теоремы Лейбница для данного знакочередующегося ряда здесь выполнены: члены по модулю монотонно убывают и стремятся к нулю.

Сходимость соответствующего знакоположительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n)^2}$. Легко обнаружить, если применить предельный признак сравнения со сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(3n)^2}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(3n)^2}=\frac{1}{9}>0.$$

Из чего следует, что ряд сходится и исходный ряд сходится абсолютно.

Для того чтобы найти с точностью 0,01 сумму данного ряда, надо взять столько его членов, чтобы следующий член ряда был по модулю меньше 0,01. Для данного ряда модуль четвертого члена $\frac{1}{12^2}=\frac{1}{144}<0{,}01$, поэтому с точностью 0,01: $S=\frac{1}{3^2}-\frac{1}{6^2}+\frac{1}{9^2}=\frac{1}{9}-\frac{1}{36}+\frac{1}{81}=\frac{31}{324}\approx 0{,}1$.

Ответ: 0,1.

3.2. Функциональные ряды

Пусть задана последовательность функций $U_1(x)$, $U_2(x)$, ... , $U_n(x)$, ..., имеющих общую область определения. Функциональным рядом называется составленное из этих функций выражение $U_1(x) + U_2(x) + ... + U_n(x) + ... = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$. При конкретном значении x функциональный ряд становится числовым, который либо сходится, либо расходится.

Совокупность значений аргумента x, при которых функциональный ряд сходится, называется областью сходимости ряда.

Область сходимости функционального ряда обычно удается найти с помощью известных признаков сходимости.

Сумма функционального ряда $S(x)$ определяется аналогично сумме числового ряда, и является функцией от x.

Сумму ряда можно представить в виде

$$S(x) = S_n(x) + r_n(x),$$

где $S_n(x) = U_1(x) + U_2(x)+...+U_n(x)$ – n-я частичная сумма ряда,

$r_n(x)=U_{n+1}(x)+U_{n+2}(x)+...$ – остаток ряда.

Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ называется равномерно сходящимся в некоторой области X, если для каждого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое целое положительное число N, что при $n \geq N$ выполняется неравенство $|r_n(x)| < \varepsilon$ для всех x из области X.

При этом сумма $S(x)$ равномерно сходящегося функционального ряда есть непрерывная функция.

Достаточным признаком равномерной сходимости является признак Вейерштрасса.

Признак Вейерштрасса. Если члены функционального ряда

$$U_1(x)+U_2(x)+...+U_n(x)+...$$

по абсолютной величине не превышают в некоторой области X соответствующих членов сходящегося знакоположительного ряда

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... ,$$

то функциональный ряд в области X сходится равномерно.

Функциональные ряды обладают важными свойствами:

1) если функциональный ряд с непрерывными членами равномерно сходится на отрезке $[a, b]$, то его можно почленно интегрировать на этом отрезке, т. е.

$$\int_a^b\left(\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x)\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b U_n(x)dx;$$

2) если функциональный ряд с непрерывно дифференцируемыми членами сходится на данном интервале, а ряд, составленный из производных его членов, равномерно сходится на этом интервале, то данный ряд можно почленно дифференцировать в точках этого интервала, т. е.

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x)\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}U_n{}'(x).$$

Типовые примеры и их решения

Пример 1. Найти область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(3-x^2)^n$.

Решение. Члены данного функционального ряда определены на всей оси. Если $x\in\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$, то ряд знакоположительный и, применяя радикальный признак Коши, будем иметь

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(3-x^2)^n}=3-x^2\qquad\begin{cases}<1, & \text{при}\quad x\in[-\sqrt{3};-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2};\sqrt{3}],\\ >1, & \text{при}\quad x\in(-\sqrt{2};\sqrt{2}).\end{cases}$$

В силу чего ряд сходится при $x\in[-\sqrt{3};-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2};\sqrt{3}]$.

В точках $x=\pm\sqrt{2}$ имеем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}1^n=1+1+1+\ldots+1+\ldots$, который расходится, так как $\lim\limits_{n\to\infty}U_n=\lim\limits_{n\to\infty}1=1\neq 0$.

Если $x\in\left(-\infty;-2\right]\cup\left[2;\infty\right)$, то для каждого x этих интервалов имеем знакочередующийся ряд, который расходится, так как $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$.

Если $x\in(-2;-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3};2)$, то для каждого x этих интервалов имеем знакочередующийся ряд, который сходится, так как для него все условия теоремы Лейбница выполнены: его члены по модулю монотонно убывают и стремятся к нулю.

Ответ: $x\in(-2;-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2};2)$.

Пример 2. Найти область равномерной сходимости рядов

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}, \qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n+x^2}.$$

Решение. 1. Данный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 2x}{2^2}+\ldots+\frac{\cos nx}{n^2}+\ldots$ сходится равномерно на всей числовой оси, так как $\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2}$ для всех n и любого x, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ – сходится.

2. Данный ряд сходится равномерно на всей числовой оси, так как $\frac{1}{n^n+x^2}\le\frac{1}{n^n}$ для всех n и любого x, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$ – сходится, его сходимость устанавливается с помощью радикального признака Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0<1.$$

Пример 3. Найти сумму рядов

$$1)\ -1+2x-3x^2+\ldots+(-1)^n n\,x^{n-1}+\ldots, \tag{135}$$

$$2)\ x+\frac{x^5}{5}+\frac{x^9}{9}+\ldots+\frac{x^{4n-3}}{4n-3}+\ldots \tag{136}$$

Решение. 1. Данный ряд получается путем почленного дифференцирования ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots \tag{137}$$

Этот ряд равномерно сходится для $|x|<1$, так как в этом интервале ряд будет являться сходящимся геометрическим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}q^n$ с $|q|<1$. Сумму этого ряда можно найти как сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q=-x$.

Таким образом, в интервале (–1,1) ряд (137) определяет функцию $S(x)=\frac{1}{1-q}=\frac{1}{1+x}$, которая является суммой ряда, т. е.

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots \qquad \text{при } (-1 < x < 1).$$

Так как ряд (135) получен путем почленного дифференцирования ряда (137) то сумма S^* ряда (135) будет равна производной от суммы ряда (137), т. е.

$$S^* = S'(x) = \left(\frac{1}{1+x}\right)' = -\frac{1}{(1+x)^2}\ .$$

2. Данный ряд получается путем почленного интегрирования ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{4n-4} = 1 + x^4 + x^8 + \ldots + x^{4n-4} + \ldots \qquad (138)$$

Этот ряд равномерно сходится при всех значениях x, удовлетворяющих условию $x^4 < 1$, т. е. при всех значениях x в интервале $|x| < 1$. Для каждого значения x в интервале (–1;1) сумма ряда равна $\frac{1}{1-x^4}$ (сумма убывающей геометрической прогрессии со знаменателем x^4).

Так как ряд (136) получен путем почленного интегрирования ряда (138) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^x x^{4n-4}dx = x + \frac{x^5}{5} + \frac{x^9}{9} + \ldots + \frac{x^{4n-3}}{4n-3} + \ldots$, то сумма $S(x)$ ряда (136) будет равна интегралу от суммы ряда (138):

$$S(x) = \int_0^x \frac{dx}{1-x^4} = \int_0^x \frac{(1-x^2)+x^2}{(1-x^2)(1+x^2)}dx = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^x \frac{x^2dx}{(1-x^2)(1+x^2)} =$$

$$= \operatorname{arctg} x \Big|_0^x + \int_0^x \frac{(x^2+1)-1}{(1-x^2)(1+x^2)}dx = \operatorname{arctg} x + \int_0^x \frac{dx}{1-x^2} - \int_0^x \frac{dx}{1-x^4} =$$

$$= \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Bigg|_0^x - \int_0^x \frac{dx}{1-x^4},$$

т. е. мы получили уравнение искомого интеграла. Перенося $\int\limits_0^x \frac{dx}{1-x^4}$ в левую часть и разделив на 2, найдем

$$S(x) = \int_0^x \frac{dx}{1-x^4} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|, \qquad (-1 < x < 1).$$

3.3. Степенные ряды

Степенным рядом называется ряд вида

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + ... + a_n(x-a)^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n , \quad (139)$$

где a_n – числа, называемые коэффициентами степенного ряда.

При a = 0 степенной ряд имеет вид

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^4 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n . \quad (140)$$

Основное свойство степенных рядов формулируется в виде теоремы.

Теорема Абеля. 1) Если ряд (140) сходится при $x = x_0$, не равном нулю, то он абсолютно сходится при всяком значении x, для которого $|x| < |x_0|$; 2) если ряд расходится при некотором значении x'_0, то он расходится при всяком x, для которого $|x| > |x'_0|$.

Из теоремы Абеля следует, что существует такое значение $x=R > 0$, что для $|x| < R$ ряд (11) сходится, а для $|x| > R$ – расходится.

Интервал $(-R, R)$ называется интервалом сходимости, а само число R – радиусом сходимости степенного ряда (140).

Для ряда (139) интервал сходимости определяется неравенством $|x - a| < R$, т. е. интервал сходимости: $(-R + a; R + a)$.

Для нахождения интервала сходимости степенного ряда удобно пользоваться достаточными признаками сходимости знакоположительных рядов и, в частности, признаками Даламбера и Коши.

Если функция $f(x)$ имеет на некотором интервале, содержащем точку a, производные всех порядков, то к ней может быть применена формула Тейлора:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x),$$

где $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ (ξ – между a и x, т. е. произвольная точка рассматриваемого интервала; n – любое натуральное число). Если для некоторого значения x $R_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$, то в пределе формула Тейлора превращается для этого значения x в ряд Тейлора:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n .$$

Условие $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$ выполняется, если все производные функции ограничены некоторым числом.

При a = 0 имеем ряд Маклорена:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n .$$

Таким образом, ряд Тейлора представляет собой разложение функции в ряд по степеням $x - a$ или разложение в окрестности точки a.

Ряд Маклорена представляет собой разложение функции в ряд по степеням x или разложение в окрестности точки x = 0.

Приведем готовые разложения в ряд Маклорена некоторых элементарных функций, полученные как непосредственным вычислением коэффициентов ряда $a_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$, так и с использованием свойств почленного дифференцирования и интегрирования рядов в интервале сходимости:

1) $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}+\ldots$ $\quad(-\infty < x < \infty)$;

2) $\mathrm{sh}x=x+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\ldots+\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots$ $\quad(-\infty < x < \infty)$;

3) $\mathrm{ch}x=1+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\ldots+\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$ $\quad(-\infty < x < \infty)$;

4) $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots$ $\quad(-\infty < x < \infty)$;

5) $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}+\ldots$ $\quad(-\infty < x < \infty)$;

6) $(1+x)^m=1+\dfrac{m}{1!}x+\dfrac{m(m-1)}{2!}x^2+\dfrac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots+$

$+\dfrac{m(m-1)\ldots(m-(n-1))}{n!}x^n+\ldots$ $\quad(-1 < x <1)$;

7) $\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots$ $\quad(-1 < x < 1)$;

8) $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$ $\qquad (-1 < x < 1)$;

9) $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+\ldots$ $\qquad (-1 < x < 1)$;

10) $\operatorname{arctg} x=x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)}+\ldots$ $\qquad (-1\le x\le 1)$;

11) $\arcsin x=x+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}\cdot\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}\cdot\dfrac{x^7}{7}+\ldots=$

$=x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$ $\qquad (-1 < x < 1)$.

Замечание. Готовые разложения можно использовать и для функций $\sin^2\alpha x$, $\cos^2\alpha x$, применяя формулы понижения степени:

$$\sin^2\alpha x=\frac{1-\cos 2\alpha x}{2};\qquad \cos^2\alpha x=\frac{1+\cos 2\alpha x}{2}.$$

Типовые примеры и их решения

Пример 1. Определить радиус и интервал сходимости следующих степенных рядов:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}(x-2)^n,\quad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!},$$

$$3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(x-2)^{2n}},\qquad 4)\ \sum_{n=1}^{\infty}x^n\operatorname{tg}\frac{1}{n}.$$

Решение. 1. Для нахождения интервала сходимости данного ряда используем признак Даламбера. Составим предел отношения последующего члена ряда к предыдущему и потребуем, чтобы он был меньше единицы:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|U_{n+1}|}{|U_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\cdot|x-2|^{n+1}\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}n!\cdot|x-2|^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot n!\cdot|x-2|^{n+1}\cdot n^n}{(n+1)\cdot(n+1)^n\cdot n!\cdot|x-2|^n}=$$

$$=|x-2|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n}=\frac{|x-2|}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\frac{|x-2|}{e}<1.$$

В силу признака Даламбера ряд будет сходиться абсолютно при значениях x, удовлетворяющих неравенству $\frac{|x-2|}{e}<1$, или $|x–2| < e$, которое равносильно системе неравенств $–e < x–2 < e$, или $2–e < x < e+2$.

Следовательно, радиус сходимости $R = e$, а интервал сходимости $(2 – e; e + 2)$.

Теперь выясним поведение ряда на концах интервала сходимости. В левом конце, при $x = 2 – e$, данный степенной ряд превращается в числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}\cdot(-1)^n\cdot e^n$. Данный ряд – ряд Лейбница. Для нахождения $\lim_{n\to\infty} a_n$ используем приближенную формулу Стирлинга для факториалов больших чисел $n!\approx\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}e^n \approx \lim_{n\to\infty}\frac{n^n\sqrt{2\pi n}\cdot e^n}{e^n\cdot n^n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{2\pi n}=\infty,$$

т. е. при $x =2–e$ ряд расходится.

В правом конце, при $x = e + 2$, получается числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!e^n}{n^n}$, который расходится, так как не выполняется необходимое условие сходимости ряда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}e^n=\infty.$$

Ответ: $R = e$, $(2 – e; e + 2)$.

2. Для данного ряда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|U_{n+1}|}{|U_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{2n+1}(2n-1)(2n-1)!}{(2n+1)(2n+1)!\cdot|x|^{2n-1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^2\cdot(2n-1)(2n-1)!}{(2n+1)(2n-1)!\cdot 2n\cdot(2n+1)}=x^2\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{(2n+1)^2\cdot 2n}=0<1.$$

Так как неравенство выполняется при любых значениях x, то ряд сходится на всей числовой оси и радиус сходимости $R = \infty$.

Ответ: $R = \infty$ $(–\infty; \infty)$.

3. Для нахождения интервала сходимости данного ряда используем радикальный признак Коши. Запишем предел корня n-й степени из общего члена ряда и потребуем, чтобы он был меньше единицы, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|U_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{|x-2|^{2n}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{|x-2|^2}=\frac{1}{(x-2)^2}<1.$$

Решением неравенства будет множество значений $x\in(-\infty;\ 1)\cup(3;\ \infty)$.

Проверим сходимость исходного ряда на концах интервала сходимости.

При $x = 1$ имеем ряд Лейбница $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(-1)^{2n}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$, который расходится, так как $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}1=1\neq 0$.

При $x = 3$ имеем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(1)^{2n}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$, который расходится.

Ответ: $(-\infty;\ 1)\cup(3;\ \infty)$.

4. Для нахождения интервала сходимости данного ряда используем признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|U_{n+1}|}{|U_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}\cdot\mathrm{tg}\,\frac{1}{n+1}}{|x|^n\cdot\mathrm{tg}\,\frac{1}{n}}=$$

$$=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=|x|<1,$$

полученное неравенство равносильно системе неравенств $-1<x<1$. Следовательно, радиус сходимости $R = 1$, а интервал сходимости $(-1;\ 1)$.

Проверим сходимость исходного ряда на концах интервала сходимости.

При $x = -1$ имеем знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\mathrm{tg}\,\frac{1}{n}$, который сходится по теореме Лейбница, так как

$$\mathrm{tg}1>\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}>\mathrm{tg}\,\frac{1}{3}>\ldots>\mathrm{tg}\,\frac{1}{n}>\ldots\ \text{ и }\ \lim_{n\to\infty}\mathrm{tg}\,\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

При $x = 1$ имеем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\frac{1}{n}$. Для исследования сходимости этого ряда используем предельную форму признака сравнения. Беря для сравнения гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, получим $\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 > 0$.

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{1}{n}$ расходится.

Таким образом, данный степенной ряд сходится только в левом конце интервала сходимости.

Ответ: R=1 [–1; 1).

Пример 2. Разложить функции в ряд Тейлора или Маклорена в окрестности указанных точек

1) $y = e^{-x^2}$, $a = 0$; 2) $y = 4^x$, $a = 0$;

3) $y = \sin x$, $a = \frac{\pi}{4}$; 4) $y = \frac{1}{x-4}$, $a = 0$;

5) $\frac{1}{x-4}$, $a = -2$; 6) $y = \ln\sqrt[4]{\frac{1+3x}{1-2x}}$, $a = 0$; 7) $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $a = 0$.

Решение. 1. Для записи разложения e^{-x^2} в готовом разложении функции e^x заменяем x на $(-x^2)$:

$$e^{-x^2} = 1 + (-x^2) + \frac{(-x^2)^2}{2!} + \frac{(-x^2)^3}{3!} + \ldots + \frac{(-x^2)^n}{n!} + \ldots = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} -$$

$$-\frac{x^6}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} + \ldots \qquad (-\infty < x < \infty).$$

2. Для того чтобы можно было воспользоваться готовым разложением функции e^x, запишем исходную функцию в виде $4^x = e^{\ln 4^x} = e^{x\ln 4}$, тогда

$$4^x = e^{x\ln 4} = 1 + x\ln 4 + \frac{(x\ln 4)^2}{2!} + \frac{(x\ln 4)^3}{3!} + \ldots + \frac{(x\ln 4)^n}{n!} + \ldots =$$

$$= 1 + x\ln 4 + \frac{x^2\ln^2 4}{2!} + \frac{x^3\ln^3 4}{3!} + \ldots + \frac{x^n\ln^n 4}{n!} + \ldots \qquad (-\infty < x < \infty).$$

3. Так как $a=\frac{\pi}{4}$, разложение будет по степеням $\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, поэтому преобразуем исходную функцию следующим образом:

$$\sin x=\sin\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Теперь в готовых разложениях функций cos x и sin x заменяем x на $\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$:

$$\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3}{3!}+\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^5}{5!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots+\right.$$

$$\left.+1-\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2}{2!}+\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4}{4!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n-2}}{(2n-2)!}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2}{2!}-\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3}{3!}+\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4}{4!}+\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^5}{5!}-\ldots+\right.$$

$$\left.+(-1)^{n-1}\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n-2}}{(2n-2)!}+(-1)^{n-1}\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots\right)\qquad(-\infty<x<\infty).$$

4. Преобразуем эту функцию так, чтобы можно было использовать разложение функции $\frac{1}{1-x}$, полагая

$$\frac{1}{x-4}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{4}}.$$

Заменив в разложении функции $\frac{1}{x-4}$ x через $\frac{1}{4}$, получим $\frac{1}{x-4}=-\frac{1}{4}\left(1+\frac{x}{4}+\frac{x^2}{4^2}+\frac{x^3}{4^3}+\ldots+\frac{x^n}{4^n}+\ldots\right)$. Это разложение справедливо, когда $\left|\frac{x}{4}\right|<1$, $-4<x<4$.

5. Преобразуем эту функцию так, чтобы можно было использовать разложение функции $\frac{1}{1-x}$. Полагая

$$\frac{1}{x-4}=\frac{a}{1-b(x+2)},$$

из тождества $1-b(x+2)=a(x-4)$, применяя метод неопределенных коэффициентов, найдем a и b:

$$\begin{array}{c|l} x & -b=a, \\ x^0 & 1-2b=-4a, \end{array} \qquad b=\frac{1}{6}, \qquad a=-\frac{1}{6}.$$

Следовательно, $\frac{1}{x-4}=\frac{-\frac{1}{6}}{1-\frac{x+2}{6}}$. Заменив в разложении функции $\frac{1}{1-x}$ x через $\frac{x+2}{6}$, получим

$$\frac{1}{x-4}=-\frac{1}{6}\left(1+\frac{x+2}{6}+\frac{(x+2)^2}{6^2}+\ldots+\frac{(x+2)^n}{6^n}+\ldots\right)=-\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{6^n}.$$

Это разложение справедливо, когда

$$\left|\frac{x+2}{6}\right|<1, \qquad -6<x+2<6, \qquad -8<x<4.$$

6. Известно, что $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$ $(-1<x<1)$, поэтому

$$\ln(1+3x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^n\cdot x^n}{n} \qquad \left(-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{3}\right),$$

$$\ln(1-2x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot x^n}{n} \quad \left(-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}\right);$$

отсюда

$$\ln\sqrt[4]{\frac{1+3x}{1-2x}}=\frac{1}{4}\bigl(\ln(1+3x)-\ln(1-2x)\bigr)=$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\Bigl((-1)^{n+1}\cdot 3^n+2^n\Bigr)\cdot\frac{x^n}{n}\left(-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{3}\right).$$

7. Полагая $x^2=y$ и применяя биноминальный ряд (135), при $m=-\frac{1}{2}$ последовательно получаем

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=(1+y)^{-\frac{1}{2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(-\frac{1}{2}-(n-1)\right)}{n!}\cdot y^n=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!}\cdot y^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\left(x^2\right)^n=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot x^{2n} \qquad (-1<x<1),$$

где $(2n-1)!!=1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)$ и $(2n)!!=2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n$.

Пример 3. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=e^x\cdot\sin x$.

Решение. Разложение в степенной ряд функции $f(x)=\psi(x)\cdot\varphi(x)$ может быть осуществлено с помощью правила умножения рядов, если разложения функций $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ известны.

Пусть в некоторой окрестности нуля имеют место разложения

$$\psi(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots,$$

$$\varphi(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n+\ldots,$$

тогда произведение $\psi(x)\cdot\varphi(x)$ разлагается в той же окрестности нуля в степенной ряд

$$\psi(x)\cdot\varphi(x)=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+\ldots+$$
$$+(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\ldots+a_nb_0)x^n+\ldots$$

В частности, при $\psi(x)$ = $\varphi(x)$ получается следующее правило возведения степенного ряда в квадрат:

$$(\psi(x))^2=a_0{}^2+2a_0a_1x+(2a_0a_2+a_1{}^2)x^2+(2a_0a_3+2a_1a_2)x^2+$$
$$+(2a_0a_4+2a_1a_3+a_2{}^2)x^4+\ldots$$

Используя формулу умножения рядов, имеем:

$$e^x\cdot\sin x=\left(1+1\cdot x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots\right)\times$$
$$\times\left(0+1\cdot x+0\cdot x^2-\frac{1}{3!}x^3+0\cdot x^4+\frac{1}{5!}x^5-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots\right)=$$
$$=1\cdot 0+(1\cdot 1+1\cdot 0)x+\left(1\cdot 0+1\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 0\right)x^2+$$
$$+\left(1\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)+1\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{6}\cdot 0\right)x^3+\left(1\cdot 0+1\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{6}\cdot 1+\frac{1}{24}\cdot 0\right)x^4+$$
$$+\left(1\cdot\frac{1}{120}+1\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{6}\cdot 0+\frac{1}{24}\cdot 1+\frac{1}{120}\cdot 0\right)x^5+\ldots+$$
$$+\left(1\cdot(-1)^n\cdot\frac{1}{(2n+1)!}+1\cdot(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{(2n-1)!}+\ldots+\frac{1}{n!}\cdot 0\right)x^n+\ldots=x+x^2+\frac{1}{3}x^3-$$
$$-\frac{1}{30}x^5+\ldots+\left(1\cdot(-1)^n\cdot\frac{1}{(2n+1)!}+1\cdot(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{(2n-1)!}+\ldots+\frac{1}{n!}\cdot 0\right)x^n+\ldots$$
$$(-\infty<x<\infty)$$

Замечание. Разложение функции $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки a можно производить в два этапа:

1) вычисляем значения функции и ее производных в точке $x = a$ и составляем ряд Тейлора для функции $f(x)$ (при этом предполагаем, что функция бесконечное число раз дифференцируема);

2) находим интервал, в котором составленный ряд Тейлора сходится к функции $f(x)$, т. е. устанавливаем для каких значений x остаточный член ряда $R_n(x)\to 0$ при $n\to\infty$.

Находим производные данной функции $f(x)$ и их значения в точке $x = 0$:

$f(x) = e^x \sin x,$ $\qquad f(0) = 0;$

$f'(x) = e^x(\cos x + \sin x) = \sqrt{2}e^x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right),$ $\qquad f'(0) = \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4};$

$f''(x) = \left(\sqrt{2}\right)^2 e^x \sin\left(x + \frac{2\pi}{4}\right),$ $\qquad f''(0) = \left(\sqrt{2}\right)^2 \sin\frac{2\pi}{4};$

....

$f^{(n)}(x) = \left(\sqrt{2}\right)^n e^x \sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right),$ $\qquad f^{(n)}(0) = \left(\sqrt{2}\right)^n \sin\frac{n\pi}{4}.$

....

Теперь проверим, стремится ли остаточный член $R_n(x)$ к нулю при $n \to \infty$. Для этого оценим его абсолютную величину:

$$\left|R_n(x)\right| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)\cdot x^{n+1}}{n!}\right| = \left|\frac{\left(\sqrt{2}\right)^{n+1} e^{\xi}\cdot\sin\left(\xi + \frac{\pi(n+1)}{4}\right)}{(n+1)!}\cdot x^{n+1}\right| <$$

$$< \frac{\left(\sqrt{2}\right)^{n+1} e^{|x|}|x|^{n+1}}{(n+1)!} = U_{n+1}.$$

Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{2}\right)^{n+1} e^{|x|}\cdot|x|^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot\left(\sqrt{2}\right)^n\cdot e^{|x|}\cdot|x|^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}\cdot|x|}{n+1} = 0 < 1$$

при всех x, следовательно ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ сходится (в силу признака Даламбера), а его общий член $U_n \to 0$ при $n \to \infty$ (в силу необходимого признака сходимости), поэтому и остаточный член $R_n(x)$, имеющий модуль, меньший U_n, и подавно стремится к нулю при всех x. Поэтому имеем разложение

$$e^x \sin x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{2}\right)^n \sin\frac{n\pi}{4}}{n!}\cdot x^n \qquad (-\infty < x < \infty).$$

Пример 4. Получить разложение в степенной ряд по степеням x функции

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right).$$

Решение. Пример на использование теоремы о почленном интегрировании степенных рядов.

Теорема. Если пределы интегрирования α, β лежат внутри интервала сходимости степенного ряда $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, то интеграл от суммы ряда равен сумме ряда интегралов от членов ряда.

В частности, если $|x|<R$, то

$$\int\limits_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \cdot x^{n+1}.$$

Известно, что $\int\limits_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

Заменяя подынтегральную функцию разложением, получим

$$\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) = x + \int\limits_0^x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} t^{2n} dt,$$

или, после почленного интегрирования степенного ряда,

$$\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad (-1 < x < 1).$$

Пример 5. Применяя почленное дифференцирование, найти сумму $f(x)$ ряда $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

Решение. Пример на использовании теоремы о почленном дифференцировании степенных рядов.

Теорема. Если степенной ряд $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ имеет радиус сходимости R, то ряд, полученный его почленным дифференцированием, имеет тот же радиус сходимости R и производная суммы ряда равна сумме производных членов ряда, т. е.

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1} \ .$$

Отсюда следует, что степенной ряд можно почленно дифференцировать любое число раз, не изменяя его радиуса сходимости R.

Применяя почленное дифференцирование, получим

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad (-1 < x < 1).$$

Так как $f(0) = 0$, то

$$f(x) = \int_0^x f'(t)dt = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\int_0^x \frac{d(1-t)}{1-t} =$$

$$= -\ln|1-t|\Big|_0^x = -\ln|1-x| + \ln 1 = \ln\frac{1}{|1-x|} \qquad (-1 < x < 1).$$

3.4. Приложения степенных рядов к интегрированию дифференциальных уравнений и приближенным вычислениям

Интегрирование линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами (выше первого порядка), вообще говоря, не приводится к квадратурам, а их решения не выражаются через элементарные функции. Одним из методов интегрирования таких уравнений, а также некоторых других является представление искомого решения в виде степенного ряда. Этот метод опирается на следующие теоремы теории дифференциальных уравнений.

1. Если все коэффициенты и правая часть линейного дифференциального уравнения n-го порядка

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + P_n(x)y = f(x),$$

с начальными условиями

$$y(a) = y_0,\ y'(a) = y_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(a) = y_{n-1}$$

являются аналитическими функциями в точке $x = a$ (разлагаются в степенные ряды по степеням $x - a$ в некоторой окрестности этой точки), то решение этого уравнения тоже является аналитической функцией в упомянутой окрестности.

2. Если правая часть уравнения $y' = f(x, y)$, $y(a) = b$ является аналитической функцией переменных x и y в точке $x = a$, $y = b$ (разлагается в степенной ряд по степеням $x - a$, $y - b$ в некоторой окрестности этой

точки), то существует единственное решение $y = y(x)$ этого уравнения с начальным условием, являющееся аналитическим в точке $x = a$.

Аналогичное утверждение справедливо и для уравнения

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

с начальными условиями

$$y(a) = y_0, y'(a) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(a) = y_{n-1}.$$

Получение решения дифференциального уравнения в виде степенного ряда может осуществляться двумя способами.

1. Способ последовательного дифференцирования. Искомое решение $y(x)$ разлагается в степенной ряд по степеням $x - a$. Как всякий степенной ряд, он служит рядом Тейлора своей суммы, а поэтому разложение имеет вид

$$y = y(a) + \frac{y'(a)}{1!}(x-a) + \frac{y''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{y^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots$$

В случае уравнения n-го порядка первые n коэффициентов $y(a)$, $y'(a)$, ..., $y^{(n-1)}(a)$ заданы начальными условиями. Подставляя в дифференциальное уравнение $x = a$, находят $y^{(n)}(a)$. Далее, последовательно дифференцируя уравнение и подставляя после каждого дифференцирования $x = a$, находят

$$y^{(n+1)}(a), y^{(n+2)}(a), \ldots .$$

Процесс или обрывается на заданном коэффициенте, или завершается нахождением общего закона построения коэффициентов.

2. Способ сравнения коэффициентов. Искомое решение разлагается в степенной ряд по степеням $x - a$:

$$y = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots .$$

Из начальных условий определяют коэффициенты:

$$a_0 = y_0, \quad a_1 = y_1, \quad a_2 = \frac{y_2}{2!}, \quad \ldots \quad , \quad a_{n-1} = \frac{y_{n-1}}{(n-1)!}.$$

Подставляют в дифференциальное уравнение вместо y, ее производных и прочих функций, входящих в уравнение, их разложения в степенные ряды по степеням $x - a$ и приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях $x - a$, определяя из полученных уравнений коэффициенты ряда.

Типовые примеры и их решения

Пример 1. Найти разложения в степенной ряд (до указанной степени) решений дифференциальных уравнений

1) $y'' = xy^2 - y'$, $\quad y(0) = 2$, $\quad y'(0) = 1$ $\quad$ (до x^4);

2) $y' = x^2 - y^2$, $\quad y(1) = 2$ $\quad$ (до $(x-1)^4$).

Решение. 1. Для решения данного примера применим способ последовательного дифференцирования. Подставляя $x = 0$ в дифференциальное уравнение, в силу начальных условий получаем $y''(0) = -1$. Дважды дифференцируя уравнение, находим:

$$y''' = y^2 + x \cdot 2y \cdot y' - y'', \qquad y'''(0) = 5,$$

$$y^{(4)} = 2y \cdot y' + 2yy' + 2x(y')^2 + 2xyy'' - y''', \qquad y^{(4)}(0) = 3.$$

Таким образом,

$$y = 2 + 1 \cdot x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{6}x^3 + \frac{3}{24}x^4 + \ldots$$

2. Для решения примера применим способ сравнения коэффициентов. Записывая искомое решение в виде степенного ряда с неизвестными коэффициентами, последовательно находим

$$y = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + a_3(x-1)^3 + \ldots, \quad a_0 = y(1) = 2,$$

тогда

$$y' = a_1 + 2a_2(x-1) + 3a_3(x-1)^2 + 4a_4(x-1)^3 + \ldots$$

$$y^2 = a_0^2 + 2a_0a_1(x-1) + (2a_0a_2 + a_1^2)(x-1)^2 +$$
$$+ (2a_0a_3 + 2a_1a_2)(x-1)^3 + \ldots$$

Подставляя эти разложения в данное уравнение, будем иметь

$$a_1 + 2a_2(x-1) + 3a_3(x-1)^2 + 4a_4(x-1)^3 + \ldots =$$
$$= x^2 - a_0^2 - 2a_0a_1(x-1) - (2a_0a_2 + a_1^2)(x-1)^2 -$$
$$- (2a_0a_3 + 2a_1a_2)(x-1)^3 - \ldots = 1 - a_0^2 + (2 - 2a_0a_1)(x-1) -$$
$$- (2a_0a_2 + a_1^2 - 1)(x-1)^2 - (2a_0a_3 + 2a_1a_2)(x-1)^3 + \ldots$$

Отсюда, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $(x - 1)$ и используя начальное условие, получаем систему уравнений для определения неизвестных коэффициентов:

$$
\begin{array}{c|ll}
(x-1)^0 & a_1 = 1 - a_0{}^2, & a_1 = 1 - 2^2 = -3; \\
(x-1)^1 & 2a_2 = 2 - 2a_0 a_1, & a_2 = 1; \\
(x-1)^2 & 3a_3 = -2a_0 a_2 - a_1{}^2 + 1, & a_3 = -12; \\
(x-1)^3 & 4a_4 = -2a_0 a_3 - 2a_1 a_2, & a_4 = \dfrac{45}{2}. \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

Таким образом, искомое решение имеет вид

$$y = 2 - 3(x-1) + 7(x-1)^2 - 12(x-1)^3 + \frac{45}{2}(x-1)^4 + \ldots$$

Пример 2. Вычислить sin 10° с точностью до 10^{-5}.

Решение. Переведя градусную меру в радианную, получим

$$10° = \frac{\pi}{18} \approx 0{,}1745\,.$$

Учитывая разложение синуса в степенной ряд, получим

$$\sin 10° = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} \left(\frac{\pi}{18}\right)^{2n-1}.$$

Этот ряд является рядом Лейбница, поэтому принимая за приближенное значение sin10° сумму первых двух членов разложения, сделаем ошибку Δ, по абсолютной величине меньшую третьего члена:

$$|\Delta| < \frac{1}{120} \cdot (0{,}1745)^5 < \frac{(0{,}2)^5}{120} < 0{,}0001.$$

Таким образом,

$$\sin 10° = 0{,}1745 - \frac{1}{6} \cdot (0{,}1745\,)^3 = 0{,}17361\,.$$

Пример 3. Вычислить $\sqrt[10]{1027}$ с точностью до 0,0001.

Решение. Приближенное вычисление корней производится с помощью биноминального ряда

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots (|\,x\,| < 1).$$

Имеем

$$\sqrt[10]{1027}=\left(2^{10}+3\right)^{\frac{1}{10}}=2\left(1+\frac{3}{2^{10}}\right)^{\frac{1}{10}}=$$

$$=2+\frac{3}{10\cdot 2^{9}}+\frac{\frac{1}{10}\left(\frac{1}{10}-1\right)\cdot 3^{2}}{2!\cdot 2^{19}}+\frac{\frac{1}{10}\left(\frac{1}{10}-1\right)\left(\frac{1}{10}-2\right)\cdot 3^{3}}{3!\cdot 2^{29}}+\ldots$$

Полученный ряд является рядом Лейбница, и значит, погрешность от отбрасывания членов, начиная с третьего, по абсолютной величине меньше: $\frac{3^{4}}{10^{2}\cdot 2^{20}}<0{,}0001$.

Сохраняя поэтому только два члена разложения, будем иметь

$$\sqrt[10]{1027}=2+\frac{3}{10\cdot 2^{9}}=2{,}0006.$$

Пример 4. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{x}dx$ с точностью до 0,001.

Решение. Многие практически важные определенные интегралы не могут быть вычислены с помощью формулы Ньютона – Лейбница в виду неинтегрируемости подынтегральной функции. Если, однако, подынтегральная функция разлагается в степенной ряд, а пределы интегрирования принадлежат интервалу сходимости этого ряда, то приближенное вычисление интеграла оказывается осуществимым с наперед заданной точностью.

Разложение подынтегральной функции в степенной ряд имеет вид

$$\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{5}}{5!}-\ldots+\left(-1\right)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots\right)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!}\qquad(-\infty<x<\infty).$$

Интегрируя этот ряд почленно, получим

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^{2n-2} \cdot dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} \cdot \frac{\pi^{2n-1}}{(2n-1) \cdot 4^{2n-1}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{\pi^3}{3 \cdot 4^3} + \frac{1}{5!} \cdot \frac{\pi^5}{5 \cdot 4^5} - \ldots$$

Полученный ряд является рядом Лейбница. Погрешность от отбрасывания всех членов, начиная с третьего, будет по абсолютной величине меньше третьего члена:

$$|\Delta| < \frac{1}{5!} \cdot \frac{\pi^5}{5 \cdot 4^5} < 0{,}001.$$

Вычисляя с точностью до 0,001, найдем

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{x} dx \approx \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{\pi^3}{3 \cdot 4^3} = 0{,}785 - 0{,}027 = 0{,}758.$$

Замечание. В случае знакоположительных рядов погрешность оценить труднее. Для этого необходимо оценить величину остатка ряда, например, сравнивая сумму всех отброшенных членов ряда с бесконечно убывающей геометрической прогрессией или используя одну из формул остаточного члена ($R_n(x)$) формулы Тейлора.

3.5. Ряды Фурье

Рядом Фурье для периодической с периодом 2π функции $f(x)$, интегрируемой на отрезке $[-\pi; \pi]$, называется тригонометрический ряд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right),$$

коэффициенты которого определяются по формулам

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \qquad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Условия представимости данной функции рядом Фурье и следствия данного разложения оговариваются следующей теоремой.

Достаточные признаки разложимости функции в ряд Фурье (теорема Дирихле):

1. Если функция $f(x)$ периода 2π имеет на отрезке $[-\pi;\ \pi]$ не более конечного числа точек разрыва и абсолютно интегрируема на нем, то эта функция разлагается в свой ряд Фурье в каждой точке, в которой она дифференцируема.

2. Если функция $f(x)$ периода 2π удовлетворяет условию Дирихле на отрезке $[-\pi;\ \pi]$ (если этот отрезок может быть разбит на конечное число частей так, что внутри каждой части функция монотонна и ограничена), то эта функция разлагается в свой ряд Фурье в каждой точке непрерывности; если же x – точка разрыва, ряд Фурье сходится к числу

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}.$$

Замечание. Справочный материал по разложению в ряд Фурье четных и нечетных функций периода 2π, функций, заданных на полупериоде, и функций с периодом 2ℓ приведен в решениях примеров 2–5.

Типовые примеры и их решения

Пример 1. Разложить в ряд Фурье функцию, заданную в интервале $(-\pi;\ \pi)$ выражением (рис. 10):

$$f(x)=\begin{cases} 0 & (-\pi < x \le 0), \\ x & (0 < x < \pi), \\ \dfrac{\pi}{2} & (x=\pi). \end{cases}$$

Решение. Данный пример на разложение функции периода 2π в ряд Фурье.

Из определения данной функции $f(x)$ следует, что она удовлетворяет условиям теоремы Дирихле, поэтому заданная функция разлагается в свой ряд Фурье.

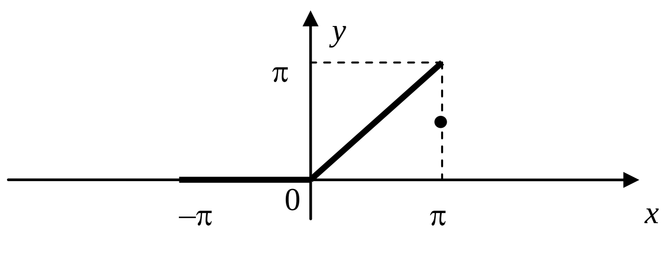

Рис. 52

Подсчет коэффициентов Фурье дает:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\cdot dx + \int_{0}^{\pi} x\cdot dx\right) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cdot\cos nx dx = \left|\begin{matrix} u = x; \quad du = dx \\ dv = \cos nx dx; \quad v = \frac{1}{n}\sin nx\end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Bigg|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\cdot dx\right) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{n^2}\cos nx\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} \dfrac{-2}{\pi n^2}, & \text{при} \quad n = 2k-1; \\ 0, & \text{при} \quad n = 2k; \end{cases} \qquad k = \overline{1,\infty}.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cdot\sin nx dx =$$

$$= \left|\begin{matrix} u = x; \quad du = dx \\ dv = \sin nx dx; \quad v = -\frac{1}{n}\cos nx\end{matrix}\right| = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\Bigg|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\cdot dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}(-1)^n + \frac{1}{n^2}\sin x\Bigg|_0^{\pi}\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{n},$$

поэтому $$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-2}{\pi(2n-1)^2}\cdot\cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right) =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right) + \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots\right).$$

Пример 2. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \cos\frac{x}{3}$.

Решение. Эта непрерывная функция удовлетворяет условиям теоремы о разложимости, и следовательно, разлагается в свой ряд Фурье. Функция четная $\left(f(-x) = f(x)\right)$ и ряд Фурье не содержит членов с синусами; этот ряд имеет вид

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx\ ,$$

где $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx$, $a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx \qquad (n=1,2,3\ldots)$.

Подсчет коэффициентов Фурье дает:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{3}dx=\frac{2\cdot 3}{\pi}\sin\frac{x}{3}\bigg|_0^{\pi}=\frac{6}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{\pi}.$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{3}\cdot\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos\left(\frac{1}{3}-n\right)xdx+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos\left(\frac{1}{3}+n\right)xdx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{3}{1-3n}\sin\frac{1-3n}{3}x\bigg|_0^{\pi}+\frac{3}{1+3n}\sin\frac{1+3n}{3}x\bigg|_0^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{-3}{1-3n}\sin\left(n\pi-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{3}{1+3n}\sin\left(n\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right)=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{3\sqrt{3}}{\pi\left(9n^2-1\right)}, & n=2k+1,\\ -\dfrac{3\sqrt{3}}{\pi\left(9n^2-1\right)}, & n=2k,\end{cases}$$

следовательно,

$$f(x)=\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}+\frac{3\sqrt{3}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n-1}\frac{\cos nx}{9n^2-1}.$$

Пример 3. Разложить в ряд Фурье функцию периода 2π (рис. 53)

$$f(x)=\frac{x}{2}\ (-\pi\le x\le\pi).$$

Решение. Эта разрывная функция удовлетворяет условиям разложения в ряд Фурье и нечетна $\left(f(-x)=-f(x)\right)$, поэтому

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\cdot\sin nx,$$

где $$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cdot\sin nxdx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{x}{2}\cdot\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cdot\sin nxdx =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left.\frac{x\cdot\cos nx}{n}\right|_0^{\pi} + \frac{1}{\pi n}\int_0^{\pi}\cos nxdx = -\frac{\cos n\pi}{n} + \frac{1}{\pi n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi} = -\frac{(-1)^n}{n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Следовательно $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\sin nx$.

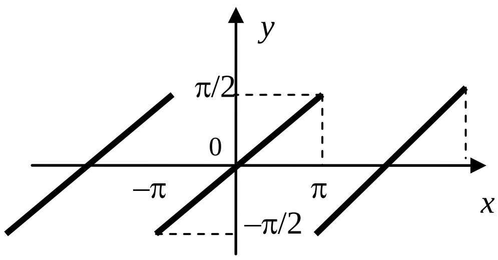

Рис. 53

Пример 4. Разложить в ряд Фурье по косинусам функцию $f(x) = x\cdot\sin x$ на (0; π).

Решение. Функцию, заданную на полупериоде (0; π), можно разложить в ряд синусов или косинусов, продолжая на второй полупериод (–π ;0) соответственно нечетным или четным образом.

Продолжая эту функцию четным образом, будем иметь

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin xdx = \left|\begin{matrix} u = x; \quad du = dx \\ dv = \sin xdx; \quad v = -\cos x\end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-x\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos xdx\right) = \frac{2}{\pi}\left(\pi + \sin x\Big|_0^{\pi}\right) = 2,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin x\cos nxdx \quad (n = 1, 2, 3, ...).$$

$$n = 1,$$

$$a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cdot\sin x\cdot\cos x dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cdot\sin 2x\cdot dx=\left|\begin{array}{c} u=x;\quad du=dx \\ dv=\sin 2x\cdot dx;\quad v=-\frac{1}{2}\cos 2x\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{x}{2}\cos 2x\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos 2x\cdot dx\right)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{4\pi}\sin 2x\Big|_0^{\pi}=-\frac{1}{2}.$$

$$n\neq 1,\ a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cdot\sin x\cdot\cos nx dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} x\cdot\sin(1-n)x dx+\int_0^{\pi} x\cdot\sin(1+n)x dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{-x}{1-n}\cos(1-n)x\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{1-n}\int_0^{\pi}\cos(1-n)x dx-\right.$$

$$\left.-\frac{x}{1+n}\cos(1+n)\cdot x\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{1+n}\int_0^{\pi}\cos(1+n)x dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{-\pi}{1-n}(-1)^{1-n}+\frac{1}{(1-n)^2}\sin(1-n)x\Big|_0^{\pi}-\right.$$

$$\left.-\frac{\pi}{1+n}(-1)^{1+n}+\frac{1}{(1+n)^2}\sin(1+n)x\Big|_0^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{(-1)^{2-n}}{1-n}+\frac{(-1)^{2+n}}{1+n}=(-1)^{n-1}\frac{2}{n^2-1}.$$

Продолженная функция $f(x)$, очевидно, удовлетворяет условиям разложимости в ряд Фурье, поэтому

$$f(x)=1-\frac{\cos x}{2}+2\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n^2-1}.$$

Пример 5. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = |x| - 5$ с периодом 4, заданную на интервале-периоде (–2; 2).

Решение. Пусть $f(x)$ – функция с периодом $2l$. Разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье, когда оно возможно, имеет вид

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

коэффициенты которого определяются по формулам

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx,\quad a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\quad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

Если функция $f(x)$ четная, то

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l};\quad a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx,\quad a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx.$$

Если функция $f(x)$ нечетная, то

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l},\quad b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

Заданная функция четная с периодом $2l$=4, поэтому

$$a_0=\frac{2}{2}\int_0^2(x-5)dx=\left.\frac{(x-5)^2}{2}\right|_0^2=\frac{9}{2}-\frac{25}{8}=-8,$$

$$a_n=\frac{2}{2}\int_0^2(x-5)\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\left|\begin{matrix}u=x-5; & du=dx\\ dv=\cos\frac{n\pi x}{2}dx; & v=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\end{matrix}\right|=$$

$$=(x-5)\frac{2}{n\pi}\sin\left.\frac{n\pi x}{2}\right|_0^2-\frac{2}{n\pi}\int_0^2\sin\frac{n\pi x}{2}\cdot dx=$$

$$=\frac{4}{n^2\pi^2}\cos\left.\frac{n\pi x}{2}\right|_0^2=\frac{4}{n^2\pi^2}\left((-1)^n-1\right)=\begin{cases}0,\ n=2k & k=0,\infty\\ -\dfrac{8}{\pi^2(2k+1)^2}, & n=2k+1.\end{cases}$$

Данная функция $f(x)$ удовлетворяет условиям разложимости в ряд Фурье, поэтому

$$f(x)=-4-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cdot\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение отметим, что настоящее пособие входит в комплект пособий по курсу высшей математики.

В пособии подробно изложены практически все часто используемые методы решения задач части курса высшей математики (неопределенный и определенный интегралы; кратные, криволинейные и поверхностные интегралы; элементы теории поля; дифференциальные уравнения и системы; числовые и функциональные ряды; ряды Фурье). В ряде случаев, при разборе конкретных примеров, приводится, возможно, не самое короткое и изящное решение задачи. Это объясняется, прежде всего тем, что при разборе примера автор в первую очередь стремился дать наглядное применение предложенного метода, а вовсе не продемонстрировать примеры нестандартных подходов к решению различных задач. Приведенные решения также могут служить иллюстрацией правильного оформления решения задач.

Пособие может быть использовано студентами заочной и дневной форм обучения.

ОГЛАВЛЕНИЕ

АРЕФЬЕВ Владимир Петрович

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Часть 2

Неопределенный и определенный интегралы
Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы
Элементы теории поля
Дифференциальные уравнения и системы
Числовые и функциональные ряды
Ряды Фурье

Учебное пособие

Редактор *А. А. Цыганкова*

Верстка *Л. А. Егорова*

Подписано к печати Формат 60×84/16.
Бумага «Классика».
Печать RISO. Усл.печ.л. 9,53. Уч.-изд.л. 8,63.
Заказ . Тираж экз.

Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Томского политехнического университета
сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE
по стандарту ISO 9001:2000

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30.