2. Дифференциальные уравнения высших порядков

Определение. Дифференциальные уравнения порядка $n > 1$имеют вид

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \qquad (32)$$

Замечание. Функция F может и не зависеть от некоторых из аргументов $x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$, но обязательно в уравнении (32) должна присутствовать производная n–го порядка.

Дифференциальные уравнения, которые можно записать в виде

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}), \qquad (33)$$

называют уравнением, *разрешенным относительно старшей производной*.

Задача Коши. Задача Коши для дифференциального уравнения (32) ставится так.

Найти такое решение дифференциального уравнения, чтобы оно само и его производные до порядка $(n-1)$ включительно при значении аргумента $x = x_0$ принимали бы заданные значения, т.е., чтобы это решение удовлетворяло условиям:

$$x = x_0,\ y_0 = y(x_0),\ y_0^1 = y'(x_0),\ y_0^2 = y''(x_0),\ \dots,\ y_0^{(n-1)} = y^{(n-1)}(x_0). \qquad (34)$$

Эти условия называются *начальными условиями* для дифференциального уравнения n-го порядка. Число $x = x_0$ называется начальным значением независимой переменной, а числа y_0, y_0^1, ,..., $y_0^{(n-1)}$ – начальными значениями решения и его производных.

Решение уравнения (32) содержит в своем составе n произвольных постоянных и имеет вид

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0. \qquad (35)$$

Выражение, задающее общее решение в неявном виде, называется *общим интегралом уравнения.*

Решение (интеграл) дифференциального уравнения, получаемое из общего решения (общего интеграла) при конкретных значениях постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$, называется *частным решением* (*частным интегралом*) уравнения.

Геометрически – общее решение (общий интеграл) (35) дифференциального уравнения (32) представляет собой семейство интегральных кривых, зависящих от n параметров.

Решение уравнения, удовлетворяющее начальным условиям

$$y_0 = y(x_0),\ y_0^1 = y'(x_0),\ y_0^2 = y''(x_0),\ \dots,\ y_0^{(n-1)} = y^{(n-1)}(x_0)$$

будет изображаться определенной кривой этого семейства, т.е. будет являться частным решением (частным интегралом).

Начальных условий достаточно для того, чтобы выделить это решение (интеграл) из общего решения - семейства интегральных кривых, (общего интеграла). Например, если речь идет о нахождении частного решения, то соответствующие ему значения постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$ будут находиться из системы уравнений

$$\begin{cases} y_0 = \varphi(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n) \\ y_0^1 = \varphi'(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_0^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n) \end{cases} . \tag{36}$$

Задача интегрирования дифференциальных уравнений n–го порядка является более сложной, чем интегрирование дифференциальных уравнений первого порядка. Одним из основных методов, применяемых при интегрировании дифференциальных уравнений высших порядков, является понижение порядка уравнения.

Рассмотрим несколько типов уравнений, которые можно проинтегрировать таким методом.

2.1 Дифференциальные уравнения допускающие понижение порядка

2.1.1 Уравнение, содержащее только производную порядка n и независимую переменную

Эти уравнения имеют вид

$$F(x, y^{(n)}) = 0 \ . \tag{37}$$

Здесь возможны два случая:

1) уравнение разрешено относительно $y^{(n)}$,
2) уравнение нельзя разрешить относительно $y^{(n)}$.

Рассмотрим сначала случай, когда уравнение разрешено относительно $y^{(n)}$, т.е. имеет вид

$$y^{(n)} = f(x), \tag{38}$$

причем $f(x)$ – непрерывна на некотором интервале (a,b).

Общее решение такого уравнения получается в результате n–кратного последовательного интегрирования правой части уравнения. Действительно, так как

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)' = \frac{dy^{(n-1)}}{dx},$$

то
$$dy^{(n-1)} = f(x)dx.$$

Интегрируя обе части, получим уравнение порядка $(n-1)$.

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1 .$$

Так как
$$y^{(n-1)} = \left(y^{(n-2)}\right)' = \frac{dy^{(n-2)}}{dx},$$

то
$$y^{(n-2)} = \int\left(\int f(x)dx + C_1\right)dx + C_2 = \int dx\int f(x)dx + C_1x + C_2 .$$

Продолжая, мы будем каждый раз понижать порядок уравнения на единицу, и после n–кратного интегрирования получим

$$y = \int dx\int dx\ldots\int f(x)dx + C_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2\frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + C_{n-1} + C_n .$$

Пример 16. Найти общее решение уравнения $y''' = -\dfrac{1}{x^2}$ и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$y(1) = 0, \quad y'(1) = 0, \quad y''(1) = 0 .$$

Решение. Имеем

$$y''' = (y'')' = -\frac{1}{x^2} \qquad \Rightarrow \quad y'' = \int\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx = \frac{1}{x} + C_1;$$

$$y'' = (y')' = \frac{1}{x} + C_1 \qquad \Rightarrow \quad y' = \int\left(\frac{1}{x} + C_1\right)dx = \ln|x| + C_1x + C_2;$$

$y = \displaystyle\int\left(\ln|x| + C_1x + C_2\right)dx = x\ln|x| - x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3$ – общее решение уравнения.

Чтобы найти частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям, надо определить соответствующие значения C_1, C_2, C_3. Полагая $x = 1$ имеем: $y = -1 + 0{,}5C_1 + C_2 + C_3 = 0,$

$$y' = C_1 + C_2 = 0,$$
$$y'' = 1 + C_1 = 0.$$

Откуда находим $C_1 = -1, \quad C_2 = 1, \quad C_3 = 0{,}5.$

Таким образом, искомое частное решение имеет вид

$$y = x\ln|x| - 0{,}5x^2 + 0{,}5.$$

Замечание. Если в задаче требуется найти только частное решение дифференциального уравнения, то целесообразно определять значения постоянных

в процессе решения, а не после нахождения общего решения. Это ускоряет решение задачи, так как в результате подстановки конкретных значений C_i

обычно упрощаются интегралы.

Теперь рассмотрим случай, когда уравнение

$$F(x, y^{(n)}) = 0 \qquad (39)$$

нельзя разрешить относительно $y^{(n)}$. Если оно допускает параметрическое представление $x = \varphi(t)$, $y^{(n)} = \psi(t)$, то его решение можно найти в параметрическом виде. Действительно, из $dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx$ получаем $dy^{(n-1)} = \psi(t) \cdot \varphi'(t)dt$, и $y^{(n-1)} = \int \psi(t) \cdot \varphi'(t)dt + C_1 = \psi_1(t, C_1)$.

Из $dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dx$ – получаем $dy^{(n-2)} = \psi_1(t, C_1) \cdot \varphi'(t)dt$,

и $y^{(n-1)} = \int \psi_1(t, C_1) \cdot \varphi'(t)dt + C_2 = \psi_2(t, C_1, C_2)$.

Аналогично найдем выражения для $y^{(n-3)}, y^{(n-4)}, \ldots, y', y$ и получим

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi_n(t, C_1, C_2, \ldots, C_n) \end{cases}.$$

Эти уравнения определяют общее решение уравнения (39) в параметрическом виде.

Пример 17 . Проинтегрировать уравнение $y'' + e^{y''} = x$.

Решение. Это уравнение не может быть разрешено относительно y''. Попытаемся найти его решение в параметрическом виде. Полагаем $y'' = t$. Тогда $x = t + e^t$, $dx = (1 + e^t)dt$.

Поэтому $dy' = y''dx = t(1 + e^t)dt$

и $y' = \dfrac{t^2}{2} + \int te^t dt = \dfrac{t^2}{2} + e^t(t-1) + C_1$.

Тогда $dy = y'dx = \left(\dfrac{t^2}{2} + e^t(t-1) + C_1\right) \cdot (1 + e^t)dt$,

$$\Rightarrow \quad dy = \left(\frac{t^2}{2} + e^t(t-1) + C_1 + \frac{t^2}{2}e^t + e^{2t}(t-1) + C_1 e^t\right)dt,$$

и $y = \dfrac{t^3}{6} + \left(\dfrac{t}{2} - \dfrac{3}{4}\right)e^{2t} + \left(\dfrac{t^2}{2} + C_1 - 1\right)e^t + C_1 t + C_2$.

Итак, $\begin{cases} x = t + e^t \\ y = \dfrac{t^3}{6} + \left(\dfrac{t}{2} - \dfrac{3}{4}\right)e^{2t} + \left(\dfrac{t^2}{2} + C_1 - 1\right)e^t + C_1 t + C_2 \end{cases}$

– общее решение уравнения в параметрическом виде.

1.1.2. Уравнение, не содержащее искомой функции и ее производных до порядка $(k-1)$ включительно.

Пусть уравнение имеет вид

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0, \quad (1 \le k < n), \tag{40}$$

т.е., уравнение не содержит искомой функции и ее производных, до порядка $(k-1)$ включительно. Это уравнение допускает понижение порядка на k единиц заменой $y^{(k)} = p(x)$. В результате такой замены получим уравнение

$$F(x, p, p', \ldots, p^{(n-k)}) = 0.$$

Предположим, что это уравнение интегрируется в конечном виде и $p = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k})$ есть его общее решение. Тогда неизвестную функцию y находим из $y^{(k)} = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k})$ k–кратным интегрированием.

Пример 18. Проинтегрировать уравнение $y'''x \ln x = y''$.

Решение. Полагая $y'' = p(x)$, имеем $y''' = p'$ и уравнение принимает вид $p'x \ln x = p$.

Это уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Разделяя переменные и интегрируя, получим:

$$\frac{dp}{p} = \frac{dx}{x \ln x} \quad \Rightarrow \quad \ln|p| = \ln|\ln x| + \ln|C_1| \quad \Rightarrow \quad p = C_1 \cdot \ln|x|$$

или $y'' = C_1 \cdot \ln|x|$.

Интегрируя дважды, находим

$$y' = C_1 \cdot \int \ln|x| dx = C_1 (x \ln|x| - x) + C_2,$$

$$y = C_1 \int (x \ln|x| - x) dx + C_2 x + C_3 = C_1 \left[x^2 \left(\frac{\ln|x|}{2} - \frac{1}{4} \right) \right] + C_2 x + C_3.$$

Это и есть общее решение уравнения.

2.1.3 Уравнение, не содержащее независимой переменной.

Пусть уравнение имеет вид

$$F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{41}$$

но понизить на единицу подстановкой $p = y'$, причем p рассматривается как новая неизвестная функция, аргументом которой является y, т.е. $p = p(y)$. Тогда

$$y' = \frac{dy}{dx} = p(y),$$

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot y' = \frac{dp}{dy} \cdot p = p' \cdot p,$$

$$y''' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dp}{dy} \cdot p\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{dp}{dy} \cdot p\right) \cdot \frac{dy}{dx} = \left(\frac{d^2 p}{dy^2} \cdot p + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2\right) \cdot p = p'' p^2 + (p')^2 \cdot p,$$

…………………………………………………………………

$$y^{(n)} = \omega\left(p, \frac{dp}{dy}, \frac{d^2 p}{dy^2}, \ldots, \frac{d^{(n-1)} p}{dy^{n-1}}\right) = \omega(p, p', p'', \ldots, p^{(n-1)}).$$

Подставляя эти выражения в (41), получаем уравнение $(n-1)$–го порядка. Предположим, что $p = \varphi(y, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})$ является общим решением получившегося уравнения $(n-1)$–го порядка. Тогда

$$y' = \varphi(y, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})$$

Или $\dfrac{dy}{\varphi(y, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})} = dx$.

Рассмотрим решения некоторых дифференциальных уравнений.

Пример 19. Решить уравнение $y''' = \dfrac{\sin 2x}{\sin^4 x}$.

Решение. Данное уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$, которое решается почленным интегрированием. Представим y''' в виде $y''' = \dfrac{dy''}{dx}$, тогда $\dfrac{dy''}{dx} = \dfrac{\sin 2x}{\sin^4 x}$. Делим переменные и интегрируем:

$$dy'' = \frac{2\cos x}{\sin^3 x} dx \quad \Rightarrow \quad y'' = -\frac{1}{\sin^2 x} + C_1.$$

Далее, $\dfrac{dy'}{dx} = -\dfrac{1}{\sin^2 x} + C_1 \quad \Rightarrow \quad dy' = \left(-\dfrac{1}{\sin^2 x} + C_1\right) \cdot dx \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow y' = \operatorname{ctg} x + C_1 x + C_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{ctg} x + C_1 x + C_2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad dy = (\operatorname{ctg} x + C_1 x + C_2) \cdot dx \quad \Rightarrow \quad y = \ln|\sin x| + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

– общее решение.

Пример 20. Решить уравнение $xy''' + y'' - x - 1 = 0$.

Решение. Данное уравнение вида $F\left(x, y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0$, не содержащее искомой функции y и ее производных до (n – 2)-го порядка, которое решается введением новой функции $z(x) = y^{(n-1)}$. Положив в уравнении $y'' = z$, $y''' = z'$, получим линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно неизвестной функции $z(x)$:

$$xz' + z - x - 1 = 0 \quad \text{или} \quad z' + \frac{1}{x}z = 1 + \frac{1}{x}.$$

Интегрируем его. Полагая в уравнении $z = u \cdot v$, $z' = u' \cdot v + u \cdot v'$, получим

$$u' \cdot v + u \cdot v' + \frac{u \cdot v}{x} = 1 + \frac{1}{x}, \qquad u' \cdot v + u\left(\frac{dv}{dx} + \frac{v}{x}\right) = 1 + \frac{1}{x}.$$

Определяем v, положив $\frac{dv}{dx} + \frac{v}{x} = 0$: $\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}$, откуда $\ln v = -\ln x$ или $v = \frac{1}{x}$. Определим $u(x)$: $\frac{du}{dx} \cdot \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$, $du = (x+1)dx$, откуда $u(x) = \frac{x^2}{2} + x + C_1$; следовательно, $z = \left(\frac{x^2}{2} + x + C_1\right) \cdot \frac{1}{x}$. Учитывая, что $z = y''$, находим $y'' = \frac{x}{2} + 1 + \frac{C_1}{x}$, откуда

$$\frac{dy'}{dx} = \left(\frac{x}{2} + 1 + \frac{C_1}{x}\right) \quad \Rightarrow$$

$$dy' = \left(\frac{x}{2} + 1 + \frac{C_1}{x}\right)dx \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{x^2}{4} + x + C_1 \ln|x| + C_2 \quad \Rightarrow$$

$$y = \int\left(\frac{x^2}{4} + x + C_1 \ln|x| + C_2\right)dx = \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} + C_1\int \ln|x|dx + C_2 x + C_3.$$

Возьмем $\int \ln|x|dx$ по частям. Если $x > 0$, то $\ln|x| = \ln x = u$, $du = \frac{dx}{x}$, $dv = dx$, $v = x$; $\int \ln x \cdot dx = x \cdot \ln x - \int dx = x \cdot \ln x - x$. Если же $x < 0 \Rightarrow \ln(-x) = u$, $dx = dv$, $du = \frac{dx}{x}$, $v = x$; $\int \ln(-x) \cdot dx = x \cdot \ln(-x) - x$.

Общее решение: $y = \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} + C_1(x \cdot \ln x - x) + C_2 x + C_3$, если $x > 0$,

и $y = \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} + C_1(x \cdot \ln(-x) - x) + C_2 x + C_3$, если $x < 0$.

Пример 21. Решить задачу Коши для дифференциального уравнения

$$y^3 y'' = 1, \quad y(-2) = 1, \quad y'(-2) = -1.$$

Решение. Данное уравнение вида $F(y, y', y'') = 0$, которое решается введением новой функции $y' = P(y)$. Полагая в этом уравнении $y' = P$,

$y'' = \frac{dP}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dP}{dy} \cdot P$, получим дифференциальное уравнение первого порядка

$$y^3 P \cdot \frac{dP}{dy} = 1 \quad \Rightarrow \quad P \cdot dP = \frac{dy}{y^3} \quad \Rightarrow \quad \frac{P^2}{2} = -\frac{1}{2y^2} + C_1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (y')^2 = -\frac{1}{y^2} + 2C_1.$$

Воспользуемся начальными условиями и найдем C_1:

$$(-1)^2 = -\frac{1}{1^2} + 2C_1 \qquad \Rightarrow \qquad C_1 = 1.$$

Следовательно, $(y')^2 = -\frac{1}{y^2} + 2 \quad \Rightarrow \quad y' = \pm\sqrt{\frac{2y^2 - 1}{y^2}}$, но $y'(-2) = -1$, поэтому, выберем только $y' = -\sqrt{\frac{2y^2 - 1}{y^2}}$. Произведя обратную замену $P = \frac{dy}{dx}$, получим дифференциальное уравнение снова первого порядка, где неизвестной функцией является $y(x)$:

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{2y^2 - 1}{y^2}}.$$

Разделим переменные и проинтегрируем:

$$-\int \frac{y \cdot dy}{\sqrt{2y^2 - 1}} = \int dx \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{4}\int \left(2y^2 - 1\right)^{-1/2} d\left(2y^2 - 1\right) = \int dx \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{\sqrt{2y^2 - 1}}{2} = x + C_2.$$

Воспользуемся первым начальным условием $y\,(-2) = 1$ и найдем C_2: $-\frac{\sqrt{2 \cdot 1^2 - 1}}{2} = -2 + C_2 \quad \Leftrightarrow \quad C_2 = \frac{3}{2}$. Таким образом, частный интеграл имеет вид: $\sqrt{2y^2 - 1} + 2x + 3 = 0 \quad \Rightarrow 2y^2 - 1 = (2x + 3)^2$ – общий интеграл.

2.2 Линейные однородные дифференциальные уравнения *n*-го порядка с постоянными коэффициентами

Уравнение вида

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \tag{42}$$

называется линейным однородным дифференциальным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами a_0, a_1, a_2, ..., a_n. Решение уравнения (42) в силу его строения ищут в виде экспоненты $y = e^{kx}$. Результат подстановки y, y', y'', ..., $y^{(n)}$ в (41) приводит к так называемому характеристическому уравнению

$$a_0k^n + a_1k^{n-1} + a_2k^{n-2} + ... + a_{n-1}k + a_n = 0. \qquad (43)$$

Следовательно, $y = e^{kx}$ – решение исходного дифференциального уравнения тогда и только тогда, когда k – корень характеристического уравнения. В силу основной теоремы алгебры характеристическое уравнение имеет n корней k_1, k_2, ..., k_n, среди которых могут встретиться и комплексные. Найденным корням отвечают n решений: $y_1 = e^{k_1x}$, $y_2 = e^{k_2x}, ..., y_n = e^{k_nx}$.

Максимальное число линейно-независимых решений y_1, y_2, ..., y_n называется фундаментальной системой решений линейного однородного дифференциального уравнения. Частные решения уравнения (42) зависят от вида корней характеристического уравнения (43) (см. табл. 1).

Общее решение уравнения (42)

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_{n-1}y_{n-1} + C_ny_n,$$

где y_1, y_2, ..., y_{n-1}, y_n – n частных решений уравнения (42), образующих фундаментальную систему решений.

Таблица 1

Вид корня характеристического уравнения (122)	Частные решения уравнения (121)
1. k – простой вещественный корень	e^{kx}
2. k – вещественный корень кратности r	e^{kx}, $x \cdot e^{kx}$, $x^2 \cdot e^{kx}$, ..., $x^{r-1} \cdot e^{kx}$
3. $\alpha \pm \beta i$ – простые комплексные сопряженные корни	$e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x$, $e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x$
4. $\alpha \pm \beta i$ – комплексные сопряженные корни кратности r	$e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x$, $x \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x$, ..., $x^{r-1} \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x$ $e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x$, $x \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x$, ..., $x^{r-1} \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x$

Пример 22. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''' + 9y' = 0.$$

Решение. Напишем характеристическое уравнение уравнения $y''' + 9y' = 0$ и найдем его корни:

$$k^3 + 9k = 0, \quad k(k^2 + 9) = 0, \quad k_1 = 0, \quad k_2 = 3i, \quad k_3 = -3i.$$

Все корни простые, следовательно, согласно табл. 1, соответствующие частные решения будут: $y_1 = e^{0x} = 1$, $y_2 = \cos 3x$, $y_3 = \sin 3x$ и

$$y = C_1 + C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x$$

– общее решение исходного дифференциального уравнения.

Пример 23. Найти общее решение уравнения $y''' - 3y' - 2y = 0$.

Решение. Найдем корни характеристического уравнения $k^3 - 3k - 2 = 0$ и укажем их кратность. Методом «подбора» находим корень уравнения $k = 2$. Следовательно, одним из множителей, на которые разлагается многочлен, будет двучлен $k - 2$. Разделим многочлен $k^3 - 2k - 2 = 0$ на двучлен $k - 2$:

$$\begin{array}{r|l}
k^3 - 3k - 2 & k - 2 \\
\cline{2-2}
-\underline{k^3 - 2k^2} & k^2 + 2k + 1 \\
2k^2 - 3k & \\
-\underline{2k^2 - 4k} & \\
k - 2 & \\
-\underline{k - 2} & \\
0 &
\end{array}$$

Таким образом, имеем $k^3 - 3k - 2 = (k - 2)(k^2 + 2k + 1) = (k - 2)(k + 1)^2 = 0$, $k_1 = 2$, $r_1 = 1$; $k_2 = -1$, $r_2 = 2$.

Первый корень – простой, вещественный корень, второй имеет кратность, равную двум. Таким образом частные решения, (см. табл. 1 п. 1 и 2), имеют вид: $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{-x}$, $y_3 = x \cdot e^{-x}$, а общее решение –

$$y = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{-x} + C_3\, x \cdot e^{-x}.$$

Пример 24. Найти частное решение уравнения

$$y'' + 4y' + 29y = 0 \quad \text{при} \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 15.$$

Решение. Корни характеристического уравнения $k^2 + 4k + 29 = 0$, комплексные сопряженные $-2 \pm 5i$. Согласно табл. 2 п.3 фундаментальная система решений уравнений $y_1 = e^{-2x}\cos 5x$, $y_2 = e^{-2x}\sin 5x$ и общее решение $y = e^{-2x}\left(C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x\right)$. Для определения частного решения в равенства

$$y = e^{-2x}\left(C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x\right) \text{ и}$$

$$y' = e^{-2x}\left(\left(5C_2 - 2C_1\right)\cos 5x - \left(2C_2 + 5C_1\right)\sin 5x\right)$$

подставим начальные условия. Получим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} 0 = C_1, \\ 15 = 5C_2 - 2C_1, \end{cases}$$

из которой определяем $C_1 = 0$, $C_2 = 3$. Подставив эти значения в общее решение, найдем частное: $y = 3 \cdot e^{-2x}\sin 5x$.

2.3 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения *n*-го порядка с постоянными коэффициентами

Уравнение вида

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \qquad (44)$$

называется неоднородным линейным дифференциальным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами a_0, a_1, a_2, ..., a_n.

Для линейных неоднородных уравнений справедливы следующие теоремы, с помощью которых отыскиваются их общие решения.

Теорема 1. Структура общего решения уравнения (44) имеет вид

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n + \tilde{y},$$

где y_1, y_2, ..., y_n – фундаментальная система решений соответствующего однородного дифференциального уравнения; $\tilde{y}$ – какое-либо частное решение неоднородного дифференциального уравнения, т. е. $y = \bar{y} + \tilde{y}$, где $\bar{y}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения.

Теорема 2. Если $\tilde{y}_1$ – частное решение уравнения

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = f_1(x),$$

а $\tilde{y}_2$ – частное решение уравнения

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = f_2(x),$$

то $\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2$ есть частное решение уравнения

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = f_1(x) + f_2(x).$$

Решение однородного уравнения рассмотрено в предыдущем параграфе. Сформулируем теоремы, при помощи которых находятся частные решения линейных неоднородных уравнений для специальных правых частей.

Теорема 3. Если правая часть линейного уравнения с постоянными коэффициентами имеет вид $e^{\alpha x} P(x)$, где $P(x)$ – многочлен n-й степени и α не является корнем характеристического уравнения, то существует частное решение вида $\tilde{y} = e^{\alpha x} M(x)$, где $M(x)$ – многочлен степени n с неопределенными коэффициентами:

$$M(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n .$$

Если же α является корнем характеристического уравнения кратности r, то существует частное решение вида $\tilde{y} = x^r e^{\alpha x} M(x)$.

В частности, при $\alpha = 0$ правая часть – многочлен n-й степени, и если $\alpha = 0$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение $M(x)$ – также некоторый многочлен той же степени. Если же $\alpha = 0$ – корень кратности r, то частное решение имеет вид $x^r \cdot M(x)$.

Теорема 4. Если правая часть линейного уравнения с постоянными коэффициентами может быть представлена в виде

$$e^{\alpha x}\left(P(x)\cos\beta x+Q(x)\sin\beta x\right), \qquad (45)$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены (n – наибольшая из их степеней) и $z = \alpha+i\beta$ – не является корнем характеристического уравнения, то существует частное решение вида

$$\tilde{y}=e^{\alpha x}\left(M(x)\cos\beta x+N(x)\sin\beta x\right), \qquad (46)$$

где

$$M(x)=A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots+A_nx^n$$

и

$N(x)=B_0+B_1x+B_2x^2+\ldots+B_nx^n$ – многочлены с неопределенными коэффициентами степени n. Если же $\alpha + i\beta$ является корнем характеристического уравнения кратности r, то существует частное решение вида

$$\tilde{y}=x^r e^{\alpha x}\left(M(x)\cos\beta x+N(x)\sin\beta x\right).$$

Пример 25. Проинтегрировать уравнение

$$y'''-3y'+2y=e^{-x}\left(4x^2+4x-10\right).$$

Решение. Решим сначала соответствующее однородное уравнение $y'''-3y'+2y=0$. Составим характеристическое уравнение $k^3 - 3k + 2 = 0$. Корни характеристического уравнения $k_1 = -2$, $r_1 = 1$; $k_2 = 1$, $r_2 = 2$.

Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$\bar{y}=C_1\cdot e^{-2x}+C_2\cdot e^{x}+C_3\cdot x\cdot e^{x}.$$

Правая часть $e^{-x}\left(4x^2+4x-10\right)$ имеет вид $e^{\alpha x}P(x)$ (см. теорему 3), где $P(x) = 4x^2 + 4x - 10$ – многочлен второй степени и $\alpha = -1$ не является корнем характеристического уравнения. Поэтому частное решение уравнения ищем в виде $\tilde{y}=e^{-x}\left(A_0+A_1x+A_2x^2\right)$,

$$\tilde{y}'=-e^{-x}\left(A_0+A_1x+A_2x^2\right)+$$

$$+e^{-x}\left(A_1+2A_2x\right)=e^{-x}\left(A_1-A_0+(2A_2-A_1)x-A_2x^2\right),$$

$$\tilde{y}''=-e^{-x}\left(A_1-A_0+(2A_2-A_1)x-A_2x^2\right)+e^{-x}\left(2A_2-A_1-2A_2x\right)=$$

$$=e^{-x}\left(A_0-2A_1+2A_2+\left(A_1-4A_2\right)x+A_2x^2\right).$$

$$\tilde{y}'''=e^{-x}\left(-A_0+3A_1-6A_2+(6A_2-A_1)x-A_2x^2\right).$$

Подставим значения $\tilde{y}$, $\tilde{y}'$, $\tilde{y}'''$ в дифференциальное уравнение и сократим обе части на e^{-x}:

$$-A_0+3A_1-6A_2+(6A_2-A_1)x-A_2x^2-3\left(A_1-A_0+(2A_2-A_1)x-A_2x^2\right)+$$
$$+2\left(A_0+A_1x+A_2x^2\right)\equiv 4x^2+4x-10$$

или $$\left(4A_0-6A_2\right)+4A_1x+4A_2x^2\equiv 4x^2+4x-10\,.$$

Приравняв коэффициенты слева и справа при одинаковых степенях x, получим систему, из которой найдем коэффициенты A_0, A_1, A_2:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & 4A_2=4 \quad\Rightarrow\; A_2=1,\\ x^1 & 4A_1=4 \quad\Rightarrow\; A_1=1,\\ x^0 & 4A_0-6A_2=-10\Rightarrow A_0=-1; \end{array}$$

следовательно, $\tilde y=e^{-x}\left(-1+x+x^2\right)$ и общее решение

$$y=\bar y+\tilde y=C_1e^{-2x}+C_2e^x+C_3x\cdot e^x+e^{-x}\left(-1+x+x^2\right).$$

Пример 26. Найти общее решение уравнения $y''+y=\sin x-2\cdot e^{-x}$.

Решение. Корни характеристического уравнения $k^2+1=0$ мнимые: $k_{1,2}=\pm i$. Общее решение уравнения $y''+y=0$ будет $\bar y=C_1\cos x+C_2\sin x$.

Определим частное решение $\tilde y_1$ уравнения $y''+y=\sin x$:

$$\sin x=e^{0x}(0\cos x+1\sin x);\;\; \alpha=0;\ \beta=1;\ z=i;\ P(x)=0;\ Q(x)=1.$$

Следовательно, $M(x)=A_0$, $N(x)=B_0$, а так как $z=k_1$, то $\tilde y_1$ ищем в виде $$\tilde y_1=x\,(A_0\cos x+B_0\sin x),$$

$$\tilde y_1'=A_0\cos x+B_0\sin x+x\,(-A_0\sin x+B_0\cos x),$$

$$\tilde y_1''=-2A_0\sin x+2B_0\cos x-x\,(A_0\cos x+B_0\sin x).$$

Из тождества, которое получится после подстановки $\tilde y_1,\tilde y_1''$ в уравнение $y''+y=\sin x$, сравнивая коэффициенты при синусах и косинусах, определим A_0 и B_0:

$$-2A_0\sin x+2B_0\cos x-x\left(A_0\cos x+B_0\sin x\right)+x\left(A_0\cos x+B_0\sin x\right)\equiv\sin x$$

$$\begin{array}{c|l} \cos x & 2B_0=0\Rightarrow\;\; B_0=0,\\ \sin x & -2A_0=1\Rightarrow A_0=-1/2; \end{array}$$

следовательно, $\tilde y_1=-\dfrac{1}{2}x\cdot\cos x$. Определим частное решение $\tilde y_2$ уравнения $y''+y=-2e^{-x}$, помня, что корни характеристического уравнения $k_{1,2}=\pm i$. В правой части имеем выражение вида $e^{\alpha x}P(x)$, где $P(x)=-2$ (многочлен нулевой степени); $\alpha=-1$, и так как α не является корнем характеристического уравнения, то частное решение ищем в виде

$$\tilde y_2=A_0e^{-x},\qquad \tilde y_2'=-A_0e^{-x},\qquad \tilde y_2''=A_0e^{-x}.$$

Из тождества, полученного после подстановки $\tilde{y}_2$ и $\tilde{y}_2''$ в уравнение $y''+y=-2e^{-x}$, определим коэффициент A_0, $A_0e^{-x}+A_0e^{-x}\equiv -2e^{-x}$ или $2A_0e^{-x}\equiv -2e^{-x}$, откуда $A_0=-1$; $\tilde{y}_2=-e^{-x}$. Следовательно, в силу теоремы 2 общее решение данного уравнения будет $y=\bar{y}+\tilde{y}_1+\tilde{y}_2$, т. е. в данном случае $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1}{2}x\cdot\cos x-e^{-x}$.

Ответ: $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1}{2}x\cdot\cos x-e^{-x}$.

Метод Лагранжа (метод вариации произвольных постоянных) решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений *n*-го порядка с постоянными коэффициентами

Для решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x) \qquad (47)$$

рассматривался метод подбора частного решения в случае, если функция $f(x)$, стоящая в правой части, может быть представлена в виде $e^{\alpha x}P(x)$; $e^{\alpha x}\left(P(x)\cos\beta x+Q(x)\sin\beta x\right)$ или состоит из суммы такого рода функций.

Во всех остальных случаях пользуются методом вариации произвольных постоянных.

Этот метода заключается в том, что сначала для соответствующего однородного уравнения

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=0$$

находят общее решение

$$\bar{y}=\sum_{i=1}^{n}C_iy_i=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_{n-1}y_{n-1}+C_ny_n,$$

Затем полагают величины C_1, C_2, ..., C_n как функции независимой переменной x. Подбирают их так, чтобы

$$y=\sum_{i=1}^{n}C_i(x)y_i=C_1(x)y_1+C_2(x)y_2+\ldots+C_{n-1}(x)y_{n-1}+C_n(x)y_n$$

было решением уравнения (47). Для определения функций $C_1(x)$, $C_2(x)$, ..., $C_n(x)$ составляется система уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1+C_2'(x)y_2+\ldots+C_n'(x)y_n=0,\\ C_1'(x)y_1'+C_2'(x)y_2'+\ldots+C_n'(x)y_n'=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ C_1'(x)y_1^{(n-1)}+C_2'(x)y_2^{(n-1)}+\ldots+C_n'(x)y_n^{(n-1)}=f(x). \end{cases} \qquad (48)$$

Рассмотрим этот метод для линейных дифференциальных неоднородных уравнений второго порядка

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x). \qquad (49)$$

Получив общее решение $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ соответствующего однородного уравнения, полагают, что величины C_1, C_2 являются функциями независимой переменной x, и записывают

$$y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2. \qquad (50)$$

Для определения функций $C_1(x)$ и $C_2(x)$ составляется система уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0, \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = f(x). \end{cases} \qquad (51)$$

Определитель этой системы – определитель Вронского. Так как (50) есть общее решение уравнения (49), то функции y_1 и y_2 линейно независимы и их определитель Вронского не равен нулю. Поэтому система (51) всегда имеет решение и притом единственное.

Решая эту систему уравнений относительно $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$, получим:

$$\begin{cases} C_1'(x) = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}}{W} \\ C_2'(x) = \dfrac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}}{W} \end{cases}, \quad \text{или} \quad \begin{cases} C_1'(x) = \dfrac{-y_2 f(x)}{W} \\ C_2'(x) = \dfrac{y_1 f(x)}{W} \end{cases}, \qquad (52)$$

где определитель Вронского $W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$.

Из (52) интегрированием находим:

$$\begin{cases} C_1(x) = -\displaystyle\int \frac{y_2 f(x)}{W} dx + C_1, \\ C_2(x) = \displaystyle\int \frac{y_1 f(x)}{W} dx + C_2. \end{cases}$$

Подставляя в (50) вместо $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ найденные интегралы, получим общее решение уравнения (49).

Пример 27. Решить уравнение $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x$.

Решение. Корни характеристического уравнения $k^2 + 4k + 4 = 0$: $k_1 = -2$, $r_1 = 2$, следовательно, общее решение однородного уравнения есть

$$\bar{y} = C_1 \cdot e^{-2x} + C_2 \cdot x \cdot e^{-2x}.$$

Общее решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y = C_1(x) \cdot e^{-2x} + C_2(x) \cdot x \cdot e^{-2x}.$$

Так как для данного примера $y_1 = e^{-2x}$, $y_2 = x \cdot e^{-2x}$, $y_1' = -2 \cdot e^{-2x}$, $y_2' = (1-2x) \cdot e^{-2x}$, то согласно (49) имеем систему

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot e^{-2x} + C_2'(x) \cdot x \cdot e^{-2x} = 0, \\ -C_1'(x) \cdot 2 \cdot e^{-2x} + C_2'(x) \cdot (1-2x) \cdot e^{-2x} = e^{-2x} \cdot \ln x. \end{cases}$$

Из этой системы найдем функции $C_1'(x)$, $C_2'(x)$, предварительно сократив левую и правую части уравнений на e^{-2x}:

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x \\ \ln x & 1-2x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x \\ -2 & 1-2x \end{vmatrix}} = \frac{-x \ln x}{1-2x+2x} = -x \ln x,$$

$$C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & \ln x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x \\ -2 & 1-2x \end{vmatrix}} = \frac{\ln x}{1} = \ln x,$$

$$C_1(x) = -\int x \cdot \ln x \cdot dx = \begin{vmatrix} U = \ln x; & dU = \dfrac{dx}{x} \\ dV = x \cdot dx; & V = \dfrac{x^2}{2} \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{x^2 \cdot \ln x}{2} + \int \frac{x^2 dx}{2x} = = -\frac{x^2 \ln x}{2} + \frac{x^2}{4} + C_1,$$

$$C_2(x) = \int \ln x \cdot dx = \begin{vmatrix} U = \ln x; & dU = \dfrac{dx}{x} \\ dV = dx; & V = x \end{vmatrix} = x \cdot \ln x - \int \frac{x \cdot dx}{x} = x \cdot \ln x - x + C_2.$$

Подставив найденные функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$, получим общее решение данного дифференциального уравнения:

$$y = \left(-\frac{x^2 \ln x}{2} + \frac{x^2}{4} + C_1 \right) \cdot e^{-2x} + \left(x \cdot \ln x - x + C_2 \right) \cdot x \cdot e^{-2x},$$

$$y = \left(\frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{3x^2}{4} + C_1 + C_2 x \right) \cdot e^{-2x}.$$

1. Системы дифференциальных уравнений

Нормальная система n-го порядка обыкновенных дифференциальных уравнений имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, ..., x_n), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, ..., x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, ..., x_n), \end{cases} \tag{53}$$

где t – независимая переменная; $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$ – неизвестные (искомые) функции; f_1, f_2, ..., f_n – заданные функции.

Метод исключения неизвестных состоит в том, что данная система приводится к одному дифференциальному уравнению n-го порядка с одной неизвестной функцией. Для этого последовательно дифференцируют одно из уравнений системы и исключают все неизвестные функции, кроме одной.

Линейная однородная система n-го порядка с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n, \end{cases}$$

где $a_{ij} = \mathrm{const}$; $a_{ij} \in R$; $x_i(t)$ – неизвестные функции.

Эту систему можно записать в виде одного матричного дифференциального уравнения

$$\frac{dX}{dt} = AX.$$

Здесь

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ..... & ..... & ... & .... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \dfrac{dx_2}{dt} \\ .... \\ \dfrac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}.$$

При решении системы методом Эйлера частные решения системы ищутся в виде $X = V \cdot e^{kt}$, где $V \neq 0$ – матрица-столбец, k – число.

Если корни k_1, k_2, ..., k_n характеристического уравнения $\det(A - kE) = 0$ – действительны и различны, то общее решение системы имеет вид

$$X = C_1 V_1 e^{k_1 t} + C_2 V_2 e^{k_2 t} + \ldots + C_n V_n e^{k_n t},$$

где C_1, C_2, ..., C_n – произвольные постоянные; V_j – матрица-столбец, соответствующая числу k_j, т. е. для нее выполняется равенство $(A - k_j E)\, V_j = 0$; E – единичная матрица.

Замечание. Если k_m, $\bar{k}_m$ – пара простых комплексных сопряженных корней характеристического уравнения, то им соответствует два действительных частных решения:

$$\mathrm{Re}\left(V_m e^{k_m t}\right); \qquad \mathrm{Im}\left(V_m e^{k_m t}\right).$$

Пример 28. Методом исключения найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y + \cos t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 2\sin t. \end{cases}$$

Решение. Применяя метод исключения, выразим из первого уравнения y через x и t:

$$y = \frac{dx}{dt} - 2x - \cos t.$$

После подстановки этого выражения во второе уравнение будем иметь

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + x = \sin t.$$

Следовательно, для нахождения неизвестной функции x получено дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Используя методы, находим его общее решение:

$$x = \left(C_1 + C_2 t\right) \cdot e^t + \frac{1}{2}\cos t.$$

А так как y было выражено через x, то найдем и вторую функцию системы

$$y = \left(C_2(1 - t) - C_1\right) \cdot e^t - 2\cos t - \frac{1}{2}\sin t.$$

В результате получено общее решение данной системы.

$$x = \left(C_1 + C_2 t\right) \cdot e^t + \frac{1}{2}\cos t.$$

$$y = \left(C_2(1 - t) - C_1\right) \cdot e^t - 2\cos t - \frac{1}{2}\sin t.$$

Пример 29. Методом Эйлера найти общее решение системы и выделить частное решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y; \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 3. \end{cases}$$

Решение. Применяя метод Эйлера, составим характеристическое уравнение матрицы системы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-k & 1 \\ 1 & 2-k \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad k^2 - 4k + 3 = 0.$$

Его корни $k_1 = 3$, $k_2 = 1$.

Находим матрицу-столбец V_1, соответствующую корню $k_1 = 3$:

$$V_1 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 2-3 & 1 \\ 1 & 2-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} -v_1 + v_2 = 0, \\ v_1 - v_2 = 0. \end{cases}$$

Отсюда $v_2 = v_1$ $(v_1 \neq 0)$.

Полагая $v_1 = 1$, получим $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Аналогично находим матрицу-столбец $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ для корня $k_2 = 1$.

Общее решение системы

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 V_1 e^{k_1 t} + C_2 V_2 e^{k_2 t} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{t}, \\ y = C_1 e^{3t} - C_2 e^{t}. \end{cases}$$

Используя начальные условия, получим для определения постоянных C_1 и C_2 уравнения

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2, \\ 3 = C_1 - C_2, \end{cases}$$

откуда $C_1 = 2$, $C_2 = -1$.

Таким образом, решением данной задачи Коши являются функции

$$x = 2 \cdot e^{3t} - e^{t}; \quad y = 2 \cdot e^{3t} + e^{t}.$$

Общее решение $\begin{cases} x = C_1 e^{3t} + C_2 e^t, \\ y = C_1 e^{3t} - C_2 e^t, \end{cases}$

частное решение $\begin{cases} x = 2 \cdot e^{3t} - e^t, \\ y = 2 \cdot e^{3t} + e^t. \end{cases}$

Пример 30. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -7x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 5y. \end{cases}$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -7-k & 1 \\ -2 & -5-k \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad k^2 + 12k + 37 = 0$$

имеет корни $k_1 = -6 + i$, $k_2 = -6 - i$. Находим матрицу-столбец $V_1 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

для k_1: $$\begin{cases} (-1-i)\cdot v_1 + v_2 = 0, \\ -2 \cdot v_1 + (1-i)\cdot v_2 = 0. \end{cases}$$

Два уравнения этой системы сводятся к одному уравнению $(-1-i)\cdot v_1 + v_2 = 0,$ откуда $v_2 = (1+i)\cdot v_1 \quad (v_1 \neq 0)$. Полагая $v_1 = 1$, получим

$$v_2 = 1 + i \quad \Rightarrow \quad V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad V_1 \cdot e^{k_1 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} \cdot e^{(-6+i)\cdot t} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} \cdot e^{-6t}(\cos t + i \sin t) = \begin{pmatrix} e^{-6t}(\cos t + i \sin t) \\ e^{-6t}((\cos t - \sin t) + i(\cos t + \sin t)) \end{pmatrix}.$$

Согласно замечанию, два частных решения исходной системы имеют вид

$$\operatorname{Re}(V_1 \cdot e^{k_1 t}) = \begin{pmatrix} e^{-6t} \cos t \\ e^{-6t}(\cos t - \sin t) \end{pmatrix};$$

$$\operatorname{Im}(V_1 \cdot e^{k_1 t}) = \begin{pmatrix} e^{-6t} \sin t \\ e^{-6t}(\cos t + \sin t) \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} e^{-6t} \cos t \\ e^{-6t}(\cos t - \sin t) \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{-6t} \sin t \\ e^{-6t}(\cos t + \sin t) \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{cases} x = C_1 e^{-6t} \cos t + C_2 e^{-6t} \sin t, \\ y = C_1 e^{-6t} (\cos t - \sin t) + C_2 e^{-6t} (\cos t + \sin t). \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = e^{-6t} (C_1 \cos t + C_2 \sin t), \\ y = e^{-6t} ((C_2 + C_1) \cos t + (C_2 - C_1) \sin t). \end{cases}$$