Глава 2

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

2.1. Дифференциальные уравнения первого порядка

Введем основные понятия теории дифференциальных уравнений первого порядка. Если искомая функция зависит от одной переменной, то дифференциальное уравнение называется обыкновенным, если от нескольких – то уравнением в частных производных. Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка встречается в одном из следующих видов:

1) $F(x, y, y') = 0$ – общем;

2) $y' = f(x, y)$ – разрешенном относительно производной;

3) $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ – в дифференциалах.

Для уравнения $y' = f(x, y)$ справедлива теорема о существовании и единственности решения: если $f(x, y)$ и $\partial f / \partial y$ непрерывны в некоторой области D на плоскости Oxy, содержащей некоторую точку (x_0, y_0), то существует единственное решение этого уравнения $y = \varphi(x)$, удовлетворяющее условию: $y = y_0$ при $x = x_0$. Геометрически это значит, что существует единственная функция, график которой (интегральная кривая) проходит через данную точку.

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется функция $y = \varphi(x, C)$, которая при любых значениях произвольной постоянной C является решением этого уравнения, т. е. обращает его в тождество. Геометрически общее решение представляет собой семейство интегральных кривых. Уравнение $\Phi(x, y, C) = 0$, определяющее общее решение неявно, называется общим интегралом дифференциального уравнения первого порядка.

Задачей Коши для дифференциального уравнения первого порядка называется задача отыскания частного решения $y = \varphi(x, C_0)$, удовлетворяющего данному начальному условию: $y(x_0) = y_0$. Если известно общее решение уравнения $y = \varphi(x, C)$, то, чтобы решить задачу Коши, следует найти постоянную C_0 из условия $y_0 = \varphi(x_0, C_0)$.

В табл. 4 выделены простейшие типы дифференциальных уравнений первого порядка, допускающие аналитическое решение, и указаны методы их решения. В рамках расширения табл. 4 сделаем несколько замечаний:

1. Уравнение вида $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ при $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ в некоторых частных случаях удается свести к типу 8 методом интегрирующего множителя.

2. Уравнение Лагранжа $y = x \cdot \varphi(y') + \psi(y')$ с помощью введения вспомогательного параметра сводится к типу 6.

С методами решения указанных дополнительных типов дифференциальных уравнений предлагается ознакомиться самостоятельно (см., например, Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т. 2. М.: Наука, 1972. С. 41–42, 52–54).

Таблица 4

№ п/п	Тип	Вид	Метод решения	Результат
1	2	3	4	5
1	Уравнение с разделенными переменными	$M(x)dx + N(y)dy = 0$	Почленное интегрирование	Общее решение $\int M(x)dx + \int N(y)dy = C$
2	Уравнение с разделяющимися переменными	а) $M_1(x) \cdot N_1(y)dx + M_2(x) \cdot N_2(y)dy = 0$ б) $y' = f_1(x) \cdot f_2(y)$	а) почленное деление на $N_1(y) \cdot M_2(x)$ б) почленное умножение на $dx/f_2(y)$	Уравнение типа 1
3	Однородное уравнение	$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$	Подстановка $U = \frac{y}{x}$	Уравнение типа 2
4	Уравнение, приводящееся к уравнению с разделяющимися переменными	$y' = f(ax + by)$	Подстановка $z = ax + by$	Уравнение типа 2
5	Уравнение, приводящееся к однородному	$y' = f\left(\frac{ax + by + C}{a_1x + b_1y + C_1}\right)$	$x = x_1 + h$ $y = y_1 + k$	Уравнение типа 3

1	2	3	4	5
6	Линейное уравнение	а) $y'+P(x)y = Q(x)$ б) $x'_y + P(y)x = Q(y)$	а) подстановка $y=U(x)\cdot V(x)$ б) подстановка $x=U(y)\cdot V(y)$	Система двух уравнений типа 2 а) $\begin{cases} V'(x)+P(x)V(x)=0 \\ U'(x)\cdot V(x)=Q(x) \end{cases}$ б) $\begin{cases} V'(y)+P(y)V(y)=0 \\ U'(y)\cdot V(y)=Q(y) \end{cases}$
7	Уравнение Бернулли	$y'+P(x)y = Q(x)y^n$ ($n \neq 0$, $n \neq 1$)	Подстановка $z = y^{1-n}$	Уравнение типа 6
8	Уравнение в полных дифференциалах	$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ $\left(\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}\right)$	Интегрирование системы вида $\begin{cases} M(x,y)=\dfrac{\partial U}{\partial x} \\ N(x,y)=\dfrac{\partial U}{\partial y} \end{cases}$	Общее решение вида $U(x,y) = C$

Типовые примеры и их решения

Пример 1. Решить уравнение $y' = y$ и построить семейство интегральных кривых данного уравнения.

Решение. В данном примере $f(x, y) = y$; $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 1$ определены и непрерывны при любых x и y, и следовательно, условия теоремы выполнены на всей плоскости Oxy.

Поскольку $y' = \dfrac{dy}{dx}$, то исходное уравнение равносильно равенству $\dfrac{dy}{y} = dx$. Выполняя почленное интегрирование, получаем $\ln y - \ln C = x$, где C – произвольная постоянная или $\ln (y/C) = x$, откуда $y = C \cdot e^x$.

При $C = 0$ получаем решение $y = 0$. Для всех $C > 0$ имеем семейство монотонно возрастающих функций, для $C < 0$ – монотонно убывающих (см. рис. 50).

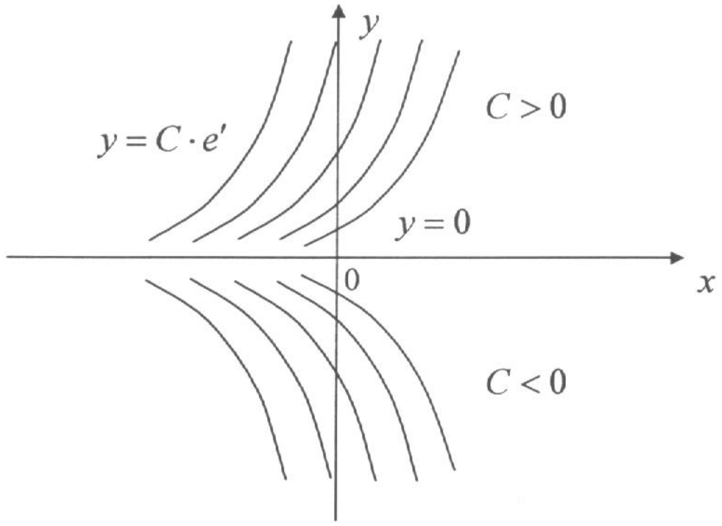

Рис. 50

Пример 2. Замедляющее действие трения на диск, вращающийся в жидкости, пропорционально угловой скорости ω. Выразить ω как функцию времени, если известно, что за 25 с с начала движения угловая скорость снизилась со 100 до 50 об/с.

Решение. В данной задаче используется физический смысл производной – скорость протекания процесса. Замедляющее действие трения на диск угловой скорости ω есть $\frac{d\omega}{dt}$, где ω и t связаны дифференциальным уравнением

$$\frac{d\omega}{dt} = k\omega \quad \text{или} \quad \frac{d\omega}{\omega} = k \cdot dt.$$

Проинтегрировав обе части, получим $\ln\omega = kt + \ln C$; $\omega = C \cdot e^{kt}$. Это будет общим решением данного дифференциального уравнения.

Найдем значение C, отвечающее данным начальным условиям. Подставляя в общее решение $t = 0$ и $\omega = 100$, получим

$$100 = C{\cdot}e^{\circ},$$

т. е. $$C = 100 \text{ и } \omega = 100 \cdot e^{kt}.$$

Коэффициент пропорциональности k находим из условия, что при $t = 25$ с угловая скорость диска стала равной 50 об/с, т. е.

$$50 = 100 \cdot e^{25k}, \text{ или } e^{25k} = \frac{1}{2}.$$

Откуда $$25k = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2 \quad \text{и} \quad k = -0{,}04\ln 2.$$

Таким образом, угловая скорость зависит от времени по закону

$$\omega = 100 \cdot e^{-0{,}04t \cdot \ln 2}.$$

Ответ: $\omega = 100 \cdot e^{-0{,}04t \cdot \ln 2}$.

Пример 3. Найти семейство кривых, у которых отрезок касательной, заключенный между координатными осями, делится пополам в точке касания (рис. 51). Написать уравнение кривой этого семейства, проходящей через точку (3; 4).

Решение Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка кривой указанного типа. Так как $AM = MB$, то и $ON=NA$, где $ON=x$,

$$NA = MN \cdot \mathrm{ctg}(180° - \alpha) = -\frac{MN}{\mathrm{tg}\alpha};$$

$$ON = -\frac{MN}{\mathrm{tg}\alpha}.$$

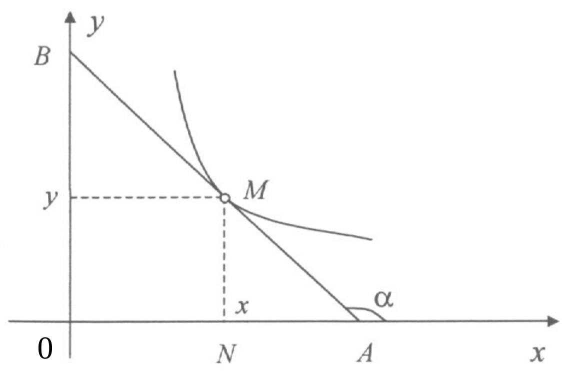

Рис. 51

Так как угловой коэффициент касательной (k=tgα) является производной, т. е. $\mathrm{tg}\,\alpha = y'$, то приходим к уравнению $x = -\dfrac{y}{y'}$ или $y' = -\dfrac{y}{x}$.

Поскольку $y' = \dfrac{dy}{dx}$, то полученное дифференциальное уравнение равносильно равенству $\dfrac{dy}{y} = -\dfrac{dx}{x}$.

Выполняя почленное интегрирование, получаем $\ln y = -\ln x + \ln C$, где C – произвольная постоянная или $\ln y = \ln \dfrac{C}{x}$, откуда $y = \dfrac{C}{x}$. Определим значение C, соответствующее начальным значениям $y\big|_{x=3} = 4$, $4 = \dfrac{C}{3}$, т. е. $C = 12$, следовательно, $y = 12/x$ – искомая интегральная кривая.

Ответ: $y = C/x$; $y = 12/x$.

Пример 4. Составить дифференциальное уравнение семейства кривых
$$\frac{x^2}{C^2}+\frac{y^2}{4}=1.$$

Решение. Чтобы построить дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют кривые заданного семейства, следует продифференцировать данное равенство, считая, что y – функция независимой переменной x, а затем из полученного равенства исключить параметр C.

Дифференцируя заданную функцию, находим, что $\frac{2x}{C^2}+\frac{2y\cdot y'}{4}=0$.

Исключая постоянную C $\left(C^2=\frac{4x^2}{4-y^2}\right)$ из этого равенства, приходим к уравнению $\frac{2x\cdot\left(4-y^2\right)}{4x^2}+\frac{y\cdot y'}{2}=0$ или $-x\cdot y\cdot y'+y^2=4$.

Ответ: $-x\cdot y\cdot y'+y^2=4$.

Пример 5. Проинтегрировать уравнение
$$\left(x+x\cdot y^2\right)dx-\left(y+y\cdot x^2\right)dy=0.$$

Решение. Преобразуем левую часть уравнения
$$x\left(1+y^2\right)dx-y\left(1+x^2\right)dy=0.$$

Согласно табл. 4, п. 2 это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Разделим обе части уравнения на $\left(1+y^2\right)\cdot\left(1+x^2\right)$, считая $\left(1+y^2\right)\cdot\left(1+x^2\right)\neq 0$, $\frac{x}{1+x^2}dx-\frac{y}{1+y^2}dy=0$.

Интегрируя, получим общий интеграл уравнений
$$\int\frac{x}{1+x^2}dx-\int\frac{y}{1+y^2}dy=\frac{1}{2}\ln C;$$
$$\frac{1}{2}\int\frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2}-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(1+y^2\right)}{1+y^2}=\frac{1}{2}\ln C;$$
$$\ln\left(1+x^2\right)-\ln\left(1+y^2\right)=\ln C.$$

Потенцируя полученное равенство, находим общий интеграл уравнения в виде $\frac{1+x^2}{1+y^2}=C$.

Замечание. При решении дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными $M_1(x)\cdot N_1(y)dx + M_2(x)\cdot N_2(y)dy = 0$ следует помнить, что при делении на произведение $N_1(y)\cdot M_2(x)$ возможна потеря решений $N_1(y) = 0$ и $M_2(x) = 0$. Поэтому наличие или отсутствие интегральных кривых $N_1(y) = 0$ и $M_2(x) = 0$ должно устанавливаться непосредственной проверкой. В данном случае $1 + x^2 \neq 0$ и $1 + y^2 \neq 0$.

Ответ: $\dfrac{1+x^2}{1+y^2} = C$.

Пример 6. Проинтегрировать уравнение

$$x\cdot\cos\frac{y}{x}\cdot dy = \left(y\cdot\cos\frac{y}{x} - x\right)\cdot dx.$$

Решение. Разделив обе части равенства на $x\cdot\cos\frac{y}{x}\cdot dx$, получим уравнение, правая часть которого есть функция отношения $\frac{y}{x}$:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{1}{\cos\left(\frac{y}{x}\right)}.$$

Согласно табл. 4 п. 3 это уравнение является однородным. Положив в нем $U = \frac{y}{x}$, т. е. $y = Ux$ и $y' = x\cdot U' + U$, получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$x\cdot U' + U = U - \frac{1}{\cos U}; \quad x\cdot\frac{dU}{dx} = -\frac{1}{\cos U};$$

$$\cos U\cdot dU = -\frac{dx}{x}.$$

Интегрируя и подставляя $\frac{y}{x}$ вместо U, получим общий интеграл исходного уравнения:

$$\sin U = -\ln x + C; \quad \sin\frac{y}{x} + \ln x = C.$$

Ответ: $\sin\frac{y}{x} + \ln x = C$.

Пример 7. Проинтегрировать уравнение $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y-1}{x-y+3}$.

Решение. Согласно табл. 4 п. 5, чтобы преобразовать данное уравнение в однородное, делаем замену: $x = x_1 + h,\ y = y_1 + k$. Тогда

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{x_1+y_1+h+k-1}{x_1-y_1+h-k+3}.$$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} h+k-1=0, \\ h-k+3=0, \end{cases}$$

находим: $h = -1,\ k = 2$. В результате получаем однородное уравнение

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{x_1+y_1}{x_1-y_1} \quad \text{или} \quad y_1'=\frac{1+\dfrac{y_1}{x_1}}{1-\dfrac{y_1}{x_1}}.$$

Положив в нем $U=\dfrac{y_1}{x_1}$, т. е. $y_1 = x_1 \cdot U$ и $y_1'=x_1U'+U$, получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$x_1U'+U=\frac{1+U}{1-U}; \qquad x_1\cdot\frac{dU}{dx_1}=\frac{1+U^2}{1-U}; \qquad \frac{1-U}{1+U^2}dU=\frac{dx_1}{x_1}.$$

Интегрируя и подставляя $\dfrac{y_1}{x_1}$ вместо U, находим:

$$\operatorname{arctg}U-\frac{1}{2}\ln\left(1+U^2\right)=\ln|x_1|+\ln|C|, \qquad \operatorname{arctg}U=\ln\left|Cx_1\sqrt{1+U^2}\right|;$$

$$\operatorname{arctg}\frac{y_1}{x_1}=\ln\left|Cx_1\cdot\sqrt{1+\left(\frac{y_1}{x_1}\right)^2}\right| \quad \text{или} \quad \operatorname{arctg}\frac{y_1}{x_1}=\ln\left|C\cdot\sqrt{x_1^2+y_1^2}\right|.$$

Возвращаясь к переменным x и y, получаем общий интеграл дифференциального уравнения

$$\operatorname{arctg}\frac{y-2}{x+1}-\ln\left|C\cdot\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}\right|=0.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\dfrac{y-2}{x+1}-\ln\left|C\cdot\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}\right|=0$.

Пример 8. Решить уравнение $(2x-y)dx+(4x-2y+3)dy=0$.

Решение. Представим данное уравнение в виде

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2x-y}{4x-2y+3} \quad \text{или} \quad y'=-\frac{2x-y}{2(2x-y)+3}.$$

Согласно табл. 4 п. 4 это уравнение можно свести к уравнению с разделяющимися переменными заменой: $z = 2x - y$. Тогда $z' = 2 - y'$, откуда $y' = 2 - z'$ и исходное уравнение приводится к виду

$$2-z'=-\frac{z}{2z+3}, \quad z'=\frac{5z+6}{2z+3}, \quad \frac{(2z+3)dz}{5z+6}=dx.$$

Выполним почленное интегрирование данного равенства:

$$\int dx=\int\frac{(2z+3)dz}{5z+6} \quad \text{или} \quad x=\frac{2}{5}z+\frac{3}{25}\ln\left|z+\frac{6}{5}\right|+C$$

$$\left(\int\frac{(2z+3)dz}{5z+6}=\frac{2}{5}\int\frac{z+\frac{3}{2}}{z+\frac{6}{5}}dz=\frac{2}{5}\int\left(1+\frac{\frac{3}{10}}{z+\frac{6}{5}}\right)dz=\right.$$

$$\left.=\frac{2}{5}\left(\int dz+\frac{3}{10}\int\frac{d\left(z+\frac{6}{5}\right)}{z+\frac{6}{5}}\right)=\frac{2z}{5}+\frac{3}{25}\ln\left|z+\frac{6}{5}\right|+C\right).$$

Так как $z = 2x - y$, то получим окончательно решение исходного уравнения в виде

$$x=\frac{2}{5}(2x-y)+\frac{3}{25}\ln\left|2x-y+\frac{6}{5}\right|+C.$$

Или
$$5x+10y-3\ln\left|2x-y+\frac{6}{5}\right|=C_1.$$

Ответ: $5x+10y-3\ln\left|2x-y+\frac{6}{5}\right|=C_1$.

Пример 9. Проинтегрировать уравнение $x\cdot y'+y=x^3$.

Решение. Разделив левую и правую части уравнения на x, приходим к линейному неоднородному уравнению (см табл. 4 п. 6)

$$y'+\frac{1}{x}y=x^2.$$

Пусть $y = U \cdot V$, т. е. $y' = U' \cdot V + U \cdot V'$, тогда исходное уравнение примет вид

$$U' \cdot V + U \cdot V' + \frac{1}{x} U \cdot V = x^2,$$

или

$$U' \cdot V + U\left(V' + \frac{V}{x}\right) = x^2. \qquad (112)$$

Положим $V' + \frac{V}{x} = 0$ или $\frac{dV}{dx} = -\frac{V}{x}$, откуда $\frac{dV}{V} = -\frac{dx}{x}$. Проинтегрировав, получим частное решение (C = 0) $\ln V = -\ln x$, или $V = \frac{1}{x}$. При $V = \frac{1}{x}$ равенство (112) обратится в уравнение $\frac{U'}{x} = x^2$, или $dU = x^3 dx$, откуда $U = \frac{x^4}{4} + C$, и общим решением данного уравнения будет $y = U \cdot V = \left(\frac{x^4}{4} + C\right) \cdot \frac{1}{x}$.

Ответ: $y = \frac{x^3}{4} + \frac{C}{x}$.

Пример 10. Проинтегрировать уравнение $x \cdot dy = \left(x^5 y^2 - 2y\right) dx$.

Решение. Простыми преобразованиями уравнение приводится к уравнению Бернулли (табл. 4, п. 7):

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x} y = x^4 y^2. \qquad (113)$$

Введем новую функцию $z = y^{-1}$, тогда

$$\frac{dz}{dx} = -y^{-2} \frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -y^2 \frac{dz}{dx}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (113), получим линейное уравнение

$$-\frac{1}{z^2} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{2}{xz} = \frac{x^4}{z^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} - \frac{2z}{x} = -x^4.$$

Полагая

$$z(x) = U(x) \cdot V(x), \qquad \frac{dz}{dx} = U' \cdot V + U \cdot V',$$

будем иметь $U' \cdot V + U \cdot V' - \frac{2U \cdot V}{x} = -x^4$, или

$$U' \cdot V + U\left(\frac{dV}{dx} - \frac{2V}{x}\right) = -x^4. \qquad (114)$$

Полагая $\frac{dV}{dx} - \frac{2V}{x} = 0$, получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными $\frac{dV}{V} = \frac{2dx}{x}$, частное решение которого (C = 0) будет $\ln|V| = 2\ln x$, т. е. $V = x^2$. Подставляя найденную функцию $V(x)$ в уравнение (114), получим $x^2 \frac{dU}{dx} = -x^4$, или $\frac{dU}{dx} = -x^2$. Разделим переменные и проинтегрируем:

$$dU = -x^2 dx; \qquad U = -\frac{x^3}{3} + C.$$

Следовательно, общий интеграл данного уравнения есть

$$y^{-1} = \left(-\frac{x^3}{3} + C\right) \cdot x^2 \quad \text{или} \quad y = -\frac{1}{\frac{x^5}{3} - C \cdot x^2}.$$

Ответ: $y = -\frac{1}{\frac{x^5}{3} - C \cdot x^2}$.

Замечания. Уравнение Бернулли можно решить сразу как линейное, минуя сведение уравнения к линейному виду. Уравнение Бернулли может быть линейным относительно переменной x, т. е. иметь вид $x'_y + P(y)x = Q(y) \cdot x^n$. Решение можно искать в виде $x(y) = U(y) \cdot V(y)$.

Пример 11. Проинтегрировать уравнение

$$\left(\frac{\sin 2x}{y} + x\right)dx + \left(y - \frac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy = 0. \qquad (115)$$

Решение. Уравнение (115) – уравнение в полных дифференциалах. В данном случае $M(x,y)=\dfrac{\sin 2x}{y}+x$ и $N(x,y)=y-\dfrac{\sin^2 x}{y^2}$, и так как

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-\frac{\sin 2x}{y^2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial N}{\partial x}=-\frac{2\sin x\cdot\cos x}{y^2}=-\frac{\sin 2x}{y^2},$$

то левая часть уравнения (115) есть полный дифференциал некоторой функции $U(x, y)$ (табл. 4, п. 8). Функцию $U(x, y) = C$ (C – произвольная постоянная) найдем из системы уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial x}=\dfrac{\sin 2x}{y}+x,\\ \dfrac{\partial U}{\partial y}=y-\dfrac{\sin^2 x}{y^2}.\end{cases}$$

По данной частной производной $\dfrac{\partial U}{\partial x}=\dfrac{\sin 2x}{y}$ найдем $U(x, y)$ с точностью до произвольной функции $C_1(y)$:

$$U(x,y)=\int\left(\frac{\sin 2x}{y}+x\right)dx+C_1(y) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad U(x,y)=-\frac{1}{2y}\cos 2x+\frac{x^2}{2}+C_1(y).$$

Продифференцируем данную функцию $U(x, y)$ по y:

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{1}{2y^2}\cos 2x+\frac{dC_1(y)}{dy}.$$

Приравнивая уже к известному выражению

$$\frac{\partial U}{\partial y}=y-\frac{\sin^2 x}{y^2},$$

получим

$$y-\frac{\sin^2 x}{y^2}=\frac{1}{2y^2}\cos 2x+\frac{dC_1(y)}{dy} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y-\left(\frac{\sin^2 x}{2y^2}+\frac{\cos^2 x}{2y^2}\right)=\frac{dC_1(y)}{dy} \quad \Rightarrow \quad dC_1(y)=\left(\frac{2y^3-1}{2y^2}\right)dy,$$

Откуда $C_1(y)=\frac{y^2}{2}+\frac{1}{2y}+C_2$ (C_2 – произвольная постоянная). Определив функцию $C_1(y)$, можно записать

$$U(x,y)=-\frac{1}{2y}\cos 2x+\frac{x^2}{2}+\frac{y^3+1}{2y}+C_2=C,$$

и следовательно, общим интегралом уравнения будет

$$\frac{y^3+1-\cos 2x+x^2 y}{2y}=C_3 \quad (\text{где } C_3 = C - C_2).$$

Ответ: $\frac{y^3+1-\cos 2x+x^2 y}{2y}=C_3$.

Пример 12. Найти интегрирующий множитель и общее решение уравнения

$$2xy\cdot dx+\left(y^2-3x^2\right)dy=0.$$

Решение. Здесь $M = 2xy$, $N = y^2 - 3x^2$, $\frac{\partial M}{\partial y}=2x$, $\frac{\partial N}{\partial x}=-6x$, $\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$. Следовательно, левая часть уравнения не есть полный дифференциал.

Отношение $\frac{\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)}{N}=\frac{-8x}{y^2-3x^2}$ зависит от x и y.

Отношение $\frac{\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)}{M}=\frac{-8x}{2xy}=\frac{-4}{y}$ зависит только от y. Следовательно, уравнение допускает интегрирующий множитель, зависящий только от y. Находим его: $\frac{d\ln\mu}{dy}=-\frac{4}{y}$ $\Rightarrow$ $d\ln\mu=-\frac{4dy}{y}$; отсюда $\ln\mu=-4\ln y$, т. е. $\mu=\frac{1}{y^4}$.

После умножения всех членов данного уравнения на найденный интегрирующий множитель μ получаем уравнение

$\dfrac{2x}{y^3}dx+\dfrac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0$ в полных дифференциалах $\left(\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}=-\dfrac{6x}{y^4}\right)$.
Решая это уравнение, найдем его общий интеграл:

$$\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}=C.$$

Замечание. Аналогично, если выражение $\left(\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}\right)\Big/N$ не зависит от y, а зависит только от x, то находится интегрирующий множитель, зависящий только от x $\left(\dfrac{d\ln\mu}{dx}=-\dfrac{\left(\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}\right)}{N}\right)$.

Ответ: $\dfrac{x^2}{y^3}-\dfrac{1}{y}=C$.

Пример 13. Решить уравнение

$$y=(y')^2(x+1). \tag{116}$$

Решение. Запишем уравнение в виде $y=x\cdot(y')^2+(y')^2$. Это уравнение Лагранжа

$$y=x\cdot\varphi(y')+\psi(y'). \tag{117}$$

Положив $y'=P$, будем иметь

$$y=x\cdot P^2+P^2. \tag{118}$$

Дифференцируя по x, получим

$$P=P^2+x\cdot 2P\frac{dP}{dx}+2P\frac{dP}{dx} \quad\Rightarrow\quad P=P^2+(2xP+2P)\frac{dP}{dx}. \tag{119}$$

Найдем особые решения. Уравнение (119) обращается в тождество при всяком постоянном значении $P=P_0$, удовлетворяющем условию $P_0-\varphi(P_0)=0$, т. е. при $P_0-P_0^2=0 \quad\Rightarrow\quad (P_0)_1=0$ и $(P_0)_2=1$. Решениями, соответствующими каждому значению $P=P_0$, будут линейные функции:

$$y=x\cdot\varphi(P_0)+\psi(P_0),$$

т. е. $\quad y=x\cdot 0^2+0^2 \quad\Rightarrow\quad y=0$ и $y=x+1$.

Если окажется, что эти решения не получаются из общего ни при каком значении произвольной постоянной, то они будут особыми решениями.

Для нахождения общего решения уравнения (119) запишем его в виде

$$\frac{dx}{dP} - x\frac{2}{1-P} = \frac{2}{1-P}.$$

Решив это линейное (относительно x) уравнение, будем иметь

$$x = -1 + \frac{C^2}{(1-P)^2}. \qquad (120)$$

Исключая P из уравнений (118) и (120), получим общее решение уравнения

$$y = \left(\sqrt{x+1} - C\right)^2.$$

Особым интегралом исходного уравнения будет: $y = 0$, т. к. это решение не получается из общего ни при каком значении C.

Функция $y = x + 1$ является частным решением; она получается из общего решения при $C = 0$.

Ответ: $y = \left(\sqrt{x+1} - C\right)^2$; особое решение $y = 0$.

2.2. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

Типовые примеры и их решения

Пример 1. Решить уравнение $(\sin^4 x) \cdot y''' = \sin 2x$.

Решение. Данное уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$, которое решается почленным интегрированием. Представим y''' в виде $y''' = \dfrac{dy''}{dx}$, тогда $\dfrac{dy''}{dx} = \dfrac{\sin 2x}{\sin^4 x}$. Делим переменные и интегрируем:

$$dy'' = \frac{2\cos x}{\sin^3 x}dx \quad \Rightarrow \quad y'' = -\frac{1}{\sin^2 x} + C_1.$$

Далее, $\dfrac{dy'}{dx} = -\dfrac{1}{\sin^2 x} + C_1 \quad \Rightarrow \quad dy' = \left(-\dfrac{1}{\sin^2 x} + C_1\right) \cdot dx \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow y' = \operatorname{ctg} x + C_1 x + C_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{ctg} x + C_1 x + C_2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad dy = (\text{ctg}\, x + C_1 x + C_2)\cdot dx \quad \Rightarrow \quad y = \ln|\sin x| + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Ответ: $y = \ln|\sin x| + C_1\dfrac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$.

Пример 2. Решить уравнение $xy''' + y'' - x - 1 = 0$.

Решение. Данное уравнение вида $F\left(x, y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0$, не содержащее искомой функции y и ее производных до $(n-2)$-го порядка, которое решается введением новой функции $z(x) = y^{(n-1)}$. Положив в уравнении $y'' = z$, $y''' = z'$, получим линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно неизвестной функции $z(x)$:

$$xz' + z - x - 1 = 0 \quad \text{или} \quad z' + \frac{1}{x}z = 1 + \frac{1}{x}.$$

Интегрируем его. Полагая в уравнении $z = u\cdot v$, $z' = u'\cdot v + u\cdot v'$, получим

$$u'\cdot v + u\cdot v' + \frac{u\cdot v}{x} = 1 + \frac{1}{x}, \qquad u'\cdot v + u\left(\frac{dv}{dx} + \frac{v}{x}\right) = 1 + \frac{1}{x}.$$

Определяем v, положив $\dfrac{dv}{dx} + \dfrac{v}{x} = 0$: $\displaystyle\int\frac{dv}{v} = -\int\frac{dx}{x}$, откуда $\ln v = -\ln x$ или $v = \dfrac{1}{x}$. Определим $u(x)$: $\dfrac{du}{dx}\cdot\dfrac{1}{x} = 1 + \dfrac{1}{x}$, $du = (x+1)dx$, откуда $u(x) = \dfrac{x^2}{2} + x + C_1$; следовательно, $z = \left(\dfrac{x^2}{2} + x + C_1\right)\cdot\dfrac{1}{x}$. Учитывая, что $z = y''$, находим $y'' = \dfrac{x}{2} + 1 + \dfrac{C_1}{x}$, откуда

$$\frac{dy'}{dx} = \left(\frac{x}{2} + 1 + \frac{C_1}{x}\right) \quad \Rightarrow$$

$$dy' = \left(\frac{x}{2} + 1 + \frac{C_1}{x}\right)dx \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{x^2}{4} + x + C_1\ln|x| + C_2 \quad \Rightarrow$$

$$y = \int\left(\frac{x^2}{4} + x + C_1\ln|x| + C_2\right)dx = \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} + C_1\int\ln|x|dx + C_2 x + C_3.$$

Возьмем $\int \ln|x|dx$ по частям. Если $x > 0$, то $\ln|x| = \ln x = u$, $du = \frac{dx}{x}$, $dv = dx$, $v = x$; $\int \ln x \cdot dx = x \cdot \ln x - \int dx = x \cdot \ln x - x$. Если же $x < 0 \Rightarrow \ln(-x) = u$, $dx = dv$, $du = \frac{dx}{x}$, $v = x$; $\int \ln(-x) \cdot dx = x \cdot \ln(-x) - x$.

Ответ: $y = \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} + C_1(x \cdot \ln x - x) + C_2 x + C_3$, если $x > 0$

и $y = \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} + C_1(x \cdot \ln(-x) - x) + C_2 x + C_3$, если $x < 0$.

Пример 3. Решить задачу Коши для дифференциального уравнения

$$y^3 y'' = 1, \quad y(-2) = 1, \quad y'(-2) = -1.$$

Решение. Данное уравнение вида $F(y, y', y'') = 0$, которое решается введением новой функции $y' = P(y)$. Полагая в этом уравнении $y' = P$, $y'' = \frac{dP}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dP}{dy} \cdot P$, получим дифференциальное уравнение первого порядка

$$y^3 P \cdot \frac{dP}{dy} = 1 \quad \Rightarrow \quad P \cdot dP = \frac{dy}{y^3} \quad \Rightarrow \quad \frac{P^2}{2} = -\frac{1}{2y^2} + C_1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (y')^2 = -\frac{1}{y^2} + 2C_1.$$

Воспользуемся начальными условиями и найдем C_1:

$$(-1)^2 = -\frac{1}{1^2} + 2C_1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 1.$$

Следовательно, $(y')^2 = -\frac{1}{y^2} + 2 \quad \Rightarrow y' = \pm\sqrt{\frac{2y^2 - 1}{y^2}}$, но $y'(-2) = -1$, поэтому, выберем только $y' = -\sqrt{\frac{2y^2 - 1}{y^2}}$. Произведя обратную замену $P = \frac{dy}{dx}$, получим дифференциальное уравнение снова первого порядка, где неизвестной функцией является $y(x)$:

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{2y^2-1}{y^2}}.$$

Разделим переменные и проинтегрируем:

$$-\int \frac{y \cdot dy}{\sqrt{2y^2-1}} = \int dx \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{4}\int \left(2y^2-1\right)^{-1/2} d\left(2y^2-1\right) = \int dx \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{\sqrt{2y^2-1}}{2} = x + C_2.$$

Воспользуемся первым начальным условием $y\ (–2) = 1$ и найдем C_2: $-\frac{\sqrt{2 \cdot 1^2 - 1}}{2} = -2 + C_2 \quad \Leftrightarrow \quad C_2 = \frac{3}{2}$. Таким образом, частный интеграл имеет вид: $\sqrt{2y^2-1} + 2x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2y^2 - 1 = \left(2x+3\right)^2$.

Ответ: $2y^2 - 1 = \left(2x+3\right)^2$.

2.3. Линейные однородные дифференциальные уравнения *n*-го порядка с постоянными коэффициентами

Уравнение вида

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \tag{121}$$

называется линейным однородным дифференциальным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами a_0, a_1, a_2, ..., a_n. Решение уравнения (121) в силу его строения ищут в виде экспоненты $y = e^{kx}$. Результат подстановки y, y', y'', ..., $y^{(n)}$ в (121) приводит к так называемому характеристическому уравнению

$$a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0. \tag{122}$$

Следовательно, $y = e^{kx}$ – решение исходного дифференциального уравнения тогда и только тогда, когда k – корень характеристического уравнения. В силу основной теоремы алгебры характеристическое уравнение имеет n корней k_1, k_2, ..., k_n, среди которых могут встретиться и комплексные. Найденным корням отвечают n решений:

$$y_1 = e^{k_1 x}, \quad y_2 = e^{k_2 x}, \ldots, y_n = e^{k_n x}.$$

Максимальное число линейно-независимых решений y_1, y_2, ..., y_n называется фундаментальной системой решений линейного однородного дифференциального уравнения. Частные решения уравнения (121) зависят от вида корней характеристического уравнения (122) (см. табл. 5).

Общее решение уравнения (121)

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_{n-1} y_{n-1} + C_n y_n,$$

где $y_1, y_2, ..., y_{n-1}, y_n$ – n частных решений уравнения (121), образующих фундаментальную систему решений.

Таблица 5

Вид корня характеристического уравнения (122)	Частные решения уравнения (121)
1. k – простой вещественный корень	e^{kx}
2. k – вещественный корень кратности r	e^{kx}, $x \cdot e^{kx}$, $x^2 \cdot e^{kx}$, ..., $x^{r-1} \cdot e^{kx}$
3. $\alpha \pm \beta i$ – простые комплексные сопряженные корни	$e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x$, $e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x$
4. $\alpha \pm \beta i$ – комплексные сопряженные корни кратности r	$e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x$, $x \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x$, ..., $x^{r-1} \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x$ $e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x$, $x \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x$, ..., $x^{r-1} \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x$

Типовые примеры и их решения

Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''' + 9y' = 0.$$

Решение. Напишем характеристическое уравнение уравнения $y''' + 9y' = 0$ и найдем его корни:

$$k^3 + 9k = 0, \quad k(k^2 + 9) = 0, \quad k_1 = 0, \quad k_2 = 3i, \quad k_3 = -3i.$$

Все корни простые, следовательно, согласно табл. 2 (табл. 5 п.1 и 3), соответствующие частные решения будут: $y_1 = e^{0x} = 1$, $y_2 = \cos 3x$, $y_3 = \sin 3x$ и $y = C_1 + C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x$ – общее решение исходного дифференциального уравнения.

Ответ: $y = C_1 + C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x$.

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y''' - 3y' - 2y = 0$.

Решение. Найдем корни характеристического уравнения $k^3 – 3k – 2 = 0$ и укажем их кратность. Методом «подбора» находим корень уравнения $k = 2$. Следовательно, одним из множителей, на которые разлагается многочлен, будет двучлен $k – 2$. Разделим многочлен $k^3 – 2k – 2 = 0$ на двучлен $k – 2$:

$$
\begin{array}{rl|l}
- & k^3 - 3k - 2 & k-2 \\
 & \underline{k^3 - 2k^2} & \overline{k^2+2k+1} \\
- & 2k^2 - 3k & \\
 & \underline{2k^2 - 4k} & \\
- & k - 2 & \\
 & \underline{k - 2} & \\
 & 0 &
\end{array}
$$

Таким образом, имеем $k^3 – 3k – 2 = (k – 2)(k^2+2k +1) = (k – 2)(k + 1)^2 = 0$, $k_1 = 2$, $r_1 = 1$; $k_2 = –1$, $r_2 = 2$. Первый корень – простой вещественный корень, второй имеет кратность, равную двум, следовательно, частные решения (см. табл. 5 п. 1 и 2): $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{-x}$, $y_3 = x \cdot e^{-x}$; общее решение:

$$y = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{-x} + C_3\, x \cdot e^{-x}.$$

Ответ: $y = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{-x} + C_3\, x \cdot e^{-x}$.

Пример 3. Найти частное решение уравнения

$$y'' + 4y' + 29y = 0 \quad \text{при} \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 15.$$

Решение. Корни характеристического уравнения $k^2 + 4k + 29 = 0$, комплексные сопряженные $–2 \pm 5i$. Согласно табл. 2 п.3 фундаментальная система решений уравнений $y_1 = e^{-2x}\cos 5x$, $y_2 = e^{-2x}\sin 5x$ и общее решение $y = e^{-2x}\left(C_1\cos 5x + C_2\sin 5x\right)$. Для определения частного решения в равенства

$$y = e^{-2x}\left(C_1\cos 5x + C_2\sin 5x\right) \text{ и}$$

$$y' = e^{-2x}\left(\left(5C_2 - 2C_1\right)\cos 5x - \left(2C_2 + 5C_1\right)\sin 5x\right)$$

подставим начальные условия. Получим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} 0 = C_1, \\ 15 = 5C_2 - 2C_1, \end{cases}$$

из которой определяем $C_1 = 0$, $C_2 = 3$. Подставив эти значения в общее решение, найдем частное: $y = 3 \cdot e^{-2x}\sin 5x$.

Ответ: $y = 3 \cdot e^{-2x}\sin 5x$.

2.4. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения *n*-го порядка с постоянными коэффициентами

Уравнение вида

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \qquad (123)$$

называется неоднородным линейным дифференциальным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами a_0, a_1, a_2, ..., a_n.

Для линейных неоднородных уравнений справедливы следующие теоремы, с помощью которых отыскиваются их общие решения.

Теорема 1. Структура общего решения уравнения (123) имеет вид

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n + \tilde{y},$$

где y_1, y_2, ..., y_n – фундаментальная система решений соответствующего однородного дифференциального уравнения; $\tilde{y}$ – какое-либо частное решение неоднородного дифференциального уравнения, т. е. $y = \bar{y} + \tilde{y}$, где $\bar{y}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения.

Теорема 2. Если $\tilde{y}_1$ – частное решение уравнения

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = f_1(x),$$

а $\tilde{y}_2$ – частное решение уравнения

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = f_2(x),$$

то $\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2$ есть частное решение уравнения

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = f_1(x) + f_2(x).$$

Решение однородного уравнения рассмотрено в предыдущем параграфе. Сформулируем теоремы, при помощи которых находятся частные решения линейных неоднородных уравнений для специальных правых частей.

Теорема 3. Если правая часть линейного уравнения с постоянными коэффициентами имеет вид $e^{\alpha x} P(x)$, где $P(x)$ – многочлен n-й степени и α не является корнем характеристического уравнения, то существует частное решение вида $\tilde{y} = e^{\alpha x} M(x)$, где $M(x)$ – многочлен степени n с неопределенными коэффициентами:

$$M(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n .$$

Если же α является корнем характеристического уравнения кратности r, то существует частное решение вида $\tilde{y} = x^r e^{\alpha x} M(x)$.

В частности, при $\alpha = 0$ правая часть – многочлен n-й степени, и если $\alpha = 0$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение $M(x)$ – также некоторый многочлен той же степени. Если же $\alpha = 0$ – корень кратности r, то частное решение имеет вид $x^r \cdot M(x)$.

Теорема 4. Если правая часть линейного уравнения с постоянными коэффициентами может быть представлена в виде

$$e^{\alpha x}\left(P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x\right), \tag{124}$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены (n – наибольшая из их степеней) и $z = \alpha + i\beta$ – не является корнем характеристического уравнения, то существует частное решение вида

$$\tilde{y} = e^{\alpha x}\left(M(x)\cos\beta x + N(x)\sin\beta x\right), \tag{125}$$

где

$$M(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n$$

и

$N(x) = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots + B_n x^n$ – многочлены с неопределенными коэффициентами степени n. Если же $\alpha + i\beta$ является корнем характеристического уравнения кратности r, то существует частное решение вида

$$\tilde{y} = x^r e^{\alpha x}\left(M(x)\cos\beta x + N(x)\sin\beta x\right).$$

Типовые примеры и их решения

Пример 1. Проинтегрировать уравнение

$$y''' - 3y' + 2y = e^{-x}\left(4x^2 + 4x - 10\right).$$

Решение. Решим сначала соответствующее однородное уравнение $y''' - 3y' + 2y = 0$. Составим характеристическое уравнение $k^3 - 3k + 2 = 0$. Корни характеристического уравнения $k_1 = -2$, $r_1 = 1$; $k_2 = 1$, $r_2 = 2$.

Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$\bar{y} = C_1 \cdot e^{-2x} + C_2 \cdot e^x + C_3 \cdot x \cdot e^x.$$

Правая часть $e^{-x}\left(4x^2 + 4x - 10\right)$ имеет вид $e^{\alpha x} P(x)$ (см. теорему 3), где $P(x) = 4x^2 + 4x - 10$ – многочлен второй степени и $\alpha = -1$ не является корнем характеристического уравнения. Поэтому частное решение уравнения ищем в виде $\tilde{y} = e^{-x}\left(A_0 + A_1 x + A_2 x^2\right)$,

$$\tilde{y}' = -e^{-x}\left(A_0 + A_1x + A_2x^2\right) +$$
$$+ e^{-x}\left(A_1 + 2A_2x\right) = e^{-x}\left(A_1 - A_0 + (2A_2 - A_1)x - A_2x^2\right),$$
$$\tilde{y}'' = -e^{-x}\left(A_1 - A_0 + (2A_2 - A_1)x - A_2x^2\right) + e^{-x}\left(2A_2 - A_1 - 2A_2x\right) =$$
$$= e^{-x}\left(A_0 - 2A_1 + 2A_2 + \left(A_1 - 4A_2\right)x + A_2x^2\right).$$
$$\tilde{y}''' = e^{-x}\left(-A_0 + 3A_1 - 6A_2 + (6A_2 - A_1)x - A_2x^2\right).$$

Подставим значения $\tilde{y}$, $\tilde{y}'$, $\tilde{y}'''$ в дифференциальное уравнение и сократим обе части на e^{-x}:

$$-A_0 + 3A_1 - 6A_2 + (6A_2 - A_1)x - A_2x^2 - 3\left(A_1 - A_0 + (2A_2 - A_1)x - A_2x^2\right) +$$
$$+ 2\left(A_0 + A_1x + A_2x^2\right) \equiv 4x^2 + 4x - 10$$

или

$$\left(4A_0 - 6A_2\right) + 4A_1x + 4A_2x^2 \equiv 4x^2 + 4x - 10\,.$$

Приравняв коэффициенты слева и справа при одинаковых степенях x, получим систему, из которой найдем коэффициенты A_0, A_1, A_2:

$$\begin{array}{c|l}
x^2 & \quad 4A_2 = 4 \quad \Rightarrow \; A_2 = 1, \\
x^1 & \quad 4A_1 = 4 \quad \Rightarrow \; A_1 = 1, \\
x^0 & 4A_0 - 6A_2 = -10 \Rightarrow A_0 = -1;
\end{array}$$

следовательно, $\tilde{y} = e^{-x}\left(-1 + x + x^2\right)$ и общее решение

$$y = \bar{y} + \tilde{y} = C_1e^{-2x} + C_2e^x + C_3x \cdot e^x + e^{-x}\left(-1 + x + x^2\right).$$

Ответ: $y = C_1e^{-2x} + C_2e^x + C_3x \cdot e^x + e^{-x}\left(-1 + x + x^2\right).$

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y'' + y = \sin x - 2 \cdot e^{-x}$.

Решение. Корни характеристического уравнения $k^2 + 1 = 0$ мнимые: $k_{1,2} = \pm i$. Общее решение уравнения $y'' + y = 0$ будет $\bar{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

Определим частное решение $\tilde{y}_1$ уравнения $y'' + y = \sin x$:

$\sin x = e^{0x}(0 \cos x + 1 \sin x)$; $\alpha = 0$; $\beta = 1$; $z = i$; $P(x) = 0$; $Q(x) = 1$.

Следовательно, $M(x) = A_0$, $N(x) = B_0$, а так как $z = k_1$, то $\tilde{y}_1$ ищем в виде

$$\tilde{y}_1 = x\,(A_0 \cos x + B_0 \sin x),$$
$$\tilde{y}_1' = A_0 \cos x + B_0 \sin x + x\,(-A_0 \sin x + B_0 \cos x),$$

$$\tilde{y}_1'' = -2A_0 \sin x + 2B_0 \cos x - x\,(A_0 \cos x + B_0 \sin x).$$

Из тождества, которое получится после подстановки $\tilde{y}_1, \tilde{y}_1''$ в уравнение $y'' + y = \sin x$, сравнивая коэффициенты при синусах и косинусах, определим A_0 и B_0:

$$-2A_0 \sin x + 2B_0 \cos x - x\left(A_0 \cos x + B_0 \sin x\right) + x\left(A_0 \cos x + B_0 \sin x\right) \equiv \sin x$$

$$\begin{array}{l|l} \cos x & 2B_0 = 0 \Rightarrow \quad B_0 = 0, \\ \sin x & -2A_0 = 1 \Rightarrow A_0 = -1/2; \end{array}$$

следовательно, $\tilde{y}_1 = -\dfrac{1}{2} x \cdot \cos x$. Определим частное решение $\tilde{y}_2$ уравнения $y'' + y = -2e^{-x}$, помня, что корни характеристического уравнения $k_{1,2} = \pm i$. В правой части имеем выражение вида $e^{\alpha x} P(x)$, где $P(x) = -2$ (многочлен нулевой степени); $\alpha = -1$, и так как α не является корнем характеристического уравнения, то частное решение ищем в виде

$$\tilde{y}_2 = A_0 e^{-x}, \qquad \tilde{y}_2' = -A_0 e^{-x}, \qquad \tilde{y}_2'' = A_0 e^{-x}.$$

Из тождества, полученного после подстановки $\tilde{y}_2$ и $\tilde{y}_2''$ в уравнение $y'' + y = -2e^{-x}$, определим коэффициент A_0, $A_0 e^{-x} + A_0 e^{-x} \equiv -2e^{-x}$ или $2A_0 e^{-x} \equiv -2e^{-x}$, откуда $A_0 = -1$; $\tilde{y}_2 = -e^{-x}$. Следовательно, в силу теоремы 2 общее решение данного уравнения будет $y = \bar{y} + \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2$, т. е. в данном случае $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \dfrac{1}{2} x \cdot \cos x - e^{-x}$.

Ответ: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \dfrac{1}{2} x \cdot \cos x - e^{-x}$.

2.5. Метод Лагранжа (метод вариации произвольных постоянных)

В предыдущем параграфе мы применяли метод подбора частного решения при интегрировании линейных неоднородных уравнений

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \qquad (126)$$

в случае, если функция $f(x)$, стоящая в правой части, может быть представлена в виде $e^{\alpha x} P(x)$; $e^{\alpha x}\left(P(x) \cos \beta x + Q(x) \sin \beta x\right)$ или состоит из суммы такого рода функций.

Во всех остальных случаях пользуются методом вариации произвольных постоянных.

Сущность этого метода заключается в том, что для соответствующего однородного уравнения

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

записывается общее решение

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_{n-1} y_{n-1} + C_n y_n,$$

где C_1, C_2, ..., C_n рассматриваются как функции от x. Подбирают их так, чтобы

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 + \ldots + C_{n-1}(x) y_{n-1} + C_n(x) y_n$$

было решением уравнения (126). Неизвестные функции $C_1(x)$, $C_2(x)$, ..., $C_n(x)$ определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 + \ldots + C_n'(x) y_n = 0, \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' + \ldots + C_n'(x) y_n' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'(x) y_1^{(n-1)} + C_2'(x) y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x) y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases} \tag{127}$$

Для уравнения второго порядка $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$ данная система имеет вид

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0, \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = f(x). \end{cases} \tag{128}$$

Типовые примеры и их решения

Пример 1. Решить уравнение $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x$.

Решение. Корни характеристического уравнения $k^2 + 4k + 4 = 0$: $k_1 = -2$, $r_1 = 2$, следовательно, общее решение однородного уравнения есть

$$\bar{y} = C_1 \cdot e^{-2x} + C_2 \cdot x \cdot e^{-2x}.$$

Общее решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y = C_1(x) \cdot e^{-2x} + C_2(x) \cdot x \cdot e^{-2x}.$$

Так как для данного примера $y_1 = e^{-2x}$, $y_2 = x \cdot e^{-2x}$, $y_1' = -2 \cdot e^{-2x}$, $y_2' = (1 - 2x) \cdot e^{-2x}$, то согласно (128) имеем систему

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot e^{-2x}+C_2'(x)\cdot x\cdot e^{-2x}=0, \\ -C_1'(x)\cdot 2\cdot e^{-2x}+C_2'(x)\cdot(1-2x)\cdot e^{-2x}=e^{-2x}\cdot \ln x. \end{cases}$$

Из этой системы найдем функции $C_1'(x)$, $C_2'(x)$, предварительно сократив левую и правую части уравнений на e^{-2x}:

$$C_1'(x)=\frac{\begin{vmatrix} 0 & x \\ \ln x & 1-2x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x \\ -2 & 1-2x \end{vmatrix}}=\frac{-x\ln x}{1-2x+2x}=-x\ln x,$$

$$C_2'(x)=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & \ln x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x \\ -2 & 1-2x \end{vmatrix}}=\frac{\ln x}{1}=\ln x,$$

$$C_1(x)=-\int x\cdot \ln x\cdot dx=\begin{vmatrix} U=\ln x; & dU=\dfrac{dx}{x} \\ dV=x\cdot dx; & V=\dfrac{x^2}{2} \end{vmatrix}=$$

$$=-\frac{x^2\cdot \ln x}{2}+\int\frac{x^2dx}{2x}==-\frac{x^2\ln x}{2}+\frac{x^2}{4}+C_1,$$

$$C_2(x)=\int \ln x\cdot dx=\begin{vmatrix} U=\ln x; & dU=\dfrac{dx}{x} \\ dV=dx; & V=x \end{vmatrix}=x\cdot \ln x-\int\frac{x\cdot dx}{x}=x\cdot \ln x-x+C_2.$$

Подставив найденные функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$, получим общее решение данного дифференциального уравнения:

$$y=\left(-\frac{x^2\ln x}{2}+\frac{x^2}{4}+C_1\right)\cdot e^{-2x}+\left(x\cdot \ln x-x+C_2\right)\cdot x\cdot e^{-2x}.$$

Ответ: $y=\left(\dfrac{x^2\ln x}{2}-\dfrac{3x^2}{4}+C_1+C_2x\right)\cdot e^{-2x}$.

2.6. Системы дифференциальных уравнений

Нормальная система n-го порядка обыкновенных дифференциальных уравнений имеет вид

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, ..., x_n), \\
\dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, ..., x_n), \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, ..., x_n),
\end{cases}
\tag{129}
$$

где t – независимая переменная; $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$ – неизвестные (искомые) функции; f_1, f_2, ..., f_n – заданные функции.

Метод исключения неизвестных состоит в том, что данная система приводится к одному дифференциальному уравнению n-го порядка с одной неизвестной функцией. Для этого последовательно дифференцируют одно из уравнений системы и исключают все неизвестные функции, кроме одной.

Линейная однородная система n-го порядка с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n, \\
\dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n,
\end{cases}
$$

где $a_{ij} = \mathrm{const}$; $a_{ij} \in R$; $x_i(t)$ – неизвестные функции.

Эту систему можно записать в виде одного матричного дифференциального уравнения

$$\frac{dX}{dt} = AX.$$

Здесь

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ..... & ..... & ... & .... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad
X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, \quad
\frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \dfrac{dx_2}{dt} \\ .... \\ \dfrac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}.
$$

При решении системы методом Эйлера частные решения системы ищутся в виде $X = V \cdot e^{kt}$, где $V \neq 0$ – матрица-столбец, k – число.

Если корни $k_1, k_2, ..., k_n$ характеристического уравнения $\det(A - kE) = 0$ – действительны и различны, общее решение системы

$$X = C_1 V_1 e^{k_1 t} + C_2 V_2 e^{k_2 t} + \ldots + C_n V_n e^{k_n t},$$

где $C_1, C_2, ..., C_n$ – произвольные постоянные; V_j – матрица-столбец, соответствующая числу k_j, т. е. для нее выполняется равенство $(A - k_j E) V_j = 0$; E – единичная матрица.

Замечание. Если $k_m, \bar{k}_m$ – пара простых комплексных сопряженных корней характеристического уравнения, то им соответствует два действительных частных решения:

$$\mathrm{Re}\left(V_m e^{k_m t}\right);$$
$$\mathrm{Im}\left(V_m e^{k_m t}\right).$$

Типовые примеры и их решения

Пример 1. Методом исключения найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y + \cos t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 2\sin t. \end{cases}$$

Решение. Применяя метод исключения, выразим из первого уравнения y через x и t:

$$y = \frac{dx}{dt} - 2x - \cos t.$$

После подстановки этого выражения во второе уравнение будем иметь

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + x = \sin t.$$

Следовательно, для нахождения неизвестной функции x получено дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Используя методы, находим его общее решение:

$$x = \left(C_1 + C_2 t\right) \cdot e^t + \frac{1}{2}\cos t.$$

А так как y было выражено через x, то найдем и вторую функцию системы

$$y = \left(C_2(1-t) - C_1\right)\cdot e^t - 2\cos t - \frac{1}{2}\sin t.$$

В результате получено общее решение данной системы.

Ответ: $x = \left(C_1 + C_2 t\right)\cdot e^t + \frac{1}{2}\cos t.$

$$y = \left(C_2(1-t) - C_1\right)\cdot e^t - 2\cos t - \frac{1}{2}\sin t.$$

Пример 2. Методом Эйлера найти общее решение системы и выделить частное решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y; \end{cases} \qquad x(0) = 1, \quad y(0) = 3.$$

Решение. Применяя метод Эйлера, составим характеристическое уравнение матрицы системы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-k & 1 \\ 1 & 2-k \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad k^2 - 4k + 3 = 0.$$

Его корни $k_1 = 3$, $k_2 = 1$.

Находим матрицу-столбец V_1, соответствующую корню $k_1 = 3$:

$$V_1 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 2-3 & 1 \\ 1 & 2-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} -v_1 + v_2 = 0, \\ v_1 - v_2 = 0. \end{cases}$$

Отсюда $v_2 = v_1$ $(v_1 \neq 0)$.

Полагая $v_1 = 1$, получим $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Аналогично находим матрицу-столбец $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ для корня $k_2 = 1$.

Общее решение системы

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 V_1 e^{k_1 t} + C_2 V_2 e^{k_2 t} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = C_1 e^{3t} + C_2 e^t, \\ y = C_1 e^{3t} - C_2 e^t. \end{cases}$$

Используя начальные условия, получим для определения постоянных C_1 и C_2 уравнения

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2, \\ 3 = C_1 - C_2, \end{cases}$$

откуда $C_1 = 2$, $C_2 = -1$.

Таким образом, решением данной задачи Коши являются функции

$$x = 2 \cdot e^{3t} - e^t; \qquad y = 2 \cdot e^{3t} + e^t.$$

Ответ: общее решение $\begin{cases} x = C_1 e^{3t} + C_2 e^t, \\ y = C_1 e^{3t} - C_2 e^t, \end{cases}$

частное решение $\begin{cases} x = 2 \cdot e^{3t} - e^t, \\ y = 2 \cdot e^{3t} + e^t. \end{cases}$

Пример 3. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -7x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 5y. \end{cases}$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -7-k & 1 \\ -2 & -5-k \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad k^2 + 12k + 37 = 0$$

имеет корни $k_1 = -6 + i$, $k_2 = -6 - i$. Находим матрицу-столбец $V_1 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ для k_1:

$$\begin{cases} (-1-i) \cdot v_1 + v_2 = 0, \\ -2 \cdot v_1 + (1-i) \cdot v_2 = 0. \end{cases}$$

Два уравнения этой системы сводятся к одному уравнению $(-1-i) \cdot v_1 + v_2 = 0,$ откуда $v_2 = (1+i) \cdot v_1 \quad (v_1 \neq 0)$. Полагая $v_1 = 1$, получим

$$v_2 = 1 + i \quad \Rightarrow \quad V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad V_1 \cdot e^{k_1 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} \cdot e^{(-6+i)\cdot t} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} \cdot e^{-6t}(\cos t + i\sin t) = \begin{pmatrix} e^{-6t}(\cos t + i\sin t) \\ e^{-6t}((\cos t - \sin t) + i(\cos t + \sin t)) \end{pmatrix}.$$

Согласно замечанию, два частных решения исходной системы имеют вид

$$\mathrm{Re}\left(V_1 \cdot e^{k_1 t}\right) = \begin{pmatrix} e^{-6t}\cos t \\ e^{-6t}(\cos t - \sin t) \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{Im}\left(V_1 \cdot e^{k_1 t}\right) = \begin{pmatrix} e^{-6t}\sin t \\ e^{-6t}(\cos t + \sin t) \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} e^{-6t}\cos t \\ e^{-6t}(\cos t - \sin t) \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{-6t}\sin t \\ e^{-6t}(\cos t + \sin t) \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{cases} x = C_1 e^{-6t}\cos t + C_2 e^{-6t}\sin t, \\ y = C_1 e^{-6t}(\cos t - \sin t) + C_2 e^{-6t}(\cos t + \sin t). \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = e^{-6t}(C_1\cos t + C_2\sin t), \\ y = e^{-6t}((C_2 + C_1)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t). \end{cases}$