II. Дифференциальные уравнения

Дифференциальные уравнения первого порядка

Определение. Соотношения, в которых неизвестные переменные и их функции находятся под знаком производной или дифференциала, называются дифференциальными уравнениями.

Определение. Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y = f(x)$ и её производную первого порядка y' или дифференциалы dx и dy.

Дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$F\left(x, y, y'\right) = 0 \tag{1}$$

Если это уравнение можно разрешить относительно y', то оно примет вид

$$y' = f\left(x, y\right). \tag{2}$$

Основной задачей теории дифференциальных уравнений является нахождение неизвестных функций, определяемых дифференциальными уравнениями

Определение. Решением дифференциального уравнения (1) называется функция $y = \varphi(x)$, обращающая уравнение в тождество.

Определение. Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется функция $y = \varphi(x, c)$, (3)
которая зависит от произвольной постоянной c и обращает дифференциальное уравнение (1) в тождество.

Определение. Общее решение $\Phi(x, y, c) = 0$, (4)
заданное в неявном виде, называется общим интегралом этого уравнения.

Определение. Частным решением дифференциального уравнения (1) называется функция $y = \varphi(x, c_0)$, которая получается из общего решения (3) при определенном числовом значении $c = c_0$.

Теорема существования и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка.

Пусть в уравнении (2) функция $f(x, y)$ и её частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны в некоторой области D на плоскости Oxy. Тогда, какова бы ни была точка $M_0(x_0, y_0) \in D$, всегда существует (и при том только одно) такое решение этого уравнения $y_0 = \varphi(x_0)$, которое равно y_0 при $x = x_0$, т. к. $y_0 = \varphi(x_0)$.

Условие, что $y_0 = \varphi(x_0)$ при $x = x_0$, называется начальным условием.

Оно записывается в виде $y\big|_{x=x_0} = y_0$ или $y(x_0) = y_0$. (5)

Поставим задачу. Найти решение $y = y(x)$ уравнения $y' = f(x,y)$, удовлетворяющее предыдущей теореме.

Такая задача называется **задачей Коши.**

Определение. Решение, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши, называется особым.

Замечание. В некоторых случаях выгодно за искомую функцию считать переменную x и записывать уравнение $y' = f(x,y)$ в виде

$$x' = g(x,y), \qquad \text{где} \qquad g(x,y) = \frac{1}{f(x,y)}. \tag{6}$$

Учитывая, что $y' = \dfrac{dy}{dx}$ и $x' = \dfrac{dx}{dy}$, дифференциальные уравнения (1), (2) и (6) можно записать в форме

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \tag{7}$$

где $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – известные функции.

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y' = 3x^2$.

Решение. Так как $y' = \dfrac{dy}{dx}$, то получим $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2$.

Тогда $dy = 3x^2dx$. Интегрируя обе части уравнения, окончательно получим $y = x^3 + c$.

Общее решение данного уравнения образует семейство кубических парабол, т.к. c может принимать любое числовое значение (см. рис.1).

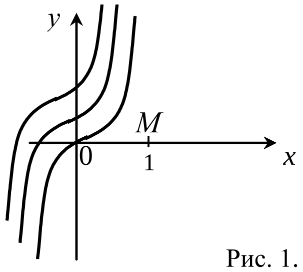

Рис. 1.

Рассмотрим частное решение (**задачи Коши)**.

Пусть наша кривая проходит через точку $M(1,0)$, см. рис. 1. Подставим координаты точки M в общее решение. Получим

$$0 = 1^3 + c, \quad \text{откуда} \quad c = -1.$$

Тогда частное решение имеет вид

$$y = x^3 - 1.$$

Геометрическое толкование дифференциального уравнения первого порядка заключается в том, что общее решение (общий интеграл) (4) представляет собой семейство кривых на координатной плоскости, зависящее от одной произвольной постоянной c.

Эти кривые называются интегральными кривыми дифференциального уравнения.

Частному решению (**задачи Коши**) соответствует одна кривая этого семейства, проходящая через данную точку плоскости.

Решить дифференциальное уравнение – значит:

1) найти его общее решение (если начальные условия не заданы);

2) найти частное решение уравнения, которое удовлетворяет начальным условиям или, другими словами, **решить задачу Коши.**

Рассмотрим некоторые типы дифференциальных уравнений первого порядка.

1. Уравнения с разделяющимися переменными

Определение. Дифференциальное уравнение вида

$$M(x)dx + N(y)dy = 0, \tag{8}$$

в котором коэффициент при dx является функцией только от x, а коэффициент при dy – функцией только от y, называется уравнением с разделенными переменными.

Функции $M(x)$ и $N(y)$ должны быть непрерывными для всех значений x и y.

Уравнение с разделенными переменными решается следующим образом.

Перенесем слагаемое $M(x)dx$ в правую сторону равенства (8) с противоположным знаком,

$$M(x)dx = -N(y)dy.$$

Проинтегрируем правую часть уравнения по y, а левую по x.

$$\int N(y)dy = -\int M(x)dx + c. \tag{9}$$

Полученное равенство (9) является общим интегралом уравнения с разделенными переменными (8).

Пример 2. Решить уравнение

$$ydy-xdx=0.$$

Решение. Переменные уравнения разделены.

Тогда $$ydy=xdx.$$

Интегрируя, получим

$$\int ydy=\int xdx \qquad \text{или} \qquad \frac{y^2}{2}=\frac{x^2}{2}+c.$$

Тогда $\dfrac{y^2}{2}-\dfrac{x^2}{2}=c.$ или $y^2-x^2=c_1$ – семейство гипербол.

Замечание. Дифференциалы dx и dy должны всегда стоять в числителе.

Определение. Дифференциальное уравнение вида

$$M_1(x)N_1(y)dy+M_2(x)N_2(y)dx=0, \tag{10}$$

в котором коэффициенты при дифференциалах можно разложить на множители, зависящие только от x и только от y, называется уравнением с разделяющимися переменными.

Разделим уравнение $M_1(x)N_1(y)dy+M_2(x)N_2(y)dx=0$ на $M_1(x)N_2(y)$, $\left(M_1(x)\neq 0,\ N_2(y)\neq 0\right)$, получим

$$\frac{N_1(y)}{N_2(y)}dy+\frac{M_2(x)}{M_1(x)}dx=0.$$

Далее

$$\frac{N_1(y)}{N_2(y)}dy=-\frac{M_2(x)}{M_1(x)}dx. \tag{11}$$

Проинтегрировав обе части уравнения (11), получим общий интеграл уравнения (10):

$$\int\frac{N_1(y)}{N_2(y)}dy=-\int\frac{M_2(x)}{M_1(x)}dx+c.$$

Замечание 1. При делении обеих частей уравнения (10) на произведение $M_1(x)N_2(y)$ могут быть потеряны частные решения, обращающие в нуль произведение $M_1(x)N_2(y)$.

Замечание 2. Уравнение с разделенными переменными (8) является частным случаем уравнения с разделяющимися переменными.

Пример 3. Решить уравнение $y' = -\dfrac{y}{x}$.

Решение. Так как $y' = \dfrac{dy}{dx}$, то получим

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}, \quad (x \neq 0).$$

Это уравнение с разделяющимися переменными.

Разделив это уравнение на y $(y \neq 0)$ и умножив его на dx, получим

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, получим

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}, \Rightarrow \ln y = -\ln x + c_1, \Rightarrow \ln y = -\ln x + \ln c_2,$$

$$(c_2 > 0,\ c_1 = \ln c_2), \Rightarrow \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \Rightarrow \ln y = \ln \frac{c_2}{x}.$$

Откуда $y = \dfrac{c_2}{x}$, $(c_2 \neq 0)$ – общее решение нашего уравнения в общем виде.

При делении обеих частей уравнения на y можно потерять решение $y = 0$. Оно также является особым (или частным) решением уравнения. Заметим, что это решение можно получить из общего при $c_2 = 0$. Поэтому в ответе достаточно указать $y = \dfrac{c_2}{x}$.

Пример 4. Решить уравнение

$$\left(y - x^2 y\right) y' + xy^2 + x = 0.$$

Решение. Представим уравнение в виде

$$\left(y - x^2 y\right) dy + \left(xy^2 + x\right) dx = 0, \qquad \text{т.к.} \quad y' = \frac{dy}{dx}.$$

Вынесем общие множители за скобки

$$y\left(1 - x^2\right) dy + x\left(y^2 + 1\right) dx = 0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Перенесем второе слагаемое в правую сторону

$$y\left(1 - x^2\right) dy = -x\left(y^2 + 1\right) dx.$$

Разделим обе части уравнения на произведение

$\left(y^2+1\right)\cdot\left(1-x^2\right), \quad (x\neq\pm1),$ $\qquad \dfrac{ydy}{\left(y^2+1\right)}=\dfrac{-x\,dx}{\left(1-x^2\right)}.$

Интегрируя обе части уравнения, найдем общее решение

$$\int\frac{ydy}{\left(y^2+1\right)}=-\int\frac{x\,dx}{\left(1-x^2\right)}, \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}\int\frac{d\left(y^2+1\right)}{y^2+1}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(1-x^2\right)}{1-x^2}.$$

Умножим обе части уравнения на 2

$\displaystyle\int\frac{d\left(y^2+1\right)}{y^2+1}=\int\frac{d\left(1-x^2\right)}{1-x^2}, \Rightarrow \ln\left(y^2+1\right)=\ln\left(1-x^2\right)+\ln c \ \ (c>0), \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \ln\left(y^2+1\right)=\ln c\left(1-x^2\right), \quad \Rightarrow \quad y^2+1=c\left(1-x^2\right)$ – общее решение уравнения в неявном виде (общий интеграл).

При делении обеих частей уравнения на произведение $\left(y^2+1\right)\cdot\left(1-x^2\right)$ могли потерять решение $x=\pm1$, которое находится из равенства $\left(y^2+1\right)\cdot\left(1-x^2\right)=0$. Функции $x=\pm1$ не являются решением нашего уравнения, т.к. при подстановке в уравнение не обращают его в тождество.

2. Уравнения, приводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными

Уравнения вида

$$y' = f\left(ax+by+c\right), \tag{12}$$

где a, b и c – постоянные числа $\left(a \neq 0, b \neq 0\right)$, приводятся к уравнениям с разделяющимися переменными с помощью подстановки

$$t = ax+by+c, \quad t' = a+by', \quad \text{где} \quad t' = \frac{dt}{dx}.$$

<u>Замечание 1.</u> Если $c = 0$, получим уравнение

$$y' = f\left(ax+by\right), \tag{13}$$

которое решается с помощью замены

$$t = ax+by, \quad t' = a+by'.$$

<u>Замечание 2.</u> Если $a = 0$ или $b = 0$, то получим уравнение с разделяющимися переменными.

Пример 5. Решить уравнение

$$y' = \cos\left(y+x\right).$$

Решение. Введем новую переменную $t = t(x)$ по формуле

$$t = y+x, \qquad t' = y'+1 \;\Rightarrow\; y' = t'-1.$$

Подставим t и y' в первоначальное уравнение, получим уравнение с разделяющимися переменными относительно x и t.

$$t'-1 = \cos t \;\Rightarrow\; t' = \cos t+1 \;\Rightarrow\; \frac{dt}{dx} = 1+\cos t \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \frac{dt}{1+\cos t} = dx \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{dt}{2\cos^2\frac{t}{2}} = \int dx, \quad \text{т.к. } 1+\cos t = 2\cos^2\frac{t}{2}$$

Интегрируя обе части равенства $\int \frac{dt}{2\cos^2\frac{t}{2}} = \int dx,$,

получим общий интеграл уравнения

$$\mathrm{tg}\,\frac{y+x}{2} = \left(x+c\right) \quad \text{– общее решение уравнения.}$$

<u>Замечание.</u> В примерах частные и особые решения дифференциальных уравнений рассматривать не будем.

3. Однородные уравнения

Определение. Функция $F(x,y)$ называется однородной функцией степени m, если для $m>0$ выполняется тождество

$$F\left(tx,ty\right)=t^{m}F\left(x,y\right). \qquad (14)$$

Пример 6. Рассмотрим функцию

$$F\left(x,y\right)=x^2+xy-y^2.$$

Решение. Данная функция однородная степени $m=2$.

Покажем это.

Вычислим

$$F\left(tx,ty\right)=t^2x^2+t^2xy-t^2y^2=t^2\left(x^2+xy-y^2\right)=t^2F\left(x,y\right),\ \text{ т.е. } m=2.$$

Пример 7. Проверить, является ли данная функция $F\left(x,y\right)=\sqrt{x^2+y^2}$ однородной?

Решение.

$$F\left(tx,ty\right)=\sqrt{t^2x^2+t^2y^2}=\sqrt{t^2\left(x^2+y^2\right)}=t\sqrt{x^2+y^2}=t\cdot F\left(x,y\right).$$

Данная функция является однородной степени $m = 1$.

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка

$$P\left(x,y\right)dx+Q\left(x,y\right)dy=0 \qquad (15)$$

называется однородным, если $P\left(x,y\right)$ и $Q\left(x,y\right)$ – однородные функции одной и той же степени.

Замечание. Всякая однородная функция нулевой степени является функцией отношения её аргументов: $F\left(x,y\right)=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$. (16)

Тогда любое однородное дифференциальное уравнение может быть записано в следующем виде: $y'=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$. (17)

Однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью подстановки $\dfrac{y}{x}=t$, где $t=t(x)$, (18)

тогда $y=xt,\quad y'=t+xt',$ где $t'=\dfrac{dt}{dx}$. (19)

Подставляя (18) и (19) в уравнение (17), получим уравнение с разделяющимися переменными относительно t и x.

Пример 8. Решить уравнение

$$xdy - ydx = ydy.$$

Решение. Разделив данное уравнение на произведение $x \cdot dx$, получим

$$y' - \frac{y}{x} = \frac{y}{x} y', \qquad (x \neq 0).$$

Выразим y': $y' - \frac{y}{x} y' = \frac{y}{x} \Rightarrow y' \left(1 - \frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x} \Rightarrow y' = \frac{y/x}{1 - y/x}$.

Получили однородное уравнение. Выполним замену:

$\frac{y}{x} = t, \quad y = xt, \quad y' = t + xt', \quad$ где $t' = \frac{dt}{dx}$. Тогда $t + t'x = \frac{t}{1-t}$.

Получили уравнение с разделяющимися переменными.

$$t'x = \frac{t}{1-t} - t \Rightarrow t'x = \frac{t - t + t^2}{1-t} \Rightarrow t'x = \frac{t^2}{1-t} \Rightarrow x\frac{dt}{dx} = \frac{t^2}{1-t} \Rightarrow \frac{1-t}{t^2} dt = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя последнее равенство, получим

$$\int \frac{1-t}{t^2} dt = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dt}{t^2} - \int \frac{dt}{t} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow -\frac{1}{t} - \ln|t| + c = \ln|x|.$$

Умножим последнее равенство на (-1)

$$\frac{1}{t} + \ln|t| - c = -\ln|x| \Rightarrow \frac{1}{t} + \ln|t| + \ln|x| \Rightarrow \frac{1}{t} + \ln|tx| = c.$$

Подставив вместо $t = y/x$, получим общее решение уравнения $\frac{x}{y} + \ln|y| = c$.

Пример 9. Решить уравнение $xy' = x \cdot e^{y/x} + y$.

Решение. Учитывая, что $x \neq 0$, разделим данное уравнение на x:

$$y' = e^{y/x} + \frac{y}{x}. \qquad \frac{y}{x} = t, \quad y = xt, \quad y' = t + t'x.$$

Подставим в преобразованное уравнение $\frac{y}{x} = t, \quad y = xt, \quad y' = t + t'x$.

Учитывая, что $t' = \frac{dt}{dx}$, тогда $x\frac{dt}{dx} = e^t$.

Разделим переменные $e^{-t}dt = \frac{dx}{x}$. Интегрируя, получим

$$-e^{-t} + \ln c = \ln x \Rightarrow -e^{-t} = \ln x - \ln c \Rightarrow e^{-t} = \ln\left|\frac{c}{x}\right| \Rightarrow -t = \ln\left(\ln\left|\frac{c}{x}\right|\right).$$

Вернемся к старым переменным $-\frac{y}{x} = \ln\left(\ln\left|\frac{c}{x}\right|\right) \Rightarrow y = -x \cdot \ln\left(\ln\left|\frac{c}{x}\right|\right)$ – общий интеграл уравнения.

4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение. Линейными дифференциальными уравнениями первого порядка называются уравнения, линейные относительно неизвестной функции и её производной.

Линейное дифференциальное уравнение имеет вид:

$$y' + P(x)y = Q(x), \tag{20}$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ – непрерывные функции от x.

Замечание 1. В уравнение (20) y и y' входят только в первой степени.

Замечание 2**.** Функции $P(x)$ или $Q(x)$ могут быть постоянными числами, если же они одновременно являются константами, то уравнение (20) будет уравнением с разделяющимися переменными.

Пример 10. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\left(xy + e^{x}\right)dx + xdy = 0.$$

Решение. Полагая, что $x \neq 0$, разделим обе части равнения на $x \cdot dx$, получим $y + \frac{e^{x}}{x} + y' = 0$.

Перенесем слагаемое $\frac{e^{x}}{x}$ в правую сторону, тогда $y + y' = -\frac{e^{x}}{x}$.

Данное уравнение является линейным, так как содержит y и y' только в первой степени, $P(x) = 1$, $Q(x) = -e^{x}/x$.

Замечание. В отдельных случаях дифференциальное уравнение нелинейное относительно y и y'_x является линейным относительно x и x'_y. Такое уравнение имеет вид:

$$x' + P(y)x = Q(y), \tag{21}$$

где $P(x)$ и $Q(y)$ – непрерывные функции от x или могут быть константами.

Пример 11. Определить тип уравнения $y' = \dfrac{1}{2x - y^2}$.

Решение. Это уравнение нелинейное относительно y и y'. Представим его в другом виде, воспользовавшись тем, что $y' = 1/x'$. тогда

$$\frac{1}{x'} = \frac{1}{2x - y^2} \quad \Rightarrow \quad x' = 2x - y^2 \quad \Rightarrow \quad x' - 2x = -y^2.$$

Получили уравнение линейное относительно x и x'_y

$$P(y) = -2, \quad Q(y) = -y^2.$$

Решение линейного уравнения $y' + P(x)y = Q(x)$, **(метод подстановки)**

Решение уравнения (20) будем искать в виде произведения двух функций, зависящих от переменной x

$$y = u(x)\cdot v(x) \quad \Rightarrow \quad y' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x).$$

Подставим y и y' в уравнение (20):

$$u'\cdot v + v'\cdot u + P(x)\cdot u\cdot v = Q(x). \tag{22}$$

Собираем слагаемые при v в первой степени (можно при u):

$$v\big(u' + P(x)\cdot u\big) + v'\cdot u = Q(x).$$

Выберем функцию u такой, чтобы множитель при v обращался в 0.

$$u' + P(x)\cdot u = 0 \quad \Rightarrow \quad v'\cdot u = Q(x).$$

Таким образом, получим систему

$$\begin{cases} u' + P(x)\cdot u = 0 \\ v'\cdot u = Q(x) \end{cases}$$

Решая первое уравнение системы ($u' + P(x)\cdot u = 0$ − уравнение с разделяющимися переменными относительно x и u), найдем искомую функцию $u(x)$.

Так как одна из неизвестных функций $u(x)$ и $v(x)$ может быть выбрана произвольно, то в качестве $u(x)$ возьмем любое частное (ненулевое) решение уравнения $u' + P(x)\cdot u = 0$, а в качестве $v(x)$ возьмем общее решение второго уравнения системы $v'\cdot u = Q(x)$, в которое, прежде чем решать его, подставим найденную функцию $u(x)$.

Общее решение уравнения (20) запишем в виде $y = u(x)\cdot v(x)$, подставив найденные функции.

Пример 12. Решить задачу Коши

$$y' - \frac{2}{x+1} y = (x+1)^2, \quad y(0) = 1.$$

Решение. Данное уравнение линейно относительно y и y'.

$$P(x) = \frac{-2}{x+1}, \ Q(x) = (x+1)^2.$$

Решение ищем в виде

$$y = u \cdot v, \quad y' = u' \cdot v + u \cdot v', \quad \text{где} \ u = u(x), \ v = v(x).$$

Подставим y и y' в уравнение

$$u'v + uv' - \frac{2}{x+1} \cdot u \cdot v = (x+1)^2.$$

Вынесем v в первой степени за скобки

$$v\left(u' - \frac{2}{x+1} \cdot u\right) + v' \cdot u = (x+1)^2.$$

Полагаем $u' - \frac{2u}{x+1} = 0$, тогда $v' \cdot u = (x+1)^2$.

Таким образом, получим систему $\begin{cases} u' - \dfrac{2u}{x+1} = 0, \\ v' \cdot u = (x+1)^2. \end{cases}$

Решаем первое уравнение системы, $u' - \frac{2u}{x+1} = 0$. Это уравнение с разделяющимися переменными.

$$u' - \frac{2u}{x+1} = 0 \ \Rightarrow \ u' = \frac{2u}{x+1} \ \Rightarrow \ \frac{du}{dx} = \frac{2u}{x+1} \ \Rightarrow \ \frac{du}{u} = \frac{2dx}{x+1}.$$

Интегрируя полученное уравнение, имеем

$$\ln|u| = 2\ln|x+1|.$$

(постоянную интегрирования при нахождении $u(x)$ не вводим, т. к. достаточно найти любое (ненулевое) частное решение уравнения $u' - \frac{2u}{x+1} = 0$).

Далее $\ln|u| = \ln(x+1)^2 \quad \Rightarrow \quad u(x) = (x+1)^2$.

Подставим $u(x) = (x+1)^2$ во второе уравнение системы и найдем v:

$$v' \cdot (x+1)^2 = (x+1)^2 \quad \Rightarrow \quad v' = 1 \quad \Rightarrow \quad dv = dx.$$

Интегрируя, получим общее решение второго уравнения системы:

$$\int dv = \int dx \quad \Rightarrow \quad v(x) = x + c.$$

Таким образом, общее решение данного линейного уравнения имеет вид:

$$y = u(x) \cdot v(x) = (x+1)^2 (x+c).$$

Найдем частное решение уравнения. Используя начальное условие $y(0) = 1$, найдем c.

Подставив $x_0 = 0$ и $y_0 = 1$ в общее решение линейного уравнения, получим

$$1 = (0+1)^2 (0+c) \quad \Rightarrow \quad 1 = 1 \cdot c \quad \Rightarrow \quad c = 1.$$

Тогда частное решение линейного уравнения при $c = 1$ имеет вид:

$$y = (x+1)^2 (x+1) = (x+1)^3.$$

Пример 13. Решить задачу Коши

$$y' = \frac{y}{2y \cdot \ln y + y - x}, \quad y(0) = 1.$$

Решение. Данное уравнение нелинейно относительно y и y'_x.

Преобразуем уравнение, воспользовавшись там, что $y' = 1/x'$:

$$\frac{1}{x'} = \frac{y}{2y \cdot \ln y + y - x} \quad \Rightarrow \quad x' = \frac{2y \cdot \ln y + y - x}{y} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x' = 2 \cdot \ln y + 1 - \frac{x}{y} \quad \Rightarrow \quad x' + \frac{x}{y} = 2 \cdot \ln y + 1.$$

Полученное уравнение линейно относительно x и x'_y.

Решение будем искать в виде

$$x = u \cdot v, \quad \text{где } u = u(y),\ v = v(y).$$

Тогда $\quad x' = u' \cdot v + v' \cdot u.$

Подставим x и x' в уравнение $x' + \frac{x}{y} = 2 \cdot \ln y + 1.$

$$u' \cdot v + v' \cdot u + \frac{uv}{y} = 2\ln y + 1 \quad \Rightarrow v\left(u' + \frac{u}{y}\right) + v' \cdot u = 2\ln y + 1 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} u' + \dfrac{u}{y} = 0, \\ v' \cdot u = 2\ln y + 1. \end{cases}$$

Вначале решаем первое уравнение системы $\begin{cases} u' + \dfrac{u}{y} = 0, \\ v' \cdot u = 2\ln y + 1. \end{cases}$

$$u' + \frac{u}{y} = 0 \quad \Rightarrow \quad u' = -\frac{u}{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dy} = -\frac{u}{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u} = -\frac{dy}{y} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{du}{u} = -\int \frac{dy}{y} \;\Rightarrow\; \ln|u| = -\ln|y| \;\Rightarrow\; \ln|u| = \ln\left|\frac{1}{y}\right| \;\Rightarrow\; u(y) = \frac{1}{y}$$

– частное решение первого уравнения системы.

Подставим $u(y) = 1/y$ во второе уравнение системы $v' \cdot u = 2\ln y + 1$:

$$v' \cdot \frac{1}{y} = 2\ln y + 1 \Rightarrow v' = 2y\ln y + y \Rightarrow v = \int (2y\ln y + y)dy \Rightarrow$$

$$v = 2\int y\ln y\,dy + \int y\,dy.$$

Вычислим отдельно каждый интеграл:

$$a)\;\; 2\int y\ln y\,dy = \begin{vmatrix} u = \ln y, & du = \dfrac{dy}{y} \\ dv = ydy, & v = \int y\,dy = \dfrac{y^2}{2} \end{vmatrix} =$$

$$= 2\left(\frac{y^2}{2} \cdot \ln y - \frac{1}{2}\int y^2 \frac{dy}{y}\right) = y^2 \cdot \ln y - \int ydy = y^2 \cdot \ln y - \frac{y^2}{2} + c;$$

$$б)\;\; \int y\,dy = \frac{y^2}{2} + c.$$

Подставляя решение этих двух интегралов в v, получим

$$v = y^2 \cdot \ln y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^2}{2} + c = y^2 \cdot \ln y + c.$$

Тогда, общее решение линейного дифференциального уравнения (23) имеет вид: $x = u(y) \cdot v(y) = \dfrac{1}{y}\left(y^2 \cdot \ln y + c\right) = y \cdot \ln y + \dfrac{c}{y}.$

Воспользуемся начальными условиями $y(0) = 1$ и найдем c.

$$x = y \cdot \ln y + \frac{c}{y} \quad \Rightarrow \quad 0 = 1 \cdot \ln 1 + \frac{c}{1} \quad \Rightarrow \quad c = 0 \;\; (\ln 1 = 0).$$

Тогда частное решение линейного уравнения (23) при $c = 0$ имеет вид:

$$x = y \cdot \ln y + \frac{0}{y} = y \cdot \ln y.$$

5. Уравнение Бернулли

<u>Определение.</u> Уравнение вида

$$y' + P(x)y = Q(x) \cdot y^n, \tag{24}$$

называется уравнением Бернулли, где $P(x)$ и $Q(x)$ – непрерывные функции от x, $n \neq 0$, $n \neq 1$.

<u>Замечание.</u> При $n = 0$ получается линейное уравнение первого порядка относительно y и y'_x, а при $n = 1$ получается уравнение с разделяющимися переменными.

Уравнение Бернулли приводится к линейному следующим образом:

Разделим все члены уравнения (24) на $y^n \, (y \neq 0)$

$$y^{-n} \cdot y' + y^{-n+1} \cdot P(x) = Q(x). \tag{25}$$

Сделаем замену: $z = y^{-n+1}$.

Тогда $z' = (1-n)y^{-n} \cdot y' \quad \Rightarrow \quad y^{-n} \cdot y' = \dfrac{z'}{1-n}$.

Подставим z и $\dfrac{z'}{1-n}$ в уравнение (25) вместо y^{-n+1} и $y^{-n} \cdot y'$:

$$\frac{z'}{1-n} + z \cdot P(x) = Q(x).$$

Умножим полученное уравнение на $(1-n)$:

$$z' + (1-n) \cdot z \cdot P(x) = (1-n) \cdot Q(x). \tag{26}$$

Преобразованное уравнение (26) является линейным относительно z и z'.

Решив его, найдем общий интеграл уравнения (26).

Далее, подставив $y = z^{\frac{1}{1-n}}$, получим общее решение уравнения Бернулли (24).

<u>Замечание.</u> При интегрировании уравнений Бернулли можно сразу применить подстановку $y = u(x) \cdot v(x)$, не преобразовывая их в линейные.

Пример 14. Решить задачу Коши

$$xy' + y = y^2 \cdot \ln x, \quad y(1) = 1.$$

Решение. Разделим уравнение на $x, x \neq 0$.

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{\ln x}{x} \cdot y^2.$$

Получим уравнение Бернулли, т.к. в правую часть входит y и y',
$P(x) = \dfrac{1}{x}$, $\quad Q(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, $\quad n = 2$, $\quad (n \neq 0, n \neq 1)$.

Решение ищем в виде:

$y = u \cdot v,$ где $u = u(x),\ v = v(x)$ (см. Замечание),

$$y' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

Подставим y и y' в уравнение $y' + \frac{y}{x} = \frac{\ln x}{x} \cdot y^2,$ получим

$$u' \cdot v + v' \cdot u + \frac{u \cdot v}{x} = \frac{\ln x}{x} \cdot (uv)^2.$$

Вынесем за скобки v в первой степени

$$v\left(u' + \frac{u}{x}\right) + v' \cdot u = \frac{\ln x}{x} \cdot u^2 \cdot v^2.$$

Полагая, что $u' + \frac{u}{x} = 0$, имеем $v' \cdot u = \frac{\ln x}{x} \cdot u^2 \cdot v^2.$

Запишем систему уравнений

$$\begin{cases} u' + \dfrac{u}{x} = 0, \\ v' \cdot u = \dfrac{\ln x}{x} \cdot u^2 \cdot v^2. \end{cases}$$

Решая первое уравнение системы, найдем его частное решение.

$$u' + \frac{u}{x} = 0 \ \Rightarrow\ u' = -\frac{u}{x} \ \Rightarrow\ \frac{du}{u} = -\frac{dx}{x} \ \Rightarrow\ \int \frac{du}{u} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow\ \ln|u| = -\ln|x| \ \Rightarrow\ \ln|u| = \ln\left|\frac{1}{x}\right| \ \Rightarrow\ u = \frac{1}{x}.$$

Подставим $u = 1/x$ во второе уравнение системы и найдем её общее решение.

$$v' \cdot u = \frac{\ln x}{x} \cdot u^2 \cdot v^2 \ \Rightarrow\ v' = \frac{\ln x}{x} \cdot u \cdot v^2 \ \Rightarrow\ v' = \frac{\ln x}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdot v^2 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{dv}{dx} = \frac{\ln x}{x^2} \cdot v^2 \ \Rightarrow\ \frac{dv}{v^2} = \frac{\ln x}{x^2} dx \ \Rightarrow\ \int \frac{dv}{v^2} = \int \frac{\ln x}{x^2} dx.$$

Интегрируя левую часть уравнения, получаем $\int \frac{dv}{v^2} = -\frac{1}{v} + c.$

Интеграл, стоящий в правой части равенства, найдем с помощью формулы интегрирования по частям $\int u\,dv = u \cdot v - \int v du.$

Вычислим:

$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x, & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = \dfrac{dx}{x^2}, & v = \int \dfrac{dx}{x^2} = -\dfrac{1}{x} \end{matrix} \right| = -\frac{1}{x} \cdot \ln x + \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x}.$$

Окончательно получим $-\frac{1}{v}+c=-\frac{1}{x}\ln x-\frac{1}{x} \Rightarrow -\frac{1}{v}=-\frac{1}{x}\ln x-\frac{1}{x}-c.$

Умножим последнее равенство на (–1) и выразим из него функцию v.

$$\frac{1}{v}=\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}+c=\frac{\ln x+1+cx}{x} \Rightarrow v=\frac{x}{\ln x+1+cx}.$$

Тогда общий интеграл уравнения Бернулли имеет вид:

$$y=u(x)\cdot v(x)=\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\ln x+1+cx}=\frac{1}{\ln x+1+cx}.$$

Воспользуемся начальными условиями $y(1)=1$ и найдем c.

$$y=\frac{1}{\ln x+1+cx} \Rightarrow 1=\frac{1}{1+c}, (\ln 1=0), \Rightarrow 1+c=1 \Rightarrow c=0.$$

Подставив $c=0$ в общее решение уравнения, найдем его частное решение:

$$y=\frac{1}{\ln x+1}$$

6. Уравнение в полных дифференциалах

<u>Определение</u>. Дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \qquad (27)$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$, то есть

$$P(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad Q(x,y)=\frac{\partial u}{\partial y}. \qquad (28)$$

Для того чтобы уравнение (27) было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}. \qquad (29)$$

Нахождение общего решения уравнения

Если выполняется условие (29), то уравнение (27) может быть записано в виде $du(x,y)=0,$ где $du(x,y)=\dfrac{\partial u}{\partial x}dx+\dfrac{\partial u}{\partial y}dy$

Тогда общий интеграл этого уравнения имеет вид

$$u(x,y)=c, \tag{30}$$

где c – произвольная постоянная.

Функция $u(x,y)$ может быть найдена, используя уравнения (28).

Интегрируя равенство $\dfrac{\partial u}{\partial x}=P(x,y)$ по x при фиксированном y и учитывая, что произвольная постоянная в этом случае может зависеть от y, получим

$$u(x,y)=\int P(x,y)dx+c(y). \tag{31}$$

Затем, дифференцируя найденную функцию $u(x,y)$ по y и подставляя её в равенство $\dfrac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)$, найдем $c(y)$.

Подставим функцию $c(y)$ в уравнение (31), получим $u(x,y)$, которая является общим интегралом уравнения (27) с точностью до произвольной постоянной.

<u>Замечание.</u> Для нахождения общего решения уравнения (27) можно было начать с интегрирования равенства $\dfrac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)$ при фиксированном x. Тогда постоянная интегрирования может зависеть от x.

Пример 15. Решить уравнение $e^y dx+\left(x\cdot e^y-2y\right)dy=0.$

Решение. $P(x,y)=e^y, \quad Q(x,y)=x\cdot e^y-2y.$

Проверим условие (29): $\dfrac{\partial P}{\partial y}=e^y, \quad \dfrac{\partial Q}{\partial x}=e^y.$

Следовательно, левая часть уравнения есть полный дифференциал некоторой функции $u(x,y)$ и решение будет иметь вид:

$$u(x,y)=c.$$

Воспользуемся условиями (28).

Тогда $\dfrac{\partial u}{\partial x}=e^y, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=\left(x\cdot e^y-2y\right).$

Проинтегрируем первое соотношение по x:

$$u(x,y)=\int e^{y}dx+c(y)=x\cdot e^{y}+c(y).$$

Затем продифференцируем $u(x,y)=x\cdot e^{y}+c(y)$ по y:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x\cdot e^{y}+c'(y).$$

Т. к. $\dfrac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)$, то получим $x\cdot e^{y}+c'(y)=x\cdot e^{y}-2y.$

Отсюда $c'(y)=-2y \Rightarrow c(y)=-2\int ydy \Rightarrow -y^{2}+c.$

Пусть $c(y)=-y^{2}$, тогда $u(x,y)=x\cdot e^{y}-y^{2}$ – и общий интеграл уравнения имеет вид : $x\cdot e^{y}-y^{2}=c.$